# Интервальная техника в задаче параметрического оценивания

С.А. Назин, Б.Т. Поляк*

*Институт проблем управления РАН*
*Москва 117997, ул. Профсоюзная, 65*
{snazin,boris}@ipu.rssi.ru

**Аннотация** Рассматривается задача параметрического оценивания для линейной модели при наличии интервальной неопределенности. Строится алгоритм оптимального оценивания на основе интервального решения линейной интервальной системы алгебраических уравнений.

## 1 Введение и постановка задачи

Детерминированный подход к описанию неопределенностей в динамических системах хорошо известен в теории управления, где ошибки в модели предполагаются неизвестными, но ограниченными [1]. Интервальные ограничения при этом являются наиболее естественными. В рамках интервального анализа рассматривается множество различных задач с таким типом неопределенности [2,3,4]. Однако интервальные ограничения часто приводят к серьезным трудностям при решении, в частности, различных задач оценивания. Тем не менее, дальнейший анализ и развитие интервальной техники является здесь весьма перспективным.

В данной работе рассматривается проблема нахождения интервального решения линейной интервальной системы алгебраических уравнений применительно к задаче параметрического оценивания в линейных динамических системах при наличии интервальной неопределенности. Пусть задана линейная модель объекта

$$y = (A + \Delta A)\,x + w, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор параметров объекта, $y \in \mathbb{R}^m$ – известный вектор наблюдений, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – номинальная матрица системы, $\Delta A$ и $w$ – интервальная матричная неопределенность в описании модели и вектор интервальных ошибок измерений соответственно. Будем полагать, что эти возмущения в системе удовлетворяют простым интервальным ограничениям:

$$\|\Delta A\|_\infty \le \varepsilon, \quad \|w\|_\infty \le \delta. \tag{2}$$

Здесь $\|.\|_\infty$ — $\infty$-норма матрицы или вектора, равная максимальному модулю значения элементов. Тогда все вектора $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие (1) при данных ограничениях на неопределенность, образуют множество

$$X_m = \{\, x \mid \; y = (A + \Delta A)\,x + w,\; \|\Delta A\|_\infty \le \varepsilon,\; \|w\|_\infty \le \delta \}\,. \tag{3}$$

Индекс $m$ означает количество измерений. Ставится задача оценить вектор параметров объекта по наблюдениям, то есть найти минимальный интервальный вектор $\mathbf{X} = \{(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)^T \mid \forall i = 1, ..., n \;\underline{x_i} \le x_i \le \overline{x_i}\;\}$, содержащий $X_m$. Можно предполагать также, что априорно $x \in \mathbf{X}_0$, и по полученным измерениям пытаться уточнить эту начальную оценку.

Заметим, что в задачах оценивания число параметров обычно невелико ($n < 15$), в то время как количество измерений может быть большим ($m \gg n$).

* Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант RFBR–02-01-00127) и INTAS (грант YSF 2002-181).

## 2 Случай скалярных измерений

Рассмотрим случай наличия одного измерения в системе $y = (a + \Delta a, x) + w$. Тогда множество $X_m$ при $m = 1$ перепишется в явном виде

$$X_1 = \{x \mid \ |(a,x) - y| \le \varepsilon \|x\|_1 + \delta\}\,, \tag{4}$$

где $\|x\|_1 = \sum |x_i|$. Это множество представляет собой “расширенную” полосу в $\mathbb{R}^n$, которая в каждом ортанте есть выпуклое множество. Пусть также априорно известно, что $x \in \mathbf{X}_0$. В этом случае $x \in X_1 \bigcap \mathbf{X}_0$, и задача состоит в нахождении минимального $\mathbf{X}$, содержащего это пересечение.

Решение может быть получено путем линейного программирования для каждого ортанта. Действительно, фиксируя $j$-й ортант $E^j$ в $\mathbb{R}^n$, мы однозначно определим вектор $\nu = \operatorname{sign} x$; его компоненты $\nu_i$ равны $\pm 1$. Поэтому множество

$$X_1 \bigcap E^j = \left\{x \mid |(a,x) - y| \le \varepsilon \sum x_i \nu_i + \delta\right\}$$

является выпуклым. Если $e_k$ — $k$-ый орт в $\mathbb{R}^n$, то решая задачу минимизации/максимизации линейной функции при линейных ограничениях,

$$\underline{x_k^j} = \arg \min_{x \in \mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^j} (e_k, x), \qquad \overline{x_k^j} = \arg \max_{x \in \mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^j} (e_k, x), \tag{5}$$

получим $k$-ю нижнюю/верхнюю интервальную границу. Таким образом, для каждого из $2^n$ ортантов отдельно находится интервальная оценка $\mathbf{X}^j$, $j = 1, ..., 2^n$, содержащая $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^j$. Окончательно, интервальный вектор $\mathbf{X}$, содержащий объединение $\mathbf{X}^j$, находится тривиально путем выбора соответствующих минимальных и максимальных компонент интервальных векторов.

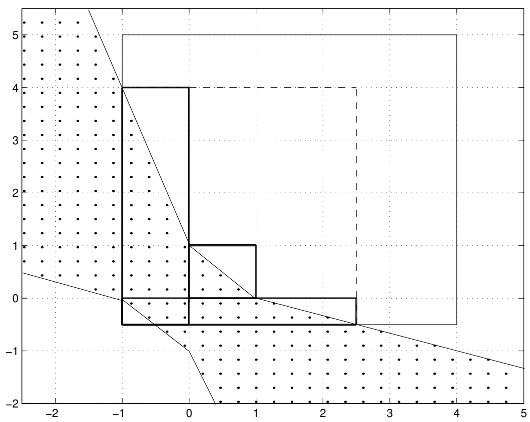


**Рис. 1.** Иллюстрация к Примеру 1.

При наличии нескольких измерений можно последовательно рассматривать скалярные уравнения в (1). Однако описанный алгоритм довольно громоздкий с вычислительной точки зрения, и его рекуррентное применение целесообразно только при малом количестве измерений. В противном случае необходимо использовать более экономичные способы, например, вычисляя интервальное решение линейной интервальной системы алгебраических уравнений.

**Пример 1**: Пусть

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [-1,\ 4] \\ [-0.5,\ 5] \end{pmatrix},$$

а также $y = 0$, $A = (1, 1)$, $\varepsilon = \delta = 0.5$. Множество $X_1$ показано на рисунке штриховкой. Для каждого ортанта найдены интервальные оценки $\mathbf{X}^j$ (жирная линия). Тогда

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [-1,\ 2.5] \\ [-0.5,\ 4] \end{pmatrix}.$$

## 3 Решение линейной интервальной системы

Очевидным образом уравнение (1) при ограничениях (2) можно переписать в виде линейной интервальной системы

$$(A + \Delta A)\,x = b + \Delta b, \tag{6}$$

в которой $b = y$, а $\Delta b = -w$ ($\|\Delta b\|_\infty \le \delta$), и к решению которой свелась исходная задача. На данном этапе положим $m = n$, то есть число уравнений в (6) равно числу неизвестных. Пусть также матрица $A$ является невырожденной.

Множество $X$ всех допустимых векторов $x$ из (6) называется множеством решений интервальной системы. Его детальное описание было приведено в [5]. Множество решений интервальной системы есть многогранник (в общем случае невыпуклый)

$$X = \{\, x \mid \;\; \|Ax - b\|_\infty \le \varepsilon \|x\|_1 + \delta \,\}\,. \tag{7}$$

Он является ограниченным, если выполнено условие регулярности (см. [6]) $\varepsilon < \vartheta(A) = 1/\|A^{-1}\|_{\infty,1}$, то есть интервальные матричные возмущения в системе (6) меньше, чем радиус невырожденности для интервальной матричной неопределенности. Здесь матричная норма

$$\|A\|_{\infty,1} = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \sum |a_i^T x|,$$

где $a_i$ — $i$-я строка матрицы $A$.

Интервальным же решением системы (6) будет любой интервальный вектор $\mathbf{X}_n \supseteq X_n$. Будем интересоваться только наименьшим интервальным решением $\mathbf{X}_n$. Однако его поиск является NP-сложной задачей (см. [7]). Но при этом удается обойтись без численного решения задач линейного программирования, а решать каждый раз только одно скалярное уравнение (см. [8,9]), что существенно уменьшает вычислительную трудность алгоритма. Приведем далее из [9] описание алгоритма нахождения интервального решения системы (6).

Обозначим $S = \{\ s \mid \forall i\ |s_i| = 1\ \}$. Рассмотрим скалярное уравнение относительно $\tau$

$$\tau = \varepsilon \|A^{-1}(\tau s + b)\|_1 + \delta, \tag{8}$$

где вектор $s \in S$. Если $\varepsilon < \vartheta(A)$, то для фиксированного $s \in S$ это уравнение имеет единственное решение на интервале $(0, +\infty)$.

**Лемма 1** (см. [9]): Пусть множество $X_n$ ограничено ($\varepsilon < \vartheta(A)$) и Conv $X_n$ — его выпуклая оболочка. Тогда Conv $X_n$ имеет $2^n$ вершин, каждая из которых может быть найдена решением уравнения для своего фиксированного вектора $s \in S$. Если $\tau^*$ — решение (8), то

$$x^* = A^{-1}(\tau^* s + b)$$

будет вершиной Conv $X_n$.

Располагая всем набором таких вершин, очевидным образом можно найти интервальное решение $\mathbf{X}_n$ системы (6) посредством минимизации и максимизации соответствующих векторных компонент.

## 4 Алгоритм

В случае большого числа уравнений ($m > n$) в исходной модели (1) для нахождения интервальной оценки предлагается применить следующую схему. Полагаем изначально, что все уравнения в невозмущенной системе (то есть в системе $y = Ax$) линейно независимы. Пусть известно также, что $x \in \mathbf{X}_0$. Тогда

- Берем первые $n$ уравнений, и находим интервальный вектор $\mathbf{X}^1$, который содержит $\mathbf{X}_0 \bigcap X_n^1$, используя алгоритм пункта 3.
- Если $m \ge 2n$, то берем следующие $n$ уравнений, и находим $\mathbf{X}^2 \supseteq \mathbf{X}^1 \bigcap X_n^2$, и т.д.
- Если на $k$-м шаге получилось $m < kn$, то оставшиеся уравнения учитываем каждое по-отдельности по алгоритму пункта 2.

В итоге очевидно, что будет найдена оптимальная интервальная оценка вектора параметров $x$ исходной системы (1).

## 5 Заключение

В работе рассмотрена задача параметрического оценивания при наличии неопределенности в описании объекта, когда ошибки стеснены интервальными ограничениями. Приведен алгоритм нахождения минимальной интервальной оценки для вектора параметров $x \in \mathbb{R}^n$ системы, основанный на получении интервального решения линейной интервальной системы алгебраических уравнений с квадратной матрицей. При этом каждое такое интервальное решение получается путем решения $2^n$ скалярных уравнений. Был проведен счет, который подтверждает эффективную работу алгоритма при небольших размерностях вектора параметров системы $n$ ($n < 15$) и большом числе измерений ($m \sim 100$).

## Список литературы


1. Schweppe F. *Uncertain dynamic systems.* – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1973.
2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.
3. Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
4. Шарый С.П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии.* – 1999. – Т. 4, №4. – P. 82 – 110.
5. Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // *Numerische Mathematik.* – 1964. — Vol. 6. – P. 405 – 409.
6. Polyak B.T. Robust linear algebra and robust aperiodicity // *Directions in Mathematical System Theory and Optimization*, A. Rantzer, C. Byrnes, eds. – Stockholm: Springer, 2003. – P. 249 – 260.
7. Kreinovich V., Lakeev A.V., Noskov S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computationa.* – 1993. – №1. – P. 6 – 14.
8. Rohn J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and Its Applications.* – 1989. – Vol. 126. – P. 39 – 78.
9. Polyak B.T., Nazin S.A. Interval solutions for interval algebraic equations // Proc. 4th IMACS Symp. on Math. Modelling. Vienna, Austria, 2003. – P. 973 – 980.