К проблеме узкой предварительной локализации отрезка интегральной кривой

Меньшиков Г.Г.

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
miksha@pobox.spbu.ru

Аннотация Предмет доклада назван в заголовке применительно к локализующему поиску решения задачи Коши для ОДУ $y' = f(x,\ y), \quad y(x_0) = y_0$. Компьютерное решение этой задачи предусматривает нахождение локализатора $Y(x)$ искомого решения $y(x)$ – полосы, образованной интервальными значениями и содержащей отрезок интегральной кривой. Имеем в виду тот распространённый образ действий (как для традиционного, так и для интервального исполнения), когда промежуток изменения x узловыми точками x_k разбивается на шаги интегрирования $X_k = [x_k,\ x_{k+1}]$, причём по-очереди вычисляются образы соответствующих отрезков интегральной кривой. Тогда процесс численного интегрирования состоит из последовательности однотипных шагов. Для простоты предположим, что значения x_k формируются точно, что $x_k < x_{k+1}$, а интегрируется одно уравнение первого порядка.
В свою очередь алгоритмику шага можно разделить на *предварительный*, *уточняющий* и, возможно, *контролирующий* этапы. Особую важность представляет предварительный этап, поскольку в его задачи входит выяснение продолжимости решения $y(x)$ на отрезок X_k. Кроме того, важно, что предварительный локализатор (ПЛ) вида прямоугольника в плоскости $(x,\ y)$ с основанием X_k) формируется числами $\underline{Y^*}$ и $\overline{Y^*}$, т.е. минорантой и мажорантой решения на этом отрезке. Он используется на уточняющей стадии (например, на основе формулы Тэйлора) и поэтому влияет на достигаемое уточнение.
В докладе рассматриваются способы получения узкого ПЛ.

1 Введение

На первый взгляд, лучше всего, если ПЛ оказывается равным

$$y(X_k) = \left[\min_{X_k} y(x), \quad \max_{X_k} y(x)\right].$$

Но точное равенство, как правило, невозможно. Всё-таки, оно служит идеалом, к которому можно стремиться при рассмотрении конкретных алгоритмов.

В выпуске 9 конспекта лекций [1] описан $\Delta-$алгоритм получения ПЛ. Суть его такова. Рассматриваем два процесса интегрирования: умозрительный процесс, дающий решение $y(x)$ и реальный локализующий, на компьютере, формирующий локализатор $Y(x)$. Пусть оба процесса пришли к точке x_k. Первый процесс пришёл со значением $y_k = y(x_k)$, второй с значением в виде отрезка $Y_k = Y(x_k)$. Благодаря особенностям алгоритмики локализующего интегрирования, гарантировано включение $y_k \in Y_k$.

Так вот $\Delta-$алгоритм задаёт интервальный итерационный процесс начальным значением $Y^0 = Y_k$ и уравнением

$$Y^{m+1} = Y_k + \Delta x[0,\ 1] \cdot F(X_k,\ Y^m), \tag{1}$$

где обозначено $F(X,Y)$ – интервальное расширение правой части уравнения (1), $\Delta x = x_{k+1} - x_k$. Как доказано в п. 1241 конспекта [1], формируется антивложенная последовательность (АП) $\{Y^m\}$, если по второму аргументу функция $F(X_k,\ Y)$ монотонна по включению.

В п. 1131 доказывается, что в машинном исполнении ограниченная АП стабилизируется, т.е. $Y^{m+1} = Y^m = Y^*$ при некотором m. В п. 1242 доказывается, что в случае стабилизации решение $y(x)$ продолжимо вплоть до точки x_{k+1}, удовлетворяя включению $y(x) \in Y^*$ в пределах отрезка X_k.

После получения ПЛ выполняется уточнение. Вычисляется локализатор решения в точке x_{k+1} в надежде, что он окажется существенно более узким, чем Y^*. Так, локализатор по методу парабол (получаемый разложением Тэйлора с квадратичным остатком) имеет вид:

$$Y(x_{k+1}) = Y_k + \Delta x F_k + \frac{(\Delta x)^2}{2}\Big(F_x(X_k,\ Y^*) + F_y(X_k,\ Y^*)F(X_k, Y^*)\Big),$$

где через $F_x(X_k,\ Y^*)$ и $F_y(X_k,\ Y^*)$ обозначены локализаторы для $f_x(x,\ y)$ и $f_y(x,\ y)$ в прямоугольнике $(X_k,\ Y^*)$, а $F_k = F(x_k,\ Y_k)$.

Перейдём непосредственно к проблеме узкой ПЛ.

Начнём с примера 1244.1 из [1], где взят случай, когда после благополучного окончания рассмотренного этапа ПЛ оказалось:

$$F(X_k,\ Y^*) \not\ni 0. \tag{2}$$

Этим соотношением гарантируется монотонность решений в прямоугольнике $(X_k,\ Y^*)$. Следует заметить, что случай этот — довольно частый в практике численного интегрирования по той причине, что шаги интегрирования имеют тенденцию к измельчению, изменение же знака правой части – явление относительно редкое. Благодаря монотонности, для локализатора решения $y(x)$ на отрезке X_k можно указать иное значение, помимо Y^*. Именно, $y(X_k)$ формируется концевыми значениями $y(x_k)$ и $y(x_{k+1})$. Поэтому можно принять это иное значение локализатора Y^{**} в виде интервальной оболочки отрезков Y_k и Y_{k+1}, где Y_{k+1} подсчитан посредством уточнения первичного локализатора Y^*. Тогда можно принять скорректированный предварительный локализатор равным

$$Y^*_{\text{скорр}} = Y^* \cap Y^{**}.$$

Если Y_{k+1} как отображение от Y^* обладает монотонностью по включению, то более узкий первичный локализатор позволит в результате нового уточнения получить и более узкий Y^*. Это даст возможность получить ещё более узкий $Y(x_{k+1})$. Возникает сужающий итерационный процесс. Этот процесс образует тандем с предшествующим расширяющим. Создавшееся положение подобно тому, что описано в п. 1244.

Однако, всё это было описано в выпуске 9 наших лекций [1].

2 Основные результаты

Что нового мы собираемся предложить?

1. Пока не будем опираться на предположение (2). Предположим, что, помимо формы $F(X_k,\ Y^*)$, локализатор правой части дифференциального уравнения ищется по формуле конечных приращений:

$$f(x,\ y(x)) = f(x_k,\ y_k) + \Big(f\big(x,\ y(x)\big) - f(x_k,\ y_k)\Big) =$$
$$= f(x_k,\ y_k) + (x - x_k)\frac{d}{dx} f\big(x,\ y(x)\big)\Big|_{x\,=\,\theta},$$

где $x \in X_k$, $\theta \in [x_k,\ x]$. Вычисляя производную, переходя к интервальной арифметике и заменяя производную её локализатором, а число $f(x_k,\ y_k)$ его локализатором $F(x_k,\ Y_k)$, получаем:

$$f(x,\ y(x)) \in F(x_k,\ Y_k) + (X - x_k)\big(F_x(X_k,\ Y^*) + F_y(X_k,\ Y^*)F(X_k, Y^*)\big).$$

Теперь ясно, что правая часть служит локализатором для левой. Здесь $X_k - x_k = \varDelta x[0, 1]$. Поскольку пересечение локализаторов образует локализатор, то таковым следует признать

$$F(X_k,\ Y^*) \cap \Big(F(x_k,\ Y_k) + \varDelta x[0, 1]\big(F_x({}_kX,\ Y^*) + F_y(X_k,\ Y^*)F(X_k, Y^*)\big)\Big).$$

После этого для нахождения локализаторов можно ввести интервальный итерационный сужающий процесс:

$$F^{m+1}(X_k,\ Y^*) = F^m(X_k,\ Y^*) \cap$$
$$\cap\Big(F(x_k,\ Y_k) + \varDelta x[0, 1]\big(F_x(X_k,\ Y^*) + F_y(X_k,\ Y^*)F^m(X_k, Y^*)\big)\Big), \tag{3}$$

где определим начальное значение как результат первичной предварительной локализации: $F^0(X_k,\ Y^*) = F(X_k,\ Y^*)$.

2. Теперь можно было бы обсудить очевидную возможность совмещения изложенных соображений с привлечением постоянства знака $f(x,\ y)$, т.е. с условием (2).

3. Можно обсудить перспективы применения $\vee$-*подобных* алгоритмов, свободных от требования монотонности по включению.

Эта идея, изложена в п. 1243 книги [1].

Но недостаток места и времени препятствует этим расширениям доклада.

Список литературы

1. Меньшиков Г.Г. Элементы локализующего интегрирования дифференциальных уравнений // *Интервальный анализ и методы вычислений*. Конспект лекций. Выпуск 9. Издание второе. – Санкт-Петербург: ООП НИИ Химии СПбГУ, 2001.