Новые алгоритмы интервального вычисления определенных интегралов

М.Б. Базаров*

Аннотация. В работе предлагаются два интервальных алгоритма вычисления определенных интегралов. Первый предлагаемый алгоритм построен на основе обобщенной формулы трапеций. Второй алгоритм является интервальным аналогом квадратурной формулы Гаусса–Кристоффеля. Далее, представлены методики для повышения точности интервального вычисления по предложенным алгоритмам.

В данной работе предлагаются два алгоритма нахождения интервального значения интеграла вида

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx, \qquad \rho(x) > 0, \tag{1}$$

основанные на полиномиальной аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$. Здесь функции $f(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные до s-го порядка – $f^{(s)}(x) \in C^{(s)}[a,b]$ на отрезке $[a,b]$, а весовая функция непрерывна на интервале (a,b).

Кратко напомним способ получения некоторых квадратурных формул [1, 2], так как ряд параметров, определяемых этими формулами, используются при построении соответствующих интервальных формул.

При численном интегрировании обычно заменяют $f(x)$ на такую аппроксимирующую функцию $\varphi(x,a) \approx f(x)$, чтобы интеграл от нее легко вычислялся в элементарных функциях.

Чаще всего $f(x)$ заменяют некоторым обобщенным интерполяционным многочленом

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\varphi_i(x) + r(x), \tag{2}$$

где $r(x)$ – остаточный член аппроксимации. Подставляя (2) в (1), получим формулу численного интегрирования (квадратурную формулу):

$$F = \sum\nolimits_{i=0}^{N} c_i f(x_i) + R, \qquad c_i = \int_a^b \varphi_i(x)\rho(x)\,dx, \quad R = \int_a^b r(x)\rho(x)\,dx, \tag{3}$$

где величины x_i называют узлами, c_i – весами, а R – погрешностью или остаточным членом формулы. Интеграл заменяется суммой, похожей на интегральную сумму, причем узлы и коэффициенты этой суммы не зависят от функции $f(x)$.

*Навоийский государственный горный институт, Навои, Узбекистан.

Как показано в [2], квадратурные формулы (3) неустойчивы относительно ошибок округления. Эти ошибки носят случайный характер, но в среднем растут как $\sqrt{N}$ при увеличении числа узлов. Использование аппарата интервального анализа при нахождении значений определенных интегралов устраняет неустойчивость при вычислениях.

Теперь перейдем к краткому описанию предлагаемых интервальных алгоритмов.

Первый предлагаемый алгоритм построен на основе обобщенной формулы трапеций, а второй является интервальным аналогом квадратурной формулы Гаусса–Кристоффеля.

Будем считать, что основные обозначения, понятия и факты интервального анализа известны [3, 4].

Пусть функция $f(x)$, $x \in [a,b]$, имеет интервальное расширение $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, заданное при $\boldsymbol{X} \subset [a,b]$, монотонное по включению и удовлетворяет условию типа Липшица, т. е. $\mathrm{wid}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})) \leq l \cdot \mathrm{wid}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X} \subset [a,b]$, где $l > 0$ – некоторая постоянная. Пусть, кроме того, функция $f^{(s)}(x)$ имеет интервальное расширение $F^{(s)}(X)$, определенное при $\boldsymbol{X} \subset [a,b]$ и монотонное по включению.

Как известно, для функций малой гладкости, имеющих лишь первую и вторую производные, квадратурные формулы высокого порядка точности практического значения не имеют.

Рассмотрим обобщенную формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + h\sum_{i=1}^{N-1} f_i - \frac{h^2}{12}f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b).$$

В работе показано, что если $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ и $F^{(s)}(X)$ – интервальные расширения соответствующих функций $f(x)$ и$f^{(s)}$, то для приближенного значения интеграла (1) справедливо включение

$$\int_a^b f(x)\,dx \in h\sum_{1}^{N-1} F(X_i) + \frac{h}{2}\big(F(X_0) + F(X_N)\big) - \frac{h^2}{12}F''([a,b]), \quad \xi \in (a,b). \tag{4}$$

Для повышения точности получаемых интервалов в работе использована методика, которую можно назвать интервальным аналогом правила Рунге.

Параметрами формулы интегрирования (3) являются узлы и веса. Однако, строя формулы (4), мы заранее задавали узлы и по ним находили веса.

Теперь рассмотрим интервальный аналог формулы Гаусса–Кристоффеля. Формула Гаусса–Кристоффеля, которая называется формулой наивысшей алгебраической точности, имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{1}^{N} c_{i,N} f(x_{i,N}) + \frac{(b-a)^{2N+1}(N!)^4}{(2N+1)((2N)!)^2} f^{(2N)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

В работе доказано включение

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \sum_{1}^{N} \boldsymbol{C}_{i,N}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_{i,N}) + \frac{(b-a)^{2N+1}(N!)^4}{(2N+1)((2N)!)^2}\boldsymbol{F}^{(2N)}([a,b]). \tag{5}$$

Далее, для повышения точности получаемых интервалов по формуле (5) использована методика, которая является улучшенным вариантом локального адаптированного алгоритма, приведенного в [5].

Кроме того, в работе представлены результаты численных экспериментов, выполненных с предложенными алгоритмами. Алгоритмы были реализованы на языке PASCAL XSC.

Список литературы

[1] Бахвалов Н.С. Численные методы. Ч. 1. – М.: Наука, 1975. – 631 с.

[2] Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

[3] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 223 с.

[4] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., van Hentenruck P. Standardized notation in interval analysis // Reliable Computing. – Submitted.

[5] Kramer, W., Wander, S. Two adaptive Gauss–Leg ender type algorithms for the verified computation of definite integrals // Reliable Computing. – 1996. – Vol. 2, № 3. – P. 241–253.