

Ансамбли систем дифференциальных уравнений с интервальными данными

А.Н. Роголев*

Аннотация. Построение двусторонних и интервальных оценок множеств решений дифференциальных уравнений с неточно заданными (интервальными) данными сильно усложняется экспоненциальным ростом этих границ. Этот рост, называемый “wrapping effect”, требует разработки методов оценки, которые бы устраняли его влияние. В статье рассматриваются свойства решений ансамблей систем дифференциальных уравнений, являющихся множествами всех возможных систем, соответствующих изменениям данных задач в пределах содержащих их интервалов. Принципиальным моментом является, в частности, сохранение характеристик фазового портрета ансамбля при возмущении закона движения. Методы, основанные на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории, строят гарантированные границы множеств решений, асимптотически точные относительно каждой координаты. Приводятся примеры вычисленных границ множеств решений для практических задач.

Введение

В статье рассматривается задача нахождения гарантированных границ и исследования свойств множеств решений динамических систем с интервальными (неточно заданными) данными

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t^0) = y^0 \in Y^0. \quad (1)$$

Здесь Y^0 обозначает интервал в \mathbb{R}^n или прямоугольный параллелепипед. Подобные задачи связаны с принципиальной неточностью определения данных для многих классов задач, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Сложности, которые возникают при реализации различных методов решения задач этого класса хорошо известны. Для большинства методов наблюдается экспоненциальный рост границ решений, названный [29, 26, 28, 33, 34, 20, 21] “wrapping effect” (эффект от “обвертывания” множества точных решений в оболочку, упаковку). Хотя выбор этого термина означает попытку пояснить причины этого явления, очевидно, что полный исчерпывающий анализ таких причин отсутствует. Гарантированные методы, основанные на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории и символьных формулах этих приближенных решений [8–18] позволяют преодолеть влияние эффекта экспоненциального роста границ. Если правая часть системы дифференциальных уравнений удовлетворяет условию дифференцируемости по начальным данным, то это условие можно использовать для нахождения и исследования свойств пучка решений с начальными условиями, близкими к невозмущенным.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, ran@krsk.info.

1. Нестатистические ансамбли систем дифференциальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными данными и множества возмущений

Рассмотрим при $t = t^0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, зависящей от t^0 ансамбль Гиббса системы (1). Под ансамблем Гиббса [2] будет пониматься множество идентичных систем вида (1) с одинаковыми правыми частями, отличающимися друг лишь начальными значениями. Ансамблю системы (1) будет соответствовать в области Σ при каждом t ансамбль изображающих точек. Каждая из изображающих точек $y^0 \in \Sigma_{t_0}$, двигаясь по траекториям системы (1) согласно преобразованию $y(t) = Sy^0$, поместится соответственно в точку $y(t) \in \Sigma_t$. Таким образом, оператор сдвига $S(t, t_0)$ переводит область Σ_{t_0} в область $\Sigma_t \subset \mathbb{R}^n$ за время $t - t_0$. Траектории ансамбля систем (1) равномерно распределены в ансамбле, возможно по другому вероятностному закону, что будет менять постановку задачи и свойства решений этой системы. В дальнейшем в пределах этой статьи такая постановка не будет рассматриваться.

Предположим, что у нас есть зависимость, задающая плотность попадания траекторий в некоторую область фазового пространства Σ_{t_0} , обозначим эту плотность $D(t, y)$. Движение ансамбля изображающих точек $y^0 \in \Sigma_{t_0}$, перемещающихся вдоль интегральных кривых системы (1) согласно преобразованию $y = S_{t, t_0} y^0$, будем трактовать как течение некоторой непрерывной среды в \mathbb{R}^n с плотностью $D(t, y)$ в точке y в момент времени t . Так как изменение плотности $D(t, y)$ в каждом элементе фазового пространства \mathbb{R}^n обусловлено различием по величине потоков, изображающих движение точек через его границу, то функция $D(t, y)$ удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial D(t, y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(t, y)}{\partial y_i} D(t, y) = 0 \quad (2)$$

и называется обобщенным уравнением Лиувилля относительно плотности $D(t, y)$ изображающих точек системы (1). Уравнение (2) совпадает с дифференциальным уравнением последнего множителя Якоби системы (1).

Каждый из двусторонних методов имеет свои свойства, выделяющие его среди других методов, однако принципиальный момент для них – это свойство верхних и нижних границ являться решениями мажорирующих уравнений [19, 25, 37, 3].

Интервальные методы выполняются пошагово так, чтобы обеспечить на каждом шаге по времени включение всех точных решений в полученные интервальные векторы, на основе свойств монотонности относительно включения интервальных операций. Наиболее распространены методы, построенные на основе разложений по формуле Тейлора. Причинами этого является возможность единым образом оценивать величину глобальной ошибки методов рядов Тейлора, находить их области значений, и составлять для них простые программы, вычисляющие значения производных высоких порядков от правой части методами автоматического дифференцирования. Обзоры существующих интервальных методов даны в работах [30, 24, 35] (Р. Мур, Дж. Корлисс, А. Ноймайер).

Большинство методов, так или иначе основанных на разложении решений по формуле Тейлора, состоят из двух этапов исполнения, которые можно условно назвать этапами предиктор-корректор.

Первый этап (предиктор) заключается в определении априорного включения \mathbf{y}_j и величины шага h_j таких, чтобы решение задачи (1) $y(t)$ существовало на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ при любых начальных условиях $y_{t_j} \in \mathbf{Y}_j$ и при этих условиях выполнялось включение

$$\bigcup_{y(t_j) \in \mathbf{Y}_j} (y(t, t_j, y(t_j))) \subseteq \mathbf{Y}_j$$

для всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$.

Второй этап (корректор) состоит в уточнении полученного интервала (уменьшении его ширины), используя $\mathbf{y}(t)$.

Описываемая группа интервальных методов, основанных на использовании рядов Тейлора, находит включение $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$y(t, t_0, \mathbf{Y}_0) \subseteq \mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_j + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Y}_{j_i} (t - t_j)^i + \mathbf{Y}_{j_k}.$$

Этот подход, был начат в работах Мура [29] и является основным до настоящего времени. Были внесены существенные модификации в интервальные методы, использующие разложения в ряды Тейлора, но они не затрагивали принципиальных моментов.

Большую известность среди интервальных методов решения ОДУ приобрели методы математика Р. Лонера [27]. Это объясняется, разумеется, в первую очередь тем, что выполнена программная реализация этого метода, с помощью которой просчитаны интервальные оценки для решений некоторых систем ОДУ. Метод Лонера представляет модификацию интервального метода рядов Тейлора. Основное содержание изменений состоит в том, что на каждом шаге изменение ориентации интервального вектора (прямоугольного параллелепипеда) относительно координатных осей выполняется путем домножения на специально подобранную матрицу вращения.

Методы, основанные на интервальных формах разложений по формуле Тейлора, используют следующую технологическую цепочку доказательства включения решений. Производится запись исходного дифференциального уравнения с помощью оператора Пикара–Линделефа, при определенных условиях на коэффициенты поставленной задачи справедливы теоремы о сжимающем отображении [29].

Двусторонние и интервальные методы производят включение точных решений, поскольку в операторе Пикара–Линделефа правые части представляют многозначные (интервальные) функции

Собственно включение точного решения задачи в получаемый интервальный вектор обосновывается тем, что границы этого вектора являются фактически решениями уравнений сравнения. Это следует из включения

$$y^0(t) + \int_{t_0}^t (\mathbf{y}^{\nu-1}(s)) ds \in \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t)(s) ds.$$

Интервальные методы решения дифференциальных уравнений и двусторонние методы основаны на мажорировании исходных уравнений с помощью уравнений сравнения и применении теорем о дифференциальных неравенствах. Теоремы о дифференциальных неравенствах [37] исследованы достаточно подробно и применяются в задачах устойчивости. Однако нам потребуются специальные формы дифференциальных неравенств.

Теорема. Пусть $u(t)$, $\bar{u}(t)$, $\underline{u}(t)$ – непрерывные на интервале $[a, b]$ и дифференцируемые на открытом интервале (a, b) векторные функции, функция $f(t, u)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| = \sup_i |f_i(t, u) - f_i(t, v)| \leq L\|u - v\|, \quad L > 0, \quad t \in [a, b].$$

Если имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \underline{u}(a) < u(a) < \bar{u}(a); \\ \frac{d\underline{u}}{dt} - \underline{f}(t, \underline{u}, \bar{u}) \leq \frac{du}{dt} - f(t, u) \leq \frac{d\bar{u}}{dt} - \bar{f}(t, \underline{u}, \bar{u}), \end{aligned} \quad (3)$$

тогда выполняется включение

$$\underline{u}(t) < u(t) < \bar{u}(t)$$

для всех $t \in [a, b]$.

Как следствие из этой теоремы формулируется следующий важный результат. Не нарушая общности, полагаем, что в (3) выполнены равенства, и каждый член (3) равен нулю на интервале (a, b) . Тогда граничные функции этих неравенств являются решениями систем дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{u}, \underline{u}), \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{f}(t, \bar{u}, \underline{u}, t), \quad (4)$$

относительно $2n$ независимых переменных. Если векторная функция $f(t, u_1, \dots, u_n)$ является монотонно неубывающей функцией относительно компонент u_α , где $\alpha \in S_i$, $S_i \subseteq S = \{1, 2, \dots, n\}$, и $\alpha \neq i$, и монотонно невозрастающей функцией относительно компонент u_β , $\beta \in \setminus S_i$, $\beta \neq i$, то справедливо равенство

$$\bar{f}_i(t, \bar{u}, \underline{u}) = f_i(t, \bar{u}_\alpha, \underline{u}_\beta, u_i), \quad \underline{f}_i(t, \bar{u}, \underline{u}) = f_i(t, \underline{u}_\alpha, \bar{u}_\beta, u_i).$$

Определение 1. Будем называть дифференциальную систему сравнения (3), включающей систему ОДУ (4), если каждая функция, задающая границу множества решений, является решением системы (или одного из уравнений, входящих в систему) (4). Переход от исходной системы (1) к системе (4) является возмущением структуры дифференциальных уравнений, определим его как структурное возмущение. Соответственно, размерность пространства R^{2n} , в котором определен вектор решений системы (4) будет называться размерностью включения.

Таким образом, использование при построении двусторонних и интервальных оценок решений систем ОДУ дифференциальных неравенств, приводит к качественным изменениям (возмущению структуры) системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Главная особенность классических понятий устойчивости состоит в том, что они относятся к конкретной системе и поведению ее траекторий в окрестности точки равновесия (притяжения или отталкивания). Совершенно другого подхода требует анализ поведения семейства траекторий, включая особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, взаимное расположение которых определяет структуру семейства, этот анализ возникает при рассмотрении всех систем, “близких” к стандартной системе (1).

Согласно определению, введенного Понтрягиным и Андроновым [1], система (1) называется структурно устойчивой (грубой), если топологический характер траекторий всех близких к ней систем такой же, как у системы (1). Определенные математические трудности связаны с уточнением понятий “близкая система”, а также с конкретизацией смысла, который подразумевается, когда говорят о том, что траектория эквивалентна, или топологически подобна другой траектории. Но основная идея остается ясной, достаточно малые изменения структурно устойчивой системы должны приводить к соответственно малым изменениям в динамике ее поведения. Можно выделить два вида описания множества систем: ансамбли систем дифференциальных уравнений, имеющие одну структуру системы (вид правой части системы) и отличающиеся лишь значениями параметров, и возмущенные системы, для которых варьируются все характеристики системы – правые части, единственным ограничением является близость значений правых частей или начальных данных в некоторой метрике. Для возмущенных систем имеет место значительное изменение как видов возмущенных систем, так и изменения динамики решений. Хаотические движения не встречались у двумерных систем, и появились при переходе трехмерным. Единственно возможными установившимися движениями в двумерных системах являются устойчивые состояния равновесия и периодические движения. Однако при периодических силовых или параметрических возмущениях на осциллятор или ротатор возникают хаотические движения.

Траектории хаотических динамических систем по определению экспоненциально неустойчивы и крайне чувствительны по отношению к ошибкам округления.

Дальнейшие исследования [6] подтвердили этот результат более строго, связав экспоненциальную расходимость траекторий с энтропией Колмогорова и характеристическими показателями Ляпунова. Вычисление этих характеристик стало стандартным методом проверки на стохастичность.

Наличие хаотического аттрактора в фазовом пространстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений служит причиной сложного поведения траекторий системы в его окрестности.

2. Символьные методы и формулы приближенных решений

Гарантированные методы, основанные на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории систем ОДУ, могут быть охарактеризованы следующим образом. Для всех подобных методов общим является введение определенных функциональных связей между областями всех решений системы ОДУ в начальный момент времени t^0 и при $t > t^0$ в пределах конечного интервала времени. На свойства гарантированных методов влияет характер ограничений, налагаемых на параметры, например, начальные данные системы и характер изменения во времени области всех решений.

Гарантированные методы оценки множеств решений с интервальными данными основаны на символьном представлении формул приближенных решений. Эти методы позволяют строить границы множеств решений, точно отслеживающие поведение множества всех точных решений, а также устранить влияние так называемого “wrapping” эффекта, присущего практически всем двусторонним и интервальным методам. Основные этапы исполнения гарантированных методов построения границ это:

- 1) представление приближенных решений как символьных формул (аналитических выражений), зависящих от векторов начальных данных, также являющихся символьными переменными,
- 2) покомпонентное оценивание множеств значений этих формул;
- 3) нахождение области всех возможных значений по этой формуле;
- 4) гарантированное оценивание глобальной ошибки всех значений приближенных решений.

Определение 2. Символьная формула (аналитическое выражение) – запись имен переменных и совокупности действий, которые нужно проделать в определенном порядке над значениями этих переменных, чтобы получить значение функции.

В силу этого символьный метод (аналитический метод) – запись метода преобразования символьной информации (символьных формул) на языке математического анализа.

В дальнейшем при записи символьных формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории, допускается включение в них числовых констант, с отложенным выполнением арифметических действий над ними.

В этом символьный метод отличается от численного алгоритма, основанного на исполнении конечной последовательности действий над конечным множеством чисел. Чтобы строить символьные формулы, аппроксимирующие оператор сдвига вдоль траектории ОДУ и позволяющие получать достаточно точные включения множеств решений (например, интервальные расширения), необходимо получить формулу, хорошо приближающую точное решение и выполнить алгоритм преобразования этой формулы. Строгое определение гарантированных методов решения дифференциальных уравнений с интервальными данными и анализ содержится [14].

В качестве символьной формулы \mathcal{F}_i метода сдвига вдоль траектории можно выбрать формулы, числовые оригиналы которых соответствуют приближенным методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (например, линейным одношаговым и многошаговым методам, коллокационным методам). Принципиальное отличие заключается в способе реализации этих методов, то есть получении числовых оригиналов символьных формул \mathcal{F}_i . Символьные формулы приближенных решений могут строиться с использованием разностных методов (одношаговых или многошаговых), коллокационных методов или иных схем, вычисляющих приближенные решения. В процессе конструирования символьной формулы требуется строить экономичные символьные формулы, т. е. такие последовательности имен переменных и действий, чтобы хранение формул в памяти машины и обработка проводилась за минимальное время и с разумными затратами памяти. Кроме того, методы должны обеспечивать близость множества значений, полученных по символьной формуле и множества значений точных решений. Указанные свойства означают, что само построение формул и их исполнение существенно изменяются по сравнению с численными алгоритмами, изучаемыми в разделе численного решения систем ОДУ.

Многие свойства численных методов, неизменно присущие практически всем численным методам решения ОДУ, такие как устойчивость, асимптотическая устойчивость и иные понятия либо переформулируются, либо включаются в другие характеристики гарантированных методов.

3. Графики множеств решений систем ОДУ с интервальными данными

В этом пункте представлены границы множеств решений нескольких систем дифференциальных уравнений, построены графики этих границ и проведено сравнение с экземплярами точных решений, принадлежащими совокупности всех точных решений, соответствующих изменению данных исходной задачи. Сравнение проводится на основе тех тестовых примеров, для которых либо возможно найти формулы точных решений, либо известны двусторонние оценки. Как правило, системы ОДУ были подобраны так, чтобы при такой постановке задач возникали определенные сложности с нахождением двусторонних и интервальных оценок. Тем не менее, найденные с помощью описанных в статье методов, числовые значения гарантированных границ решений успешно решают эти проблемы и являются включениями множеств решений, достаточно близкими к этим множествам. Для хорошей иллюстрации точности полученных вычисленных границ множеств решений приводятся графики, на которых изображены точные решения сходной системы ОДУ с начальными данными, выбранными внутри интервала начальных данных. Эти решения названы экземплярами множества точных решений, поскольку, вообще говоря, это множество заполнено континуумом экземпляров. Кроме того, экземпляры, начальные данные которых взяты с граничных точек интервала начальных данных (вершин параллелепипеда в \mathbb{R}^n), не могут считаться граничными линиями множества решений, через некоторый интервал времени экземпляры решений не будут мажорировать указанное множество.

Все полученные результаты приведены в п. 3. В статье использовались все возможности для сравнения гарантированных границ множеств решений и интервальных или двусторонних оценок, содержащихся в [22, 23, 32, 34, 35]. К сожалению, в тексты большинства опубликованных работ включена лишь величина ошибки решений систем ОДУ, посчитанных с начальными интервальными данными нулевой ширины. Фактический анализ и сравнение численных результатов можно провести, пользуясь только двумя программами решения систем ОДУ с интервальными данными, [27, 23]. Большее практическое значение имеет программа AWA [27], открытая для доступа и использования, результаты полученные авторами и разработчиками системы COSY, представлены не столь широко. По всей видимости, система COSY всегда являлась программной реализацией интервальных методов рядов Тейлора и ориентировалась на задачи небесной механики. Система AWA и была использована для попыток оценивания множеств решений систем, описанных в данной статье. Расчеты проводились для компьютера Intel(R) Celeron(R) CPU 1.8 ГГц, 256 Мб.

3.1. Сравнение гарантированных границ множеств решений с результатами, полученными двусторонними методами статьи [3]

Построим гарантированные границы множеств решений системы ОДУ

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_1^2 + t \quad (5)$$

с начальными данными

$$y_1(0) \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon], \quad y_2(0) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad (6)$$

где ε – заданное число. Эти границы, полученные в этой статье на основе аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории, можно сравнить с границами точного решения, приведенными в [3].

Легко заметить, что в табл. 1 включены данные, полученные при ширине начального интервала двусторонней оценки, равной величине ошибки округления. Поскольку в статье [3] не оговаривалась точность, с которой проводились расчеты, можно принять машинную ошибку величиной порядка $\approx 10^{-8}, 10^{-9}$. При значении аргумента $t = 0.2$ ширина двусторонней оценки становится величиной порядка 10^{-5} , а при $t = 0.5$ ширина двусторонней оценки имеет порядок 10^{-4} . Таким образом на интервале от 0 до 0.5 точность оценки ухудшилась в 10^4 раз. Такое поведение двусторонних оценок объясняется влиянием так называемого wrapping эффекта [29, 26, 28, 23, 35]. Если бы нахождение двусторонних оценок было продолжено для больших значений аргумента, то двусторонние границы бы отклонились одна от другой на слишком большую величину, влияние wrapping эффекта стало бы катастрофическим.

В табл. 2 гарантированные границы посчитаны на интервале $t \in [0, 2]$. Начальный интервал выбирался равным $2 \cdot 10^{-3}$. При этом поведение интервала получаемых границ в точности соответствует росту границ множества точных решений. Найденные с помощью систем аналитических вычислений экземпляры точных решений свидетельствуют об этом. Время расчетов составило 2.81 с.

Производились попытки найти интервальные оценки решения система уравнений (5) также с помощью программы AWA [27]. Однако работа программы

Таблица 1. Двусторонние границы точного решения системы (5), полученные в [3]

t_n	\underline{y}_n	\bar{y}_n	\underline{z}_n	\bar{z}_n
0	1	1	0	0
0.1	1.005175	1.005175	0.105342	0.105342
0.2	1.021466	1.021479	0.226865	0.286886
0.3	1.050213	1.050240	0.3548852	0.354928
0.4	1.093018	1.093057	0.504463	0.504528
0.5	1.151795	1.151861	0.675130	0.675249

Таблица 2. Гарантированные границы множества решений системы (5), полученные на основе аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории

t	Y_1	Y_2
0	[0.999, 1.001]	[-0.001, 0.001]
0.1	[1.00400978, 1.006230297]	[0.104081181, 0.106503486]
0.2	[1.02010864, 1.022584437]	[0.2212785040, 0.224176786]
0.3	[1.04862563, 1.05142768]	[0.35302938, 0.35647435]
0.4	[1.09115534, 1.09433262]	[0.50224070, 0.50632519]
0.5	[1.14961440, 1.153236682]	[0.67249330, 0.67633951]
1.0	[1.78397272, 1.791563517]	[2.058842205, 2.07138601]
2.0	[10.26966353, 10.316006031]	[27.22678736, 27.57170364]

была прервана, так как величина шага стала из-за катастрофического роста ширины получаемых интервалов. Время работы составило 53.17 с.

3.2. Пример гарантированного оценивания множеств решений нелинейной системы ОДУ (из справочника Камке [5])

Будем оценивать множество решений нелинейной системы ОДУ,

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 y_2^2 + y_1 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_1^2 y_2 - y_1 - y_2, \quad \frac{dy_3}{dt} = y_2^2 - y_1^2, \quad (7)$$

приведенное в [5] система (9.25). Интегральными кривыми этой системы являются пересечения поверхностей

$$y_1^2 + y_2^2 + \ln y_3^2 = c_1, \quad y_3(y_1 y_2 - 1) = c_2. \quad (8)$$

Для этой системы ОДУ мы рассматриваем задачу с начальными данными, заданными как интервалы $y_1^0 \in [1, 1.5]$, $y_2^0 \in [2, 2.4]$, $y_3^0 \in [0.5, 1]$, на интервале $t \in [0, 2]$.

Картина поведения экземпляров интегральных кривых, начинающихся в граничных точках интервалов начальных данных, помещены в сравнении на графике: рис. 1 и расположены на них слева. Для сравнения с ними на этом же графике построены гарантированные границы множеств решений рассматриваемой задачи, размещенные справа. Из сравнения численных значений границ множеств решений и экземпляров точных решений, а также их графиков можно заключить о точности включения множеств решений для этой системы ОДУ. Время расчетов составило 2.9 с.

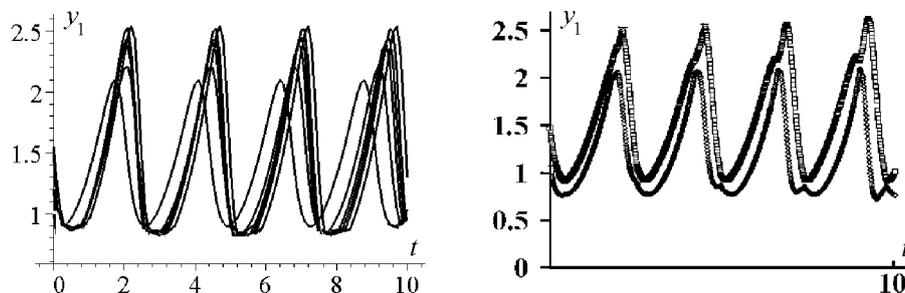


Рис. 1. Проекция экземпляров точных решений и гарантированных границ множества решений системы (7) на плоскость $t - y_1$: \square — гарантированная верхняя граница; \circ — гарантированная нижняя граница

Была произведена попытка найти интервальные границы система ОДУ (7) с помощью программы AWA [27]. Выборка числовых значений [27] свидетельствует о том, что программа прервала процесс вычислений при $t = 0.1110688557$, так как шаг стал равен 0:

```
t = 1.110688557E-001
[-4.02857339E+008, 4.02857344996879E+008] 8.06E+008 8.1E+008
[-4.02857339289200E+008, 4.02857344942050E+008] 8.06E+008 8.1E+008
[-2.50854422226110E+001, 2.69234195274611E+001] 5.21E+001 5.2E+001
h = 0.000000000E+000
```

3.3. Поведение множества решений локально неустойчивой динамической системы, приведенной в статье [35]

Динамическая система

$$\frac{dy_1}{dt} = 9.9y_1 - 7.6y_2 + 7.6, \quad \frac{dy_2}{dt} = 12.6y_1 - 9.9y_2 + 9.9 + y_1^3/7.6 \quad (9)$$

имеет две устойчивые неподвижные точки $y_1 = \pm 1.5, y_2 = 1 \pm 297/152$ и неустойчивую неподвижную точку $y_1 = 0, y_2 = 1$. Система (9) консервативна, т.е. на решениях этой системы сохраняется постоянное значение $c = 1/2(y_1^2 - 2.25)^2 + (9.9y_1 - 7.6y_2 + 7.6)^2$. Все траектории этой системы являются периодическими, и остаются ограниченными на всем интервале определения. Определитель якобиана этой системы $\det F'(y) = 3y_1^2 - 2.25$. Если $|y_1| < 1/2\sqrt{3} \approx 0.866$, то собственные значения якобиана вещественные числа, кратности 1. Тогда решения этой системы локально неустойчивы в полосе, определяемой неравенством $|y_1| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, каждая орбита системы, пересекающая прямую $y_2 = 1$ проходит через две неустойчивых точки, отличающиеся на период.

Автор статьи [35] предложил сравнить как ведут себя различные программные системы при определении интервальных оценок для системы (9). Выбрав значения $y_1(0) = 2^{-16}$ и $y_2 = 1$, Neumaier приводит следующие результаты, полученные системой AWA [27]: система прервала свою работу из-за числового

переполнения при $t = 33.9101420298123$, выполнив 1566 шагов по времени через 2.6 с. Последней полученной интервальной оценкой, указанной в [35], является интервальный вектор

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [-196.199244777380, 196.2262981935131], \\ y_2(t) &= [6039.01251175114, 6041.0421329249]. \end{aligned}$$

Далее следует аварийное прерывание программы в силу переполнения.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [-196.199244777380, 196.2262981935131], \\ y_2(t) &= [6039.01251175114, 6041.0421329249]. \end{aligned}$$

Результаты расчетов, полученные в этой статье выглядят так. Поскольку большой интерес представляют задачи, в которых данные изначально заданы как интервальные величины, то расчеты, выполненные описанным в этой статье гарантированным методом проводились при начальных данных

$$y_1(t) \in [-2^{-16}, 2^{-16}], \quad y_2(t) \in [1, 1].$$

Интервальный вектор включения решения с приемлемой точностью был вычислен при $t = 30.04$ и равен

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [-3.125 \cdot 10^{-2}, 3.125 \cdot 10^{-2}], \\ y_2(t) &= [0.93750183902, 1.0325037562]. \end{aligned}$$

Границы множеств решений систем [35], проведены вплоть до точки $t = 37.2$, последнее полученное значение равно

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [-128.1276601342, 128.1090127387], \\ y_2(t) &= [-32768.223821563, -16384.6015723511, 6041.0421329249]. \end{aligned}$$

Время расчетов составило 4.3 с.

Изменив начальные данные $y_1(0) = [9.99 \cdot 10^{-17}, 1.01 \cdot 10^{-15}]$ и $y_2 = [1, 1]$, получаем гарантированные границы для существенно большего интервала времени, вычисления продолжались вплоть до $t = 50$. Графики, изображенные на рис. 2, получены для $t \in [0, 323]$. Время расчетов составило 38 с.

Легко заметить, что траектории решений совершают сильные колебания вдоль осей y_1, y_2 , но это не приводит к огромному росту их значений и прерыванию работы программы. В силу этого результат является достаточно приемлемым и сохраняется хорошая возможность добиться высокой точности границ для задач подобного класса. Так, например, полученные границы при $t = 36.055$ равны следующим величинам

$$\begin{aligned} y_1^{3605} &\in [-6.014648438, 7.043945313], \\ y_2^{3605} &\in [-0.401733398, 0.714660645], \\ y_1^{3606} &\in [-5.312988281, 6.482421875], \\ y_2^{3606} &\in [0.092086792, 0.326522827]. \end{aligned}$$

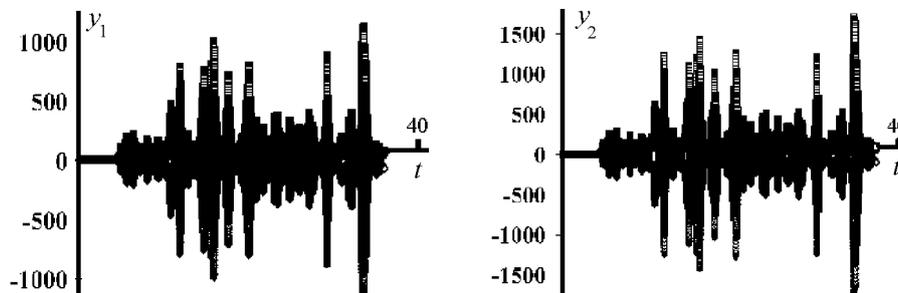


Рис. 2. Проекция гарантированных границ множества точных решений системы (9) на плоскости $t - y_1, t - y_2$ в интервале $0 < t \leq 40$

3.4. Пример гарантированного оценивания жестких систем ОДУ с неточно заданными начальными данными

Для проверки результатов выбрана система уравнений, описывающая химическую реакцию с участием восьми реагентов. Эта система была предложена Шефером [36] для объяснения роста и дифференциации растительной ткани при высоких уровнях светового облучения независимо от фотосинтеза. Готтвальд предложил использовать ее в качестве тестового примера. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= -1.71y_1 + 0.43y_2 + 8.32y_3 + 0.0007, \\
 \frac{dy_2}{dt} &= 1.71y_1 - 8.75y_2, \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -10.03y_3 + 0.43y_4 + 0.035y_5, \\
 \frac{dy_4}{dt} &= 8.32y_2 + 1.71y_3 - 1.12y_4, \\
 \frac{dy_5}{dt} &= -1.745y_5 + 0.43y_6 + 0.45y_7, \\
 \frac{dy_6}{dt} &= -280y_6y_8 + 0.69y_4 + 1.71y_5 - 0.43y_6 + 0.69y_7, \\
 \frac{dy_7}{dt} &= 280y_6y_8 - 1.81y_7, \\
 \frac{dy_8}{dt} &= -y_7
 \end{aligned} \tag{10}$$

с интервальными начальными данными $y_1(0) = [1 - \delta, 1 + \delta], y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) = y_7(0) = [-\delta, \delta], y_8(0) = [0.0057 - \delta, 0.0057 + \delta], t_{\text{out}} = 321.8122$.

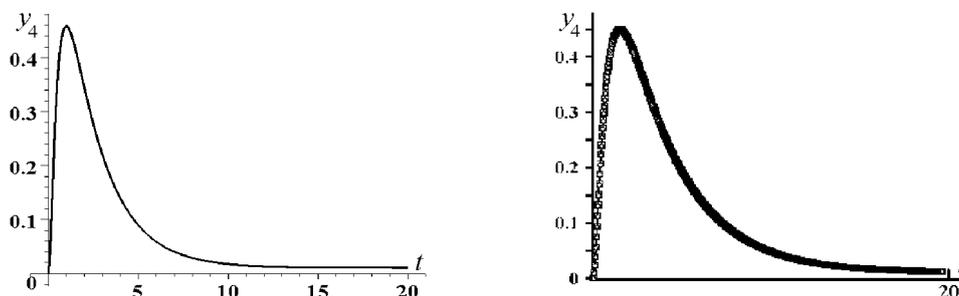


Рис. 3. Сравнение проекции на плоскости $t-y_4$ гарантированных границ множества точных решений системы (10) и экземпляров приближенных решений в интервале $0 < t \leq 20$

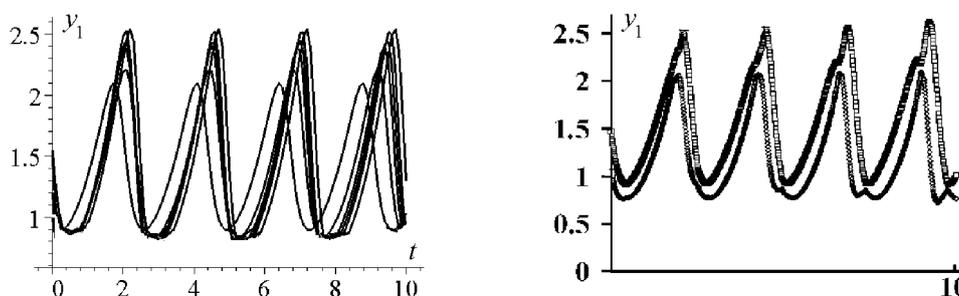


Рис. 4. Сравнение проекции на плоскость $t-y_1$ гарантированных границ множества точных решений системы (10) и экземпляров приближенных решений в интервале $0 < t \leq 321.8122$

Список литературы

- [1] Андронов А.А., Леонтович Е.А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 3. – С. 328–372.
- [2] Гиббс Дж. Б. Основные принципы статистической механики. – М.: Гостехиздат, 1944. – 215 с.
- [3] Девятко В.Н. О двустороннем приближении при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 254–265.
- [4] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 221 с.
- [5] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- [6] Каток А.Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 768 с.
- [7] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – Москва: Мир, 1984. – 528 с.
- [8] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1993. – Т. 33, № 2. – С. 219–231.

- [9] Рогалев А.Н., Шокин Ю.И. Исследование и оценка решений обыкновенных дифференциальных уравнений интервально-символьными методами // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4, № 4. – С. 51–76.
- [10] Рогалев А.Н. Поле аппроксимаций обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами. Вопросы математического анализа. – 2001. – Вып. 4. – С. 152–170.
- [11] Рогалев А.Н. Динамика множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и интервальные решения. Вопросы математического анализа. – 2001. – Вып. 5.
- [12] Рогалев А.Н. Исследование практической устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7, ч. 5 (совм. вып. по мат. Междунар. конф. ВТММ-2002). – С. 148–150.
- [13] Рогалев А.Н. Задачи практической (интервальной) устойчивости с заданной областью предельных отклонений // Тр. пятой междунар. конф. памяти акад. А.П. Ершова: Междунар. совещ. по интервальной математике и методам пространства ограничений. – Новосибирск, 2003. – С. 90–100.
- [14] Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 5. – С. 102–116.
- [15] Рогалев А.Н. Поведение динамических систем при экстремальных возмущениях // Вычислительные технологии, 2003. – Т. 8 (совм. вып. по мат. Междунар. конф. ВТММ-2003). – С. 68–77.
- [16] Рогалев А.Н. Гарантированные оценки безопасного функционирования технических и электроэнергетических систем // Тр. Всерос. конф. с междунар. участием “Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф”. – Красноярск, 2003. – Т. 3. – С. 42–48.
- [17] Рогалев А.Н. Включение множеств решений дифференциальных уравнений и гарантированные оценки глобальной ошибки // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 6. – С. 80–94.
- [18] Рогалев А.Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 1. – С. 86–93.
- [19] Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Чаплыгин С.А. Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. – М.: Наука, 1976. – С. 307–362.
- [20] Anguelov R., Markov S. Wrapping effect and wrapping function // Reliable Computing. – 1998. – Vol. 4, № 4. – P. 311–330.
- [21] Anguelov R. Wrapping effect of the initial value problems for ODE: Applications // Reliable Computing. – 1999. – Vol. 5, № 2. – P. 143–164.
- [22] Berz M., Makino K., Hoefkens J. Verified Integration of Dynamics in the Solar System. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2001. – Vol. 47. – P. 179–190.
- [23] Berz M., Hoefkens J., Makino K. Controlling the wrapping effect in the solution of ODEs for asteroids // Reliable Computing. – 2003. – Vol. 8, № 1. – P. 21–41.
- [24] Corliss G. Survey of interval algorithms for ordinary differential equations. // Applied Mathematics and Computations. – 1989. – Vol. 31. – P. 112–120.

-
- [25] Filippov A.F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equation // Interval Computations. – 1992. – № 2. – P. 6–17.
- [26] Lohner R. Praktikum einschließung bei Differentialgleichungen. / Wissenschaftliches Rechnen mit Ergebnisverification (Hrsg. Kulish U.), 1989. – S. 209–223.
- [27] Lohner R.J. Program AWA. – 1994. – <ftp://iamk4515.mathematik.uni-karlsruhe.de/pub/awa>.
- [28] Lohner R. On the ubiquity of the wrapping effect in the computation of error bound // SCAN-2000, Interval-2000. GAM/IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Sept. 18–22, 2000. – Universität Karlsruhe, Institut für Angewandte Mathematic (Germany). – P. 36.
- [29] Moore R.E. Interval analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [30] Moore R.E. A survey of interval methods for differential equations // Proc. of 23-rd conf. on decision and control. – Las Vegas University, 1984. – P. 1529–1535.
- [31] Nedialkov N., Jackson K., Corliss G. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations / Tech. rep. – 1998. – <http://www.cs.toronto.ed/N/reports.html>.
- [32] Nedialkov N., Jackson K. An interval Hermite-Obreschkoff Method for computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation // Reliable Computing. – 1999. – Vol. 5, № 5. – P. 289–310.
- [33] Nedialkov N., Jackson K. The Design and Implementations of an Object-Oriented Validated ODE Solver / Tech. rep. – 2001. – <http://www.cs.toronto.ed/N/reports.html>.
- [34] Nedialkov N., Jackson K. A New Perspective on the Wrapping Effect // Interval Methods for Initial Value Problems for Ordinary Differential Equations. Perspectives on Enclosure Methods / Ed. by Kulisch U., Lohner R., Facius A. – Springer-Verlag, 2001. – P. 219–264 (<http://www.cs.toronto.ed/N/reports.htm/ned.scan00.ps.Z>).
- [35] Neumaier A. Taylor forms – Use and limits // Reliable computing. – 2003. – Vol. 9, № 1. – P. 43–79.
- [36] Schäfer E. A new approach to explain the “High Irradiance Responses” of photomorphogenesis on the basis of phytochrome // J. of Math. Biology. – 1975. – Vol. 2. – P. 41–56.
- [37] Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin: Springer, 1970. – 195 p.