ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ
МКВМ-2004 РАБОЧИЕ СОВЕЩАНИЯ С. 171–178

Интервальный метод Хаусхолдера для комплексных линейных систем

Б.С. Джаныбеков, С.П. Шарый*

Аннотация. Рассматривается метод Хаусхолдера для внешнего оценивания множеств решений систем линейных алгебраических уравнений с комплексными интервальными параметрами. Для этого используется нормализованное приведение матрицы системы к верхней "треугольной" форме с помощью последовательности ортогональных преобразований.

Введение

Исследуется интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где элементами $n \times n$-матрицы $\boldsymbol{A}$ и n-вектора правой части $\boldsymbol{b}$ являются комплексные интервалы.

Множество решений ИСЛАУ в общем случае не имеет простого описания. Поэтому мы ограничимся нахождением интервального вектора, целиком содержащего это множество решений. Как известно, полученный вектор называется *внешней оценкой* множества решений ИСЛАУ.

Одним из способов нахождения внешней оценки множества решений ИСЛАУ является *метод Хаусхолдера* [1], его вещественный вариант известен также в отечественной литературе как *метод отражений* [2, 3]. Суть этого метода заключается в том, что матрица системы $\boldsymbol{A}$ приводится к верхней треугольной форме с помощью последовательности ортогональных преобразований. В отличие от метода Гаусса решения ИСЛАУ [4], метод Хаусхолдера дает более узкие внешние оценки множеств решений, если интервалы в матрице и правой части "не слишком широки". Кроме того, интервальный метод Хаусхолдера позволяет получать ответ в тех задачах, к которым интервальный метод Гаусса неприменим.

Отметим, что метод Хаусхолдера ранее применялся для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ с вещественными интервальными параметрами. Целью работы является обобщение метода Хаусхолдера на случай комплексных ИСЛАУ.

Чтобы сделать изложение нашей работы самодостаточным, мы подробно описываем множество комплексных интервалов и основные свойства арифметик комплексных интервалов.

*Институт вычислительных технологий СО РАН.

Обозначения:

$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел,

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел,

$\mathbb{IR}$ – множество замкнутых интервалов $[a, b]$ на $\mathbb{R}$, $a \le b$,

$\mathbb{IC}$ – множество комплексных интервалов,

$\mathbb{IC}^n$ – множество n-мерных векторов с элементами из $\mathbb{IC}$,

$\mathbb{IC}^{n\times n}$ – множество $n \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{IC}$.

1. Комплексные интервальные арифметики

Как отмечено выше, элементами матрицы и правой части рассматриваемой нами интервальной системы уравнений являются комплексные интервалы. Поэтому было бы целесообразным подробно рассмотреть комплексную интервальную арифметику.

Покажем, что многие свойства вещественной интервальной арифметики переносятся и на комплексный случай. Существуют два разумных подхода использования комплексных интервалов, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

1.1. Прямоугольники в качестве комплексных интервалов

Определение 1. Множество

$$\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \mid \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IR}\} \quad (i = \sqrt{-1})$$

называется прямоугольным комплексным интервалом.

Множество всех таких комплексных интервалов обозначим через $\mathbb{IC}_{\mathrm{rect}}$. Определенный таким образом прямоугольный комплексный интервал может быть изображен на комплексной плоскости в виде прямоугольника со сторонами, параллельными вещественной и мнимой осям. Если $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$, то его можно рассматривать как вырожденный комплексный интервал

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_1] + i\,[a_2, a_2] \in \mathbb{IC}_{\mathrm{rect}}, \quad \text{где } \ a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

а каждый элемент $\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{IR}$ – как сумму

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i[0, 0] \in \mathbb{IC}_{\mathrm{rect}},$$

откуда видно, что $\mathbb{IR} \subset \mathbb{IC}_{\mathrm{rect}}$.

Элементы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2$ из $\mathbb{IC}_{\mathrm{rect}}$ считаются равными, если

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 \quad \text{и} \ \ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2.$$

Определенное здесь отношение равенства рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теперь обобщим вещественную интервальную арифметику на комплексный случай.

Определение 2. Пусть $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ – арифметическая операция над элементами из $\mathbb{IR}$. Тогда если

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IC}_{\mathrm{rect}}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{IC}_{\mathrm{rect}},$$

то мы полагаем

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{b}_1 + i(\boldsymbol{a}_2 \pm \boldsymbol{b}_2),\\
&\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + i(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1),\\
&\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) : \bigl(\mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_1) + \mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_2)\bigr) + i(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2) : \bigl(\mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_1) + \mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_2)\bigr),
\end{aligned}$$

где

$$\mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_1) = \begin{cases} [\underline{\boldsymbol{b}}_1^2, \overline{\boldsymbol{b}}_1^2], & \text{если } \boldsymbol{b}_1 \geq 0,\\ [\overline{\boldsymbol{b}}_1^2, \underline{\boldsymbol{b}}_1^2], & \text{если } \boldsymbol{b}_1 \leq 0,\\ \bigl[0, \max\{\underline{\boldsymbol{b}}_1^2, \overline{\boldsymbol{b}}_1^2\}\bigr], & \text{если } 0 \in \boldsymbol{b}_1, \end{cases}$$

$\mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_2)$ определяется аналогично.

Считается, что в случае деления $0 \notin \mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_1) + \mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_2)$. Это требование выполняется при условии $0 \notin \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2$, иначе деление не определено.

Конечно, вместо $\mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_1) + \mathrm{sqr}(\boldsymbol{b}_2)$ можно было бы взять $\boldsymbol{b}_1^2 + \boldsymbol{b}_2^2$ как $\boldsymbol{b}_1^2 = \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2^2 = \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2$, но тогда требование $0 \notin \boldsymbol{b}_1^2 + \boldsymbol{b}_2^2$ может оказаться невыполненным, даже если $0 \notin \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2$.

1.2. Круги в качестве комплексных интервалов

Определение 3. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – комплексное число и $r \geq 0$. Множество

$$\boldsymbol{z} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

называется круговым комплексным интервалом или кругом.

Множество всех кругов обозначим через $\mathbb{IC}_{\mathrm{disc}}$. Круг $\boldsymbol{z}$ с центром a и радиусом r будем записывать в виде $\boldsymbol{z} = \langle a, r\rangle$.

Комплексные числа можно рассматривать как специальные элементы из $\mathbb{IC}_{\mathrm{disc}}$, имеющие вид $\langle a, 0\rangle$. Ясно, что $\mathbb{C} \subset \mathbb{IC}_{\mathrm{disc}}$.

Два круга $\boldsymbol{a} = \langle a, r_1\rangle$ и $\boldsymbol{b} = \langle b, r_2\rangle$ считаются равными, если $a = b$ и $r_1 = r_2$.

Это отношение равенства также рефлексивно, симметрично и транзитивно. Операции на $\mathbb{IC}_{\mathrm{disc}}$ вводятся как обобщения операций над вещественными числами следующим образом.

Определение 4. Пусть $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ – арифметическая операция над комплексными числами. Тогда если $\boldsymbol{a} = \langle a, r_1\rangle$ и $\boldsymbol{b} = \langle b, r_2\rangle$, то

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \langle a \pm b, r_1 + r_2\rangle,\\
&\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \langle ab, |a|r_2 + |b|r_1 + r_1r_2\rangle,\\
&\frac{1}{\boldsymbol{b}} = \left\langle \frac{\bar{b}}{b\bar{b} - r_2^2}, \frac{r_2}{b\bar{b} - r_2^2} \right\rangle \quad \text{при условии, что } 0 \notin \boldsymbol{b},
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{b}} \quad \text{при условии, что } 0 \notin \boldsymbol{b}.$$

Здесь $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ обозначает модуль комплексного числа $a = a_1 + ia_2$, а $\bar{b} = b_1 - ib_2$ – сопряженное к $b = b_1 + ib_2$.

Соберем теперь вместе наиболее важные свойства операций на $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$ и $\mathbb{IC}_{\text{disc}}$. Если не оговорено противное, то $\mathbb{IC}$ можно понимать и как обозначение множества $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$ с операциями из определения 2, и как обозначение множества $\mathbb{IC}_{\text{disc}}$ с операциями из определения 4.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{IC}$. Тогда*

I. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$ *(коммутативность).*

II. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ *для* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *из* $\mathbb{IC}_{\text{disc}}$ *(ассоциативность).*

III. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ *для* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *из* $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$.

IV. $[0,0]+i[0,0] \in \mathbb{IC}_{\text{rect}}$ *(соответственно* $\langle 0,0\rangle \in \mathbb{IC}_{\text{disc}}$*) и* $[1,1]+i[0,0] \in \mathbb{IC}_{\text{rect}}$ *(соответственно* $\langle 1,0\rangle \in \mathbb{IC}_{\text{disc}}$*) — определенные единственным образом нейтральные элементы сложения (нуль) и умножения (единица).*

V. $\mathbb{IC}$ *не имеет делителей нуля.*

VI. *Элемент* $\boldsymbol{z}$ *множества* $\mathbb{IC}$ *имеет противоположный и обратный элементы, только если* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ *и в случае обратного элемента* $\boldsymbol{z} \neq 0$. *Однако* $0 \in \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}$ *и* $1 \in \boldsymbol{a} : \boldsymbol{a}$.

VII. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$ *(субдистрибутивность),* $a(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a\boldsymbol{b} + a\boldsymbol{c}$ *для* $a \in \mathbb{C}$.

Особо отметим, что ассоциативный закон в общем случае не выполняется при перемножении элементов $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$.

2. Метод Хаусхолдера

Дана система интервальных уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

с невырожденной матрицей $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IC}^{n\times n}$ и вектором $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IC}^n$.

Напомним, что интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ называется невырожденной, если невырождены все матрицы A из $\boldsymbol{A}$.

Множество решений интервальной системы уравнений (1) определяется в виде:

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \big\{ x \in \mathbb{C}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \big\}.$$

Как было уже отмечено, множество решений ИСЛАУ в общем случае не имеет простого описания, поэтому мы ограничимся нахождением интервального вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IC}^n$, целиком содержащего это множество решений.

Пусть $\boldsymbol{v}$ интервальный вектор из $\mathbb{IC}^n$. Интервальное расширение нормы вектора $\boldsymbol{v}$, обозначаемое как $\mathrm{INorm}(\boldsymbol{v})$, берется следующим образом:

$$\mathrm{INorm}(\boldsymbol{v}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}_k \bar{\boldsymbol{v}}_k\right)^{1/2},$$

где $\bar{\boldsymbol{v}}_k$ – сопряженное с $\boldsymbol{v}_k$.

Если $0 \notin \boldsymbol{v}$, то обозначим через $\boldsymbol{w}$ интервальный вектор, полученный нормированием интервального вектора $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{v_i}{\mathrm{INorm}(\boldsymbol{v})}, \qquad \text{если } 0 \in \boldsymbol{v}_i,$$

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{\mathrm{sgn}\Big(\mathrm{mid}\big(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}_i)\big)\Big)}{\sqrt{1 + \Big(\sum_{j \neq i}^{n} (\boldsymbol{v}_j \bar{\boldsymbol{v}}_j)\Big) / (\boldsymbol{v}_i \bar{\boldsymbol{v}}_i)}}, \quad \text{если } 0 \notin \boldsymbol{v}_i,$$

где $\mathrm{sgn}\big(\mathrm{mid}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}_i))\big)$ – знак середины действительной части комлексного интервала $\boldsymbol{v}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим интервальную $n \times n$-матрицу $\boldsymbol{H}$ как

$$\boldsymbol{H} = I - 2 \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}^*), \tag{2}$$

$\boldsymbol{H}$ является интервальным расширением эрмитовой унитарной матрицы Хаусхолдера, порожденный интервальным вектором $\boldsymbol{v}$. Кроме того, $\boldsymbol{H}$ содержит эрмитовы и унитарные матрицы отражений H, порожденные комплексными векторами $v \in \boldsymbol{v}$. В дальнейшем, интервальное расширение нормы вектора и интервальное расширение матрицы Хаусхолдера мы будем называть просто нормой интервального вектора и интервальной матрицей Хаусхолдера соответственно.

Пусть $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)} = (\boldsymbol{a}_1^{(1)} \boldsymbol{a}_2^{(1)} \ldots \boldsymbol{a}_n^{(1)})$, где $\boldsymbol{a}_1^{(1)}, \boldsymbol{a}_2^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{(1)}$ – вектор-столбцы интервальной матрицы. Мы собираемся вычислить интервальную матрицу $\boldsymbol{Q}$ и верхнюю треугольную интервальную $n \times n$ матрицу $\boldsymbol{R}$ с помощью последовательности трансформаций Хаусхолдера. Здесь следует уточнить, что мы получим не строго треугольную интервальную матрицу $\boldsymbol{R}$, так как из-за некоторых особенностей классической интервальной арифметики, мы не можем получить 0 при выполнении арифметических операций с интервалами ненулевой ширины, но обязательным условием является включение нуля.

Обозначим через $e_1^{(p)}$ действительный p-вектор, первый компонент которого равен 1, а остальные – 0. Предположим, что $0 \notin \boldsymbol{a}_1^{(1)}$ и пусть $\alpha = \mathrm{sgn}\big(\mathrm{mid}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}_{11}^{(1)}))\big) \cdot \mathrm{INorm}(\boldsymbol{a}_1^{(1)})$, причем условимся, что, если вещественный интервал $\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}_{11}^{(i)})$ является уравновешанным (т. е. $\mathrm{Re}(\underline{\boldsymbol{a}}_{11}^{(i)}) = -\mathrm{Re}(\overline{\boldsymbol{a}}_{11}^{(i)})$), то $\mathrm{sgn}\big(\mathrm{mid}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}_{11}^{(i)}))\big) = +1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда $\boldsymbol{H}$ — интервальная $n \times n$ матрица Хаусхолдера, порождаемая вектором

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_1^{(1)} + \alpha \cdot e_1^{(n)}.$$

Мы имеем

$$\boldsymbol{A}^{(1)} \subseteq \boldsymbol{H} \cdot \Big(\big(-\alpha \cdot e_1^{(n)}\big) \boldsymbol{w}_2^{(1)} \ldots \boldsymbol{w}_n^{(1)}\Big),$$

где $\boldsymbol{w}_i^{(1)} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}_i^{(1)}$ для $i = 2, \ldots, n$.

Первая строка матрицы $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_{11} = -\alpha, \qquad \boldsymbol{R}_{1j} = \boldsymbol{w}_{1j}^{(1)} \quad \text{для } j = 2, \ldots, n.$$

Положим $\boldsymbol{H}^{(1)} = \boldsymbol{H}$. Мы получим интервальную $(n-1)\times(n-1)$ матрицу $\boldsymbol{A}^{(2)}$:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_{22}^{(1)} & \ldots & \boldsymbol{w}_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{w}_{n2}^{(1)} & \ldots & \boldsymbol{w}_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Обозначим элементы $\boldsymbol{A}^{(2)}$ как $\boldsymbol{a}_{ij}^{(2)}$, $1 \le i \le n-1$ и $1 \le j \le n-1$.

Предположим, что $0 \notin \boldsymbol{a}_1^{(2)}$ и пусть $\alpha = \operatorname{sgn}\Big(\operatorname{mid}\big(\operatorname{Re}(\boldsymbol{a}_{11}^{(2)})\big)\Big) \cdot \operatorname{INorm}\big(\boldsymbol{a}_1^{(2)}\big)$. Тогда $\boldsymbol{H}$ – интервальная $(n-1)\times(n-1)$ матрица Хаусхолдера, порождаемая вектором

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_1^{(2)} + \alpha \cdot e_1^{(n-1)}.$$

Имеем

$$\boldsymbol{A}^{(2)} \subseteq \boldsymbol{H} \cdot \Big(\big(-\alpha \cdot e_1^{(n-1)}\big)\boldsymbol{w}_2^{(2)} \ldots \boldsymbol{w}_n^{(2)}\Big),$$

где $\boldsymbol{w}_i^{(2)} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}_i^{(2)}$ для $i = 2, \ldots, n-1$.

Вторая строка матрицы $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_{22} = -\alpha, \qquad \boldsymbol{R}_{2j} = \boldsymbol{w}_{1j}^{(2)} \quad \text{для } j = 3, \ldots, n.$$

Положим

$$\boldsymbol{H}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{H} \end{pmatrix}.$$

Далее, повторяем процедуру построения матриц $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$, в данном случае

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}^{(1)} \cdot \Big(\boldsymbol{H}^{(2)}\big(\ldots(\boldsymbol{H}^{(n-1)})\big)\Big).$$

Интервальный метод Хаусхолдера позволяет вычислить внешнюю оценку $\boldsymbol{x}$ множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ решением верхней треугольной интервальной $n\times n$ системы

$$\boldsymbol{R} \cdot x = \boldsymbol{c}, \quad \text{где } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{Q}^* \cdot \boldsymbol{b}.$$

Данный вывод следует из того, что множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subset \Xi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{c})$ в следствии монотонности включения матриц

$$\boldsymbol{H}^{(1)} \subseteq \boldsymbol{H}^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq \boldsymbol{H}^{(n-1)}.$$

Далее, воспользуемся формулами обратной подстановки для нахождения компонентов интервального вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{c}_n / \boldsymbol{R}_{nn},$$

$$\boldsymbol{x}_i = \Big(\boldsymbol{c}_i - \sum_{j=i+1}^{n} (\boldsymbol{R}_{ij}\boldsymbol{x}_j)\Big) \Big/ \boldsymbol{R}_{ii}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

В конечном итоге мы получим внешнюю оценку $\boldsymbol{x}$, целиком содержащую множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений.

3. Численные эксперименты

Рассмотрим пример применения метода Хаусхолдера для нахождения внешней оценки множества решений ИСЛАУ (1) с матрицей $\boldsymbol{A}$ и правой частью $\boldsymbol{b}$ [4]:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,5]+i[-1,1] & 1 \\ 25 & [-1,1]+i[-1,1] \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}.$$

Одним из условий существования решения является невырожденность интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\det(\boldsymbol{A}) = [-31,-19] + i[-6,6].$$

В данном случае, $0 \notin \mathrm{Re}(\det(\boldsymbol{A}))$, следовательно, матрица $\boldsymbol{A}$ – невырождена.

Далее, определяем интервальные векторы

$$\boldsymbol{a}_1^1 = \begin{pmatrix} [1,5]+i[-1,1] \\ 25 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ [-1,1]+i[-1,1] \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \mathrm{sgn}\big(\mathrm{mid}([1,5])\big) \cdot \mathrm{INorm}(\boldsymbol{a}_1^{(1)}) = [25.0199, 25.5147].$$

Вычислим вектор $\boldsymbol{v}$, порождающий интервальную матрицу Хаусхолдера:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} [1,5]+i[-1,1] \\ 25 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [26.0199, 30.5147]+i[-1,1] \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Определим вектор $\boldsymbol{w}$ нормированием вектора $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} [0.6583, 0.8453]+i[-0.0277, 0.0277] \\ [0.6325, 0.6925] \end{pmatrix}.$$

Далее, вычисляем интервальную матрицу Хаусхолдера по формуле (2):

$$\boldsymbol{H} = I - 2 \cdot \begin{pmatrix} [0.4326, 0.7153] & [0.4164, 0.5854]+i[-0.0192, 0.0192] \\ [0.4164, 0.5854]-i[-0.0192, 0.0192] & [0.4, 0.4796] \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} [-0.4306, 0.1348] & [-1.1708, -0.8328]-i[-0.0384, 0.0384] \\ [-1.1708, -0.8328]+i[-0.0384, 0.0384] & [0.0408, 0.2] \end{pmatrix}.$$

Построим первую строку интервальной матрицы $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_{11} = -\alpha = [-25.5147, -25.0199].$$
$$\boldsymbol{R}_{12} = [-1.6398, 1.344] + i[-1.2092, 1.2092].$$

В итоге получим матрицу

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = [-1.3708, -0.6328] + i[-0.2384, 0.2384],$$

следовательно,

$$\alpha = \mathrm{sgn}\big(\mathrm{mid}([-1.3708, -0.6328])\big) \cdot \mathrm{INorm}(\boldsymbol{a}_1^{(2)}) = -[0.6328, 1.3914].$$

Вычислим последний диагональный элемент матрицы $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_{22} = -\alpha = [0.6328, 1.3914].$$

На этом построение матриц $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$ закончено, причем мы получили матрицу $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}$.

Теперь нам необходимо определить интервальный вектор $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Q}^* \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1.6014, 1.6014] + i[-0.0384, 0.0384] \\ [-1.3708, 1.3708] + i[-0.0384, 0.0384] \end{pmatrix}.$$

Далее, воспользуемся формулами обратной подстановки Гаусса для нахождения компонентов интервального вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{c}_2}{\boldsymbol{R}_{22}} = [-2.1663, 2.1663] + i[-0.0607, 0.0607],$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{R}_{12} \cdot \boldsymbol{x}_2}{\boldsymbol{R}_{11}} = [-0.2086, 0.2086] + i[-0.11, 0.11].$$

В итоге мы получим внешнюю оценку

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} [-0.2086, 0.2086] + i[-0.11, 0.11] \\ [-2.1663, 2.1663] + i[-0.0607, 0.0607] \end{pmatrix}$$

целиком содержащую множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений.

Заключение

В заключении еще раз отметим, что метод Хаусхолдера ранее применялся для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ с вещественными интервальными параметрами. Целью работы является обобщение метода Хаусхолдера на случай комплексных ИСЛАУ. Кроме того, интервальный метод Хаусхолдера позволяет получать ответ в тех задачах, к которым интервальный метод Гаусса неприменим, например, выше рассмотренная численная задача.

Список литературы

[1] Bentbib A.H. Solving the full rank interval least squares problem // Applied Numerical Mathematics. – 2002. – № 41. – P. 283–294.

[2] Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1975.

[3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 2002.

[4] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.

[5] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.