

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Всероссийское (с международным участием)
совещание по интервальному анализу
и его приложениям

ИНТЕРВАЛ-06

1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия

РАСШИРЕННЫЕ ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Санкт-Петербург

2006

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Факультета
Прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского Государственного университета*

Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия. Расширенные тезисы докладов. — СПб: ВВМ, 2006. — 159 с.

ISBN 5-9651-0220-8

В настоящем сборнике помещены расширенные тезисы докладов, представленных на Всероссийском (с международным участием) совещании по интервальному анализу и его приложениям, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия.

Сборник адресован исследователям, как профессиональным математикам, так и специалистам в приложениях, инженерам, аспирантам и студентам, которые изучают и применяют интервальные методы, а также всем интересующимся этой перспективной и увлекательной областью знаний.

Ответственные за выпуск:

д.т.н. Г.Г. Меньшиков, д.ф.-м.н. С.П. Шарый.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Факультет прикладной математики – процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета проводит 1–4 июля 2006 года Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям — ИНТЕРВАЛ-06.

Научные мероприятия, посвящённые интервальному анализу и его приложениям, проводятся в Советском Союзе и России ежегодно с 1984 г. Их организаторами в различные годы выступали ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске (в настоящее время — Институт вычислительного моделирования СО РАН), Институт вычислительных технологий СО РАН, Институт систем информатики СО РАН, Саратовский госуниверситет, Санкт-Петербургский госуниверситет, Московский энергетический институт (см. <http://www.ict.nsc.ru/interval/Conferences/>).

Ряд лет вместо отдельных конференций специалисты по интервальному анализу собирались в виде секций на больших мероприятиях, посвящённых тем или иным аспектам прикладной и вычислительной математики или математического моделирования. Последние годы интервальные конференции проводились в Азиатской части России: международные совещания по интервальному анализу и методам распространения ограничений ИМРО'03 (Новосибирск, 2003) и ИМРО'04 (Новосибирск, 2004), секция «Интервальный анализ» на XIII Байкальской международной школе-семинаре по методам оптимизации и их приложениям (Иркутск–Северобайкальск, 2005).

В 2006 году встреча специалистов по интервальному анализу организуется в одном из красивейших мест Европейской России — в городе Петергофе Ленинградской области, на базе факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского госуниверситета, одного из учебных заведений России, где преподаётся систематический курс интервального анализа в приложениях к локализуемым и доказательным вычислениям. Наше мероприятие пройдёт в той части города Петергоф, которая во время Великой Отечественной войны находилась в пределах легендарного Ораниенбаумского плацдарма и не была оккупирована немецко-фашистскими войсками.

Следует отметить, что история подобных мероприятий в Санкт-Петербурге отсчитывается с 1993 года, когда на Международном конгрессе по компьютерным системам и прикладной математике (CSAM'93) были организованы несколько тематических «интервальных» секций. В следующем 1994 году крупным событием научной жизни не только Санкт-Петербурга, но также России и зарубежья, стала Международная конференция по интервальным и компьютерно-алгебраическим методам в науке и технике INTERVAL-94. Наконец, летом 2000 года в рамках 6-й Международной конференции IMACS по компьютерной алгебре (IMACS ACA'2000) в Санкт-Петербурге был проведён плодотворный минисимпозиум по интервальным методам с представительным иностранным участием. Во всех этих мероприятиях активную роль играли и сотрудники факультета ПМ-ПУ СПбГУ.

В течение последних лет вышеназванные крупные мероприятия удачно дополнялись местными научными форумами, среди которых следует упомянуть межвузовские конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», которые проводятся на факультете ПМ-ПУ в апреле каждого года в день рождения его создателя Владимира Ивановича Зубова. На них также звучит интервальная тематика.

Мы предполагаем сделать наше Совещание форумом для обсуждения широкого спектра результатов современного интервального анализа и его приложений. В информационных сообщениях о Совещании направления его работы были определены следующим кругом вопросов:

- интервальные методы для решения уравнений и систем уравнений,
- интервальные методы в задачах приближения функций,
- интервальные методы решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных,
- интервальные методы в математическом программировании и исследовании операций,
- технические и экономические приложения интервального анализа,
- использование интервальных методов в вычислениях с гарантированной точностью и доказательных вычислениях на ЭВМ.

Но, как видно из настоящего Сборника, реальная тематика Совещания даже вышла за рамки первоначально намеченной схемы. Представленные работы отражают большое разнообразие и динамизм исследований по интервальному анализу, которые ведутся в настоящее время в России и бывшем Советском Союзе.

Программный комитет Совещания ИНТЕРВАЛ-06

- Заслуженный деятель науки и техники России, проф. Г.Г. Меньшиков (зав. кафедрой математической теории микропроцессорных систем управления факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербург),
- проф. В.М. Нестеров (главный редактор международного журнала *Reliable Computing*, Санкт-Петербург),
- проф. С.П. Шарый (ведущий научный сотрудник Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск; старший инженер Новосибирского отделения Intel Corporation),
- академик Ю.И. Шокин (директор Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск),
- доцент В.В. Евстафьева (зам. декана факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербург),
- проф. В.Я. Крейнович (Университет Техаса в Эль-Пасо, Эль-Пасо, США),
- проф. С.П. Соколова (ведущий научный сотрудник Института информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург).

Организационный комитет Совещания

Доцент В.В. Евстафьева (председатель), проф. Г.Г. Меньшиков (зам. председателя), проф. С.П. Шарый, доцент И.А. Моисеев, доцент В.Б. Орлов, доцент А.В. Зубов, доцент В.А. Петрова, ст. преп. О.А. Иванова, аспирант Е.В. Виноградов, аспирант П.А. Зубов.

Научная программа Совещания

Научная программа Совещания состоит из устных докладов продолжительностью 25 минут, с перерывами на чай и кофе. Официальным рабочим языком Совещания является русский, но допускаются доклады и на английском языке.

Проживание

Предполагается в гостинице, расположенной в студенческом городке в Старом Петергофе, примерно в 15 минутах ходьбы от корпуса факультета ПМ-ПУ СПбГУ и в 20 минутах ходьбы от остановочной платформы «Университет» железной дороги. Рядом находится автобусная остановка. Менее чем за час маршрутное такси доставит Вас за 30 рублей до станции метро «Автово» Санкт-Петербурга.

Организационный взнос

Совещание проводится за счёт организационных взносов участников, составляющих 2000 рублей для граждан СНГ и 6000 рублей для участников, не являющихся гражданами СНГ. Эти средства идут на организацию перерывов между заседаниями (чай, кофе), товарищеский ужин и издание Сборника расширенных тезисов Совещания.

Официальный веб-сайт Совещания

<http://www.ict.nsc.ru/interval/Conferences/Interval-06/>

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧ НАЗНАЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДОПУСКОВ

Б.А. Артюшенко, Г.Н. Шило, В.Н. Крищук

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

E-mails: bogdartysh@ukr.net, gshilo@zntu.edu.ua

Аннотация

Обсуждаются проблемы применения генетических алгоритмов в задачах допускового и параметрического синтеза. Показано, что применение генетического алгоритма оправдано в задачах со множеством ограничений.

Ключевые слова: генетический алгоритм, интервал, допусковая область, радиоэлектронная аппаратура

Keywords: genetic algorithm, interval, tolerable domain, radioelectronic devices

1. Введение

Расчет допусков на параметры изделия позволяет снизить стоимость, повысить качество и надежность производимой аппаратуры. При назначении допусков могут быть использованы интервальные методы [1,2]. Но их применение связано с трудностями при работе с немонотонными функциями. В общем случае при их использовании не решаются задачи со множеством ограничений (в т.ч. производственных).

В данной работе будет рассмотрена задача назначения допусков при помощи генетического алгоритма, что позволит снять некоторые имеющиеся трудности.

2. Учет ограничений при применении генетического алгоритма

При назначении допусков на параметры изделия, помимо ограничений на выходные функции, следует учитывать также накладываемые на параметры производственные ограничения. Наиболее распространенными производственными ограничениями являются: ограничения на параметры элементов сверху, снизу; минимальная и максимальная ширина допуска на параметры элементов в абсолютной величине либо относительно номинального значения; ограничения на допуск сверху или снизу в абсолютной величине либо относительно номинального значения.

В генетическом алгоритме для данных ограничений достаточно задать такой метод отображения битовой строки на реальные параметры, при котором все ограничения удовлетворены. Но в этом случае существует некоторая неадекватность при скрещивании в случае ограничений в относительных величинах (т.к. унаследованный допуск не зависит от фактического допуска родителей). По этой причине при неудовлетворении ограничений следует не менять метод отображения, а вносить изменения в саму битовую строку.

Если при расширении списка недопустимых решений гиперпараллелипед, который на i -ом шаге был определен как допустимый в дальнейшем может оказаться недопустимым (на $i + k$ -ом шаге), то это означает, что:

1. Функция фитнеса неадекватна;
2. Возможно сползание к недопустимым решениям;
3. Возможно сползание к локальному минимуму.

Если п. 1 не может быть преодолен, то для разрешения пп. 2, 3 необходимо :

- добавить принудительное рассеяния при "выходе" всех решений за область работоспособности;
- ускорить процесс возврата в "пределы" области работоспособности, для этого необходимо использовать более жесткий отбор либо хранить элементы предыдущих поколений;
- с целью наиболее раннего отыскания недопустимых решений следует увеличить объем популяции;

3. Определение допустимости интервальной области

Так как генетический алгоритм представляет собой случайный поиск, то в процессе поиска будет перебрано достаточно большое количество различных областей, содержащих повторяющиеся части. По этой причине, если хранить все ранее найденные недопустимые области, то можно значительно облегчить процесс проверки области на допустимость. Проведенные эксперименты показали, что до 20% найденных решений могут быть отсеяны в связи с пересечением с известными недопустимыми решениями. Если область работоспособности непрерывная выпуклая фигура, а выходные функции строго монотонны, то для определения допустимости найденного интервала достаточно, помимо проверки на пересечение с известными недопустимыми решениями, проверить вершины проверяемого гиперпараллелепипеда. Если же область непрерывна, но не выпукла, то следует проверить все грани проверяемого гиперпараллелепипеда (для n -мерной задачи 2^n граней). Если выходные функции на протяженности грани являются монотонными, то для проверки соответствия грани области работоспособности достаточно проверить все ребра, смежные проверяемой грани.

Следует отметить, что при задании максимального рассматриваемого допуска на входные параметры скорость поиска увеличивается пропорционально квадрату уменьшения допуска. По этой причине в случае непрерывной области поиска может оказаться полезным поэтапное увеличение максимальных рассматриваемых допусков. На рис. 1 дано сравнение работы генетического алгоритма с начальными популяциями состоящими из элементов с допусками различного максимально возможного объема (с их постепенным увеличением).

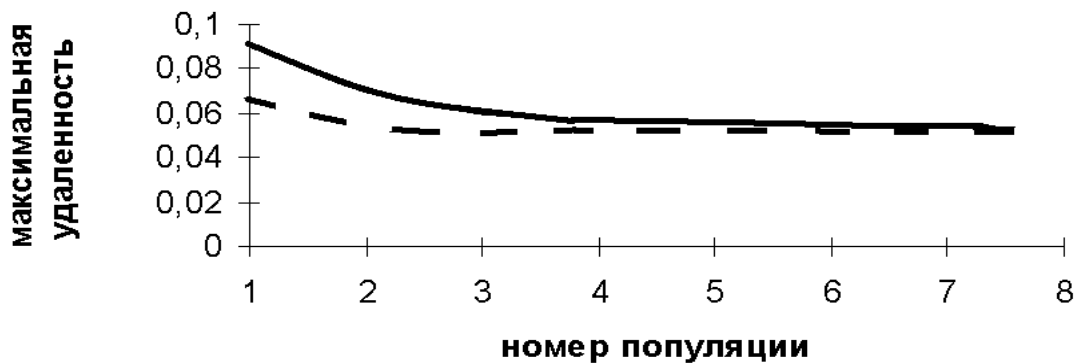


Рис. 1: Результаты применения генетического алгоритма при начальных элементах с допусками случайного объема (сплошная линия) и минимального объема (пунктир).

4. Выбор номинальной точки

От правильного выбора номинальной точки зависит как максимальный объем, так и сходимость генетического алгоритма.

К номинальной точке предъявляются следующие требования:

- она должна быть внутри допусковой области максимального объема;
- она должна быть как можно ближе к центру гиперпараллелепипеда максимального объема.

Поиск номинальной точки при помощи генетического алгоритма не представляет трудности, если правильно определить функцию фитнеса (критерий качества) номинальной точки. В общем случае критерием выбора номинальной точки может быть:

1. Минимизация выходной функции в номинальной точке;
2. Максимизация максимального отклонения входных параметров (при сохранении остальными параметрами номинальных значений).

Применение исключительно первого критерия допустимо если выходная функция монотонна. В противном случае локальный минимум (максимум) не позволяет говорить о соблюдении условий пп. 1, 2. Если область работоспособности не выпукла, то применение второго критерия неадекватно.

Тем ни менее при совместном применении двух критериев можно снизить время работы генетического алгоритма. Но номинальная точка при этом требует дальнейшей конкретизации в процессе поиска.

В ряде случаев известны одно или несколько начальных решений. В этом случае при применении генетического алгоритма возникает та же проблема, что и при наличии лишь одного (либо нескольких) известного решения: имеющееся допустимое решение либо будет вскоре потеряно, либо займет все позиции в популяции. В табл. 1 показан именно такой случай. На 3-ем поколении при штрафе равном 1 номинальное решение исчезло из общего списка.

Таблица 1. Среднеарифметическое расстояние Хэмминга между элементами популяции при различных коэффициентах штрафа за недопустимость и при внесении известного решения в 10% начальной популяции

Номер поколения	Коэффициент штрафа 1	Коэффициент штрафа 100	Коэффициент штрафа 1000
1	0,448	0,448	0,286
2	0,445	0,0085	0,014
3	0,414	0,0063	0,0001

Возможно также внедрение номинальной точки скрещиванием ее со случайными битовыми строками. В табл. 2 показаны результаты применения этого механизма (известное решение занимает 1% начальной популяции).

Таблица 2. Среднеарифметическое расстояние Хэмминга между элементами популяции при различных коэффициентах штрафа за недопустимость и при внесении известного решения в 1% начальной популяции и образовании всех остальных элементов скрещиванием известного решения со случайными битовыми строками

Номер поколения	Коэффициент штрафа 10		Коэффициент штрафа 1000	
	Количество допустимых решений(%)	Расстояние Хэмминга	Количество допустимых решений(%)	Расстояние Хэмминга
1	1,3	0,368	1,3	0,368
2	1	0,347	39,9	0,154
3	0,3	0,347	41,7	0,031
4	1	0,322	66,8	0,0001

Из примеров видно, что эффективность применения генетического алгоритма зависит от правильности подбора коэффициента штрафа за недопустимость, и по этой причине требует настройки для каждой конкретной задачи. Для избежания подобной ситуации следует выбрать алгоритм позволяющий хранить найденные ранее допустимые решения, не допускающий скрещивание между близкими по расстоянию Хевисайда решениями (пока это возможно), позволяющий производить рассеивание элементов популяции. Этим требованиям соответствует СНС алгоритм [3]. Результаты применения генетического алгоритма при внесении номинальных решений в 1% и 4% элементов начальной популяции представлены на рис. 2.

5. Выбор параметров работы генетического алгоритма

Применение СНС дает достаточно неплохие результаты при стандартных значениях параметров алгоритма (вероятность мутации, вид мутации, вид и вероятность кроссовера). Все же, как указывалось ранее, при применении генетических алгоритмов желательно увеличить объем популяции.

На рис. 3 дано сравнение работы при различных объемах популяции. Как видно из рисунка при большом объеме популяции процесс поиска более плавный. Это также сказывается и на нахождении первого допустимого решения: при объеме популяции 300 скорость, по сравнению с популяцией объема 60, падает в несколько раз.

Все приведенные графики и таблицы взяты для задачи назначения симметричных интервальных допусков на параметры конструкции микрополоскового фильтра на одинаковых связанных линиях [3,4] в максимально возможной области поиска при наличии производственных ограничений на



Рис. 2: Результаты применения генетических алгоритмов при стандартных значениях параметров: классический генетический алгоритм при коэффициенте штрафа равном 1 (сплошная линия), СНС (пунктир).



Рис. 3: Результаты применения СНС при объеме популяции 60 (сплошная линия) и 300 (пунктир).

максимальные и минимальные значения параметров и минимально допустимые ширины допусков в условиях отсутствия номинальной точки. Применение генетического алгоритма для данной задачи позволило производить одновременно параметрический синтез и синтез допусков. Проведенные эксперименты показали, что параметры поиска допусковой области максимального объема зависят от объема области поиска.

6. Выводы

Таким образом, для задач назначения интервальных допусков может эффективно использоваться генетический алгоритм. Этот алгоритм позволяет проводить синтез допусков в условиях отсутствия номинальных точек, достаточно большой области поиска и отсутствии возможности построения приближенной модели области работоспособности.

7. Литература

1. Шило Г.М., Воропай О.Ю., Гапоненко М.П. Інтервальні методи призначення експлуатаційних допусків // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2003. – N 2. – С. 78–82.
2. KRISCHUK V., SHILO G., GAPONENKO N. Software for Interval Analysis and Synthesis fo Tolerances in CAD Systems // Proceedings of International Workshop on Intelligent Data and Advanced Computin Systems: Technology and Applications. – Foros, 2001. – P. 234–237
3. ESHELMAN L. The СНС Adaptive Search Algorithm – Foundation of Genetic Algorithms, G. Rawlins, ed. Morgan-Kaufmann. – P. 256–283.
4. Крищук В.Н., Фарафонов А.Ю., Шило Г.Н, Гапоненко М.П. Оптимізація допусків мікропоскокових фільтрів // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2003. – N 470. – С. 173–178.

О ТОЧНОСТИ ЕСТЕСТВЕННОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ ФУНКЦИИ

Р.Р. Ахмеров

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

E-mail: arr@ctta.ru

Аннотация

Вводится понятие точности внешних оценок множеств. Предлагается метод исследования точности оценок для областей значений функций, которые дает естественное интервальное расширение. Метод основан на представлении исследуемой функции в виде композиции других функций специального вида. Рассматриваются возможности для повышения точности оценок.

Ключевые слова: интервальное расширение, область значений, внешнее оценивание, точность оценок
Keywords: interval extension, range of values, outer estimation, closeness of estimates

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем вопросы точности внешних оценок для областей значений функций. Точность оценок мы рассматриваем не в разрезе сходимости, порядка сходимости и других по существу дифференциальных понятий. Нас интересует точность оценок как таковая, в глобальном смысле. Поэтому говорить про производные, стремление к нулю диаметров рассматриваемых областей и подобные им вещи мы не будем. Интервальные оценки в дифференциальном контексте достаточно хорошо изучены и повторять полученные в данной области результаты нет смысла (см., например, [4]).

Идея предложенного исследования состоит в том, что мы анализируем не саму функцию, а алгоритм, которым эта функция задана. В связи с этим мы говорим о естественном интервальном расширении как об алгоритме, который выполняет некоторое фиксированное количество шагов и дает на выходе интервальную оценку. Различным алгоритмам вычисления одной и той же функции соответствуют различные интервальные расширения этой функции. Значения этих расширений для одинаковых входных данных могут существенно отличаться.

Работа не претендует на математическую строгость. Некоторые изложенные идеи носят качественный характер и подлежат обсуждению и дальнейшему исследованию.

2. Точность оценок

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ . Для любых компактных подмножеств A и B из X определено хаусдорфово расстояние $\rho_H(A, B)$:

$$\rho_H(A, B) \stackrel{def}{=} \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} \rho(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} \rho(a, b) \right\}.$$

Расстояние ρ_H является метрикой на множестве всех компактных подмножеств множества X .

Пусть множества A, B содержатся в метрическом пространстве X и $A \subseteq B$. В контексте задач внешнего оценивания мы говорим, что B является *внешней оценкой* для A или что B *оценивает A извне*. Расстояние $\rho_H(A, B)$ мы будем называть *абсолютной погрешностью* оценки B для множества A . Так как $A \subseteq B$, расстояние $\rho_H(A, B)$ принимает более простой вид:

$$\rho_H(A, B) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \rho(a, b).$$

Относительной погрешностью оценки B для множества A мы будем называть отношение

$$\sigma(A, B) \stackrel{def}{=} \frac{\rho_H(A, B)}{\text{diam}(A)},$$

где $\text{diam}(A)$ обозначает диаметр множества A . Здесь мы предполагаем, что A состоит более чем из одной точки, т.е. $\text{diam}(A) \neq 0$.

Пусть нам дана функция $f: X \rightarrow Y$, множество B оценивает A и $B \subseteq \text{dom } f$. Предположим, что множества A, B компактные связные и f непрерывна на B . Образ множества A относительно f обозначим через $f(A)$, образ B относительно f через $f(B)$. Множество $f(A)$ содержится в $f(B)$. Что мы можем сказать о величине погрешности $\rho_H(f(A), f(B))$, при условии, что f сложна для анализа и никакие глобальные свойства f на рассматриваемых множествах нам неизвестны?

В общем случае, глобальные свойства непрерывных функций, такие как константы Липшица, минимумы (максимумы) по осям и т.п., во многом зависят от размеров множеств, на которых они рассматриваются. Под размером множества мы здесь понимаем некую характеристику протяженности этого множества в пространстве. Для связного множества такой характеристикой можно считать его диаметр. Если размеры двух множеств сильно отличаются, то глобальные свойства непрерывных функций на этих множествах также могут сильно отличаться, даже если, например, одно множество содержится в другом.

В связи с вышеизложенным, о величине $\rho_H(f(A), f(B))$ мы будем судить по относительной погрешности $\sigma(A, B)$, с которой B оценивает A извне. Сформулируем это в виде правила:

Пусть A, B — компактные и связные множества, $A \subseteq B$, функция f определена и непрерывна на B , и никакие глобальные на B или A свойства f нам неизвестны. Тогда мы полагаем, что малым значением относительной погрешности $\sigma(A, B)$ соответствуют малые значения абсолютной погрешности $\rho_H(f(A), f(B))$, при этом абсолютная погрешность $\rho_H(A, B)$ может быть сколь угодно велика. (1)

Этот правило мы воспринимаем как некий принцип, которым мы руководствуемся в условиях неопределенности. Ясно, что из этого правила можно найти исключения, но мы ориентируемся на общий случай.

3. Точность интервального расширения

Пусть даны функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и брус $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$. Предположим, что f определена и непрерывна на некотором множестве, содержащем \mathbf{x} . Область значений f на \mathbf{x} обозначим через $f(\mathbf{x})$. Значение интервального расширения f на \mathbf{x} мы обозначим через $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq f(\mathbf{x}).$$

Нас интересует точность, с которой $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ оценивает $f(\mathbf{x})$ извне.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — вещественные переменные и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функцию p типа $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ мы будем называть *простой функцией*, если p может быть задана n -местной формой $p(x)$ в виде одного из выражений:

1. $p(x) = (x, x_\lambda \star x_\mu)$ ($s = n + 1$),
2. $p(x) = (x_{\neq \lambda}, x_\lambda \star x_\mu)$ ($s = n$),
3. $p(x) = (x_{\neq \{\lambda, \mu\}}, x_\lambda \star x_\mu)$ ($s = n - 1$),
4. $p(x) = (x, g(x_\nu))$ ($s = n + 1$),
5. $p(x) = (x_{\neq \nu}, g(x_\nu))$ ($s = n$),

где $\star \in \Omega = \{+, -, *, /\}$, $g \in \Phi = \{I, \sin, \cos, \exp, \dots\}$, $1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq n$ и $\lambda \neq \mu$. Записи $x_{\neq \lambda}$, $x_{\neq \{\lambda, \mu\}}$ и $x_{\neq \nu}$ обозначают кортеж x с выброшенными соответственно компонентами x_λ , x_λ и x_μ , x_ν . Мы будем говорить о простой функции типа 1, 2, ..., в зависимости от того, какой из приведенных выше случаев имеет место.

Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ задана выражением

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — вещественные переменные и \mathfrak{A} есть некоторая n -местная форма, принимающая значения в \mathbb{R}^m . Область определения функции f равна множеству допустимых значений кортежа переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) относительно формы \mathfrak{A} . Если в записи \mathfrak{A} присутствуют только операции из Ω и элементарные функции из Φ , то f можно представить в виде композиции простых функций f_1, f_2, \dots, f_k для некоторого $k \in \mathbb{N}$:

$$f = f_k \circ \dots \circ f_2 \circ f_1. \quad (2)$$

Такое представление, вообще говоря, не единственно. С другой стороны, любой неветвящейся программе вычисления f можно однозначно сопоставить некоторое представление f вида (2).

Пример 1. Пусть функция f , определенная и тождественно равная 0 на \mathbb{R} , задана выражением

$$f(x) = x - x.$$

Тогда $f = f_2 \circ f_1$, где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x, x), \\ f_2(x, y) &= x - y. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим

$$f(x, y, z) = x^1 y^3 + xz^2.$$

Предположим, что последовательность выполнения операций при вычислении f соответствует надстрочным индексам 1, 2, 3. Этой последовательности соответствует декомпозиция f на простые $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, где

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (x, z, xy), \\ f_2(x, y, z) &= (z, xy), \\ f_3(x, y) &= x + y. \end{aligned}$$

Каждая простая функция p имеет два ключевых свойства. Во-первых, естественное интервальное расширение p на любом бруске $\mathbf{z} \subseteq \text{dom } p$ всегда дает *наилучшую* интервальную оценку для области значений p на \mathbf{z} . Для простых функций типов 3 и 5 это оценка будет к тому же еще и *точной*. Во-вторых, для вычисления интервального расширения p достаточно выполнить одну интервальную операцию, соответствующую некоторой операции из Ω или вычислить одно интервальное расширение элементарной функции из Φ .

Предположим, что мы вычисляем естественное интервальное расширение для функции f на бруске $\mathbf{x} \subseteq \text{dom } f$ и $f = f_k \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ — соответствующая этой процедуре декомпозиция f на простые. Обозначим $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$. Алгоритму вычисления $f(\mathbf{x})$ соответствует последовательность из k брусков: $\mathbf{x}^{(1)} = f_1(\mathbf{x}^{(0)})$, $\mathbf{x}^{(2)} = f_2(\mathbf{x}^{(1)})$, \dots , $\mathbf{x}^{(i)} = f_i(\mathbf{x}^{(i-1)})$, \dots , $\mathbf{x}^{(k)} = f_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$. Последний брусок $\mathbf{x}^{(k)}$ совпадает с $f(\mathbf{x})$.

Для любого $i = 1, 2, \dots, k$ из простоты f_i следует, что интервальный вектор $\mathbf{x}^{(i)}$ является наилучшей интервальной оценкой для $f_i(\mathbf{x}^{(i-1)})$. Это означает, что если погрешность $\rho_H(f_i(\mathbf{x}^{(i-1)}), \mathbf{x}^{(i)})$ не равна нулю, то она является неустранимой в классе интервальных оценок. Предположим, для примера, что f_i имеет тип 1, “ \star ” есть операция “+” или “−”, и λ, μ есть номера компонент вектора аргументов, с которыми выполняется операция. Легко показать, что

$$\rho_H(f_i(\mathbf{x}^{(i-1)}), \mathbf{x}^{(i)}) = \frac{\text{wid}(\mathbf{x}_\lambda^{(i-1)}) + \text{wid}(\mathbf{x}_\mu^{(i-1)})}{\sqrt{3}}.$$

Для f_i типа 2 погрешность будет такой:

$$\rho_H(f_i(\mathbf{x}^{(i-1)}), \mathbf{x}^{(i)}) = \frac{\text{wid}(\mathbf{x}_\mu^{(i-1)})}{\sqrt{2}}.$$

Для операций “ \ast ”, “/” и для элементарных функций (тип 4) погрешность будет зависеть не только от ширины интервалов $\mathbf{x}_\lambda^{(i-1)}$, $\mathbf{x}_\mu^{(i-1)}$ и $\mathbf{x}_\nu^{(i-1)}$, но и от их расположения на вещественной оси.

Пусть $l, m \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $l \leq m$. Обозначим

$$f_{[l, m]} \stackrel{\text{def}}{=} f_m \circ \dots \circ f_{l+1} \circ f_l$$

— композиция функций с f_l по f_m включительно. Каждому i от 0 до $k - 1$ сопоставим множество $D_i = f_k(f_{k-1}(\dots(f_{i+1}(\mathbf{x}^{(i)}))\dots)) = f_{[i+1, k]}(\mathbf{x}^{(i)})$. Положим $D_k = \mathbf{x}^{(k)}$. Таким образом, мы имеем $D_k = f(\mathbf{x})$ и $D_0 = f(\mathbf{x})$.

Предположим, что мы находимся на шаге $i > 0$. По построению, $\mathbf{x}^{(i)} \supseteq f_{[1, i]}(\mathbf{x})$, поэтому $D_i \supseteq f(\mathbf{x})$. Если единственной информацией, которой мы располагаем о множестве $f_{[1, i]}(\mathbf{x})$, является интервальная оценка $\mathbf{x}^{(i)}$, то D_i будет нижней по включению гранью для любых оценок, которые мы в принципе можем получить для $f(\mathbf{x})$. Переход от шага $i - 1$ к шагу i сопровождается расширением этой нижней грани. Как соотносятся D_{i-1} и D_i ?

Мы имеем $D_{i-1} = f_{[i,k]}(\mathbf{x}^{(i-1)}) = f_{[i+1,k]}(f_i(\mathbf{x}^{(i-1)}))$. Если глобальный анализ функции $f_{[i+1,k]}$ на $\mathbf{x}^{(i)}$ затруднен, то о соотношении D_{i-1} и D_i мы можем судить только по соотношению множеств $\mathbf{x}^{(i)}$ и $f_i(\mathbf{x}^{(i-1)})$. Касательно свойств функции $f_{[i+1,k]}$ мы можем предполагать только, что она определена и непрерывна на $\mathbf{x}^{(i)}$. Таким образом, мы находимся в условиях правила (1) и главной характеристикой расстояния $\rho_H(D_{i-1}, D_i)$ для нас будет величина $\sigma(f_i(\mathbf{x}^{(i-1)}), \mathbf{x}^{(i)})$. Из свойств метрики Хаусдорфа следует также, что $\rho_H(f(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \sum_{j=1}^k \rho_H(D_j, D_{j-1})$. Отсюда мы выводим следующее заключение:

Погрешность $\rho_H(f(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ напрямую зависит от погрешностей $\sigma(f_i(\mathbf{x}^{(i-1)}), \mathbf{x}^{(i)})$ которые мы допускаем на каждом шаге i от 1 до k .

Так как $\mathbf{x}^{(i)} = f_i(\mathbf{x}^{(i-1)})$, то это заключение можно записать в другом виде:

Погрешность $\rho_H(f(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ напрямую зависит от того, насколько точно в смысле относительной погрешности σ мы оцениваем области значений каждой простой функции f_1, f_2, \dots, f_k в декомпозиции f . (3)

В заключение раздела отметим, что на практике, при вычислении интервальной операции или интервального расширения элементарной функции, мы обычно не знаем, какого типа простую функцию мы реально оцениваем. Если в программе нет ветвлений, то тип перехода всегда можно идентифицировать и оценить погрешность, которую мы вносим в итоговый результат, вычисляя данную операцию. С другой стороны, в рамках парадигмы интервального оценивания эта информация является простой констатацией факта ошибки, без возможности как-то повлиять на точность результирующей оценки.

4. Перспективы

В многошаговых алгоритмах вычисления функций с большим числом переменных наблюдается значительная грубость оценок, которые дает естественное интервальное расширение. Происходит так называемый “взрыв” ошибки. Незначительное увеличение ширины входных интервалов почти всегда приводит к существенному увеличению погрешности итоговой интервальной оценки. Можно ли этого избежать? Можно ли повысить точность внешней оценки, не переходя к классическому дроблению исходной области, которое в некоторых случаях либо невозможно, либо очень трудоемко по причине высокой размерности задачи или сложности алгоритма вычисления функций?

Ответ на этот вопрос лежит в заключении (3). Класс интервальных оценок должен быть расширен таким образом, чтобы минимизировать погрешности, которые мы допускаем при оценивании областей значений простых функций. Множества из этого класса нужно уметь хранить и иметь возможность строить оценки из этого класса для областей значений простых функций на этих множествах. Такая задача частично решается переходом от интервальной арифметики к другим арифметикам, использующим или не использующим в своей реализации интервальные операции, таким как обобщенная интервальная арифметика Хансена [2], наклоны, аффинная арифметика [1] и другие. В свете изложенных выше результатов такой переход может быть осуществлен более целенаправленно, с анализом перспектив в смысле повышения точности внешних оценок для областей значений функций.

5. Литература

1. COMBA J.L.D., STOLFI J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. – In Proceedings of VI SIBGRAPI, pages 9–18, 1993.
2. HANSEN E.R. A generalized interval arithmetic. – Interval Mathematics, number 29 in Lecture Notes in Computer Science, pp. 7–18. – Springer Verlag, 1975.
3. KEARFOTT R.B., NAKAO M.T., NEUMAIER A., RUMP S.M., SHARY S.P., VAN HENTENSYCK P. – Standardized notation in interval analysis. – A manuscript, downloadable from <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int>, <http://www.ict.nsc.ru/interval/INotation.pdf>
4. NEUMAIER A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

ОБ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ ЗАЗОРА В ШАТУННОМ ПОДШИПНИКЕ, СКОРРЕКТИРОВАННОГО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ

Л.Б. Беленький

*Институт проблем управления сложными системами РАН
443020, Самара, ул. Садовая, 61, Россия
E-mail: belenki@iccs.ru*

Аннотация

Перед началом экспериментов, связанных с испытаниями силовых установок, для каналов системы измерения зазоров определяются индивидуальные градуировочные характеристики. Невозможность воспроизведения всех свойств объекта на лабораторной градуировочной установке приводит к необходимости коррекции результата измерения, осуществляемой с помощью дополнительного режима измерений и с применением априорных моделей объекта. Приводится описание методов коррекции и интервальная оценка неопределенности скорректированного результата.

Ключевые слова: зазор, шатунный подшипник, модель, коррекция, интервальная оценка, погрешность

Keywords: gap, connecting-rod bearing, model, correction, interval estimation, error

1. Введение

В поршневых силовых установках значительное влияние на экономичность и надежность оказывают зазоры между подвижными и неподвижными элементами конструкций. Процесс создания новых силовых установок сопровождается экспериментальными исследованиями в стендовых условиях их элементов конструкций. Для этих целей разрабатываются и изготавливаются опытные образцы изделий, стендовое оборудование и средства измерений. В частности, аппаратура, предназначенная для измерения зазоров в шатунном подшипнике (ШП) кривошипно-шатунного механизма (КШМ) двигателя внутреннего сгорания (ДВС), включает в себя четыре полудиференциальных одновитковых вихретоковых датчика (ОВТД), размещенных в шатунной шейке, токосъемник, блок согласующих устройств, мультиплексор, АЦП и ПЭВМ. Оси ОВТД образуют прямоугольную систему координат, а их чувствительные элементы (ЧЭ) ориентированы параллельно образующей вкладыша [1].

Перед началом экспериментов для каналов системы измерения зазоров в ШП определяются индивидуальные градуировочные характеристики (ГХ). При этом используется экспериментально-расчетный метод оценки метрологических характеристик, заключающийся в проведении многократных градуировок, их аппроксимации степенным полиномом и вычислении систематической и случайной составляющих погрешности. Этот метод базируется на статистической обработке [2]. Сложность объекта не позволяет воспроизвести все его свойства на лабораторной градуировочной установке. В частности снятие ГХ осуществляется при неподвижном токосъемнике, а, кроме того, температурное поле внутри градуировочной установки более равномерно, чем на работающем двигателе, что не позволяет воспроизвести меняющуюся неидентичность условий окружающей среды для рабочего и компенсационного плеча ОВТД. Вот почему значения систематической и случайной составляющих погрешности, полученные статистическим методом, могут оказаться недостаточными для описания неопределенности результата измерения, которая может существенно превысить значения, полученные с помощью методики [2].

В такой ситуации удлинение процедуры снятия ГХ и увеличение выборки не гарантирует более точной оценки составляющих погрешности. При невозможности учета всех мешающих факторов на градуировочной установке оценка точности измерения может быть увеличена путем использования априорных моделей, опирающихся на хорошо развитую теорию поведения объекта [3–5]. Эти же модели позволяют корректировать результат измерения.

Диапазон изменения зазоров в исследуемом подшипнике составляет от 0 до 150 мкм, что позволяет аппроксимировать ГХ линейной функцией $C = S \cdot c + C_0$, где C – цифровой код на выходе АЦП, c – измеряемые зазоры, S – чувствительность преобразования и C_0 – цифровой код при $c = 0$. Поэтому коррекция распространяется на аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности измерительного канала.

2. Методы и процедура коррекции

Методы коррекции основаны на анализе модели поведения зазоров в одноцилиндровой силовой установке. Основой модели являются хорошо разработанные теории КШМ и подшипника скольжения, которым посвящены многочисленные публикации, в частности, [6–8]. Их совместное использование позволило составить уравнение баланса сил, одна из которых действует со стороны поршня, другая возникает в масляном клине, образующемся в ШП между вкладышем и шейкой коленчатого вала в процессе вращения. Задавая давление в цилиндре, из уравнения сил можно определить смещение центра шейки относительно центра вкладыша, а затем, пользуясь геометрическими соотношениями, найти зазоры между вкладышем и ЧЭ всех четырех ОВТД, установленных в шейке коленчатого вала, на всем протяжении рабочего цикла.

При этом были обнаружены минимальные значения зазоров между вкладышем и шейкой ШП на фиксированных углах поворота коленчатого вала, формирующиеся при прокрутке двигателя от стартера [9]. Такие зазоры формируются, когда действующие силы прижимают вкладыш к ЧЭ (шейке ШП), при совпадении оси датчика и продольной оси шатуна в положении ЧЭ, обращенном к стержню шатуна. Коды C'_{01} – C'_{04} , соответствующие этим зазорам в зоне чувствительности каждого из четырех ОВТД, используются в качестве новых свободных членов ГХ, что приводит к коррекции аддитивной погрешности. Для получения указанных кодов испытания ДВС периодически прерываются для прокрутки двигателя от стартера.

Вкладыш ШП состоит из двух половин, каждая из которых во избежание задиrow в торцовых частях имеет скосы. Длина скоса и его глубина имеют строго определенные размеры, которые могут быть уточнены перед испытаниями с помощью профиломера. Для коррекции мультипликативной погрешности используются зазоры, соответствующие известной глубине скосов вкладыша. При этом предполагается, что профиль скоса и его глубина сохраняются неизменными на всех режимах, при любых скоростях вращения коленчатого вала и нагрузках. Для каждого ОВТД определен тот (один из четырех) скос, в пределах которого предпочтительнее определять новое значение чувствительности благодаря незначительности силовой составляющей зазора по сравнению с геометрической. Новое значение чувствительности определяется как отношение разности кодов, соответствующих началу и концу скоса, к глубине скоса, взятое с коэффициентом, учитывающим зависимость чувствительности от зазора, [10]. Это значение может определяться как по результатам прокрутки двигателя от стартера, так и в режиме испытаний.

Процедура коррекции заключается в замене прежних значений коэффициентов полинома, аппроксимирующего ГХ, на новые с периодичностью прокрутки двигателя от стартера. Однако, после первой же замены коэффициентов становятся недействительными значения составляющих погрешности, полученные экспериментально-расчетным методом на лабораторной установке для снятия ГХ. Кроме того, меняется характер формирования результата измерения, поскольку в моделях аккумулированы общие представления экспертов, которые оказывают непосредственное влияние на результат. Новые оценки погрешности могут быть получены с помощью интервальных оценок заменяемых коэффициентов ГХ.

3. Оценка неопределенности скорректированного результата

Модель, основанная на уравнении баланса сил, дает следующие интервалы: для ОВТД1 — $[\underline{c}_1, \bar{c}_1] = [0, 1.5]$, для ОВТД2 — $[\underline{c}_2, \bar{c}_2] = [0, 6]$, для ОВТД3 — $[\underline{c}_3, \bar{c}_3] = [0, 5]$ и для ОВТД4 — $[\underline{c}_4, \bar{c}_4] = [0, 1.5]$, где \underline{c}_i и \bar{c}_i — соответственно нижняя и верхняя границы (в микронах) значений квазиулевого зазора, соответствующего коду свободного члена C_0 i -ого ОВТД.

При нахождении ОВТД в пределах предназначенного для коррекции скоса силовая составляющая зазора для ОВТД1 и ОВТД3 согласно модели достигает 2.75 мкм и 1.25 мкм для ОВТД2 и ОВТД4. Это позволяет дать интервальную оценку чувствительности каждого канала, в которой $\underline{S} = \frac{\Delta C}{\Delta c + c_F}$, $\bar{S} = \frac{\Delta C}{\Delta c}$, где \underline{S} и \bar{S} — соответственно нижняя и верхняя граница чувствительности, ΔC — изменение кода на границах скоса, Δc — глубина скоса, c_F — силовая составляющая зазора в пределах скоса.

После коррекции аддитивной погрешности ГХ примет вид $C = S \cdot \{c + [\underline{c}, \bar{c}]\} + C'_0$. Отсюда в соответствии с определением интервальных арифметических операций можно записать для зазора $c = [\frac{C - C'_0}{\underline{S}} - \bar{c}, \frac{C - C'_0}{\bar{S}} - \underline{c}]$. Полученные границы интервала вместе с СКО случайной погрешности могут использоваться затем для вычисления стандартной неопределенности по типу В [5].

4. Заключение

На рисунке 1 представлены нескорректированный результат измерения зазора датчиком ОВТД4 за рабочий цикл, полученный при экспериментальных исследованиях ШП ДВС ВАЗ 21083 на скорости 2200 об/мин без нагрузки, и скорректированный результат в виде интервала возможных значений. Максимальная ширина интервала не превышает 10 мкм.

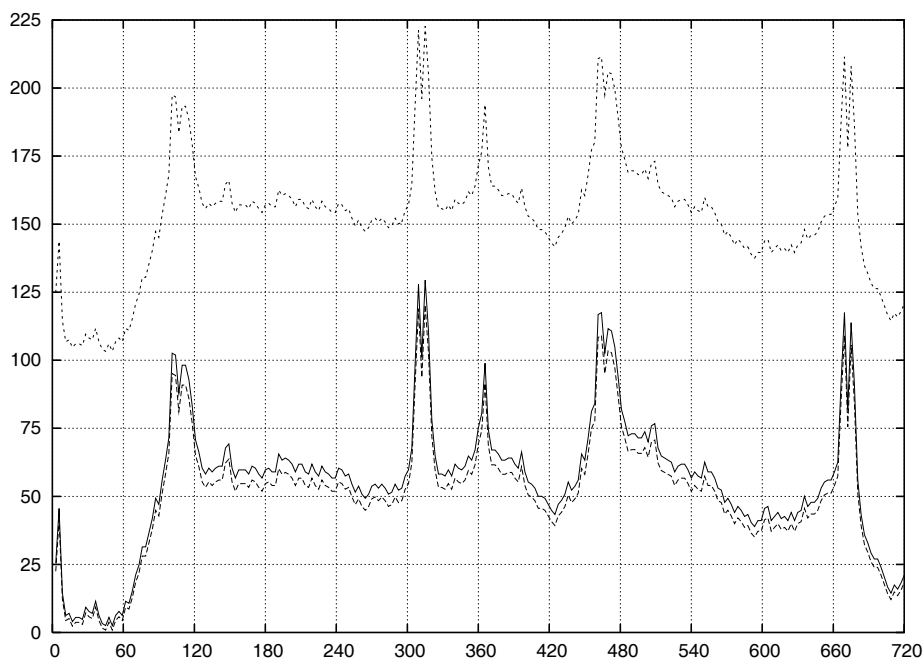


Рис. 1: Зазор за рабочий цикл (нескорректированный и границы скорректированного)

5. Литература

1. СЕКИСОВ Ю.Н., СКОБЕЛЕВ О.П., БЕЛЕНЬКИЙ Л.Б. и др. Методы и средства измерения многомерных перемещений элементов конструкций силовых установок. – Самара: СамНЦ РАН, 2001. – 188 с.
2. МИ 2440 – 97 ГСИ. Методы экспериментального определения и контроля характеристик, погрешности измерительных каналов измерительных систем и измерительных комплексов. – СПб.: ВНИИМС, 1997.
3. КНОРРИНГ В.Г., КНОРРИНГ Л.Н., МАРАМЗИНА М.Г., ТРОФИМОВА М.Ю. Концептуальные модели объектов и экспериментальных ситуаций в теории и технике измерений // Датчики и системы. – 2005. – № 7. – С. 72–76.
4. L. REZNIK, K.P. DAVKE Measurement models: application of intelligent methods // Measurement. – 2004. – N 35. – P. 47–58.
5. РМГ 43 – 2001 ГСИ. Применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". – Минск: ИПК Издательство стандартов, 2002.
6. ВYРУВОВ Д.П., ЕФИМОВ С.И., ИВАЩЕНКО С.А. и др. Двигатели внутреннего сгорания: Конструирование и расчет на прочность поршневых и комбинированных двигателей. – М: Машиностроение, 1984. – 384 с.
7. JAW-REN LIN Squeeze film characteristics of finite journal bearings: couple stress fluid model // Tribology International. – 1998. – Vol. 31, N 4. – P. 201–207.
8. ПРОКОПЬЕВ В.Н., БОЯРШИНОВА А.К., ГАВРИЛОВ К.В. Применение алгоритма сохранения массы при расчете динамики сложнагруженных опор скольжения // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 4. – С. 32–38.
9. БЕЛЕНЬКИЙ Л.Б., СЕКИСОВ Ю.Н., СКОБЕЛЕВ О.П. Методы коррекции аддитивных погрешностей измерения радиальных зазоров в шатунном подшипнике // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды VII международной конференции, Самара, 27 июня – 1 июля 2005 г. – Самара, 2005. – С. 168–174.
10. БЕЛЕНЬКИЙ Л.Б. Метод коррекции мультипликативной погрешности измерения радиальных зазоров в шатунном подшипнике // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды VIII международной конференции, Самара, 24–29 июня 2006 г. – Самара, 2006. – В печати.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

М.Б. Бозоров

Навоийский государственный горный институт, г. Навои, Узбекистан

E-mail: mamurjon@mail.ru

Аналитические преобразования, в какой-то степени, могут помочь в преодолении одного из главных недостатков интервального анализа — быстрого роста ширины интервалов. Системы компьютерной алгебры, такие как Mathematica, Maple, Matlab и др. обладают широкими возможностями работы с аналитическими выражениями.

В последнее время наряду с разработкой специального математического обеспечения для интервальных вычислений, интервальные алгоритмы встраиваются в существующие системы компьютерной алгебры. Например, в настоящее время интервальные алгоритмы доступны в известных системах Matlab (INTLAB), Maple (INTRAKX) и Mathematica.

В настоящей работе описывается программный комплекс, так называемый INTMATH, который включает в себя алгоритмы интервальной арифметики, интервальные векторно-матричные операции, вычисления интервальных элементарных и специальных функций для реализации интервальных методов решения задач численного анализа.

Далее, в работе приводятся результаты сравнения по эффективности программных комплексов INTLAB, INTRAKX и INTMATH.

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБОГАЩЕНИЯ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

М.Б. Бозоров, З.Х. Юлдашев

Навоийский государственный горный институт, г. Навои, Узбекистан

E-mail: mamurjon@mail.ru

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ziayut@mail.ru

Аннотация

В работе построена и исследована интервальная модель схемы замкнутого водооборота в технологии обогащения руд. В предположении интервальной детерминированности параметров, в рамках интервального анализа, получены расчетные формулы для параметров, характеризующих динамику водооборота.

Ключевые слова: обогащение, полезные ископаемые, схема водооборота, интервальная модель, интервальный метод

1. Подходы при решении задачи обогащения полезных ископаемых

Процесс обогащения полезных ископаемых, т.е. исследование руд на обогатимость, изыскание методов формирования комплексного сырья, разработка эффективной и экономичной схемы обогащения, управление флотационным процессом — являются сложнейшими задачами со многими неизвестными. Каждый фактор, например, фактор, влияющий на процесс флотации, связан с десятками других факторов, зависящих от него, влияющих друг на друга и на исходный фактор, в свою очередь. Например, изменение рН-пульпы изменяют концентрацию ксантогената, потенциал поверхности минералов, скорость окисления ионов серы, концентрацию ионов тяжелых металлов в пульпе и т.д.

Неопределенность и непредсказуемость изменения технологических показателей работы обогатительного процесса, являются следствием, по крайней мере, четырех причин.

Одной из причин неопределенности является сложность процесса, невозможность учета всех факторов и их взаимодействий.

Второй причиной неопределенности является неконтролируемое изменение параметров.

Третья причина неопределенности связана с массовостью процесса обогащения. Число элементарных агрегатов — частиц, подлежащих разделению на обогатительной фабрике, огромно. На фабрике, например, производительностью 35 тыс. т руды в сутки в 1 сек в процессе находится 900 млрд. частиц, а за смену через нее проходит $2,6 \cdot 10^{16}$ частиц [1].

Наконец, четвертой причиной неопределенности является существование погрешностей, связанных с несовершенством разделительных аппаратов, а также с существованием частиц с промежуточными свойствами — изоморфных. В результате промышленного разделительного процесса из исходной смеси получаются не чистые вещества, а только в той или иной степени обогащенные или обедненные продукты. Все эти обстоятельства, позволяют заключить, что детерминированное описание обогатительных процессов — задача высокой степени сложности.

В силу сказанного, процессы обогащения можно рассматривать в качестве кибернетической системы, для исследования которой необходимо прибегнуть к определенным упрощениям, зависящим прежде всего от постановки самой задачи.

Здесь мы рассмотрим задачу обогащения в следующей формулировке [1,2]:

Получить максимальную степень обогащения, используя флотацию с применением реагентов, например, ксантогената, сернистого натрия, извести и ксиленола.

Иначе говоря, манипулируя расходами перечисленных реагентов, добавляемых в рудную пульпу, мы должны получить обогащенный концентрат и при этом выбрать из всех возможных манипуляций (входных воздействий) такую их комбинацию, которая обеспечит максимальную степень обогащения (выходной параметр).

Заметим, что при такой постановке задачи нас не интересует ни механизм действия реагентов на руду, ни взаимодействие реагентов между собой, ни поведения пенного слоя. В результате наша модель является довольно простой: мы рассматриваем только воздействия на входе в “черный ящик” и смотрим, какой при этом получается выход (рис.1). “Черный ящик” является простейшей моделью любой системы, внутренняя структура которой может быть совершенно недоступной для

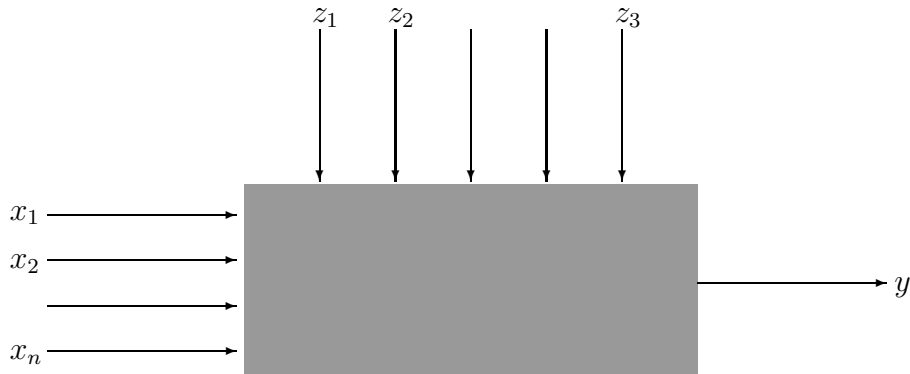


Рис. 1. "Черный ящик": x_1, x_2, \dots, x_n – регулируемые входные воздействия;
 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ – нерегулируемые воздействия;
 y – выходной параметр.

наблюдения. При этом в пределах поставленной нами задачи он по существу ведет себя совершенно так же, как и реальная система.

Таким образом, утилитарно-производственный подход, заложенный в идее "черного ящика" предусматривает не только достижение максимального значения выхода наиболее быстрым способом, но и получение математической модели процесса, являющейся исключительно компактным и удобным инструментом для исследования и управления реальным процессом. Иногда "черный ящик" является вообще единственным возможным инструментом исследования, так как только в редких случаях удается "заглянуть" внутрь системы, не нарушая её естественного состояния и хода процесса.

Наличие элементов неопределенности в рассматриваемых системах, для ряда авторов было основой к применению при исследованиях задач по обогащению полезных ископаемых методов теории вероятностей и математической статистики [3-5]. Исследование процессов обогащения полезных ископаемых и управления этими процессами также возможно на основе применения лишь статистических методов. При этом возможно использование как широко известных традиционных методов статистического анализа: дисперсионный, корреляционный, регрессионный анализ и т.п. Однако, неопределенность в данных может иметь нестатистическую природу и включать систематическую составляющую, ошибки округления и группирования данных, методические погрешности [6]. Подобные логические противоречия и другие недостатки статистических методов заставили многих исследователей трактовать природу неопределенности в задачах обогащения полезных ископаемых в более широком контексте. В результате, появились новые случаи применения других принципиально новых подходов, таких как теория нечетких множеств и методы интервального анализа.

Ниже мы будем предполагать знакомство с основами интервального анализа и придерживаться обозначений принятых в [7-8]. В работе интервалы и интервальные величины будут обозначаться жирным шрифтом, например, **A, B, W, a, b, x, y...**, тогда как неинтервальные (вещественные, точечные и т.п.) никак не специально не выделяются.

Для удобства изложения сохранены традиционные обозначения для входных и выходных параметров, принятые при описании технологий обогащения полезных ископаемых [1-5].

2. Интервальная модель для схемы замкнутого водооборота в технологии обогащения руд

Наиболее перспективным могут оказаться методы интервального анализа позволяющие, проигрывая с помощью ЭВМ работу системы замкнутого водооборота, моделировать процесс накопления на ограниченно большом периоде.

При построении приведенной ниже интервальной модели приняты следующие допущения:

- расход воды W в потоках системы остается постоянным в течение всего времени работы фабрики;
- непрерывная работа всей технологической цепочки рассматривается как последовательность дискретных циклов. В течение длительности одного цикла (час, смена, сутки и т.п.) система

находится в неизменном состоянии, происходит скачкообразный переход на новое состояние с начала нового цикла;

- емкости, в которые поступают потоки воды (сгуститель, фабрика), рассматриваются как операторы идеального смешивания, при котором содержание компонента на выходе емкости равно средневзвешенному содержанию компонента в самой емкости.

В общем случае система замкнутого водооборота состоит из двух резервуаров (сгуститель) вместимостью I_1 и (отстойник) вместимостью I_2 , слив, которых W_{cg} и W_o вместе со свежей водой W_1^{sv} подается в процесс на обогатительную фабрику. Часть воды (W_{pot}) выводится из процесса вместе с продуктами обогащения, испарением и прочим. Вода, поступающая в отстойник вместе с твердой фракцией (чаще всего хвостами), разделяется, часть воды W_{xb} связывается с осажденной твердой фракцией или уводится дренажем, часть поступает обратно в процесс и часть W_{sb} может сбрасываться в “природу”. Предполагается рассмотрение процесса с какого-то начального уровня b_0 (при этом $W_{sb}=0$) до заданной I_2 . Для общности предусматривается, что сгуститель и отстойник может подаваться свежая вода W_2^{sb} и W_3^{sb} . С другой стороны, с целью упрощения, рассмотрим работу системы по короткому контуру без отстойника, т.е. $W_o = W_3^{sb} = W_{sb} = 0$.

В реальных ситуациях параметры α , W , A_p , I и ε_p (с индексами или без индексов) из-за погрешностей в измерениях, а также из-за других случайных факторов, не бывают известны точно. Но всегда можно с достаточной степенью достоверности задать интервалы, в которых они лежат, т.е. $\alpha \in \alpha$, $W \in \mathbf{W}$, $A_p \in \mathbf{A}_p$, $\varepsilon_p \in \varepsilon_p$ и $I \in \mathbf{I}$. В предположении интервальной недетерминированности параметров, в рамках интервального анализа, получим расчетные формулы для параметров, характеризующих динамику водооборота.

Рассмотрим i -цикл работы системы. Содержание компонента в сгустителе к началу i -го цикла составит средневзвешенную величину, равную отношению к вместимости сгустителя количества компонента, находившего в сгустителе на предыдущем цикле (за вычетом ушедшего количества компонента с песками и технической водой, подаваемой в процесс) и количества компонента, поступившего, со свежей и возвратной водой:

$$\alpha_{i-1} = \frac{\mathbf{I}_1 \alpha_{i-1}^{sg} + \mathbf{W}_2^{sv} \alpha_2^{sv} + \mathbf{W}_{voz} \alpha_{i-1}^{voz} - \mathbf{W}_{pes} \alpha_{i-1}^{pes} - \mathbf{W}_{sg} \alpha_{i-1}^{sg}}{\mathbf{I}_1} \quad (1)$$

где $\alpha_{i-1}^{sg} \in \alpha_{i-1}^{sg}$ - содержание компонента в сгустителе на предыдущем цикле; $\alpha_{i-1}^{voz} \in \alpha_{i-1}^{voz}$ - то же, в возвратной воде; $\alpha_{i-1}^{pes} \in \alpha_{i-1}^{pes}$ - содержание компонента в воде песков сгустителя.

Размерность α — единица массы компонента на единицу объема продукта. Содержание компонента в возвратной воде, поступившей в сгуститель на предыдущем цикле, составит:

$$\alpha_{i-1}^{voz} = \frac{\mathbf{A}_p \varepsilon_p + \mathbf{W}_{sg} \alpha_{i-1}^{sg} k + \mathbf{W}_1^{sv} \alpha_1^{sv}}{\mathbf{W}_{sg} + \mathbf{W}_1^{sv}}, \quad (2)$$

где $\alpha_1^{sv} \in \alpha_1^{sv}$ и $\alpha_2^{sv} \in \alpha_2^{sv}$ - содержание компонента в свежей воде, подаваемой в процесс и сгуститель (вода может подаваться из внешнего источника и быть загрязненной компонентом); $k \leq 1$ - коэффициент, учитывающий разложение компонента.

Подставив α_{i-1}^{voz} и \mathbf{W}_{voz} из формулы (2) в (1), после несложных преобразований, получим линейное уравнение концентрации компонента в текущем цикле от концентраций на предыдущем

$$\alpha_i^{sg} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \alpha_{i-1}^{sg}, \quad (3)$$

где \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 — константы, определяемые параметрами схемы.

Исходя из балансовых соотношений

$$\mathbf{W}_{pes} = \mathbf{W}_1^{sv} + \mathbf{W}_2^{sv} - \mathbf{W}_{pot} = \mathbf{W}_1^{sv} + \mathbf{W}_2^{sv} - \mathbf{W}_{tehn}(1 - \varepsilon_{voz}),$$

в результате ряда преобразований получим оценочное выражение для концентраций

$$\alpha_i^{tehn} = \frac{\mathbf{A}_p \varepsilon_p \varepsilon_{voz} + \mu \alpha_1^{sv} \mathbf{I}_1^+ \mathbf{W}_1^{sv} \alpha_1^{sv} (1 - \mu \varepsilon_{voz}) + \mathbf{W}_2^{sv} (\alpha_2^{sv} - \mu \alpha_1^{sv})}{\mathbf{I}_1 (1 + \mu)} + \left(1 - \frac{\mathbf{W}_1^{sv} \varepsilon_{voz} + \mathbf{W}_2^{sv}}{\mathbf{I}_1}\right) \alpha_{i-1}^{tehn} \quad (4)$$

Просчитывая по формуле (4) последовательность интервальных величин α_i^{tehn} , представляется возможным определить время (число i) достижения предельной концентрации α_{lim}^{tehn} .

3. Численные эксперименты

Достоверность полученной расчетной формулы сравнивалась с экспериментальными данными, приведенными в [2], где были рассчитаны показатели работы опытной флотационной установки на оборотной воде.

Анализ формул (3) и (4) показывает, что с ростом i содержание компонента в сливе сгустителя в общей технологической воде достигает предельной величины $i \rightarrow n$, $\alpha_i^{sv} \rightarrow \alpha_{\text{lim}}^{sv}$ и $\alpha_i^{tehn} \rightarrow \alpha_{\text{lim}}^{tehn}$. Эта величина зависит от величины коэффициентов \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 .

Результаты численных расчетов показывают, что применение методов интервального анализа для задач обогащения полезных ископаемых позволяют получать приемлемые границы при широком диапазоне изменения исходных данных.

4. Литература

1. Барский Л.А., Рубинштейн Ю.Б. Кибернетические методы в обогащении полезных ископаемых. — М.: Недра, 1970.
2. Шупов Л.П. Моделирование и расчет на ЭВМ схем обогащения. — М.: Недра, 1980.
3. Рубинштейн Ю.Б., Волков Л.А. Математические методы в обогащении полезных ископаемых. — М.: Недра, 1987.
4. Барский Л.А., Козин В.З. Системный анализ в обогащении полезных ископаемых. — М.: Недра, 1978.
5. Козин В.З. Контроль технологических процессов обогащения: Учебное пособие. — Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2003.
6. Воцинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределённости. — Москва-София: Изд. МЭИ – Техника, 1989.
7. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.
8. MOORE R.E. Interval Analysis. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1966.

ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ ПО ИНТЕРВАЛЬНЫМ ДАННЫМ

П.В. Бронз

ФГУП “Центральный научно-исследовательский институт
управления, экономики и информации Росатома”
127434, Москва, Дмитровское шоссе, д.2
E-mail: polina_bronz@ainf.ru

Аннотация

Экономическое развитие страны реализуется через совокупность инвестиционных проектов (ИП), под которым в экономике в общем случае понимается “конкретное мероприятие, в которое вкладываются денежные средства с целью получения прибыли и/или прироста капитала”.

В рыночной экономике выбор наиболее рационального проектного предложения осуществляется по результатам тендера, на который каждый из участников представляет материалы по оценке экономической эффективности предлагаемого ИП.

1. Оценка эффективности инвестиционных проектов

Оценка эффективности ИП общего плана обычно проводится в соответствии с методикой UNIDO [1]. При этом наиболее важными критериями коммерческой эффективности являются чистый дисконтированный доход (ЧДД) и дисконтированные затраты (ДЗ). Эти критерии задают единственное число, характеризующее эффективность проекта на всем жизненном цикле от начала строительства до вывода из эксплуатации.

Расчет любого критерия основан на преобразовании финансовых потоков на горизонте планирования. С позиции инвестора наиболее важным критерием является ЧДД, который рассчитывается по формуле:

$$\text{ЧДД} = \left(\sum_{t=1}^T \frac{D(t)}{(1+d)^t} - \sum_{t=1}^T \frac{Z(t)}{(1+d)^t} \right) \cdot (1-k), \quad (1)$$

где $D(t)$ – текущая выручка; $Z(t)$ – текущие расходы в моменты времени t ; d – норма дисконтирования; T – длительность расчетного периода, обычно равная жизненному циклу проекта (для крупномасштабных проектов, например проектов АЭС, значение T может превышать 50 лет); k – налоги на прибыль.

Важными дополнительными оценками эффективности и устойчивости проекта являются срок окупаемости проекта ($T_{\text{ок}}$), т.е. номер года, при котором ЧДД=0, и внутренняя норма доходности проекта (ВНД), т.е. такое предельное значение дисконта, при котором ЧДД=0.

Считается, что чем выше значение ВНД и больше разница между ее значением и заданной ставкой дисконта d , тем устойчивее данный проект.

Учитывая, что инвестор начнет получать доход от проекта только при $t > T_{\text{ок}}$, очевидно, что срок окупаемости должен быть значительно меньше длительности жизненного цикла.

Расчет критериев эффективности обычно ведется с помощью таких широко известных и верифицированных пакетов программ, как Альт-инвест, ТЭО-Инвест, Project-Expert и ряда других.

В качестве исходных данных при этом выступают значения прогнозируемых параметров внешней среды (тарифы, цены на продукцию, налоги, норма дисконта и др.), а также технико-экономические показатели (ТЭП) проекта, включая, стоимость и сроки строительства объекта, ежегодные затраты на его эксплуатацию и др.

Любой ИП с длительным жизненным циклом связан с неточностью ТЭП проекта и неопределенностью параметров внешнеэкономического окружения, что порождает риски для инвестора. При анализе эффективности и устойчивости проекта в условиях неточности и неопределенности, как правило, используются анализ чувствительности и сценарный анализ [1].

Анализ чувствительности является наиболее популярным и простым подходом к оценке критериев эффективности в условиях неточности и неопределенности. Его суть состоит в том, что рассматривается влияние выбранного параметра проекта x_j на оценку выбранного критерия y при

фиксированных значениях остальных параметров x_i . В общем случае процедура принятия решения не формализована. Очевидно, что подход не позволяет получить информацию об изменении критериев при одновременном изменении нескольких параметров проекта.

Сценарный анализ (What-If-Analysis) является главным методом, который рекомендуется UNIDO для оценки экономических рисков ИП в условиях неопределенности параметров внешней экономической среды. Под сценарием понимается фиксированная комбинация возможных значений ТЭП проекта и параметров внешней среды (цен на нефть, тарифов на электроэнергию, и т.п.). Предполагается, что число различных сценариев конечно и каждому из них экспертным путем приписывается определенная вероятность p_i (сумма вероятностей равна 1). В сценарном анализе *отрицательным результатом* для проекта по критерию y_i считается ситуация, при которой его значение меньше заданного инвестором порога C (для минимизируемого критерия — больше заданного порога C). Из очевидных соображений по критерию ЧДД отрицательный результат имеет место, если ЧДД ≤ 0 , т.е. порог $C = 0$.

Для выбранного критерия y риск R отрицательного результата проекта вычисляется по формуле:

$$R = \sum p_i^-, \quad (2)$$

где p_j^- означает вероятность для сценариев с отрицательным результатом.

Недостатком сценарного анализа, который широко применяется в международной практике, является его ориентация на конечное число сценариев, вероятности которых назначаются экспертом.

2. Интервальный подход к оценке эффективности проектов

В докладе предложен подход к оценке эффективности ИП в условиях неточности ТЭП и неопределенности параметров внешнего окружения.

В рамках предлагаемого подхода неопределенность проектных и прогнозных параметров задачи x_i описывается через границы возможных значений, т.е. в форме интервалов $[x_i] = [x_i^{min}; x_i^{max}]$. При этом показано, что для широкого класса ИП энергетики на основе интервально-заданных исходных данных можно рассчитать выбранный критерий эффективности y в форме интервала $[y] = [y_{min}; y_{max}]$, который задает границы возможных значений выбранного критерия при изменении исходных данных внутри заданных границ [2, 3]. Для нахождения границ интервальных критериев формируются два экстремальных сценария — пессимистический и оптимистический. В пессимистическом сценарии выбирается наихудшая с экономической точки зрения комбинация “точечных” значений ТЭП проекта (максимальные затраты на эксплуатацию, минимальный тариф на электроэнергию и т.п.), а в оптимистическом сценарии — наилучший в экономическом смысле набор ТЭП. Учитывая, что значения критериев являются монотонными функциями ТЭП, при пессимистическом сценарии имеют место наихудшие критерии эффективности, а при оптимистическом сценарии — наилучшие.

Интервальный подход является альтернативой сценарному анализу, т.к. позволяет более просто и обоснованно решить задачи оценки эффективности ИП и рисков проекта в условиях неточности и неопределенности ТЭП.

Под риском ИП для выбранного критерия эффективности понимается возможность $0 \leq R \leq 1$ получения отрицательного результата [4]. Понятие возможности аналогично понятию вероятности, но не опирается на гипотезу о случайности и не предполагает задание плотности вероятности на интервале неопределенности.

При заданном интервале неопределенности критерия эффективности $[y] = [y_{песс.}; y_{оптим.}]$ и заданном пороговом значении C этого критерия расчет оценки риска осуществляется по формуле (3) для максимизируемого критерия.

$$R_{y < C} = \begin{cases} 0 & \text{при } y_{песс.} > C \\ (C - y_{песс.}) / (y_{оптим.} - y_{песс.}) & \text{при } y_{песс.} \leq C \leq y_{оптим.} \\ 1 & \text{при } y_{оптим.} \leq C \end{cases} \quad (3)$$

Для минимизируемого критерия формула аналогична, но при этом $R_{y > C} = 0$, если $y_{песс.} < C$ и $R_{y > C} = 1$, если $y_{оптим.} > C$.

Легко показать [4], что если на интервале $[y]$ задать равномерное распределение случайной величины и рассчитать вероятность того, что она будет меньше константы C , то результат совпадет с формулой (3).

Ниже предлагаемый подход иллюстрируется на примере расчета ИП АЭС.

3. Оценка эффективности инвестиционного проекта АЭС

Рассматривается проект АЭС с энергоблоком ВВЭР-1000 установленной мощностью 1 ГВт. Такой проект относится к крупномасштабным проектам с длительным жизненным циклом: стоимость строительства от 1–1,5 млрд. долл, срок строительства 5–7 лет, срок эксплуатации 40–60 лет.

Исходные данные по проекту АЭС для расчетов, взятые из референтных отечественных и зарубежных источников [5, 6], были разбиты на две группы:

1. Параметры, заданные с высокой точностью;
2. Неточно заданные или неопределенные параметры.

К первой группе относятся паспортные характеристики проекта АЭС с реакторной установкой ВВЭР-1000, которые можно считать достаточно точными. К ним были отнесены: установленная электрическая мощность (брутто) — 1068 МВт, срок строительства — 6 лет, КПД установки — 0,334; глубина выгорания топлива — 43 МВт(т)сут./кг.У, срок службы — 40 лет, коэффициент использования установленной мощности (КИУМ) — 0,8, ставка налога с прибыли — 23% и т.д.

Ко второй группе отнесены неопределенные переменные проекта, которые включают: тариф на электроэнергию, цену ядерного топлива, удельную стоимость строительства, затраты на эксплуатацию, норму дисконта

Эти переменные, заданные в интервальной форме, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Переменные проекта АЭС

Тариф на электроэнергию, (цент./Квт.ч)	Цена ядерного топлива, (долл. за кг. У)	Уд. стоимость стр-ва, (долл./кВт)	Затраты на эксплуатацию, (млн. долл. в год)	Норма дисконта, (%)
[2,5; 3,0]	[600; 1400]	[1000; 1500]	[30; 50]	[5; 10]

Расчеты проводились с помощью программы “Интервал-Инвест”, разработанной в ФГУП “ЦНИ-ИАТОМИНФОРМ”. На рис. 1 приведены граничные кривые ежегодных значений ЧДД для пессимистического и оптимистического сценариев, которые образуют “трубку” траекторий при всех возможных сценариях внутри заданных границ. По графику легко определить значения критерия ЧДД для граничных сценариев, а также срок окупаемости проекта.

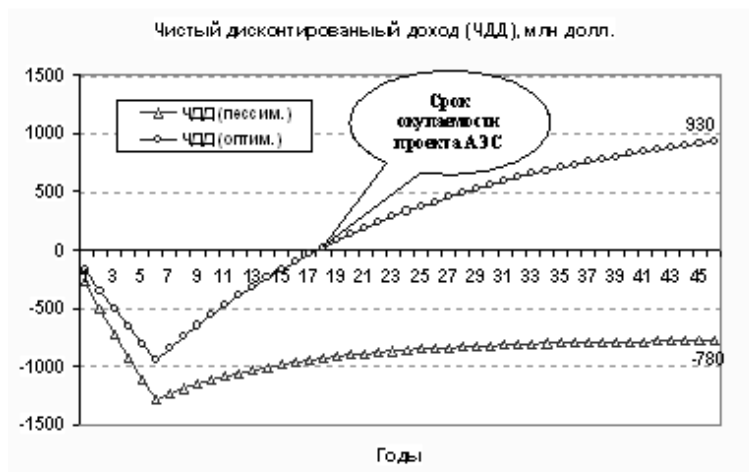


Рис. 1. Кривые текущих значений ЧДД

При оценке проектов АЭС наряду с критериями эффективности UNIDO используется рекомендуемый МАГАТЭ [7] критерий минимальной дисконтированной стоимости производства электроэнергии или т.н. тариф безубыточности (ТБУ). ТБУ — есть такой предельный тариф, при котором доход собственника будущей АЭС равен нулю. Критерий рассчитывается по формуле:

$$ТБУ = \sum_{t=1}^{T_{жиз}} \left(Z_i \cdot \frac{1}{(1+d)^{t-1}} \right) / \sum_{i=T_{пуска}}^{T_{жиз}} \left(Q_i \cdot \frac{1}{(1+d)^{t-1}} \right), \quad (4)$$

где $T_{жц}$ – длительность жизненного цикла проекта; $T_{пуска}$ – год пуска станции; Z_i – полные годовые затраты на всем жизненном цикле; Q_i – количество проданной в год электроэнергии; d – норма дисконтирования.

Очевидно, что чем меньше тариф безубыточности анализируемого проекта в сравнении с прогнозируемым рыночным тарифом, тем больше будет ожидаемый доход собственника АЭС.

Для расчета рисков экспертным путем были заданы допустимые пороги C по выбранным критериям.

По представленным исходным данным были рассчитаны интервальные значения критериев эффективности и риски проекта. Результаты вычислений для указанных критериев приведены в табл. 2.

Таблица 2. Интервальные критерии эффективности и риски проекта АЭС с энергоблоком ВВЭР-1000

Критерии	Пессим.	Оптимис.	Пороги C	Риск
ЧДД, млн долл.	-780	930	0,00	0,46
ТБУ, цент/кВт.ч.	3,89	1,52	2,00	0,80
$T_{ок}$, лет*	не окупается	18		
ДЗ, млн долл.*	1767	1527		

*Примечание. Для критериев $T_{ок}$ и ДЗ пороги не задавались и значения рисков не рассчитывались.

Оценку рисков с использованием формулы (3) поясним на примере критерия ЧДД при пороге $C = 0$. Как видно из табл. 2, экстремальные значения критерия составляют:

$$\text{ЧДД}_{\text{песс.}} = -780 \text{ млн долл.} \quad \text{и} \quad \text{ЧДД}_{\text{оптим.}} = 930 \text{ млн долл.}$$

Отсюда по формуле (3) получаем значение риска того, что ЧДД превысит заданное пороговое значение C :

$$R_{\text{ЧДД} < C} = \frac{C - \text{ЧДД}_{\text{песс.}}}{\text{ЧДД}_{\text{песс.}} - \text{ЧДД}_{\text{оптим.}}} = \frac{0 - (-780)}{930 - (-780)} = 0,46.$$

Аналогично рассчитываются риски по другим критериям.

По международной шкале градации уровней рисков [8] малым риском считается значение риска в интервале $0,1 < R < 0,3$. Риск с большим значением относится к высоким.

Из этого следует, что исследуемый проект АЭС по всем выбранным критериям является высоко рискованным.

Для выработки обоснованных рекомендаций по повышению экономической эффективности ИП АЭС была решена обратная задача, а именно, для наиболее влияющих на проект переменных (тарифа на электроэнергию, удельной стоимости строительства и нормы дисконта) были определены такие интервальные значения, при которых риск по критерию ЧДД не превышает допустимый.

Искомые интервалы составили: тариф на электроэнергию – [2,5; 3,5] цент./Квт.ч; удельная стоимость строительства – [1000; 1200] долл./кВт; норма дисконта – [5; 7] %. При этом интервальное значение ЧДД составило [-308; 1318] млн долл., риск $R_{\text{ЧДД} < C} = 0,19$. Вместе с тем даже при этих диапазонах переменных риск по критерию ТБУ получился существенным ($R_{\text{ТБУ} > C} = 0,56$).

Предложенный интервальный подход может быть использован для оценки эффективности не только проектов АЭС, но и других инвестиционных проектов в условиях неточности ТЭП и неопределенности параметров проекта.

Наиболее полной моделью оценки эффективности ИП является аналитическая модель зависимости критерия вида $y = f(x_1, x_2, \dots)$. При этом, как утверждается в [1], при не слишком широких диапазонах неопределенности параметров достаточно точное приближение обеспечивает линейная модель

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_m \cdot x_m. \quad (5)$$

Анализ рассмотренного проекта АЭС показал, что условие линейности модели сохраняется, если отклонение переменных относительно среднего значения не превышает 40%.

Наличие аналитической модели вида (5) позволяет решать все задачи оценки эффективности ИП, включая анализ чувствительности, прогноз значений критерия и расчет оценки риска. Разработанный алгоритм построения аналитической модели основан на использовании данных вычислительного эксперимента, которые представляются в виде матрицы значений параметров X и вектора значений критерия Y . Оценки коэффициентов b_i аналитической модели находятся методом наименьших квадратов.

4. Литература

1. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов (теория и практика). – М.: “Дело”, 2001. – 832 с.
2. Воцинин А.П., Куприянов М.В., Тюрин А.В., Яковлев Н.Е., Рачков В.И. Интервальная модель оценки инвестиционных проектов АЭС в условиях неопределенности и риска // Международная конференция, М., НИКИЭТ. 2003.
3. Воцинин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. – 2002. – № 1.
4. Воцинин А.П., Тюрин А.В., Бронз П.В. Интервально-вероятностная модель оценки рисков при моделировании развития атомной энергетики // Тез. докл. международной конференции “Планирование развития энергетики: методология, программное обеспечение, приложения”. Москва, 25 октября – 27 октября 2004. — М.: ФГУП “ЦНИИАтоминформ”, 2004.
5. Технические характеристики проектов АЭС с реакторными установками типа ВВЭР-640, БН-800, МКЭР-1000, ВВЭР-1000 (В-428), ВВЭР-1000 (В-392), ВВЭР-1500, УВР-1500. Рабочие материалы комиссии специалистов Минатома, М. 1999.
6. CHIRICA T., METES M. “The competitiveness of the Nuclear Power Plants”.
7. Economic Evaluation of Bids for Nuclear Power Plants, Technical Reports, Series No 396, IAEA, Vienna, 2000.
8. ЛАПУСТА М.Г., ШАРШУКОВА Л.Г. Риски в предпринимательской деятельности. – М.: ИНФРА-М, 1998.

ПОГРЕШНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ РЯДА, ОЦЕНИВАЕМОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИЕЙ, НА ПРИМЕРЕ НАТУРАЛЬНОГО ЛОГАРИФМА

Е.В. Виноградов

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dm_jonny@mail.ru

Аннотация

Рассматривается полуинтервальная организация вычисления функции, предусматривающая приведение аргумента к базовому промежутку, расчет значения традиционными методами, использования оценки погрешности, основанной на предварительном анализе вычисляемой функции, в интервальной манере, и возврат к начальным значениям (выход из базового промежутка). Указанный подход зачастую позволяет добиться существенного сужения результата, ускорить процесс вычисления, а также уменьшить размер занимаемой переменной памяти (с целью избежания необходимости применения "расширенных" типов данных при реализации) и управлять точностью полученных данных. Приводятся формулы, справедливые для погрешности ряда, оцениваемого геометрической прогрессией, а также пример выбора базового промежутка, показывающий преимущества такого подхода.

Ключевые слова: интервальные вычисления, локализатор, погрешность вычисления, вычисления на компьютере

Keywords: localizing computing, interval computing, localizator, error estimation, computer evaluations

1. Введение

Вычисления на компьютере как правило проводятся с погрешностью в силу ряда причин, связанных с ограничением на размер используемой программой памяти, конечным числом итераций в суммировании ряда, и т.д. При этом увеличение количества шагов вычисления вызывает возрастание инструментальной погрешности. В случае использования исключительно интервальных вычислений ([1]), этот факт приводит к увеличению результирующего интервала, а в некоторых случаях даже к вырождению его во всю числовую ось.

Были разработаны методики, позволяющие использовать комбинацию из обычных вычислений и интервальных (например, [2]), построенные на основе метода, предложенного A. Ziv [3]. Однако, такие методы требуют операций с "двойной" (составленной из двух чисел типа double) арифметикой на основе итерационного процесса до получения результата требуемой точности.

Для решения этой проблемы можно использовать комбинацию из обычных вычислений и интервальных — вычислять значение функции в неинтервальной манере, а затем учитывать погрешность такого вычисления, полученную в интервальной манере (полуинтервальные вычисления). Таким образом в некоторых случаях можно добиться существенного сужения результата, а также ускорить процесс вычисления (например, за счет уменьшения количества шагов вычисления).

Для этого требуется предварительное исследование процесса неинтервального вычисления с тем, чтобы иметь критерии для влияния на него, а также для оценки погрешности. При этом так как учет погрешности происходит в интервальной манере, в результате получается интервал, гарантированно содержащий в себе точный результат.

Подобный подход, кроме того, позволяет благодаря выбору базового промежутка во многих случаях получить более высокую точность вычислений на компьютере без использования в процессе вычисления расширенных типов данных (хотя, конечно, такие типы могут потребоваться при выводе результата на экран).

2. Базовое решение

Предполагается, что вычисления проводятся в системе, соответствующей четырем Гипотезам интервального анализа в соответствии с [1]. В работе [4] было показано, что многие из существующих на сегодняшний день вычислительных систем этим гипотезам соответствуют.

В работе [5] были продемонстрированы методы расчета погрешности вычисления положительного полинома в базовом промежутке $[0, x_\delta]$.

Основным результатом работы является оценка погрешности вычисления полинома $\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ следующего вида:

$$f(x) \in [(1 - \alpha)\tilde{\varphi}(x) + \underline{r(x)}, (1 + \alpha)\tilde{\varphi}(x) + \overline{r(x)}] = F_0(x), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad \xi \leq \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \frac{\sigma(x_0^\delta)}{\varphi(x_0^\delta)},$$

$$\sigma(x) = \frac{2n + 1}{(1 - \beta)^{2n}} a_n x^n + \frac{2n - 1}{(1 - \beta)^{2n-2}} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad \beta = \lambda \mu^{-s},$$

$r(x)$ – оценка остатка ряда (методической погрешности), λ – максимальное отношение единицы младшего разряда к разнице между округленным и точным значением результата, μ – основание внутренней системы счисления, s – число символов порядка аргумента, x_0^δ – максимальное значение аргумента в базовом промежутке.

3. Основные соображения для погрешности вычисления ряда

Упомянутый выше подход можно естественным образом продолжить на степенные ряды, оцениваемые геометрической прогрессией.

Будем рассматривать неубывающую неотрицательную функцию $f(x)$. Пусть для нее строится степенной ряд для $x \geq 0$ на основе разложения

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k, \quad a_k \geq 0, \quad \varphi(x) = f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k. \quad (2)$$

Требование $a_k \geq 0$ связано с необходимостью обеспечения монотонности по включению. Тогда методической погрешностью будет остаток ряда

$$r_{n+1} = f(x) - \varphi(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k. \quad (3)$$

Кроме того, будем предполагать, что ряд сходится в БП $x_\delta = [0, x_\delta]$, и подчинен при этом признаку Даламбера:

$$\sup_{k \geq n+1} \frac{a_{k+1} x_\delta}{a_k} = \gamma^0 < 1. \quad (4)$$

Пусть также

$$\gamma_0 = \inf_{k \geq n+1} \frac{a_{k+1} x_\delta}{a_k}. \quad (5)$$

Тогда тем более $\gamma_0 < 1$.

Очевидно, что

$$r_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1} \left(1 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} x + \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}} x^2 + \dots \right). \quad (6)$$

Учитывая, что рассматриваем геометрическую прогрессию, последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$r_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1} \left(1 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} x + \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right)^2 x^2 + \dots \right). \quad (7)$$

Так как $a_{k+1}/a_k \geq \gamma_0/x_\delta$ при $k \geq n+1$, то

$$r_{n+1} \geq a_{n+1} x^{n+1} \left(1 + \gamma_0 \frac{x}{x_\delta} + \left(\gamma_0 \frac{x}{x_\delta} \right)^2 + \dots \right), \quad (8)$$

или

$$r_{n+1} \geq \underline{r_{n+1}} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{1 - \gamma_0 \frac{x}{x_\delta}}. \quad (9)$$

Аналогично для верхней оценки, т.к. $a_{k+1}/a_k \leq \gamma^0/x_\delta$, при $k \geq n+1$

$$r_{n+1} \leq \overline{r_{n+1}} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{1 - \gamma^0 \frac{x}{x_\delta}}. \quad (10)$$

Таким образом, получается включение

$$\begin{aligned} f(x) &\in [f_1(x), f_2(x)], & f_1(x) &= \varphi(x) + \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{1 - \gamma \frac{x}{x_\delta}}, \\ \gamma_1 &= \gamma_0/x_\delta, & \gamma_2 &= \gamma^0/x_\delta, \end{aligned} \quad (11)$$

т.е.

$$\gamma_1 = \inf_{k \geq n+1} a_{k+1}/a_k, \quad \gamma_2 = \sup_{k \geq n+1} a_{k+1}/a_k.$$

4. Оценка относительной величины арифметической погрешности

Преобразуем схему Хорнера из [5]:

$$\varphi(x) = \frac{a_{n+1}x^n}{1 - \gamma x} + a_n x^n + \dots = ((\dots((\frac{a_{n+1}}{1 - \gamma x}x + a_n)x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x. \quad (12)$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты a_k заданы точно. Тогда выражение для $\tilde{\varphi}(x)$ через Θ будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{a_{n+1}x^{n+1}\theta^{2n+3}}{(1 - \gamma x \theta'_{n+1})\theta''_{n+1}} + a_n x^n \theta^{2n+1} + \dots, \quad (13)$$

где степень θ показывает, сколько (различных) θ находится в данном месте выражения в качестве множителей, и справедливо

$$\theta_- = \frac{1}{1 + \beta} \leq \theta \leq \frac{1}{1 - \beta} = \theta_+. \quad (14)$$

Так как, кроме того, все коэффициенты a_k , аргумент x и параметр γ неотрицательны, причем знаменатель в первом слагаемом положителен, оценка арифметической погрешности запишется как

$$\Delta_- + (\beta_n^- a_n x^n + \dots + \beta_1^- a_1 x)^* \leq \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) \leq \Delta_+ + (\beta_n^+ a_n x^n + \dots + \beta_1^+ a_1 x)^*, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\mp} &= \frac{a_{n+1}x^{n+1}\theta_{\mp}^{2n+3}}{(1 - \gamma x \theta_{\mp})\theta_{\pm}} - \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{1 - \gamma x} = a_{n+1}x^{n+1}\delta_{\mp}, \\ \delta_{\mp} &= \frac{\theta_{\mp}^{2n+3}}{(1 - \gamma x \theta_{\mp})\theta_{\pm}} - \frac{1}{1 - \gamma x}. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее необходимо оценить слагаемые правой и левой частей для (15). Задача поиска двусторонней оценки для δ_{\mp} , и, далее, для Δ_{\mp} , эквивалентна экстремизации на отрезке $[-\beta, \beta]$ следующей функции:

$$\psi(\nu) = \frac{1}{(1 + \nu)^{2n+3}} = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu - \gamma x)(1 + \nu)^{2n+2}}. \quad (17)$$

Т.к. $\frac{1}{1 - \gamma x} = \psi(0)$, то $\delta_{\pm} = \psi(\pm\beta) - \psi(0)$. По формуле конечных приращений

$$\begin{aligned} \delta_+ &= \beta\psi'(\beta_1), & \delta_- &= -\beta\psi'(\beta_2), \\ \beta_1 &\in [0, \beta], & \beta_2 &\in [-\beta, 0]. \end{aligned} \quad (18)$$

Поэтому

$$|\delta_{\mp}| \leq \beta \sup_{[-\beta, \beta]} |\psi'(\nu)|. \quad (19)$$

Далее,

$$\psi'(\nu) = \frac{(2n + 3) - (2n + 1)\nu + \frac{1 - \nu^2}{1 + \nu - \gamma x}}{(1 + \nu + \gamma x)(1 + \nu)^{2n+3}}. \quad (20)$$

Убывание правой части по ν очевидно. Поэтому мажоранту можно получить, подставив $\nu = -\beta$:

$$|\psi'(\nu)| \leq \frac{2n+3 + (2n+1)\beta + \frac{1}{1-\beta-\gamma x}}{(1-\beta-\gamma x)(1-\beta)^{2n+3}} = \sigma_1(x), \quad (21)$$

т.е. $|\delta_{\mp}| \leq \beta\sigma_1(x)$. Тогда

$$|\Delta_{\pm}| \leq \beta\sigma_1(x)a_{n+1}x^{n+1}. \quad (22)$$

Оценка для слагаемых (*) в (15) была получена в [5].

Таким образом, из (15) следует оценка

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \leq \beta \left(\sigma_1(x) + \frac{\sigma(x)}{(1-\beta)^2} \right). \quad (23)$$

Отсюда оценка относительной погрешности будет выглядеть как

$$\frac{|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)|}{\varphi(x)} \leq \beta \sup_{0 \leq x \leq x_{\delta}} \frac{\sigma_1(x) + \frac{\sigma(x)}{(1-\beta)^2}}{\varphi(x)}. \quad (24)$$

Далее справедливы уже упоминавшиеся ([5]) методы для вычисления результирующего интервала.

5. Выбор базового промежутка (для натурального логарифма)

Покажем способ выбора базового промежутка на примере натурального логарифма.

Если проводить вычисление этой функции при помощи степенного ряда (например, (25/28) из [6]), то вышеизложенные рассуждения будут справедливы и погрешность в базовом промежутке может быть по ним рассчитана. Рассмотрим способ выбора базового промежутка в этом случае.

Благодаря тому, что $\ln x = p \ln \mu + \ln t$ (где p – порядок, а t – мантисса числа в машинном представлении), а также условию нормировки мантиссы, в качестве базового промежутка можно взять $[1, \sqrt{\mu}]$. При этом на отрезке $t \in [\sqrt{\mu}, \mu]$ будет использоваться логарифмирование обратной величины, т.к. очевидно, что $\ln x = (p+1) \ln \mu - \ln m'$, $m' = \frac{\mu}{m}$.

Так как в большинстве современных вычислительных систем предусмотрены способы отделения мантиссы от порядка, вычислять значение функции можно только от мантиссы аргумента.

Полученные в предыдущих разделах результаты для погрешности очевидным образом модифицируются с учетом специфики логарифмической функции, и проводится расчет. При этом без использования в процессе вычисления промежуточных переменных расширенного формата можно получить результат с высокой точностью независимо от величины аргумента, т.к. погрешность вычисления не зависит от порядка числа (само значение порядка заведомо не превысит размера переменной в соответствии с соображениями, приведенными в [2]). Правда, использование расширенного формата может потребоваться при выводе результата на экран.

6. Литература

1. МЕНЬШИКОВ Г.Г. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Выпуск 1. Введение в интервально-локализирующую организацию вычислений. – СПб: ООП НИИХ СПбГУ, 2003. – 89 с.
2. DE DINECHIN F., DEFOUR D., LAUTER C. Fast Correct Rounding of Elementary Function in double precision using double-extended arithmetic. Research Report №2004-10. – École Normale Supérieure de Lyon, 2004. – 17 p.
3. ZIV A. Fast evaluation of elementary mathematical functions with correctly rounded last bit // ACM Transactions on Mathematical Software 17(3) September 1991. – P. 410–423.
4. Виноградов Е.В. Стандарт IEEE Std 754-1985 и версия постулируемых свойств машинной арифметики для обеспечения интервально-локализирующих вычислений // Процессы управления и устойчивость. Труды XXXVI Межвузовской научной конференции аспирантов и студентов 11–14 апреля 2005 года / Под редакцией Н.В.Смирнова, В.Н.Старкова. – СПб: Издательство СПбГУ, 2005. – с. 256–260.
5. Виноградов Е.В. Методика учета инструментальной и методической погрешности вычисления положительного полинома // Процессы управления и устойчивость. Труды XXXVII Межвузовской научной конференции аспирантов и студентов 10–13 апреля 2006 года / Под редакцией Н.В. Смирнова, А.В. Платонова. – СПб: Издательство СПбГУ, 2006. – публикуется
6. ЛЮСТЕРНИК Л.А., ЧЕРВОНЕНКИС О.А., ЯНПОЛЬСКИЙ А.Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. – М.: Физматгиз, 1963.

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ И ДОКАЗАТЕЛЬНОСТЬ ГИПОТЕЗ О МАШИННОЙ АРИФМЕТИКЕ, ПОЛОЖЕННЫХ В ОСНОВУ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Е.В. Виноградов, П.А. Зубов, Г.Г. Меньшиков

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mails: evinogradov@paycash.ru, zubov_peter@mail.ru,

GregoryG.Menshikov@pobox.spbu.ru

Аннотация.

В основу курса Локализирующих вычислений, читаемого на факультете ПМ-ПУ положено несколько гипотез о машинной арифметике. В работе показано, что эти гипотезы реализуемы и доказуемы при условии, что машинные числа получаются из вещественных посредством правильного (по Воеводину) округления.

1. Введение

Учебное пособие [2] излагает основы теории *интервально-локализирующих вычислений (ЛВ)*, основываясь на четырёх *Гипотезах о машинной арифметике* — условиях, которым должна удовлетворять машинная арифметика, в том числе машинные *стандартные функции (СФ)*, (т.е. машинные версии основных элементарных функций), чтобы стал возможен *композиционный интервальный расчёт* — важнейший приём ЛВ. Это — предположения:

- Гипотеза 1, требующая от машинных чисел (МЧ) формата с плавающей точкой;
- Гипотеза 2 о случаях абсолютно точного вычисления СФ;
- Гипотеза 3 о переносе нестрогих неравенств между вещественными числами на их машинные аналоги (или, как говорится в [2], о переносе характера нестрогой монотонности точных СФ на их машинные аналоги);
- Гипотеза 4 о надёжности сравнения МЧ.

Гипотезы 1 и 4 обычно выполнены. Речь сейчас идёт о достаточных условиях выполнения 2 и 3. Актуален вопрос: реальны ли эти Гипотезы? Т.е. можно ли указать условия, при которых они выполняются? Этот вопрос и составляет предмет данного исследования.

2. Округление

Понятно, что машинные аналоги \tilde{y} вещественных чисел y получаются из них тем или иным *округлением*. Оно иллюстрируется рис. 1.

На нём изображена горизонтальная ось вещественных значений y и вертикальная ось \tilde{y} машинных. На осях кружками показаны машинные числа: $0, \pm\text{НМЧ} = \pm\Delta_1, \pm\Delta_2, \dots$.

Будем иметь в виду *правильное округление* ([1], с. 148), т.е. замену вещественного числа z ближайшим МЧ \tilde{z} .

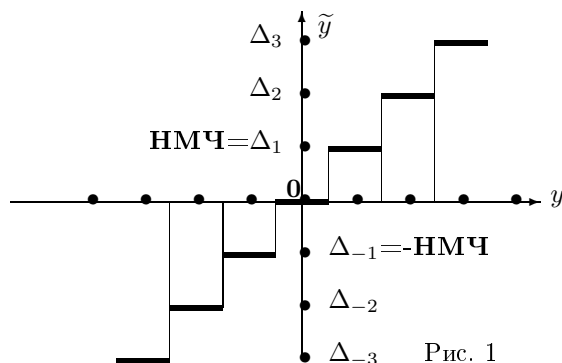


Рис. 1

Множество точек z , удовлетворяющее равенству: $\tilde{y} = y_0 = \text{fix}$, назовём *областью притяжения* машинного числа \tilde{y}_0 .

Каждому МЧ соответствует свой горизонтальный отрезок графика *функции округления* — некоторой ломаной.

Ясно, что при правильном округлении область притяжения представляет промежуток, ограниченный слева серединой отрезка между данным \tilde{y} и соседним с ним слева машинным числом и справа — серединой аналогичного отрезка, лежащего справа.

Поэтому *функция правильного округления* $\tilde{z} = \text{rnd}(y)$ терпит разрыв в середине отрезка между соседними машинными числами, являясь поэтому кусочно-постоянной. На рис. 1 представлен её

график. На рисунке ради простоты не отмечен тот факт, что соседние МЧ — неравноотстоящие точки.

Как видно, функция правильного округления не убывает.

Значения функции округления в точках разрыва могут быть различными: либо равными одному машинному числу Δ_k , либо следующему за ним Δ_{k+1} . Выбор точного значения для простоты рассуждений не обсуждаем.

3. Реализуемость Гипотез 2, 3 и 5

Гипотеза 2 означает: $z = f(x_1, x_2) \in R_M \implies \tilde{z} = y$.

Поскольку мы предполагаем, что \tilde{y} получается из y правильным округлением, то равенство справа выполняется.

Гипотеза 3 утверждает: если $y' \leq y''$, то $\tilde{y}' \leq \tilde{y}''$.

Но если $y' = y''$, то $\tilde{y}' = \tilde{y}''$. Поэтому Гипотеза 3 приводится к форме: если

$$y' < y'', \quad (1)$$

то $\tilde{y}' \leq \tilde{y}''$. Вот почему примем неравенство (1).

Докажем Гипотезу 3 от противного. Допустим противоположное:

$$\tilde{y}' > \tilde{y}''. \quad (2)$$

Рассмотрим разные случаи относительного расположения этих четырёх чисел: y' , y'' , \tilde{y}' , \tilde{y}'' .

Они получаются из данной комбинации как всевозможные перестановки. Число этих перестановок, очевидно, равно $4! = 24$. Чтобы не ломать голову, обратимся к книге [3], где на стр. 52 подсчитаны все 24 перестановки. Исходная комбинация там обозначена через (A, B, C, D), правда в готическом написании. В нашем случае $A = y'$, $B = y''$, $C = \tilde{y}'$, $D = \tilde{y}''$.

Результаты книги [3] перепишем в виде таб. 1.

Таблица 1. Перестановки, полученные из $(y', y'', \tilde{y}', \tilde{y}'')$

Но.	A	B	C	D	Комментарий	Но.	A	B	C	D	Комментарий
1	y'	y''	\tilde{y}'	\tilde{y}''	Против. (2)	13	y'	y''	\tilde{y}''	\tilde{y}'	
2	y''	y'	\tilde{y}'	\tilde{y}''	Против. (1)	14	y''	y'	\tilde{y}''	\tilde{y}'	Против. (1)
3	\tilde{y}'	y''	y'	\tilde{y}''	Против. (2)	15	y''	\tilde{y}''	y'	\tilde{y}'	Против. (1)
4	y''	\tilde{y}'	\tilde{y}''	y'	Против. (2)	16	y''	\tilde{y}''	\tilde{y}'	y'	Против. (1)
5	y'	\tilde{y}'	y''	\tilde{y}''	Против. (2)	17	y'	\tilde{y}''	y''	\tilde{y}'	
6	\tilde{y}'	y'	y''	\tilde{y}''	Против. (2)	18	\tilde{y}''	y'	y''	\tilde{y}'	
7	\tilde{y}'	y''	y'	\tilde{y}''	Против. (2)	19	\tilde{y}''	y''	y'	\tilde{y}'	Против. (1)
8	\tilde{y}'	y''	\tilde{y}''	y'	Против. (1)	20	\tilde{y}''	y''	\tilde{y}'	y'	Против. (1)
9	y'	\tilde{y}''	\tilde{y}'	y''		21	y'	\tilde{y}'	\tilde{y}''	y''	Против. (2)
10	\tilde{y}''	y'	\tilde{y}''	y''		22	\tilde{y}'	y'	\tilde{y}''	y''	Против. (2)
11	\tilde{y}''	\tilde{y}'	y'	y''		23	\tilde{y}'	\tilde{y}''	y'	y''	Против. (2)
12	\tilde{y}''	\tilde{y}'	y''	y'		24	\tilde{y}'	\tilde{y}''	y''	y'	Против. (1)

Как видно, большая часть перестановок не удовлетворяет неравенствам (1) либо (2).

Перестановки 9–13, 17, 18 — удовлетворяют. Однако, перестановки 9–12 невозможны, так как в них \tilde{y}'' лежит дальше от y'' , чем \tilde{y}' .

Перестановки 13 и 17 невозможны потому, что в них \tilde{y}'' лежит дальше от y'' , чем \tilde{y}' .

В перестановке 18 y' находится в зоне притяжения \tilde{y}'' . Между тем, y'' лежит между y' и \tilde{y}'' . Поэтому также должно находиться в той же области притяжения. Это невозможно, так как y' находится в зоне притяжения y'' .

Результат: выполнение неравенств (1) и (2) невозможно ни при одном случае взаимного расположения y' , y'' , \tilde{y}' , \tilde{y}'' . Таким образом, Гипотеза 3 верна.

Гипотеза 5 — с её учётом функция округления имеет несколько другой вид, нежели представленный на рис. 1. Уточнение дано на рис. 2.

Рис. 1 отличается от рис. 2 только условием:

$$x \in E = \left] -\text{НМЧ}, -\frac{\text{НМЧ}}{2} \left[\cap \frac{\text{НМЧ}}{2}, \text{НМЧ} \left[\implies \tilde{x} = 0.$$

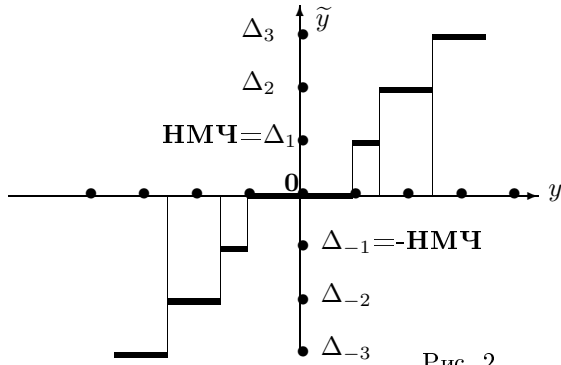


Рис. 2

Поэтому вне E Гипотеза 3 такова:

$$-\text{НБЧ} \leq y' \leq y'' \leq \text{НБЧ} \implies \tilde{y}' \leq \tilde{y}''. \quad (3)$$

Теперь надо предположить, что y' и y'' могут лежать в E , и доказать, что $\tilde{y}' \leq \tilde{y}''$.

Пусть $y' \in E$. Тогда $\tilde{y}' = 0$. Пусть y'' — вещественное число — мажоранта для y' . Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $y'' \notin E$. Тогда

$$y'' \geq \text{НМЧ} \implies \tilde{y}'' \geq \text{НМЧ} \implies \tilde{y}'' \geq \tilde{y}'.$$

Случай 2: $y'' \in E$. Тогда $\tilde{y}'' = 0$. Итак,

$$0 = \tilde{y}' \leq \tilde{y}'' = 0.$$

Теперь пусть $y'' \in E$. Тогда $\tilde{y}'' = 0$.

Случай 1: $y' \notin E$. Тогда $y' \leq -\text{НМЧ} \implies \tilde{y}' \leq -\text{НМЧ} \implies \tilde{y}' \leq \tilde{y}'' = 0$.

Случай 2: $y' \in E$. Тогда $\tilde{y}' = 0$. Отсюда вновь получается $\tilde{y}' = 0$. Итак, $0 = \tilde{y}' \leq \tilde{y}'' = 0$.

Итак, Гипотеза 5 не влияет на выполнение соотношения (3), а, следовательно, Гипотезы 3.

4. Уточнение функции округления. Эффект неравноотстоящих машинных чисел

Откорректированная функция округления изображена на рис. 3. Прокомментируем этот рисунок.

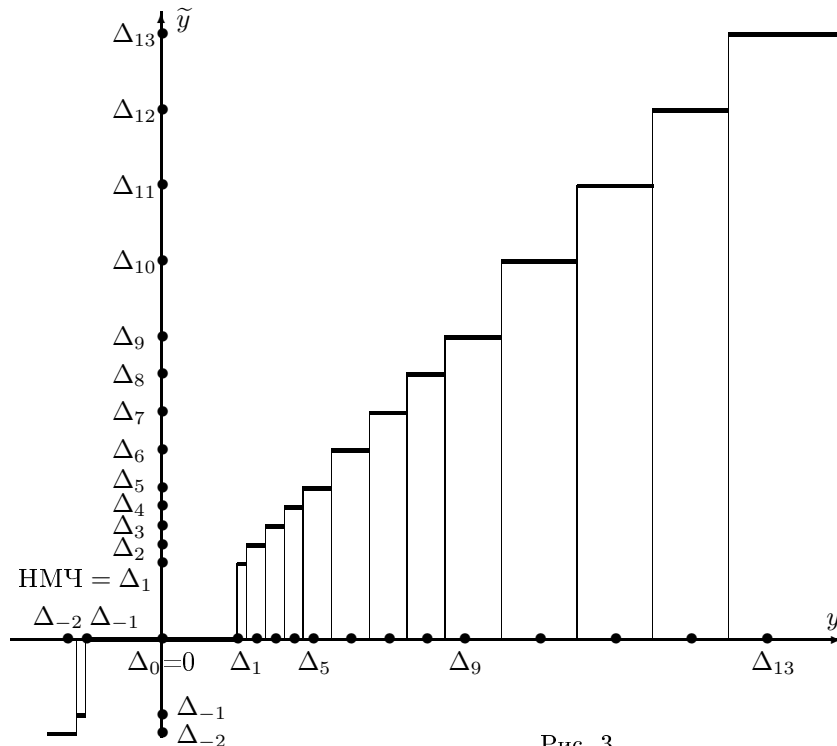


Рис. 3

Изображён только первый квадрант плоскости (y, \tilde{y}) : дела обстоят аналогично (но с изменением знака) в третьем квадранте.

Промежуток между двумя соседними степенями μ^k и μ^{k+1} основания внутренней системы счисления назовём *октавой*.

Первую октаву на рис. 3 составляют машинные числа: $\text{НМЧ} = \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$.

Вторую октаву составляют МЧ: $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9$.

Наконец, третья октава составлена числами: $\Delta_9, \Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$.

При этом открытые октавы насчитывают по 3 машинных числа. Расстояние между соседними машинными числами возрастает вдвое при переходе через границу октавы. Значит $\mu = 2$.

Далее, замкнутая октава насчитывает 5 машинных чисел.

Масштаб нарушен выбором НМЧ. В действительности, оно значительно меньше.

Таким образом, вырисовывается новая, более экономная, система Гипотез: 1, 4, 5; последняя пополняется требованием правильности округления вне E.

Из рис. 3 понятны соотношения между \tilde{y} и y :

$$\tilde{y} = 0 \iff |y| < \Delta_1 = \text{НМЧ}, \quad (4)$$

$$\tilde{y} = \Delta_1 \iff \Delta_1 \leq y < (\Delta_1 + \Delta_2)/2, \quad (5)$$

$$\tilde{y} = \Delta_2 \iff (\Delta_1 + \Delta_2)/2 < y < (\Delta_2 + \Delta_3)/2, \quad (6)$$

$$\tilde{y} = \Delta_3 \iff (\Delta_3 + \Delta_3)/2 < y < (\Delta_3 + \Delta_4)/2,$$

.....

Значит, при $n > 2$ имеем для инструментальной погрешности процесса округления:

$$\tilde{y} = \Delta_n, \iff \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{2} < y - \tilde{y} < \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{2},$$

Между тем, $\Delta_5, \Delta_9, \Delta_{13}, \dots$ - границы октав. Поэтому (рис. 3)

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \Delta_3 - \Delta_2 = \Delta_4 - \Delta_3 = \Delta_5 - \Delta_4 = Q(\text{октава } 1),$$

$$\Delta_6 - \Delta_5 = \Delta_7 - \Delta_6 = \Delta_8 - \Delta_7 = \Delta_9 - \Delta_8 = Q(\text{октава } 2),$$

.....

где через $Q(\text{октава } i)$ обозначена единица младшего разряда МЧ из данной октавы.

Заметим, что во внутренних точках октав имеет место: $\Delta_{n+1} - \Delta_n = \frac{Q(\text{октава})}{2}$.

Заметим также, что $Q(\text{октава } i+1) = \mu Q(\text{октава } i)$. Поэтому в граничных точках октав будет: $\tilde{y} = \Delta_n, \iff \frac{Q(\text{октава } i+1)}{2} < y - \tilde{y} < \frac{\mu}{2} Q(\text{октава } i)$.

Так как в компьютерах с внутренней двоичной системой $\mu = 2$, то можно записать правую часть в виде: $Q(\text{октава } i+1)$, или просто как $Q(\tilde{y})$. Тогда ввиду (4) имеет место более широкое неравенство:

$$-Q(\tilde{y}) < y - \tilde{y} < Q(\tilde{y}), \quad (7)$$

или

$$|y - \tilde{y}| < Q(\tilde{y}). \quad (8)$$

Теорема (об инструментальной погрешности процесса округления). Справедливо одно из соотношений (4) или (7).

Замечание. Из соотношений (4) видно, что большей частью для инструментальной погрешности верно более сильное неравенство:

$$|\tilde{y} - y| \leq Q(\tilde{y})/2. \quad (9)$$

Следствие 1. При $y \notin \text{ЗМЧ}$, $y \neq 0$ справедливо неравенство: $|\tilde{y} - y| \leq \mu^{-s} |\tilde{y}|$.

Следствие 2. В случае $\tilde{y} \neq 0$ теорема равносильна следующей оценке относительной погрешности представления точного результата приближённым: $|(\tilde{y} - y)/\tilde{y}| \leq \mu^{-s}$.

5. Литература

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления – М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит, 1981. – 320 с.
2. МЕНЬШИКОВ Г.Г. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Вып. 1. Введение в интервально-локализирующую организацию вычислений. – СПб: ООП НИИХ СПбГУ, 2003. – 89 с.
3. САВЕЛЬЕВ Л.Я. Комбинаторика и вероятность. – Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1975. – 434 с.
4. Виноградов Е.В. Стандарт IEEE Std 754-1985 и версия постулируемых свойств машинной арифметики для обеспечения интервально-локализирующих вычислений // Процессы управления и устойчивость. Труды XXXVI Межвузовской научной конференции аспирантов и студентов 11–14 апреля 2005 года. Изд-во СПбГУ. – С. 256–260.

КАЛИБРОВКА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО ДАННЫМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

А.П. Воцинин

Центральный Научно-Исследовательский институт Управления, Экономики и Информации
Росатома" (ФГУП "ЦНИИАТОМИНФОРМ"), г. Москва

Н.В. Скибицкий

Московский Энергетический Институт (Технический Университет)

Одной из главных примет научно-технического прогресса является устойчивая потребность науки, техники и промышленности в новых, как правило, цифровых системах измерения (СИ), которые включают сенсоры различного типа и измерительный преобразователь. Сенсор преобразует входную измеряемую величину x в выходную величину y с помощью функции $y = f(x)$.

В измерительном преобразователе реализуется т.н. "калибровочная характеристика", которая является оценкой обратной функции $x = f^{-1}(y)$. Кроме оценки измеренного значения на выходе СИ должна даваться погрешность измерения. Как правило, в СИ используются сенсоры с линейной характеристикой $y = b_1 + b_2x$, при этом обратная функция записывается в виде

$$x = a_1 + a_2 \cdot y = -b_1/b_2 + (1/b_2) \cdot y. \quad (1)$$

Определение оценок коэффициентов обратной зависимости (1) и ее погрешности в отечественной литературе определяется как задача градуировки [1], а в зарубежной — как задача калибровки средства измерения [2].

1. Статистический подход к калибровке СИ.

Этот подход к калибровке СИ, основанный на регрессионном анализе данных калибровочного эксперимента, в настоящее время является доминирующим. При этом рекомендуется применять управляемый калибровочный эксперимент, в котором значения измеряемой величины x , поступающие на вход сенсора, устанавливаются экспериментатором в соответствии с заранее выбранным планом эксперимента. Для оценки ошибок измерений в эксперименте рекомендуется применять дублирование опытов. Процедура калибровки, как правило, включает 4 этапа.

1. Реализация управляемого калибровочного эксперимента с N опытами, в каждом из которых измеряется "отклик" сенсора y_j на заданное значение измеряемой величины x_j . По результатам эксперимента формируется множество пар измерений $\{x_j, y_j, j = 1, \dots, N\}$, необходимых для калибровки СИ.

2. Оценка коэффициентов прямой модели сенсора $y = b_1 + b_2x$ методом наименьших квадратов по формуле

$$B = (F^T F)^{-1} \cdot F^T Y, \quad (2)$$

где $B^T = [\hat{b}_1; \hat{b}_2]$, $F = \{1, x_j, j = 1, \dots, N\}$ — матрица размером $2 \times N$, содержащая значения входной величины сенсора x_j в эксперименте j , $Y = \{y_j, j = 1, \dots, N\}$ — вектор значений на выходе сенсора.

3. Определение доверительного интервала для найденной прямой характеристики. Процедура основана на стандартном алгоритме регрессионного анализа и включает расчет выборочной оценки дисперсии измерений s^2 и ковариационной матрицы оценок коэффициентов $D = s^2(F^T F)^{-1}$. Оценка дисперсии $\sigma^2(\hat{y}(x))$ предсказанного значения $\hat{y}(x)$ при заданном значении x находится по формуле

$$\sigma^2(\hat{y}(x)) = \{1; x\}^T D \{1; x\}. \quad (3)$$

Как следует из (3), дисперсия предсказания $\sigma^2(\hat{y}(x))$ является квадратичной функцией x , которая принимает минимальное значение при среднем значении x в эксперименте. Доверительный интервал предсказания $[y(x)]$ рассчитывается по формуле

$$[y(x)] = [\hat{y}(x) - t_{\alpha, N-2} \cdot \sigma(\hat{y}(x)); \hat{y}(x) + t_{\alpha, N-2} \cdot \sigma(\hat{y}(x))], \quad (4)$$

где значение α , задаваемое экспертом, определяет доверительную вероятность предсказания $(1 - \alpha)$; $t_{\alpha, N-2}$ — табличное значение распределения Стьюдента.

4. Определение искомой калибровочной характеристики и погрешности СИ. Калибровочная характеристика находится подстановкой найденных оценок коэффициентов (2) в формулу (1). Погрешность измерения находится обращением границ доверительного интервала (3), соответствующих фиксированной точке x .

Статистический подход, основанный на предположении, что ошибки измерения являются случайными величинами и имеют нормальное распределение, сталкивается с серьезными трудностями при нахождении корректной оценки обратной функции (1), т.к. при обращении нормально распределенных величин всегда возникает эффект деления на нуль.

Более серьезная проблема возникает при попытке учесть не только случайные погрешности, но и факторы неопределенности и неточности нестатистической природы, неизбежные в условиях реальных измерений. В частности, не существует методически обоснованного похода нахождения суммарной погрешности измерения, составляющими которой являются случайная и систематическая погрешность.

2. Концепция руководства по выражению неопределенности измерений

Сложность проблемы и необходимость сравнения результатов измерений, выполненных в разных лабораториях и странах, вызвала необходимость разработки “Руководства по выражению неопределенности измерений” [3], подготовленного рабочей группой международных экспертов. Как утверждается в [3], в нем предложена “простая общепризнанная методика для характеристики качества результата измерения, т.е. для оценки и выражения его неопределенности”. Неопределенность результата измерения трактуется как “отсутствие знания точного значения измеряемой величины” и определяется как “параметр, связанный с результатом измерения и характеризующий разброс значений, которые могли быть обоснованно приписаны измеряемой величине”. Отмечается, что “оценка неопределенности не является ни рутинной, ни чисто математической задачей; она зависит от детального знания природы измеряемой величины и процедуры измерения ... и честности тех, кто вносит свой вклад в определение её значения”. Указано, что неопределенность измерения состоит из нескольких составляющих, которые можно сгруппировать в две категории:

Тип А: составляющие, оцениваемые статистическими методами,

Тип В: составляющие, оцениваемые другими способами.

Отмечается, что для оценки по типу В может использоваться любая информация, включая предварительные данные измерений, общие знания поведения и свойств материалов и приборов, техническую документацию изготовителя, данные, обеспеченные калибровкой и сертификацией и т.п.

Достоинством Руководства является постановка задачи комбинирования погрешностей, как статистической, так и нестатистической природы, и признание факта, что наиболее универсальной характеристикой погрешности измерения является интервал неопределенности. Однако далее отмечается, что оба типа оценки основаны на распределении вероятностей и составляющие неопределенности для того или иного типа количественно определяются дисперсиями или стандартными отклонениями. Последнее утверждение показывает, что в [3] удалось лишь частично преодолеть ограниченность статистического подхода, т.к. параметры неопределенности нестатистической природы в итоге сводятся к статистическим параметрам путем указания формы распределения (нормальное, равномерное или треугольное) и значения среднеквадратичной ошибки. При нахождении суммарной погрешности квадратичные ошибки складываются. При этом составляющая погрешность, определенная по типу В, может умножаться на специальный множитель k , значение которого, как утверждается в [3], лежит в пределах от 2 до 3.

3. Предлагаемый интервальный подход к калибровке систем измерения

Предлагаемая методология калибровки СИ является альтернативой статистическому подходу и базируется на описании погрешности измерения в форме ограниченного интервала неопределенности без задания на нем вероятностной меры [4, 5, 6]. В этом смысле подход преодолевает как ограниченность статистического подхода [1], так непоследовательность Руководства [3].

Учитывая, что в существующем подходе игнорируется разница между погрешностями в ходе управляемого эксперимента и в условиях реальных измерений, в предлагаемом подходе задачи построения калибровочной характеристики (1) и определения погрешности СИ решаются раздельно и для их решения применяются разные планы управляемого калибровочного эксперимента (УКЭ).

Реализация методологии включает следующие этапы:

1. Проведение УКЭ №1 и получение матрицы $\{x_j, y_j, j = 1, \dots, N\}$ при неизменных внешних условиях. Определение оценок прямой характеристики сенсора по формуле (2). (Содержательно этот этап совпадает с 1-м и 2-м этапами статистического подхода).
2. Оценка коэффициентов калибровочной характеристики a_0, a_1 по формуле (1). Т.к. в рамках принятой интервальной модели эти коэффициенты являются числами, а не случайными величинами, операция обращения по формуле (1) является корректной.
3. Проведение УКЭ №2 для построения многофакторной модели $y = f(x_{\text{сред}}, z_i)$ зависимости отклика сенсора y от предполагаемых факторов z_i внешней среды в условиях реальных измерений. Эксперимент проводится в фиксированной средней точке $x_{\text{сред}} = 0.5(x_{\text{min}} + x_{\text{max}})$ диапазона изменения x в УКЭ №1. При линейной модели матрица эксперимента Z выбирается в соответствии с оптимальным планом полного факторного эксперимента.
4. Нахождение методом наименьших квадратов оценок φ_i многофакторной модели зависимости отклика сенсора от внешних факторов

$$y = \varphi_0 + \varphi_1 z_1 + \dots + \varphi_m z_m. \quad (5)$$

Расчет оценок проводится по формуле

$$\Phi = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y, \quad (6)$$

где $\Phi^T = [\varphi_0; \varphi_1; \dots; \varphi_m]$, $Z = \{1, z_{ji}, j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, m\}$ – матрица эксперимента, $Y = \{y_j, j = 1, \dots, N\}$ – вектор значений на выходе сенсора.

5. Ранжирование внешних факторов z_i по степени влияния на погрешность сенсора. Учитывая, что частная производная $dy/dz_i = \varphi_i$, наличие многофакторной модели позволяет выделить доминирующие факторы и определить диапазон их допустимого изменения, исходя из требуемой погрешности СИ. Результатом реализации этапа является значение погрешности $\Delta_{z(y)}$, порождаемой внешними факторами в каждой точке измерения.

6. Экспертная оценка систематической погрешности $\Delta_{\text{сист}(y)}$. Экспертный опрос является наиболее распространенным способом оценки разных составляющих погрешности, включая методические погрешности (например, ошибки оценок коэффициентов прямой характеристики сенсора), а также погрешности округления и дискретизации данных в случае цифровых измерительных преобразователей. Расчет суммарной погрешности сенсора $\Delta_{\Sigma(y)} = \Delta_{\text{сист}(y)} + \Delta_{z(y)}$.

7. Формирование паспортных характеристик измерительной системы, включая калибровочную характеристику системы, допустимый диапазон изменения доминирующих факторов внешней среды, а также интервальный коридор ее неопределенности.

На рис. 1 приведены типичные коридоры неопределенности прямой и обратной характеристики сенсора, получаемые в ходе калибровки системы измерения. Пунктирные, жирные линии на рис. 1

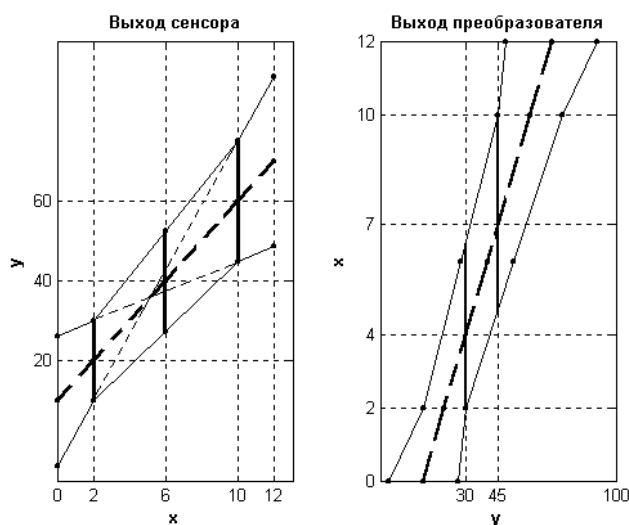


Рис. 1.

в левом окне определяют прямую характеристику сенсора, а в правом окне обратную (калибровочную) характеристику измерительной системы.

В левом окне вертикальными, жирными линиями показаны интервалы неопределенности, которые порождают общий коридор неопределенности (тонкие линии по граничным значениям интервалов). После перехода к обратной функции он преобразуется в коридор неопределенности измерительной системы (правое окно). Его наличие позволяет построить интервал неопределенности измеряемой величины x на выходе измерительной системы. В правом окне рис. 1 показаны два интервала неопределенности измеряемой величины, построенные в точках $y=30$ и $y=45$.

Совокупность всех интервалов неопределенности на выходе сенсора образует общий коридор неопределенности, границы которого показаны в левом окне тонкими пунктирными линиями, проведенными через граничные значения y . Аналогичный коридор возникает на выходе измерительной системы (правое окно).

Визуальный анализ границ коридора в левом окне показывает, что они имеют вид линейного сплайна. При этом справедливо следующее утверждение:

за пределами диапазона $x_{min} \leq x_0 \leq x_{max}$ изменения измеряемой величины в УКЭ №1 ширина коридора неопределенности, т.е. погрешность системы измерения, быстро возрастает.

Утверждение базируется на следующих сообщениях.

Очевидно, что при фиксированном значении измеряемой величины x_0 на выходе сенсора с равной возможностью может иметь место любое значение y внутри соответствующего интервала неопределенности. В частности, характеристика сенсора на рис. 1 может пройти из нижней границы интервала неопределенности в точке $x_0 = 2$ в верхнюю границу в точке $x_0 = 10$ или, наоборот, из верхней границы интервала в точке $x_0 = 2$ в нижнюю границу в точке $x_0 = 10$. Эти “экстремальные” прямые, показанные в левом окне тонкими пунктирными линиями, за пределами диапазона $2 \leq x_0 \leq 10$ соответствуют двум участкам сплайн-функции границы и образуют два “раструба”, в которых ширина коридора ошибок резко возрастает.

4. Выводы

Сравнение статистического и интервального подходов к калибровке измерительных систем позволяет сделать следующие выводы.

Предложенный подход, в котором последовательно реализуется интервальная модель неопределенности измерений, не требующая задания плотности распределения, лишена методологических недостатков при интеграции погрешностей, вызванных как случайной вариабельностью, так и источниками нестатистической природы.

Оценки коэффициентов калибровочной функции, найденные методом наименьших квадратов при совпадающих данных эксперимента для обоих подходов совпадают. Вместе с тем, при традиционном подходе не учитывается различие между источниками ошибок во время калибровочного эксперимента и в условиях реальных измерений, что может приводить к искаженному доверительному интервалу неопределенности измерений. Даже при совпадении экспериментальных и реальных условий измерений имеет место существенное отличие в интервальных коридорах неопределенности для интервального и статистического подходов. При интервальном подходе ширина коридора неопределенности резко возрастает за пределами диапазона изменений переменной x в калибровочном эксперименте, что является достаточно естественным для задач экстраполяции.

При статистическом подходе границы доверительного интервала описываются гладкими функциями (см. формулу 4), при этом ширина коридора строится в предположении нормального распределения случайных погрешностей, зависит от экспертно заданного уровня доверительной вероятности и слабо меняется на всем рабочем диапазоне СИ.

5. Литература

1. СЕМЕНОВ Л.А., СИРАЯ Т.Н. Методы построения градуировочных характеристик средств измерения. – М.: изд-во Стандарты, 1986.
2. BROWN P.J. Multivariate calibration // J. R. Statist.Soc.B. – 1982. – 44, N3.
3. Руководство по выражению неопределенности измерения. (Перевод на русский язык Энергосервисной компании ЗЭ, <http://www.esco3e.ru/education/>)
4. Воцинин А.П., Скибицкий Н.В. Идентификация моделей шумов в реальных измерениях и градуировочном эксперименте // Вестник МЭИ. – 2005. – №4. – С. 97–102.
5. Воцинин А.П., Скибицкий Н.В. Интервальный метод калибровки // Датчики и системы. – 2000. – №9. – С. 52–60.
6. Воцинин А.П., Скибицкий Н.В. Обработка неточных данных как неопределенных чисел // Вестник МЭИ. – 2005. – №3. – С. 95–107.

УСЛОВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА В ЗАДАННОМ СЕКТОРЕ

С.А. Гайворонский, С.В. Замятин

Томский политехнический университет, Томск, Россия

E-mail: saga@cc.tpu.edu.ru

Аннотация

Рассматривается интервальный полином, у которого m коэффициентов задаются верхними и нижними пределами. Образованный ими многогранник определяет множество полиномов с фиксированными коэффициентами. На основе робастного расширения метода корневого годографа проводится анализ границ областей локализации корней интервального полинома. Определяются проверочные вершинные полиномы и формулируются условия локализации корней интервального полинома в усеченном секторе, заданном допустимыми колебательностью и степенью устойчивости.

1. Введение

Объекты управления любой реальной автоматической системы имеют параметры, характеризующиеся интервальной неопределенностью. Такой тип неопределенности может быть обусловлен как неточным знанием параметров, так и их изменением по заранее неизвестным законам в определенных пределах. Очевидно, что в указанных случаях динамические свойства системы также либо априорно неизвестны, либо нестабильны. В связи с этим представляет интерес разработка простых и эффективных методик, позволяющих без большой вычислительной или графической работы проводить анализ подобных систем.

Известно, что корни интервального характеристического полинома (ИХП) определяются корнями семейства полиномов с коэффициентами, принимающими любые значения из соответствующих диапазонов. На комплексной плоскости эти корни образуют замкнутые области локализации, по границам которых можно судить о возможных динамических свойствах системы.

Заметим, что в настоящее время достаточно хорошо изучены методы анализа робастной устойчивости ИХП [1-3], гарантирующей локализацию корней ИХП в левой полуплоскости. Актуальной по-прежнему остается проблема оценки робастного качества ИХП, соответствующего расположению его корней в определенной области. В частности, представляет интерес установление условий локализации корней ИХП в секторе левой полуплоскости, задающем допустимую колебательность и степень устойчивости системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим в левой полуплоскости открытый усеченный сектор ABCD с углом $\pi \pm \gamma$ (Рис.1).

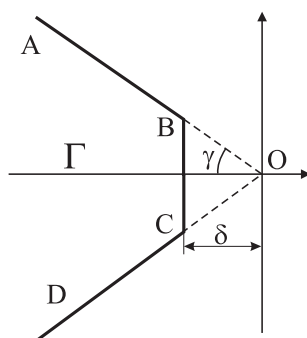


Рис. 1. — Открытый усеченный сектор Γ

Пусть он задает допустимые колебательность и степень устойчивости интервальной системы. Сформируем полином:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1)$$

где все или только часть коэффициентов являются интервальными. Пусть число таких коэффициентов равно m , причем $3 \leq m \leq n + 1$. Образующий этими коэффициентами многогранник P_m является прямоугольным гиперпараллелепипедом с вершинами V_q , $q = \overline{1, 2^m}$.

Для теории робастного управления представляет интерес задача анализа отображения P_m на корневую плоскость в сектор ABCD. Заметим, что существуют подходы, позволяющие оценивать расположение области локализации корней ИХП в секторе AOD. Так в [3] показано, что для решения этой задачи достаточно проверить набор легко определяемых критических вершинных полиномов. Можно также использовать критерий [2], основанный на проверке устойчивости четырех полиномов Харитонова степени $2n$ с интервальными коэффициентами, учитывающими параметры сектора AOD. Однако предлагаемые в [2,3] методики не позволяют одновременно с максимальной колебательностью второй важный корневой показатель ИХП — минимальную степень устойчивости. Поэтому в данной работе ставятся следующие задачи: исследовать возможность вершинного анализа степени устойчивости ИХП и разработать методику определения набора вершинных полиномов, позволяющих анализировать локализацию корней ИХП в секторе ABCD.

3. Анализ минимальной степени устойчивости интервального полинома

Из [1] известно, что при отображении P_m на плоскость корней именно образы вершин P_m определяют максимально возможную колебательность ИХП. Покажем, что и минимальную степень устойчивости ИХП определяют корни вершинных полиномов.

Введем в рассмотрение реберный полином

$$D^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (2)$$

Докажем следующее утверждение:

Утверждение. Минимальная степень устойчивости реберного полинома (2) определяется одной из вершин ребра.

Доказательство. Допустим, что реберный полином устойчив и при отображении ребра на плоскость корней ближайший к мнимой оси корень S не принадлежит корневым узлам, соответствующим вершинам ребра. Пусть при этом одному из корневых узлов соответствует устойчивый полином $f_1(s)$, а другому - устойчивый полином $f_2(s)$.

Сдвинем мнимую ось комплексной плоскости корней на величину h так, чтобы корневые узлы остались в левой полуплоскости, а корень S оказался в правой. В этом случае ИХП будет иметь вид:

$$D(s+h) = a_n(s+h)^n + a_{n-1}(s+h)^{n-1} + \dots + a_0$$

Далее определим разность $f_1(s+h) - f_2(s+h) = (\overline{a_i} - a_i)(s+h)^i = g(s+h)$, где $\overline{a_i}$ и a_i — соответственно максимальное и минимальное значение интервального коэффициента ИХП.

Согласно [1], если $g(s+h)$ представляет собой только четные или нечетные степени переменной $(s+h)$, то из устойчивости $f_1(s+h)$ и $f_2(s+h)$ следует устойчивость всего множества полиномов, соответствующего рассматриваемому ребру. Однако этому утверждению противоречит нахождение корня S в правой полуплоскости. Следовательно, ближайшим к мнимой оси не может быть корень, не являющийся корневым узлом. А это означает, что минимальная степень устойчивости реберного полинома (2) определяется одной из вершин ребра.

Следуя реберной теореме, границы областей локализации корней ИХП состоят из образов ребер P_m . Поэтому по корням вершинных полиномов можно оценить максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИХП, а, следовательно, и попадание областей локализации его корней в сектор ABCD. В связи с этим актуальна задача определения всех вершин P_m , образы которых могут принадлежать границам областей локализации корней ИХП.

4. Условие принадлежности образа вершины границе области локализации корня

В вершинах P_m каждый коэффициент ИХП может принимать максимальное $\overline{a_i}$ или минимальное a_i значение. Тогда согласно [5], угол выхода реберной ветви из комплексного корневого узла U_q , являющегося образом вершины V_q , при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = \pi - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (3)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q = - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (4)$$

где Θ_g и Θ_0 - углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q соответственно к g -ому полюсу и к i -м нулям с координатами $(0; j_0)$.

Для U_q на основании (3), (4) определим m значений углов Θ_i^q , $i \in \overline{0, n}$, и расположим их в порядке возрастания: $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{m-1}, \Theta_m$. В [4] установлено, что U_q принадлежит границе области локализации корня при выполнении одного из условий $\Theta_m - \Theta_1 < \pi$, $\Theta_m - \Theta_1 > \pi$, $h = \overline{2, m}$.

Заметим, что для определения граничных вершин P_m нас не интересуют значения углов выхода реберных ветвей по интервальным коэффициентам. Интерес представляет только их взаимное расположение на плоскости корней, для которого не имеет значения одинаковая для всех углов составляющая $\sum_{g=1}^n \Theta_g$. При этом для граничности U_q необходимо, чтобы разность между максимальным и минимальным углами была меньше π .

Это легко проверяется графическим способом при заданном значении Θ_0 и известном (верхнем или нижнем) пределе соответствующего интервального коэффициента. На рис.2 показан пример возможного расположения углов выхода реберных ветвей по четырем интервальным коэффициентам ИХП. Символом $+a_i$ обозначен верхний предел коэффициента a_i , символом $-a_i$ - его нижний предел. Заметим, что изменение предела любого коэффициента позволяет повернуть соответствующий угол на 180 градусов. Задавая минимальный (максимальный) угол таким образом, можно сформировать пределы коэффициентов, которые обеспечат граничность соответствующего корневого узла. Изменяя минимальный (максимальный) угол, легко получить набор из $2m$ возможных граничных вершин при заданном значении Θ_0 .

При таком геометрическом подходе, очевидно, что если для каждого из m коэффициентов ИХП на круговой диаграмме построить два противоположных вектора, то любые m последовательно расположенные лучи будут лежать в угле, меньшем π , и, следовательно, определять координаты граничной вершины P_m .

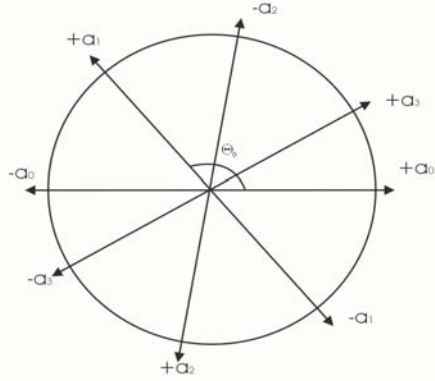


Рис. 2. — Взаимное расположение углов выхода реберных ветвей.

Однако в [5] установлено важное свойство границ областей локализации корней ИХП. Оно заключается в том, что при отображении P_m на корневую плоскость возможен переход внутренних вершин P_m в граничные и наоборот. Причиной этого является переход корней ИХП через особые лучи, выходящие из начала координат под углами $\varphi = \pi - \frac{\pi}{m-k}$, $k = 1, 2, \dots, m-2$. Для учета этого факта следует формировать набор граничных вершин указанным выше способом при значениях $\Theta_0 < \gamma$ из образованных особыми лучами секторов $\pi \leq \varphi \leq \pi - \frac{\pi}{m-1}$, и $\pi - \frac{\pi}{m-k} \leq \varphi \leq \pi - \frac{\pi}{m-k+1}$.

Исходя из проведенного анализа разработано следующее правило формирования набора граничных вершин P_m .

1. Для заданных угла и числа m интервальных коэффициентов ИХП определить количество особых лучей, лежащих в секторе AOD.

2. Задать значение угла Θ_0 из сектора $\pi < \Theta_0 < \pi - \frac{\pi}{m-1}$.

3. На круговой диаграмме построить лучи, выходящие из начала координат под углами $\Theta_{i+} = i\Theta_0$, $\Theta_{i-} = \pi + i\Theta_0$, где Θ_{i+} и Θ_{i-} соответственно углы при максимальном и минимальном значениях i -го коэффициента ИХП.

4. Начиная с любого луча, определить m лучей, следующих последовательно один за другим при движении в положительном направлении (против часовой стрелки). Соответствующие этим лучам пределы коэффициентов ИХП определяют координаты одной из граничных вершин.

5. Последовательно изменяя начальные лучи, повторять процедуру п.4 и в результате получить координаты граничных вершин для сектора с заданным Θ_0 .

6. Если $\pi - \pi/(m-1) > \pi - \gamma$, то необходимо повторить действия п. 3, 4, 5 при любом значении угла Θ_0 из каждого сектора $\pi - \frac{\pi}{m-k} \leq \Theta_0 \leq \pi - \frac{\pi}{m-k+1}$, $k = 1, 2, \dots, m-2$.

7. При каждом последующем Θ_0 необходимо из получающихся наборов граничных вершин выделять новые и добавлять их к найденным ранее.

5. Условия локализации корней ИХП в заданном секторе

Для того, чтобы корни полинома (1) с интервально заданными коэффициентами располагались в усеченном секторе ABCD, необходимо и достаточно, чтобы в этом секторе располагались корни ИХП с коэффициентами, сформированными по приведенному выше правилу.

6. Пример

Рассмотрим полином $D(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, где $a_3 = [1; 1, 2]$, $a_2 = [12; 12, 2]$, $a_1 = [22; 23, 2]$, $a_0 = [20; 25, 5]$. Требуется определить, лежат ли корни данного полинома в секторе с углом 180 ± 55 градусов и определить запас робастной устойчивости. Согласно разработанному правилу сформируем набор граничных полиномов: $\underline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0}$; $\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}$; $\underline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0}$; $\overline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \overline{a_0}$; $\underline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0}$; $\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}$; $\underline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \underline{a_0}$; $\overline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \overline{a_0}$. Следует отметить, что полиномы $\underline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0}$; $\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0}$ не входят в набор полиномов, формируемых в [3] для определения колебательности. Из рис. 3 видно, что корни именно этих полиномов определяют минимальную степень устойчивости.

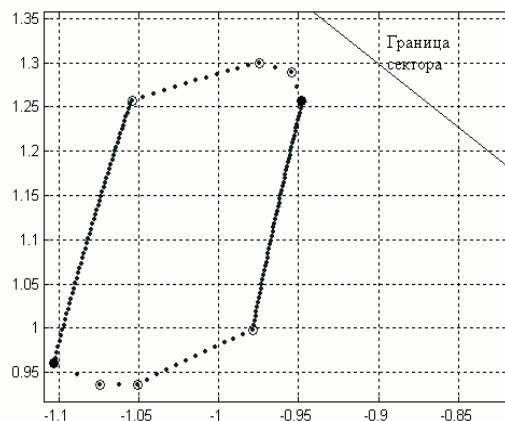


Рис. 1. — Область локализации одного комплексного корня; ● — корни полиномов $\underline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \overline{a_0}$; $\overline{a_3}, \underline{a_2}, \overline{a_1}, \underline{a_0}$; ○ — корни остальных полиномов набора.

7. Заключение

Для ИХП, имеющего m интервальных коэффициентов, разработано правило определения вершинных полиномов, по корням которых можно судить о попадании областей локализации корней ИХП в заданный усеченный сектор. Число проверяемых полиномов зависит от числа интервальных коэффициентов и величины угла сектора.

8. Литература

1. Жавко А.П., Харитонов В.Л. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // АиТ. — 1994. — № 10. — С. 125–134.
2. Вукосавич С.Н., Стоич М.Р. Достаточные условия робастной относительной устойчивости линейных непрерывных систем // АиТ. — 1996. — № 11. — С. 84–91.
3. Son Y.C. and Foo Y.K. Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector // IEEE Trans. On Automatic Control. — 1990. — Vol. 35. — P. 1378–1382.
4. Гайворонский С.А., Замятин С.В. Анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе // Известия Томского политехнического университета. — 2004. — Т. 307. — № 4. — С. 14–18.
5. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов // Изв. РАН. ТиСУ. — 2003. — № 6. — С. 7–12.

ПРИЛОЖЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ РАСШИРЕНИЯМИ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ

И.Д. Гофман, Д.А. Инишев, А.А. Липатов

Российский НИИ искусственного интеллекта, Москва

E-mail: hofman@aha.ru

Недоопределенная математика (Н-математика) предполагает, что с каждым моделируемым объектом сопоставляется не одно, точное значение параметра, а некоторое подмножество из множества допустимых значений. Для этого в ее аппарат вводится понятие недоопределенного расширения, которое представляет собой обобщение понятий интервального расширения. В этом смысле интервалы (как и мультиинтервалы) трактуются как один из видов недоопределенного расширения переменных моделей.

Применение недоопределённых моделей (Н-моделей) [1, 4, 6] для решения практических задач в области вычислительной математики, инженерных расчетов, управления (в частности, корпоративного или управления проектами) связано с построением моделей объектов, характеризующихся, с одной стороны, неполнотой, неточностью значений их параметров, а с другой стороны, имеющих сложную внутреннюю структуру. Модели таких объектов включают в себя большое количество параметров и ограничений.

Важнейшим шагом для обеспечения таких возможностей является переход от неструктурированных Н-моделей, применяемых в настоящее время в большинстве реализаций, к структурным Н-моделям [7, 8].

1. Недоопределенные модели с целочисленными интервальными расширениями

Концепция недоопределенности и потоковых вычислений на моделях с недоопределенными значениями (Н-значениями) была предложена А.С. Нариньяни в начале 80-х годов [1]. Под его руководством в Российском научно-исследовательском институте искусственного интеллекта (РосНИИ искусственного интеллекта) и компании ИнтеллиТек данная концепция была реализована в ряде систем, среди которых можно отметить такие системы, как решатель UniCalc, систему экономического и финансового моделирования и планирования Integra, систему календарно-ресурсного планирования и управления проектами Time-EX и др.

Пусть имеется модель M , определяемая множеством переменных X и множеством отношений R на этих переменных. Каждой из переменных $x \in X$ сопоставлена область значений, являющаяся подобластью универсума U . Областью значений произвольной совокупности переменных $X' \subseteq X$ будем называть декартово произведение областей значений всех переменных совокупности X' . Каждое m -арное ($m = 1, \dots$) отношение $r \in R$, связывающее переменные $X' = (x_{i1}, \dots, x_{im})$, есть подмножество области значений X' . Формально Н-значением переменной x является любое непустое подмножество области значений этой переменной. Н-значение содержит внутри себя значения, любое из которых потенциально может стать ее точным значением и которое остается пока неизвестным (вернее, известным с точностью до данного Н-значения) ввиду недостатка информации.

Недоопределенным расширением (Н-расширением) универсума мы называем любой конечный набор его подмножеств $*X$, содержащий \emptyset , X и являющийся замкнутым относительно пересечения. Таким образом понятие недоопределенного расширения формально представляет собой обобщение понятий интервального расширения и множества всех подмножеств [1].

В том случае, если X является решеткой, можно задать Н-расширения в виде интервалов или мультиинтервалов. Аналогично задаются понятия недоопределенных отношений (Н-отношений), недоопределенных операций (Н-операций) и Н-модели. Подобный аппарат чрезвычайно эффективен при решении практических задач, например в области планирования и управления проектами. В качестве примера рассмотрим разработанное в РосНИИ искусственного интеллекта приложение Time-EX.

В реальном планировании всегда интуитивно учитывается недоопределенность, в большинстве подобных систем производится просчет и “запоминание” нескольких прогнозных вариантов выполнения проекта в различные сроки для поиска самого “экономного” времени реализации. Для повышения надежности плана вводятся также значения резервов времени для отдельных заданий и всего проекта в целом.

В приложениях, использующих метод Н-моделей, таких как Time-EX, естественно использовать целочисленные интервалы, представляющие значения точек на временной шкале. Это так называемая недоопределенная модель времени (Т-модель). В моделях времени важную роль играет понятие *события*. Событиями в системе планирования являются *задания* (работы, операции). План некоторого проекта есть сеть заданий (работ), связанных между собой временными отношениями.

Каждое задание можно рассматривать как *интервальное событие*, ограниченное *t-точками*. Недоопределенный календарный план в этом случае представляет собой Н-модель $\hat{M} = (\hat{X}, \hat{R})$, где \hat{X} – множество недоопределенных интервальных *событий-заданий*, а \hat{R} множество отношений, связывающих отдельные задания.

Недоопределенные t-точка и расстояние моделируются при помощи целочисленного интервала $[a, b]$, $a \leq b$.

Недоопределенное интервальное событие $X = \{x, y, d\}$, описывается как $d = y - x + 1$, $d \geq 0$, где переменные x и y представляют, соответственно, *начало* и *конец* недоопределенного события, а d – его *длительность* (переменные x и y являются недоопределенными *t-точками*, а d – недоопределенным расстоянием).

Отношения над недоопределенными интервальными событиями являются Н-расширениями соответствующих отношений Т-модели. Отношения вида $R = \{y_i + r_i + 1 = x_k, r_i \geq 0\}$ выражают все отношения следования, как строгие, так и с лагом r_i .

Такие задания с отношениями хорошо иллюстрируются на обобщенной ленточной диаграмме Гантта (Рис.1).

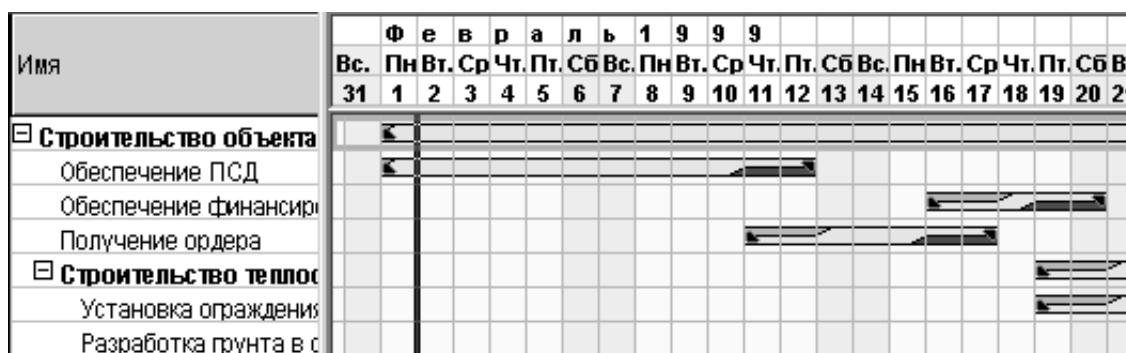


Рис. 1. Фрагмент обобщенной диаграммы Гантта: интервал начала задания представлен верхним зеленым (средне-серым) сегментом, а интервал окончания — нижним красным (темно-серым).

Временному интервалу каждого задания плана в *Time-EX*[®] соответствует двухуровневая полоса, которая разделена на два сектора: интервал начала представляется верхним зеленым сегментом, а интервал конца – нижним красным. Границы сегментов снабжены маркерами, выделяющими соответствующие верхние и нижние оценки.

Рассмотрим модель простого плана.

Задан проект А, состоящий из 4-х заданий, последовательность которых представлена на диаграмме (Рис. 2). Задания связаны между собой отношениями следования.

Задание (*недоопределенное интервальное событие*) описывается следующими отношениями:

$e_i - b_i = d_i - 1$, $d_i > 0$, где переменная b_i представляет время начала задания, e_i – время окончания задания, d_i – длительность задания (недоопределенное расстояние).

Отношения между заданиями выражаются следующим образом:

$e_i + r_i + 1 = b_i$, $r_i \geq 0$, где r_i – лаг между последовательными заданиями.



Рис. 2. Сетевая диаграмма последовательности заданий Проекта А.

Известно, что всякое отношение $r(a_1, \dots, a_n)$ определяет некоторое подмножество декартова произведения областей значений $A_1 \times \dots \times A_n$. Оно может интерпретироваться набором функций $a_i = f_i(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, отображающих подмножество $r(a_1, \dots, a_n)$ на области значений каждой из переменных a_1, \dots, a_n . Н-математика сопоставляет модели универсальный вычислительный процесс, сжимающий начальное подпространство до n -мерного параллелепипеда, содержащего все множество решений. В процессе потокового вычисления этой модели получаем все значения переменных:

$$\begin{array}{llllll} b_0 = 5975; & b_1 = 5975; & b_2 = [5990, 6016]; & b_3 = [5990, 6009]; & b_4 = [6010, 6029]; \\ e_0 = [6014, 6033]; & e_1 = [5989, 5994]; & e_2 = [6002, 6028]; & e_3 = [6009, 6028]; & e_4 = [6014, 6033]; \\ d_0 = [40, 59]; & d_1 = [15, 20]; & d_2 = [13, 18]; & d_3 = [20, 22]; & d_4 = [5, 7]; \\ r_1 = [0, 26]; & r_2 = [0, 26]; & r_3 = [0, 19]; & r_4 = [0, 19]. \end{array}$$

Как видим, результаты вычислений также получились интервальными.

Далее, сжимая пространство решений, мы монотонно стягиваем интервалы в процессе вычислений. В процессе уточнения, т.е. при добавлении дополнительных данных, Н-значение становится все более определенным и в пределе может стать точным значением данной Н-переменной. На этом основана процедура сжатия плана до максимально экономных сроков выполнения заданий.

Если мы ограничим срок окончания проекта точной датой (равной нижней границе интервала окончания — $ie_0 = [6014, 6014]$), то в результате пересчета модели получим:

$$\begin{array}{llllll} b_0 = 5975; & b_1 = 5975; & b_2 = [5990, 5997]; & b_3 = 5990; & b_4 = 6010; \\ e_0 = 6014; & e_1 = 5989; & e_2 = [6002, 6009]; & e_3 = 6009; & e_4 = 6014; \\ d_0 = 40; & d_1 = 15; & d_2 = [13, 18]; & d_3 = 20; & d_4 = 5; \\ r_1 = [0, 7]; & r_2 = [0, 7]; & r_3 = 0; & r_4 = 0. \end{array}$$

Как видим, почти все интервальные значения переменных сжались до точного значения, за исключением сроков того задания, отношения с которым не задавали жесткого закрепления на временной шкале.

Таким образом, мы получаем полностью рассчитанное расписание (schedule), что чрезвычайно трудно сделать традиционными методами.

2. Модели и структура

Практически, каждый реальный проект состоит не просто из последовательности простых работ-заданий, а из некоторой иерархической системы работ, включающей этапы, подпроекты, подпланы с вложенными в них пакетами работ, подзаданиями и т.п. Таким образом, полные планы реальных проектов, как правило, чрезвычайно сложны и громоздки. При наличии несовместности в модели большого размера поиск противоречий в ней оказывается затруднен. Это обстоятельство приводит к необходимости структуризации модели. При этом полученная структурная модель должна быть гомоморфна исходной.

Из теории алгебраических систем [2] непосредственно следует возможность представления произвольной сложной модели в виде структуры, состоящей из подмоделей, связанных “общественными” отношениями друг с другом. Условием существования подмодели будет являться свойство замкнутости. Непустое подмножество A_1 основного множества A некоторой алгебраической системы $A = (A, \Omega)$ называется *замкнутым* в системе A , если A_1 замкнуто относительно каждой главной операции F_ξ этой системы, т.е. если результат любой главной операции, произведенной над произвольными элементами множества A_1 принадлежит снова A_1 .

Рассматривая неформально, членение (разбиение) системы (модели) производится естественным образом при рассмотрении содержания или смысла моделируемого объекта или процесса [3]. Можно доказать, что при соблюдении некоторых условий между исходной нерасчлененной системой и структурированной будет иметь место отношение гомоморфизма.

Структурные Н-модели обеспечивают следующие возможности модульного подхода к разработке модели и повышения уровня работы с ней: обзорность, навигацию, упрощение отладки, возможность менять конфигурацию, использование типовых модулей и т.п.

Модульная структура представляет собой совокупность модулей, связанных *деревом* транзитивных отношений *вложенности*. Корень этого дерева – сама общая модель. Таким образом, каждый модуль может включать в себя произвольное число других модулей (в том числе, ни одного), но при этом каждый модуль может быть непосредственно вложен *только в один модуль*. Модульная

структура вообще может быть реализована в виде ациклического графа. Такая *свободная* структура существенно сложнее для реализации, чем древовидная.

Согласно формальному определению Н-модели [4] каждое элементарное ограничение является монотонным отображением $\varphi_j : X \rightarrow X$. Процесс удовлетворения ограничений в случае УСПЕХА есть результат применения отображения $\varphi = \varphi_{j1} \circ \varphi_{j2} \circ \dots \circ \varphi_{jn}$, т.е. отображение φ есть монотонное отображение как суперпозиция монотонных отображений. При этом структурная модель позволяет реализовать процесс удовлетворения ограничений на Н-модели, т.к. ограничения, заданные на множестве переменных модели, являются либо элементарными, либо сами являются моделями (подмоделями), состоящими из локальных переменных и ограничений на них [4]. Из доказательства данной теоремы следует, что задача удовлетворения конъюнкции ограничений может быть представлена как суперпозиция элементарных ограничений. Это означает, что мы можем структурировать Н-модель, которая образуется из множества переменных и ограничений на них, каждое из которых может быть либо элементарным, либо само является моделью (подмоделью) с элементарными ограничениями над ее локальными переменными. Проиллюстрировать это можно на примере задач планирования и управления проектами.

При формировании плана необходимо выделить некоторые пакеты элементарных заданий, выполняемых для его реализации в рамках иерархической структуры работ. Эти пакеты могут входить в какие-нибудь этапы или фазы плана, могут быть связаны со структурой исполняющей организации и т.д.

Как уже указывалось выше, план некоторого проекта есть сеть заданий (работ), связанных между собой некоторыми отношениями [5, 8]. Переходя к структурной модели плана, имеет смысл рассматривать модель интегрированного плана как глобальную, а модели, входящих в него подпланов, как локальные модели или подмодели. В [8] рассматривается иллюстрирующая наш подход структурная модель простого плана, представленного заданиями и их отношениями. Кроме того, в модели присутствуют также заданные интервалами ресурсные и стоимостные ограничения. На Рис.3 представлена сетевая диаграмма плана, где наглядно показан структурный подход к задачам планирования.

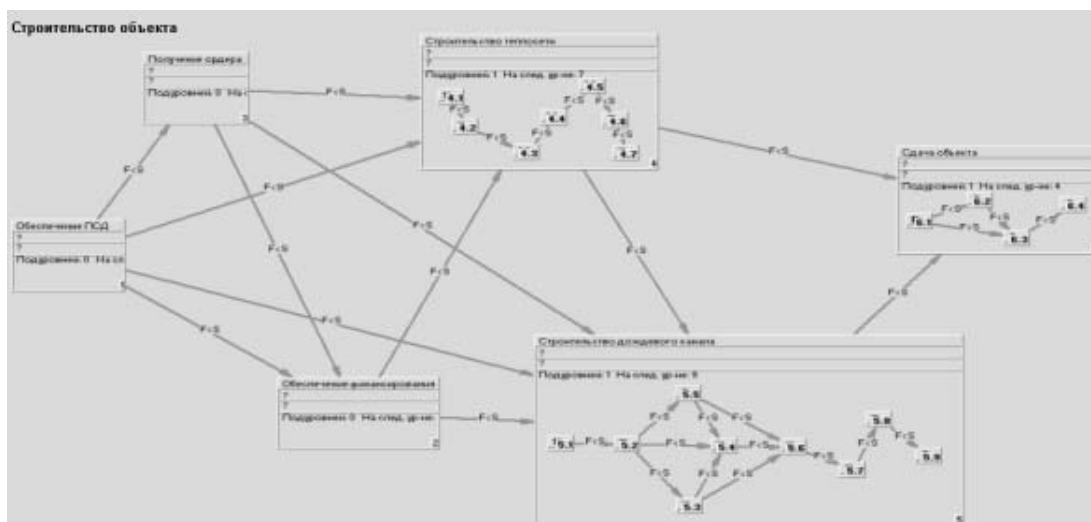


Рис. 3. Сетевая диаграмма проекта с отображением структуры модели плана с вложенными подмоделями (подпланами).

Такой подход к моделированию дает возможность производить операции с подпланами независимо друг от друга и от общей модели плана. “Разобранный” укрупненный план может подвергаться предварительной обработке: уточнению, оптимизации и сжатию.

После того как произведены расчет, оптимизация и сжатие каждого подплана, их уточненные параметры должны учитываться в глобальной модели плана.

Работа с подпланами-подмоделями в проекте может производиться параллельно, а затем интегрироваться в общий проект. Общий план проекта принимает вид укрупненного плана, задания которого будут групповыми без детализирующих эти подпланы вложенных работ.

3. Литература

1. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика – 1986. – №5. – С. 3–28.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: “Наука”, 1970. – 392 с.
3. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. – М.: “Радио и связь”, 1982. – 152 с.
4. Телерман В.В., Ушаков Д.М. Недоопределенные модели: формализация подхода и перспективы развития // Проблемы представления и обработки не полностью определенных знаний – Москва-Новосибирск: Российский НИИ искусственного интеллекта: 1996. – С. 7–30.
5. Нариньяни А.С., Седреева Г.О., Седреев С.В., Фролов С.А. Time-EX|Windows – Новое поколение технологии календарного планирования // Проблемы представления и обработки не полностью определенных знаний – Москва-Новосибирск: Российский НИИ искусственного интеллекта: 1996. – С. 101–116.
6. Телерман В.В., Сидоров В.А., Ушаков Д.М. Интервальные и мультиинтервальные расширения в недоопределенных моделях // Вычислительные технологии. – Новосибирск: 1997. – Т. 2, №1. – С. 62–70.
7. Липатов А.А., Плавенчук Е.А. Структурирование H-моделей в проекции на многотабличную версию системы Финплан // Труды 9-й национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием КИИГ'2004. – М.: Физматлит, 2004.
8. Гофман И.Д., Инишев Д.А., Шурбаков А.В. Структурные модели планов в интеллектуальной системе управления проектами Time-EX // Труды 9-й национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием КИИГ'2004. – М.: Физматлит, 2004.

ИМИТАЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОШИБКЕ

С.И. Жилин

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
E-mail: sergei@asu.ru

Аннотация

По результатам имитационного исследования получен вывод о более высокой эффективности использования для последовательного планирования эксперимента при интервальной ошибке критерия минимизации максимальной диагонали множества допустимых значений параметров линейной модели по сравнению с классическим критерием D -оптимальности.

Ключевые слова: интервально ограниченная ошибка, регрессия, последовательное планирование эксперимента.

Keywords: interval-bounded error, regression, sequential experimental design.

1. Введение

Планирование эксперимента — хорошо развитая ветвь математической статистики, предлагающая исследователю широкий выбор методов оптимизации качества регрессионных моделей [1]. Однако задача планирования эксперимента при построении моделей типа «вход-выход» по данным с интервальной ошибкой и методы ее решения менее изучены [2-4].

Требование принадлежности ошибки интервалу накладывает ограничения на допустимые значения параметров модели. В частности, если $x \in \mathbb{R}^p$ — вектор входных переменных, $\alpha \in \mathbb{R}^p$ — вектор параметров, подлежащих оцениванию, $y \in \mathbb{R}$ — выходная переменная, $e \in \mathbb{R}$ — ошибка измерения выходной переменной, которая может принимать значения только из интервала $[-\varepsilon, \varepsilon]$, то область возможных значений параметров для линейно-параметризованной модели

$$y = x^T \alpha + e \quad (1)$$

есть выпуклое полиэдральное множество $A = \bigcap_{i=1}^n S_i$, где $S_i = \{ \alpha \in \mathbb{R}^p \mid |y_i - x_i^T \alpha| \leq \varepsilon_i \}$ — множество возможных значений параметров, соответствующее i -му наблюдению $(x_i, y_i, \varepsilon_i)$. Поскольку точное описание множества A с ростом числа наблюдений n становится затруднительным, часто такое описание заменяют интервальной оболочкой $A = \square A$ [5]. Компоненты вектора A используются в качестве интервальных оценок параметров модели.

При проведении активного эксперимента исследователь часто заинтересован в минимизации ширины интервальных оценок параметров модели или максимальной ошибки предсказания значений выходной переменной. Наиболее известные результаты в области планирования эксперимента при ограниченной ошибке связаны с задачей статического планирования [2-4, 6]. Однако, с практической точки зрения, не меньшую ценность представляют собой и методы последовательного планирования эксперимента. В [4] для построения линейно-параметризованных моделей по данным с интервальной ошибкой предложены методы последовательного планирования эксперимента с выделением блока насыщенного эксперимента. Для выбора очередной экспериментальной точки эти методы используют только текущую матрицу плана эксперимента $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ и соответствующий вектор границ ошибок наблюдений $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$, не задействуя информацию об измеренных значениях выходной переменной $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$. При этом, если все границы ошибок наблюдений ε_i равны, то результаты планирования совпадают с результатами классического последовательного метода планирования D -оптимального эксперимента [1].

При построении моделей по данным с интервальной ошибкой применимы, конечно, и классические методы планирования эксперимента, поскольку они основаны на анализе лишь текущего плана эксперимента X и не принимают во внимание ни природу ошибки, ни измеренные значения выходной переменной Y . Однако вполне закономерен вопрос: насколько существенно на качество конструируемой модели или «скорость» последовательной процедуры планирования эксперимента влияет отказ от использования этой информации?

Поскольку множество неопределенности «аккумулирует» в себе информацию, как о плане эксперимента, так и об измеренных значениях выходной переменной и ограниченности ошибки, его

анализ для планирования очередного наблюдения представляется перспективным. В частности, выбор очередной точки в пространстве эксперимента может осуществляться с целью минимизации максимальной диагонали множества A (I_E -оптимальное планирование в терминах [4]). Как показано в [4], помимо обеспечиваемого сужения интервальных оценок параметров модели такая стратегия приводит еще и к минимизации максимальной ошибки предсказания, если пространство эксперимента является шаром и $n \geq p$.

Предметом настоящей работы является основанное на вычислительном эксперименте сравнение результатов последовательного планирования эксперимента, обеспечиваемых классическим методом построения D -оптимального плана и методом планирования I_E -оптимального эксперимента. Итоги имитационных экспериментов позволяют сделать вывод о том, что при последовательном планировании одного и того же количества наблюдений в пространстве эксперимента, представляющем собою шар, метод построения I_E -оптимального плана за счет использования дополнительной информации чаще обеспечивает более узкие интервальные оценки параметров модели, чем метод D -оптимального планирования. При этом преимущество метода I_E -оптимального планирования нарастает с увеличением количества планируемых наблюдений и количества параметров модели.

В следующем разделе описывается схема проведения и результаты указанных имитационных экспериментов.

2. Сравнение методов последовательного планирования D - и I_E -оптимального эксперимента

Последовательное планирование эксперимента представляет собой циклическую процедуру, каждая итерация которой включает в себя следующие этапы.

1. *Эксперимент.* Этот этап состоит в непосредственном осуществлении измерений, спланированных на предыдущей итерации. На стартовой итерации измерения так называемого затравочного эксперимента зачастую оказываются спланированными неоптимальным образом или не проводятся вовсе, а заменяются ретроспективными наблюдениями, полученными из различных источников.
2. *Анализ.* Суть этого этапа сводится к поиску ответа на вопрос, стоит ли прекратить эксперимент либо по причине достижения приемлемого качества конструируемой модели (требуемой ширины интервальных оценок параметров или максимальной ошибки предсказания), либо при исчерпании ресурсов, отведенных для проведения эксперимента (достижении некоторого максимально допустимого количества итераций).
3. *Планирование.* Если на предыдущем этапе не принято решение об остановке, план эксперимента пополняется очередной порцией точек из пространства эксперимента для проведения измерений на следующей итерации. Выбор экспериментальных точек осуществляется в соответствии с заданным критерием оптимальности плана эксперимента.

Сравнение методов последовательного планирования D - и I_E -оптимального эксперимента проводилось по результатам решения каждым из методов одних и тех же модельных задач следующей структуры. Для модели (1), стартуя с затравочного плана эксперимента $X_0 = (x_1, \dots, x_{p+1})^T$, в заданном пространстве эксперимента $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^p$ последовательно выбрать N экспериментальных точек, если известно, что ошибка всех измерений выходной переменной в спланированных экспериментальных точках ограничена величиной ε .

Ошибка измерения имитировалась случайными величинами с фиксированным распределением на интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Для каждого из распределений — равномерного и стандартного нормального, усеченного на уровне 3σ , — было решено по отдельной серии из M модельных задач при $p = 2, 3, 4$. При этом в каждой из модельных задач затравочные планы X_0 формировались путем случайного выбора $p + 1$ равномерно распределенных точек x_i в пространстве эксперимента $\mathcal{X} = \{ x \in \mathbb{R}^p \mid x^T x \leq 1 \}$. Выбор в качестве пространства эксперимента \mathcal{X} именно шара, был обусловлен желанием обеспечить уже упоминавшееся свойство I_E -оптимального планирования минимизировать в этом случае максимальную ошибку предсказания. Тем не менее, в роли меры качества моделей, получаемых в результате решения модельных задач сравниваемыми методами, был выбран объем интервальной оболочки $\square A$ множества допустимых значений параметров модели. «Победившим» при решении конкретной задачи считался метод, обеспечивший меньший объем $\square A$ и, соответственно, более узкие интервальные оценки параметров модели. Количество «побед», одержанное D - и I_E -оптимальным методом в серии задач, обозначается M_D и M_{I_E} соответственно ($M_D + M_{I_E} = M$).

Как известно, выбор очередной экспериментальной точки x_{next}^D удовлетворяет критерию D -оптимальности, если ее добавление в план эксперимента X приводит к минимизации определителя дисперсионной матрицы оценок параметров $D = (X^T X)^{-1}$. Геометрически это соответствует минимизации объема доверительного эллипсоида в пространстве параметров.

Критерий I_E -оптимальности состоит в минимизации максимальной длины диагонали множества допустимых значений параметров A , что косвенно также приводит к уменьшению объема множества A . Концевые точки α_1^* , α_2^* максимальной диагонали множества A могут быть найдены путем решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$\{\alpha_1^*, \alpha_2^*\} = \arg \max_{\alpha_1, \alpha_2 \in A} (\alpha_1 - \alpha_2)^T (\alpha_1 - \alpha_2). \quad (2)$$

В качестве экспериментальной точки, информация об измерении в которой приводит к минимизации длины диагонали $\alpha_1^* \alpha_2^*$, логично выбрать точку $x_{next}^{I_E}$,

- а) порождающую ограничение на параметры S_{next} , ортогональное направлению диагонали $\alpha_1^* \alpha_2^*$,
- б) и лежащую на границе пространства эксперимента \mathcal{X} .

В случае, когда \mathcal{X} есть единичный шар, такой точкой является $x_{next}^{I_E} = a^*$ или $x_{next}^{I_E} = -a^*$, где $a^* = (\alpha_1^* - \alpha_2^*) / \|\alpha_1^* - \alpha_2^*\|$.

Общее количество M модельных задач, решенных сравниваемыми методами в каждой серии (при фиксированном распределении ошибки, размерности модели p и количестве планируемых наблюдений N) составило 5000. Количество модельных задач M_{I_E} , при решении которых метод последовательного I_E -оптимального планирования эксперимента обеспечил меньший объем интервальной оболочки $\square A$ множества допустимых значений параметров модели, представлено в графическом виде на рис. 1а для равномерного, а на рис. 1б — для усеченного нормального распределения ошибки.

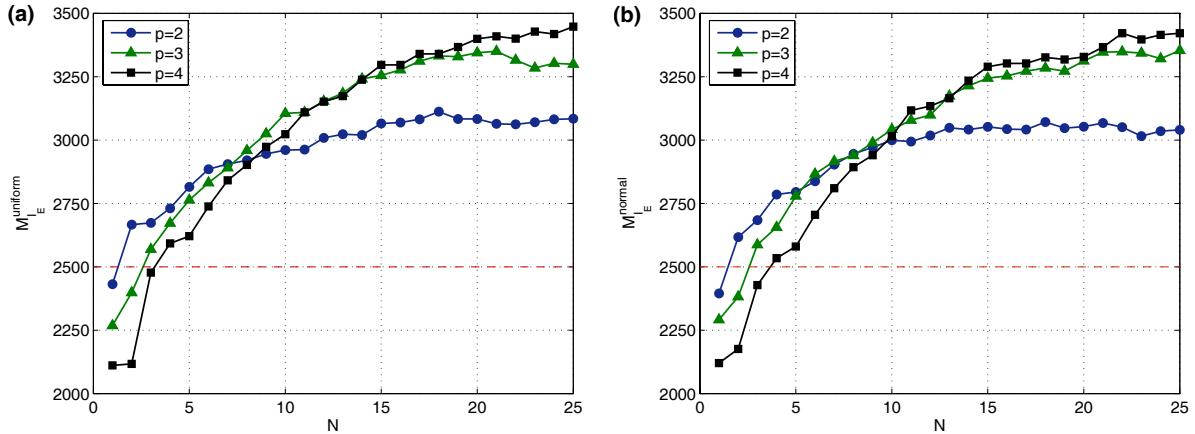


Рис. 1. Количество модельных задач M_{I_E} (из общего числа $M = 5000$), при решении которых метод последовательного I_E -оптимального планирования эксперимента обеспечил меньший объем интервальной оболочки множества допустимых значений параметров модели (а) при равномерном распределении ошибки; (б) при усеченном нормальном распределении ошибки. N — количество последовательно планируемых экспериментальных точек, p — размерность пространства эксперимента. Пунктирная горизонталь разделяет области $M_D > M_{I_E}$ (ниже горизонтали) и $M_D < M_{I_E}$ (выше горизонтали).

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать следующие наблюдения.

1. И для равномерного, и для усеченного нормального распределения ошибки измерения внутри интервала результаты экспериментов имеют одинаковый качественный характер.
2. Метод последовательного планирования D -оптимального эксперимента обеспечивает меньший объем интервальной оболочки множества допустимых значений параметров $\square A$, чем метод I_E -оптимального планирования, если количество планируемых наблюдений N не превышает размерности пространства параметров модели p .
3. При $N > p$ метод последовательного планирования I_E -оптимального эксперимента существенно чаще приводит к меньшему объему $\square A$ по сравнению с методом планирования D -оптимального эксперимента. С ростом размерности модели p эта тенденция становится более выраженной.

Следует отметить, что второе из этих наблюдений согласуется с результатами, полученными для методов D - и I_E -оптимального планирования в [4], а также с выкладками [6], проведенными в отношении методов статического планирования D - и V -оптимального (минимизирующего объем A) эксперимента.

Что касается основного вопроса о целесообразности использования игнорируемой классически методами планирования эксперимента информации об уже измеренных значениях выходной переменной и границах ошибок измерений, то ответ на него в подавляющем большинстве практических ситуаций будет утвердительным, если принимать во внимание первый и третий из выводов, сделанных о результатах численных экспериментов. Однако, следует заметить, что поправку в это умозаключение в каждом конкретном случае может вносить вычислительная сложность метода I_E -оптимального планирования эксперимента. Основная оптимизационная задача (2), лежащая в основе этого метода, является невыпуклой задачей квадратичного программирования, которые, как известно, относятся к классу NP -сложных. Таким образом, даже при наличии хорошего решателя задач глобальной оптимизации, использование метода I_E -оптимального планирования эксперимента на практике возможно лишь для моделей, количество параметров в которых не превышает пятнадцати-двадцати. Впрочем, класс моделей, используемых исследователями-практиками и удовлетворяющих этим ограничениям довольно широк.

3. Заключение

Итоги имитационного исследования по сравнению методов последовательного планирования эксперимента при интервальной ошибке свидетельствуют о том, что использование критерия I_E -оптимальности эксперимента, приводит к более качественным эмпирическим моделям в смысле ширины интервальных оценок параметров и максимальной ошибки предсказания по сравнению с употреблением классического критерия D -оптимальности, если количество наблюдений превышает количество параметров модели. Повышение качества модели обеспечивается за счет привлечения при планировании очередного наблюдения дополнительной информации об измеренных значениях выходной переменной и ограниченности ошибки наблюдений.

Результаты численных экспериментов могут служить основанием для дальнейших аналитических исследований свойств методов последовательного планирования эксперимента при построении зависимостей по эмпирическим данным с интервальной ошибкой.

4. Литература

1. ФЕДОРОВ В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). – М.: Наука, 1971. – 312 с.
2. BELFORTE G., BONA B., FREDIANI S. Optimal Sampling Schedule for Parameter Estimation of Linear Models with Unknown But Bounded Measurement Errors // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1987. – Vol. 32. – № 2. – P. 179–182.
3. PRONZATO L., WALTER E. Experiment Design for Bounded-Error Models // Mathematics and Computers in Simulation. – 1990. – Vol. 32. – P. 571–584.
4. ДЫВАК Н.П. Теоретические основы построения моделей «вход-выход» статических систем методами анализа интервальных данных. Дисс. ... док. тех. наук. – Львов: Нац. ун-т «Львовская политехника», 2003. (на укр. яз.)
5. ОСКОРБИН Н.М., МАКСИМОВ А.В., ЖИЛИН С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия Алтайского государственного университета. – 1998. – № 1. – С. 35–38.
6. PRONZATO L., WALTER E. Experiment Design in a Bounded-Error Context: Comparison with D -Optimality // Automatica. – 1989. – Vol. 25. – № 3. – P. 383–391.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ, ПОРЯДКОВЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

Т.Э. Каминский, А.Л. Крюкова

Вологодский государственный педагогический университет, Вологда, Россия

E-mail: krukova@vologda.ru

Аннотация

В работе рассматривается множество интервальных округлений, содержится обзор результатов, связанных с изучением алгебраических и порядковых структур интервальных округлений. Последняя часть посвящена изучению метрических свойств интервальных округлений и их связи с алгебраическими операциями.

Ключевые слова: интервальные округления, интервальные вычисления

Keywords: interval rounding, interval computing

1. Введение

Истоки аксиоматической теории округлений содержатся в работе У. Кулиша [1], который определил их как отображения линейно упорядоченного множества X в его подмножество Y , удовлетворяющие некоторым естественным требованиям (аксиомам). В содержательном понимании в качестве X можно рассматривать множество \mathbb{R} всех действительных чисел, а в качестве Y — множество чисел, представимых в рассматриваемом вычислительном устройстве. В практических вычислениях точные числовые значения (элементы из X), как правило, заменяются их приближенными значениями, а последние, следуя руководящей идее Р. Мура [2], интерпретируются как интервалы $[x^-; x^+]$, $x^-, x^+ \in \mathbb{R}$, $x^- \leq x^+$, концы которых не обязательно представимы в компьютере и, следовательно, при выполнении вычислительных процедур сами должны подвергаться действию округления. Это соображение приводит к мысли ввести понятие интервального округления как отображения $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которое, во всяком случае, должно обладать следующими свойствами: оно не уменьшает погрешность приближенного числа, т.е. ширину округляемого интервала, монотонно относительно включения и идемпотентно (повторное применение округления не дает нового результата). Формализацией этих свойств является следующее

Определение 1. [5] Интервальным округлением (I-округлением) называется отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$\text{O1. } (\forall A \in \mathbb{R}) (A \subseteq \varphi(A));$$

$$\text{O2. } (\forall A, B \in \mathbb{R}) (A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B));$$

$$\text{O3. } \varphi^2 = \varphi.$$

Примерами I-округлений служат отображения $\varphi^{(k, l)}$ ($k, l \in \mathbb{Z}$), действующие по правилу

$$\varphi^{(k, l)}([a; b]) = [a_k^-; b_l^+],$$

где a_k^- (соответственно b_l^+) — результат обычного (числового) округления числа a (соответственно b) до k -го (l -го) g -ичного разряда по недостатку (избытку), g — основание системы счисления. Множество всех I-округлений обозначим через Φ . I-округления является, по-видимому, наиболее естественным типом интервальных округлений. Будем называть их регулярными I-округлениями (g -округлениями). Множество всех g -округлений, дополненное тождественным отображением ε и отображениями $\varphi^{(k, \infty)}([a; b]) = [a_k^-; b]$ и $\varphi^{(\infty, l)}([a; b]) = [a; b_l^+]$, обозначим $\Phi^{(\mathbb{Z})}$.

Множество всех I-округлений обширно. Помимо g -округлений в нем содержатся отображения причудливого вида, например, отображение $\varphi_M(A) = [-\max(|a|, |b|); \max(|a|, |b|)]$. Поэтому возникает желание ограничить Φ , отсеяв из него подобные „патологические“ I-округления. Возможный путь решения этой задачи связан с заданием на множестве Φ и некоторых его подмножествах алгебраических, порядковых и метрических структур и изучением их свойств. Основанием для этого заявления может служить, например, тот факт, что I-округление φ_M не коммутирует, вообще говоря, с g -округлениями: $\varphi_M \cdot \varphi^{(k, l)} \neq \varphi^{(k, l)} \cdot \varphi_M$, в то время как последние коммутируют друг с другом. Разумеется, следует ожидать, что эти структуры будут взаимно влиять друг на друга. Задача ограничения множества Φ поглощается, таким образом, более общей задачей введения и исследования на нем алгебраических операций, отношений порядка и метрики.

2. Алгебраические свойства интервальных округлений

В работах [4, 5, 7–10] на множестве Φ рассматриваются операции сложения $(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$ и умножения $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(A) = \varphi_2(\varphi_1(A))$. Алгебра $\langle \Phi; + \rangle$ является, как легко видеть, коммутативной полугруппой идемпотентов. Относительно умножения множество Φ не замкнуто, однако имеет место

Теорема 1. [5] Произведения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ I-округлений φ и ψ являются I-округлениями тогда и только тогда, когда φ и ψ коммутируют: $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Из этой теоремы следует, что алгебра $\langle \overline{\Phi}; \cdot \rangle$, где $\overline{\Phi}$ — множество всех коммутирующих друг с другом I-округлений, содержащее все регулярные I-округления, является моноидом. Прежде, чем перейти к алгебре $\langle \Phi; +, \cdot \rangle$ напомним

Определение 2. [11] Алгебра $\langle X, +, \cdot \rangle$, в которой обе операции ассоциативны, кроме того, сложение коммутативно, идемпотентно и выполняются левый и правый дистрибутивные законы: $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, называется идемпотентным полукольцом (ИПК).

Легко видеть, что алгебра $\langle \Phi^{(\mathbb{Z})}; +, \cdot \rangle$ — ИПК, а $\langle \overline{\Phi}; +, \cdot \rangle$ — ИПК не является: правая дистрибутивность в ней не имеет места. Однако в множестве Φ можно выделить такое максимальное (по включению) подмножество Ψ , которое замкнуто по сложению и умножению и образует вместе с этими операциями структуру ИПК. Оно строится следующим образом. Назовем подмножество $\Psi' \subseteq \Phi$ назовем Σ -множеством, если в нем выполняются условия:

1. $\Phi^{(\mathbb{Z})} \subseteq \Psi'$,
2. $(\forall \varphi, \psi \in \Psi') (\varphi\psi = \psi\varphi)$,
3. $(\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi \in \Psi') \left(\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) \cdot \varphi = \sum_{i=1}^n (\varphi_i \cdot \varphi) \right)$.

Применение леммы Куратовского-Цорна показывает, что в множестве всех Σ -множеств существуют максимальные (по включению) элементы. Имеет место

Теорема 2. [9] Максимальное Σ -множество Ψ замкнуто по сложению и умножению и, следовательно, является ИПК.

3. Порядковые свойства интервальных округлений

Отношение порядка в множестве Φ вводится следующим определением

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \Leftrightarrow (\forall A \in IR) (\varphi_2(A) \subseteq \varphi_1(A)), \quad (1)$$

которое формализует интуитивные понятия «более тонкие» и «более грубые» округления.

Теорема 3. [5]

1. Модель $\langle \Phi; \leq \rangle$ является верхней полурешеткой, в которой $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$;
2. Верхняя полурешетка $\langle \Phi; \leq \rangle$ полна: любое множество I-округлений $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in M\}$ обладает наименьшей верхней границей $\vee \mathfrak{A} = \bigcap_{\alpha \in M} \varphi_\alpha$;
3. Верхняя полурешетка $\langle \Phi; \leq \rangle$ является условно \wedge -полным частично упорядоченным множеством;
4. Подмодель $\langle \Psi; \leq \rangle$ (см. § 2) — подрешетка полурешетки $\langle \Phi; \leq \rangle$, в которой $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(A) = (\varphi_1 \varphi_2)(A)$.

Так как алгебра $\langle \overline{\Phi}; \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа идемпотентов, то в ней можно ввести так называемую естественную упорядоченность, полагая

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1, \quad (2)$$

превращающую ее в упорядоченную полугруппу.

Теорема 4. В упорядоченной полугруппе $\langle \overline{\Phi}; \cdot \rangle$ определения (1) и (2) эквивалентны.

Решетка $\langle \Phi^{(\mathbb{Z})}; \leq \rangle$ обладает важным свойством дистрибутивности. Этот факт допускает следующее обобщение. Назовем подмножество $\Psi' \subseteq \Phi$ R -множеством, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\Phi^{(\mathbb{Z})} \subseteq \Psi'$,
2. $\varphi, \psi \in \Psi' \Rightarrow \varphi\psi = \psi\varphi$,
3. Ψ' замкнуто по сложению и умножению.

Опираясь на лемму Куратовского-Цорна, можно показать, что в множестве Φ существуют максимальные (по включению) \mathbb{R} -множества. Пусть $\overline{\Psi}$ одно из них.

Теорема 5. [7, 10] Модель $\langle \overline{\Psi}; \leq \rangle$ в которой отношение \leq определено условием (1), является дистрибутивной решеткой.

Подрешетка $\langle \Phi^{(\mathbb{Z})}; \leq \rangle$ играет в верхней полурешетке $\langle \Phi; \leq \rangle$ особую роль.

Теорема 6. [5] У любого Γ -округления φ , не являющегося Γ -округлением, существует покрывающее его Γ -округление. Если, кроме того, φ имеет в подрешетке $\langle \Phi^{(\mathbb{Z})}; \leq \rangle$ нижнюю границу, то существует покрываемое им Γ -округление $\widehat{\varphi}$.

Обозначим через $\widetilde{\Psi}$ подмножество множества $\overline{\Psi}$, состоящее из всех Γ -округлений, имеющих нижние границы в подрешетке (полугруппе) $\Phi^{(\mathbb{Z})}$. Легко показать, что $\langle \widetilde{\Psi}; \cdot \rangle$ — полугруппа. Назовем наибольшей регулярной нижней границей (нрнг) Γ -округления $\varphi \in \widetilde{\Psi} \setminus \Phi^{(\mathbb{Z})}$ покрываемое им Γ -округление $\widehat{\varphi}$. Нрнг Γ -округления $\varphi^{(k, l)}$ будем считать его самого. Нетрудно показать, что нрнг Γ -округления φ , если она существует, единственна. Рассмотрим отображение f полугруппы $\langle \widetilde{\Psi}; \cdot \rangle$ в полугруппу $\langle \Phi^{(\mathbb{Z})}; \cdot \rangle$, полагая $f(\varphi) = \widehat{\varphi}$

Теорема 7. [8] f — эпиморфизм, ядром которого является конгруэнция ρ , определяемая условием $\varphi_1 \rho \varphi_2 \Leftrightarrow \widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_2$. Факторполугруппа $\widetilde{\Psi} / \text{Ker } f$ изоморфна полугруппе $\langle \Phi^{(\mathbb{Z})}; \cdot \rangle$. $\widetilde{\Psi}$ — связка полугрупп.

4. Метрические свойства интервальных округлений

Один из наиболее употребительных способов введения метрики на множестве \mathbb{IR} основан на определении расстояния $\rho(A, B)$ между интервалами $A = [\underline{a}; \overline{a}]$, $B = [\underline{b}; \overline{b}]$ посредством формулы $\rho(A, B) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|\}$. Хорошо известно, что \mathbb{IR} снабженное этим расстоянием, является полным метрическим пространством.

Определение 3. Расстоянием между интервальными округлениями φ_1, φ_2 назовем число

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_A \rho(\varphi_1(A), \varphi_2(A)),$$

где ρ — метрика в \mathbb{IR} .

Множество Φ всех интервальных округлений, снабженное расстоянием d , является метрическим пространством.

Теорема 8. Операции сложения и умножения интервалов непрерывны в метрике d , иными словами полугруппы $\langle \Phi; + \rangle$ и $\langle \Phi; \cdot \rangle$ являются топологическими полугруппами.

Теорема 9.

1. Симметричные регулярные округления $\varphi^{(k)} = \varphi^{(k, k)}$ ($k \geq 0$), являются непрерывными отображениями;
2. Фундаментальная последовательность симметричных Γ -округлений сходится к тождественному отображению ε .

Рассмотрим фундаментальную последовательность Γ -округлений $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Для интервала $A \in \mathbb{IR}$ последовательности левых и правых концов интервалов $\varphi_i(A)$, $i = 1, 2, \dots$ фундаментальны. Обозначим их пределы \underline{a} , \tilde{a} соответственно. Легко видеть, что $\underline{a} \leq \tilde{a}$ и, следовательно, можно рассматривать отрезок $\tilde{A} = [\underline{a}; \tilde{a}]$. Построим отображение $\varphi : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$, полагая $\varphi(A) = \tilde{A}$.

Теорема 10. Отображение φ является пределом последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ и удовлетворяет аксиомам O1, O2 (см. определение 1). Если, кроме того, Γ -округления φ_i непрерывны, то для φ выполняется также аксиома O3. Таким образом, фундаментальная последовательность Γ -округлений, члены которой непрерывны, сходится к Γ -округлению.

5. Литература

1. KULISCH U. An axiomatic Approach to Rounded Computations // Numer. Math. – 1971. – № 18. – P. 1–17.
2. MOORE R.E. Interval Analysis. – Englewood cliffs:Prentice-Hall, 1965.
3. Зюзин В.С. О метризации интервальных множеств // Интервальные вычисления. – 1992. – № 2(4). – С. 39–50.
4. КАМИНСКАЯ Э.Л., КАМИНСКИЙ Т.Э. К теории округлений // Сб. научных трудов МГПИ им. Ленина "Вычислительная математика и программирование". – М., 1983. – С. 89–36.
5. КАМИНСКИЙ Т.Э. К теории интервальных округлений // Сб. "Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики". – Вологда: Русь, 2000. – С. 23–36.
6. KAMINSKY T.E., KREINOVICH V. Natural requirements for natural roundings lead to a hardware-independent characterization of standard rounding procedures // Notes on intuitionistic fuzzy sets. – 1998. – Vol. II, № 3. – P. 57–64.
7. КАМИНСКИЙ Т.Э., КРЮКОВА А.Л. Дистрибутивность решетки интервальных округлений // Тр. третьих Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. – С. 134–137.
8. КРЮКОВА А.Л. О полугруппе интервальных округлений // Тр. 35-й региональной молодежной конференции 26–30 января 2004 года. – Екатеринбург, 2004. – С. 34–37.
9. КРЮКОВА А.Л. К описанию идемпотентного полукольца интервальных округлений // Сб. тр. молодых ученых. – Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2005. – С. 163–166.
10. КРЮКОВА А.Л. Алгебраические и порядковые структуры интервальных округлений // Интервальный анализ / Тр. XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2005 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – Т. 4. – С. 56–61.
11. СОВОЛЕВСКИЙ А.Н. Интервальная арифметика и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами // Доклады РАН. – 1999. – Т. 369, № 6. – С. 747–749.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК ТОЧЕЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В.Я. Карташов, А.В. Столетов

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия

E-mail: kartash@ic.kemsu.ru

Аннотация

В работе анализируется решение задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов, допускающих линеаризацию. Используется метод, основанный на применении дробно-рациональной аппроксимации непрерывными дробями. Неопределенность в исходных данных оценивается в виде получаемых интервальных моделей. Показан механизм получения интервалов модели, приведены примеры решения практических задач.

Ключевые слова: интервальные вычисления, интервал, структурно-параметрическая идентификация, непрерывные дроби, интервальная идентификация

Keywords: interval computing, interval, sp-identification, continued fractions, interval identification

1. Введение

При решении значительного числа прикладных задач основным этапом является установление причинно-следственных зависимостей между исследуемыми факторами. Как правило, такие зависимости получают на основе обработки экспериментальных данных. В данной работе объектом исследования является процесс идентификации динамических характеристик непрерывных систем. Значимость этой задачи обусловлена следующими положениями:

- 1) значимостью применения достоверных математических моделей в системах мониторинга, управления, диагностики и краткосрочного прогнозирования;
- 2) широкими возможностями обработки информации современной вычислительной техникой в реальном времени.

2. Анализ классических подходов

Установление причинно-следственных зависимостей осуществляется по следующей схеме системного анализа (рис.1).

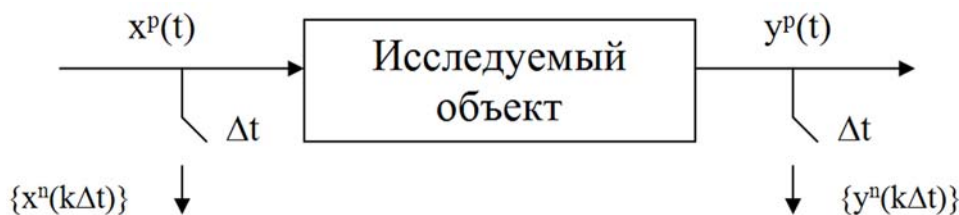


Рис. 1. Схема получения исходной информации в задачах идентификации

Наличие зависимости изменений выходной переменной $y^p(t)$ от изменения входной переменной $x^p(t)$ позволяет принять гипотезу о существовании неизвестного механизма такой взаимосвязи. Другими словами, предполагается существование реальной модели объекта $y^p(t) = F^0(x^p(t))$. В общем случае, $x^p(t), y^p(t)$ могут быть многомерными.

Путем измерений $x^p(t)$ и $y^p(t)$, как правило, в равноотстоящие моменты времени $t_k = k\Delta t$ с периодом дискретизации Δt происходит формирование исходной измеренной информации $x^n(k\Delta t), y^n(k\Delta t)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ для решения задачи идентификации.

Наиболее часто решение задачи идентификации осуществляется через итерационные процедуры использования методов решения задач параметрической идентификации [1,2].

В большинстве случаев, основными предположениями в задаче параметрической идентификации являются:

- 1) известна структура математической модели с точностью до параметров $y^M(x) = F^M(x^M(t), \bar{a})$, где \bar{a} – вектор параметров;
- 2) принимается следующая модель измерений $y^n(x) = y^M(x) + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t)$ характеризует неопределенность в форме измерительной погрешности;
- 3) относительно неизвестной величины $\varepsilon(t)$ предполагается ее случайность с нормальным распределением $N(0; \sigma^2)$; более того в случае дискретизации желательна независимость случайных величин $\varepsilon(k\Delta t)$.

Задав некоторый критерий близости, решают аппроксимационную задачу в сглаживающей постановке. Используя различные оптимизационные алгоритмы, определяют оптимальные значения оцениваемых параметров \bar{a} с последующей статистической проверкой.

Анализ таких методов решения позволяет выделить основные противоречивые положения:

- 1) нет процедур сопоставления $y = F^0(x(t))$ и $y^M(x) = F^M(x(t))$ (непонятно, как определяется структура модели);
- 2) значения погрешностей неизвестны, а поэтому возникает проблема в оценке неопределенности самой модели;
- 3) возможность оценки влияния погрешностей измерения в принципе и оценка этого влияния в модели, а также ряд других особенностей.

Именно возникшие противоречия стимулируют исследования в данном направлении [3].

3. Краткое изложение способа структурно-параметрической идентификации

В данной работе решение сформулированной задачи осуществляется на основе применения способа структурно-параметрической SP-идентификации на основе непрерывных дробей [4].

Для иллюстрации возможностей способа SP-идентификации рассмотрим простейший вариант задачи идентификации:

- 1) объект допускает линеаризацию;
- 2) объект одномерный ($x(t)$ и $y(t)$ – одномерные);
- 3) ошибки измерений осуществляются аппаратурой с распространенной погрешностью для промышленного использования;
- 4) $x(t)$ – детерминированное воздействие (например, ступенчатое воздействие $1(t)$).

Заметим, что такая постановка задачи идентификации характерна в системах промышленной автоматизации.

Способ SP-идентификации включает следующие взаимосвязанные этапы решения и исследования.

1. Этап установления взаимнооднозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями линейного динамического объекта. Модели таких объектов рассмотрены в форме передаточных функций, конечное число параметров которых позволяет определить условия их полной идентификации. В качестве основы взаимнооднозначного соответствия определено согласованное Z-преобразование, свойство многозначности которого привело к принципу вариации периода дискретизации Δt . Этот принцип позволяет перевести все нули и полюса передаточных функций в основную полосу комплексной S-плоскости и нулевой лист комплексной Z-плоскости.
2. Этап установления совокупности эквивалентных дискретных моделей, взаимнооднозначно связанных с непрерывной передаточной функцией. Это достигается установлением интервала значений периода дискретизации $(\Delta t_{min}, \Delta t_{max})$, который определяется динамическими характеристиками исследуемого объекта. Этот интервал характеризуется тем, что какой бы период дискретизации Δt не взяли из интервала, дискретная модель однозначно определяет непрерывную передаточную функцию.
3. Этап восстановления дискретной передаточной функции по результатам дискретных измерений вход-выходных переменных путем дробно-рациональной аппроксимации непрерывными дробями. В работе [4] предложены и исследованы алгоритмы идентификации на основе правых C-дробей. Алгоритм восстановления дискретных передаточных функций включает:

- 1) формирование идентифицирующей матрицы, первые две строки которой включают измерения вход-выходных переменных, а все остальные элементы определяются рекуррентно;
- 2) для объектов, допускающих линеаризацию, формирование идентифицирующей матрицы осуществляется до тех пор, пока не появится строка, элементы которой близки к нулю, на этом этап заканчивается;
- 3) первый столбец определяет правильную С-дробь, которая является конечной и связана с порядком непрерывной модели, “сворачивая” С-дробь к дробно-рациональному выражению получаем дискретную передаточную функцию;
- 4) по дискретной передаточной функции восстанавливаем нули и полюса как дискретной так и непрерывной моделей, а затем и саму непрерывную модель;
- 5) изменяя период дискретизации Δt в указанном интервале получаем эквивалентную совокупность моделей, из которой выбираем требуемую для решения практической задачи модель.

Многочисленные модельные исследования объектов с различными динамическими характеристиками (устойчивые, неустойчивые, колебательные, с запаздыванием и т.д.) в детерминированной постановке показали с учетом погрешностей вычислений полную сходимость результатов решения задачи структурно-параметрической идентификации (относительная погрешность меньше 0,1%).

4. Решение задачи SP-идентификации при наличии ошибок измерений

Возможности рассматриваемого способа SP-идентификации в детерминированном случае (т.е. когда экспериментальные данные определены без погрешностей) позволяют для различных периодов дискретизации $\Delta t \in (\Delta t_{min}, \Delta t_{max})$, построить совокупность дискретных равноотчных математических моделей объекта. В работе предлагается следующий вариант способа SP-идентификации: из последовательности измеренных данных организовать совокупности данных, отвечающие различным $\Delta t \in (\Delta t_{min}, \Delta t_{max})$. Наличие погрешностей измерения приводит к построению эквивалентных по структуре моделей, у которых параметры будут различны в силу их зависимости от погрешностей. Таким образом, окончательно формируется математическая модель с параметрами, заданными интервально.

Рассмотрим в качестве объекта исследования электропечь: входным воздействием является перемещение регулирующего органа, выходной переменной — изменение температуры в градусах. Перемещение регулирующего органа осуществлено ступенчато на $1(t)$. С периодом дискретизации $\Delta t=25$ сек осуществлено измерение переходной характеристики (таблица 1).

Таблица 1. Экспериментальные данные

t(сек.)	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
T °C	0	0,39	1,51	2,49	3,47	4,13	4,72	5,31	5,70	5,96	6,22

Очевидно, что экспериментальные данные содержат погрешности измерения, величина которых неизвестна и вряд ли будет известна. В данном случае единственным возможным является оценка их влияния на математическую модель объекта. Применим изложенный выше подход к решению задачи идентификации.

1 этап — составим идентификационную матрицу для периода дискретизации $\Delta t=25$

t(сек.)	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225
x(t)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y(t)	0,39	1,51	2,49	3,47	4,13	4,72	5,31	5,70	5,96	6,22
$\alpha_0(t)$	-2,87..	-5,88..	-7,89..	-9,58..	-11,10..	-12,61..	-13,61..	-14,28..	-14,94..	
$\alpha_1(t)$	1,99..	3,63..	5,55..	6,72..	7,70..	8,87..	9,64..	10,07..		
$\alpha_2(t)$	0,05..	-0,03..	-0,02..	-0,00..	-0,05..	-0,08..	-0,07..			

В таблице все вычисления осуществлены с точностью $\varepsilon=10^{-6}$ и условно представлено “..”. Строка $\alpha_2(t)$ содержит элементы, достаточно близкие к нулю и разные по знаку, что является естественным критерием основы вычислений. По первому столбцу восстанавливаем конечную непрерывную дробь, а затем — дискретную передаточную функцию:

$$G(z, 25) = \frac{0,39z^{-1}}{1 + \frac{-2,871795 z^{-1}}{1+1,1996795 z^{-1}}} = \frac{0,39z^{-1}(1 + 1,996795z^{-1})}{1 - 0,875z^{-1}}, \quad (1)$$

где z^{-1} оператор временного сдвига. Таким образом, получаем дискретную модель объекта для $\Delta t=25$:

$$y(n) = 0,875 y(n-1) + 0,39 u(n-1) + 0,77875 u(n-2),$$

а используя взаимнооднозначное соответствие получаем непрерывную передаточную функцию после определения запаздывания в виде

$$G(s) = \frac{9,35}{s + 0,0053} \cdot e^{-17s},$$

где время запаздывания $\tau = 17$, коэффициент передачи $k = 9,35$, а полюс $s_n = -0.0053$.

Из данных измерений образуем новую идентификационную матрицу для $\Delta t=50$ сек.

t	0	50	100	150	200	250
x(t)	1	1	1	1	1	1
y(t)	1,51	3,47	4,72	5,70	6,22	
$\alpha_0(t)$	-1,29..	-2,12..	-2,77..	-3,11..		
$\alpha_1(t)$	0,66..	0,98..	1,37..			
$\alpha_2(t)$	0,14..	0,06..				

Как и в предыдущем случае, восстанавливаем конечную непрерывную дробь и дискретную передаточную функцию:

$$G(z, 50) = \frac{1,51 z^{-1}}{1 + \frac{-1,298013 z^{-1}}{1+0,660257 z^{-1}}} = \frac{1,51 z^{-1}(1 + 0,660257 z^{-1})}{1 - 0,637756 z^{-1}}.$$

В этом случае с учётом определения времени запаздывания непрерывная передаточная функция имеет вид:

$$G(s) = \frac{6,92}{S + 0,0072} e^{-22,6 S}.$$

5. Заключение

Как показали приведенные исследования, структура математической модели при условии выполнения предположений определяется (аппроксимируется) однозначно. В то же время имеющиеся погрешности в экспериментальных данных порождают интервальное представление параметров модели. Так в приведенном примере для полученных данных измерений структура математической модели в форме передаточной функции имеет вид:

$$G(s) = \frac{k}{s - s_n} e^{-\tau s},$$

где $k \in [6.92, 9.35]$, $s_n \in [-0.0072, -0.0053]$, $\tau \in [17, 22.6]$. Такое описание объекта имеет существенное значение для определения запаса устойчивости, определения качества управления, проектирования и настройки управляющих алгоритмов, диагностики состояния объекта.

6. Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. / Выпуск 1,2. – М.: Мир, 1974. – 603 с.
2. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 744 с.
3. Светлаков А.А. Нетрадиционный синтез методов оценивания величин на основе экспериментальных измерений // Автоматизация проектирования, идентификация и управление в сложных системах. – Томск: Изд-во НТЛ, 1997. – С. 52–71.
4. КАРТАШОВ В. Я. Анализ и исследование аппроксимационных свойств непрерывных дробей при решении задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов // Препринт № 22. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 40 с.

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

Г.Л. Козина, Р.К. Кудерметов, Н.Д. Маслова

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

E-mail: ains@comint.net

Аннотация

В статье рассматриваются задачи о минимальном остовном дереве и о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами на графе с интервально взвешенными ребрами. Для этих задач предложены алгоритмы поиска оптимальных решений, удовлетворяющих упорядоченным критериям - минимальной середине и минимальной верхней границы интервального веса решения. Предполагается, что именно эти решения имеют наибольшую вероятность оптимальности.

Ключевые слова: оптимизационные задачи на графах, интервальные параметры, Паретовское множество, слабое решение, сильное решение, вероятность, алгоритм Крускала, алгоритм Дijkstra

Keywords: optimization problems on graphs, interval parameters, Pareto set, weak solution, strong solution, probability, Kruskal algorithm, Dijkstra algorithm

1. Введение

Данную статью можно рассматривать как продолжение и обобщение результатов работ [1, 2]. Ранее были описаны два основных подхода к определению множества оптимальных решений интервальной задачи на графах: Паретовское множество и Множество слабых решений. Показано, что Паретовское множество является подмножеством Множества слабых решений. Введено понятие вероятности оптимальности слабого решения, позволяющее выбрать единственное решение из множества решений: в качестве оптимального предлагается выбирать решение с максимальной вероятностью оптимальности.

С помощью имитационного моделирования установлено, что наибольшую вероятность имеет решение x с минимальной серединой интервального веса $\mathbf{c}(x)$. То есть, если взять реализацию весов ребер графа, в которой каждому ребру $e \in E$ приписана середина соответствующего интервала $\mathbf{c}(e)$, то полученное при такой реализации оптимальное решение имеет наибольшую вероятность. Однако, если таких решений несколько, то из них наиболее вероятным является решение, имеющее минимальную верхнюю границу интервального веса. (Полученное решение принадлежит множеству Парето.)

В настоящей статье для задач о минимальном остовном дереве и о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами предложены алгоритмы поиска оптимальных решений, удовлетворяющих изложенным выше упорядоченным критериям — минимальной середине и минимальной верхней границы интервального веса решения.

В качестве базового алгоритма решения задачи о минимальном остовном дереве используется алгоритм Крускала, задачи о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами — алгоритм Дijkstra.

2. Постановка задачи

Рассмотрим две задачи — о минимальном остовном дереве и о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами — на графе с интервально взвешенными ребрами.

Пусть $G = (V, E)$ — связный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E . Каждому ребру $e \in E$ сопоставлен вес — вещественный интервал $\mathbf{c}(e) = [\underline{c}(e), \bar{c}(e)]$.

Для задачи о минимальном остовном дереве необходимо найти кратчайшее остовное дерево. Допустимыми решениями задачи являются подграфы графа G — остовные деревья.

Для задачи о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами необходимо найти кратчайший путь между двумя вершинами — u и v . Допустимыми решениями задачи являются подграфы графа G — простые ориентированные цепи, соединяющие вершины u и v .

Каждому допустимому решению $x = (V_x, E_x)$ (для соответствующей задачи) сопоставим его интервальный вес $\mathbf{c}(x)$ как сумму интервалов [3] - весов ребер, входящих в соответствующий подграф:

$$\mathbf{c}(x) = \sum_{e \in E_x} \mathbf{c}(e) = \sum_{e \in E_x} [\underline{c}(e), \bar{c}(e)] = [\underline{c}(x), \bar{c}(x)].$$

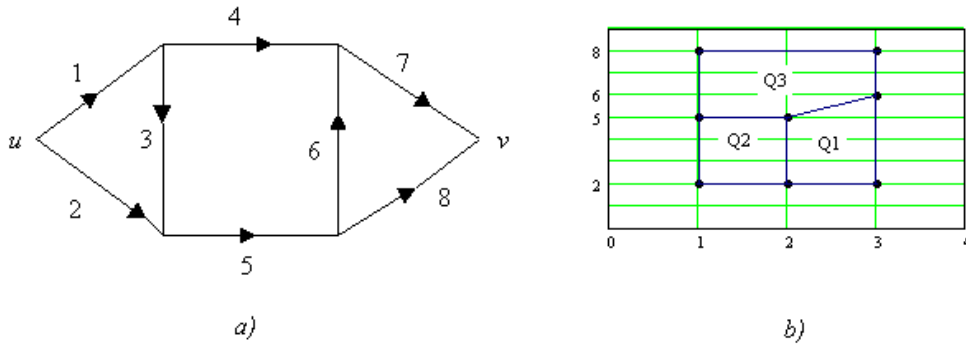


Рис. 1: Задача о кратчайшем пути между двумя вершинами u и v на графе G : а) ориентированный граф G , б) разбиение множества параметров Q .

Таким образом, каждому допустимому решению соответствует определенный интервал, который является оценкой значения целевой функции для данного решения.

Определение 1. Будем называть допустимое решение x оптимизационной задачи *оптимальным по Парето* [4], если для него не существует такого допустимого решения y , для которого выполняются неравенства $\underline{c}(y) \leq \underline{c}(x)$ и $\bar{c}(y) \leq \bar{c}(x)$, причем, хотя бы одно из этих неравенств — строгое.

Множество всех оптимальных по Парето решений рассматриваемой задачи будем называть множеством Парето P этой задачи.

Одним из подходов к определению решения оптимизационной задачи на графах с интервальными параметрами является понятие реализации весов ребер графа [5], т.е. выбор вещественных значений весов ребер внутри заданных интервалов.

Множество всех реализаций параметров обозначим через Q . Очевидно, что множество Q можно представить в виде декартова произведения отрезков $\mathbf{c}(e)$, $e \in E$:

$$Q = \mathbf{c}(e_1) \times \mathbf{c}(e_2) \times \dots \times \mathbf{c}(e_m),$$

где $\mathbf{c}(e_i)$ — интервальный вес ребра с номером i , m — число ребер графа G .

Таким образом, точка $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ множества Q представляет собой набор вещественных параметров задачи, взятых из соответствующих интервалов:

$$Q = \{c = (c_1, c_2, \dots, c_m) | c_i \in \mathbf{c}(e_i)\}.$$

Для каждой реализации весов рассматривается соответствующая вещественная оптимизационная задача [6].

Определение 2. Допустимый подграф x будем называть *слабым* [5] оптимальным решением исходной интервальной задачи, если он оптимален для *некоторой* реализации весов ребер графа G .

Множество всех слабых решений обозначим через W : $W = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, где l — число слабых решений.

Определение 3. Допустимый подграф x будем называть *сильным* оптимальным решением исходной интервальной задачи, если он оптимален для *любой* реализации весов ребер графа G .

Очевидно, что если существует сильное решение, то оно принадлежит множеству слабых решений W . Сильное решение является "идеальным" решением интервальной оптимизационной задачи.

Утверждение 1. [2,7]. *Паретовское множество решений P является подмножеством множества слабых решений W : $P \subseteq W$.*

Утверждение 2. [2,7]. *Слабое решение x , полученное при реализации $c = (c_1, \dots, c_n)$:*

$$c_i = \lambda \underline{c}(e_i) + (1 - \lambda) \bar{c}(e_i)$$

при $\lambda \in (0, 1)$, принадлежит Паретовскому множеству решений P .

Обозначим через Q_j множество реализаций, при которых слабое решение x_j является оптимальным [1,2]. Очевидно, что объединение по j всех множеств Q_j равно множеству Q :

$$\bigcup_{j=1}^l Q_j = Q.$$

Утверждение 3. [2]. *Если веса всех ребер графа G строго интервальны, т.е. $\bar{c}(e) - \underline{c}(e) > 0 \forall e \in E$, то для любых двух слабых решений $x_i \neq x_j$ множества Q_i и Q_j могут пересекаться только по границе.*

Для иллюстрации утверждения рассмотрим упрощенный пример задачи о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами на графе, в котором веса только двух ребер строго интервальные. В этом случае рассматриваются проекции t -мерных множеств Q_j , $j = 1, \dots, l$, на плоскость.

Пример. Пусть в графе G (см. рис. 1а), взвешенном следующим образом $\mathbf{c}(e_1) = 2$, $\mathbf{c}(e_2) = 2$, $\mathbf{c}(e_3) = 3$, $\mathbf{c}(e_4) = 3$, $\mathbf{c}(e_5) = [1, 3]$, $\mathbf{c}(e_6) = 1$, $\mathbf{c}(e_7) = [2, 8]$, $\mathbf{c}(e_8) = 6$, нужно найти кратчайший путь из вершины u в вершину v . Допустимые решения: $x_1 = (e_1, e_4, e_7)$, $x_2 = (e_2, e_5, e_6, e_7)$, $x_3 = (e_2, e_5, e_8)$, $x_4 = (e_1, e_3, e_5, e_6, e_7)$, $x_5 = (e_1, e_3, e_5, e_8)$. Соответствующие интервальные веса: $\mathbf{c}(x_1) = [7, 13]$, $\mathbf{c}(x_2) = [6, 14]$, $\mathbf{c}(x_3) = [9, 11]$, $\mathbf{c}(x_4) = [9, 17]$, $\mathbf{c}(x_5) = [12, 14]$. Паретовское множество решений совпадает с множеством слабых решений: $P = W = \{x_1, x_2, x_3\}$. В множестве параметров Q слабым решениям x_1, x_2, x_3 соответствуют множества Q_1, Q_2, Q_3 (см. рис. 1б).

Пусть $\mu(\diamond)$ — мера, определенная на множестве подмножеств множества Q . Каждому слабому решению $x_j \in W$ сопоставим величину p_j , равную отношению $\frac{\mu(Q_j)}{\mu(Q)}$, где Q_j — множество параметров, при которых решение x_j оптимально.

Определение 4. Величину

$$p_j = \frac{\mu(Q_j)}{\mu(Q)}$$

будем называть *вероятностью* оптимальности слабого решения x_j .

Очевидно, что $\sum_{j=1}^l p_j = 1$.

Таким образом, каждому слабому решению приписано некоторое число, которое может отражать качество этого решения. Чем больше вероятность оптимальности данного решения, тем оно предпочтительнее.

Правило выбора единственного оптимального решения оптимизационной интервальной задачи можно сформулировать следующим образом: *слабое решение с наибольшей вероятностью оптимальности можно принять в качестве решения интервальной задачи.*

Пример. Для рассмотренного графа (см. рис. 1а, б) вероятности оптимальности слабых решений x_1, x_2, x_3 равны соответственно $p_1 = 0.2917$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.4583$. В качестве оптимального решения целесообразно принять слабое решение x_3 , имеющее наибольшую вероятность.

Для отыскания вероятностей слабых решений был использован метод имитационного моделирования. Анализ результатов численных экспериментов показал, что наибольшую вероятность имеет решение x с минимальной серединой интервального веса $\mathbf{c}(x)$. То есть, если взять реализацию весов ребер графа, в которой каждому ребру $e \in E$ приписана середина соответствующего интервала $\mathbf{c}(e)$, то полученное при такой реализации оптимальное решение имеет наибольшую вероятность. Однако, если таких решений несколько, то из них наибольшую вероятность имеет решение, имеющее минимальную верхнюю границу интервального веса. К сожалению, данное наблюдение пока не подтверждено теоретически. Можно лишь утверждать, что полученное решение принадлежит множеству Парето.

Для задач о минимальном остовном дереве и о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами предложены алгоритмы поиска оптимальных решений, удовлетворяющих изложенным выше упорядоченным критериям — минимальной середины и минимальной верхней границы интервального веса решения.

В качестве базового алгоритма решения задачи о минимальном остовном дереве используется алгоритм Крускала, задачи о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами — алгоритм Дейкстры.

3. Алгоритмы

Алгоритм 1.

1. Каждому ребру $e \in E$ сопоставим середину интервального веса $\text{mid } \mathbf{c}(e) = \frac{\bar{c}(e) + \underline{c}(e)}{2}$.
2. Упорядочиваем ребра $e \in E$ по возрастанию величин $\text{mid } \mathbf{c}(e)$ и верхних границ $\bar{c}(e)$, при этом если $\text{mid } \mathbf{c}(e_i) = \text{mid } \mathbf{c}(e_j)$ и $i < j$, то $\bar{c}(e_i) \leq \bar{c}(e_j)$.
3. Для графа с вещественными весами ребер $\text{mid } \mathbf{c}(e)$ при заданном упорядочивании весов ребер найдем минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Крускала.

Теорема 1. *Алгоритм 1 доставляет оптимальное решение интервальной задачи о минимальном остовном дереве. При этом решение x имеет минимальную середину интервального веса $\mathbf{c}(x)$ с минимальным значением верхней границы $\bar{c}(x)$.*

Доказательство теоремы очевидно следует из структуры алгоритма Крускала.

Алгоритм 2.

Без потери общности считаем, что границы интервалов весов ребер графа суть целые неотрицательные числа.

1. Каждому ребру $e \in E$ сопоставим вещественный вес $r(e) = \bar{c}(e) + \underline{c}(e) + \frac{\bar{c}(e)}{s+1}$, где $s = \sum_{e \in E} \bar{c}(e)$.

2. Для графа с вещественными весами ребер $r(e)$ найдем кратчайший путь между двумя вершинами u и v с помощью алгоритма Дijkstra.

Теорема 2. Алгоритм 2 доставляет оптимальное решение интервальной задачи о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами. При этом решение x имеет минимальную середину интервального веса $c(x)$ с минимальным значением верхней границы $\bar{c}(x)$.

Теорема легко доказывается от противного. При этом существенно используется предположение о том, что границы интервалов весов ребер графа являются целыми неотрицательными числами.

Пример. Для ребер рассмотренного графа (см. рис. 1а) по п.1 Алгоритма 2 получим следующие вещественные веса: $r(e_1) = 4\frac{2}{29}$, $r(e_2) = 4\frac{2}{29}$, $r(e_3) = 6\frac{3}{29}$, $r(e_4) = 6\frac{3}{29}$, $r(e_5) = 4\frac{3}{29}$, $r(e_6) = 2\frac{1}{29}$, $r(e_7) = 10\frac{8}{29}$, $r(e_8) = 12\frac{6}{29}$. Кратчайшим путем из вершины u в вершину v является решение $x_3 = (e_2, e_5, e_8)$ с минимальным значением целевой функции равным $r(x_3) = 20\frac{11}{29}$.

Авторами разработано программное приложение для работы с графами, заданными интервальными весами. В приложении предусмотрены следующие функции:

- генерация случайного связного неориентированного графа с интервальными весами;
- алгоритмы сортировки ребер графа;
- поиск минимального остовного дерева (по алгоритму Крускала);
- поиск кратчайшего пути (по алгоритму Дijkstra).

Функции для работы с графами реализованы на языке программирования C++, интерфейс для платформ ОС Windows разработан с помощью функций Win32 API в среде программирования Visual C++.NET.

Для хранения информации о графе используется динамический массив структур. Каждая структура представляет собой информацию об определенном ребре графа и хранит следующие данные: номера первой и второй вершин ребра, нижнюю и верхнюю границы интервального веса, середину интервального веса ребра. Для неориентированных графов ребро $e = (v, w)$ представляется в массиве только один раз, по умолчанию подразумевается существование ребра (w, v) .

Проведено тестирование указанных алгоритмов.

4. Литература

1. Козина Г.Л., Кудерметов Р.К. Оценка качества решений оптимизационной задачи на графах с интервальными параметрами // Радиоэлектроника, информатика, управления. – Запорожье: ЗНТУ, 2002. – № 2. – С. 93–96.
2. Козина Г.Л. Правило выбора решений оптимизационных задач на графах с интервальными параметрами // Интервальный анализ: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2005 года. Том 4. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – С. 51–55.
3. АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления. – Пер. с англ. Г.Е. Минца, А.Г. Яковлева / Под ред. Ю.В. Матиясевича. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
4. KOZINA G.L., PEREPELITSA V.A. Interval Spanning Trees Problem: Solvability, and Computational Complexity // Interval Computations. – 1994. – № 1. – P. 42–50.
5. YAMAN H., KARASANO.E., PINAR M.C. Minimum Spanning Tree Problem with Interval Data. – Technical Report 9909, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey, 1999.
6. Хэзфилд Р., Кирби Л. и др. Искусство программирования на С. Фундаментальные алгоритмы, структуры данных и примеры приложений. Энциклопедия программиста. – Пер. с англ. – К.: Изд-во "Диасофт", 2001. – 736 с.
7. KOZINA G. Discrete Optimization Problems with Interval Data: Pareto Set of Solutions or Set of Weak Solutions? // Reliable Computing. – 2004. – V.10, N6. – P. 469–487.

РАЗРАБОТКА СОВМЕСТНОГО РОССИЙСКОГО–ISO СТАНДАРТА (МЕТОДИКИ) ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ И МАЛОГО ЧИСЛА НАБЛЮДЕНИЙ (НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА)¹

С.И. Кумков

*Институт математики и механики УрО РАН,
ул.С.Ковалевской 16, Екатеринбург ГСП-384, 620219, Россия
E-mail: kumkov@imm.uran.ru*

Аннотация

Рассматривается применение методов оптимального наблюдения и интервального анализа к оцениванию информационного множества значений параметров описывающего полинома, совместных с заданной выборкой замеров (измерений). Оценивание выполняется в условиях неопределенности вероятностных характеристик ошибок измерений. На ошибки измерений накладываются только геометрические ограничения. Линейность описывающего полинома относительно оцениваемых параметров позволяет эффективно конкретизировать интервальные процедуры, использовать быстрые процедуры выпуклого анализа и получать точное описание многогранника допустимых значений параметров. Теоретическая обоснованность, простота алгоритмов и соответствующего программного обеспечения позволяет рекомендовать предлагаемый подход для разработки официального метрологического стандарта (методики) по обработке информации с погрешностями измерения в условиях неопределенности и малой длины выборки.

Ключевые слова: стандарт, методика оценивания, выборка замеров, ошибки измерения, условия неопределенности, множество неопределенности замера, описывающий полином, параметры, частичное информационное множество параметров, информационное множество, трубка зависимостей, несовместная выборка, совместная подвыборка

Keywords: standard, guide to estimation, measurements sample, measuring errors, uncertainty conditions, measurement uncertainty set, describing polynomial, parameters, partial informational set of parameters, informational set, tube of dependencies, inconsistent sample, consistent subsample

1. Введение

Разработка предлагаемого стандарта (методики) обусловлена необходимостью совершенствования и расширения методов обработки измерительной информации с погрешностями измерения. Особая потребность в предлагаемой методике возникает в случаях, когда использование стандартных методов математической статистики затруднено из-за неопределенности или полного отсутствия информации о вероятностных характеристиках погрешностей измерений и при малой длине имеющейся выборки замеров (измерений). Причем в таких условиях наибольшую трудность представляет вычисление допустимых областей действительных значений единичных физических величин и, областей действительных значений параметров зависимостей и областей их действительных значений (трубки).

Основное применение рассматриваемой методики – обработка результатов измерений при разрушающих испытаниях, межлабораторных определениях, круговых сличениях, в случаях технических или экономических затруднений повторения эксперимента, а также в алгоритмах обработки результатов измерений быстро протекающих процессов в реальном масштабе времени. Методика разрабатывается в развитие и дополнение к Российскому стандарту [1], Методике [2] и Европейскому стандарту [3].

2. Основные понятия и определения

По сравнению с [4] вводятся и используются следующие новые основные понятия, термины и определения.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06–01–00414, 04–01–96099) и корпорации “Новые Информационные Технологии в Авиации” (контракт 53/2005).

Описывающая зависимость. Функция заданного типа $y = f(x, P)$, зависящая от значений аргумента $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ на интервале его изменения и от значений вектора P параметров. Оцениванию подлежат: множество действительных значений параметров и область действительных значений зависимости (уточненная "трубка" значений зависимости).

Модель погрешности замера (измерения). Известная исследователю структура возникающей погрешности измерения. Используются минимальные сведения о возможной модели погрешности измерения. Модель общего вида может содержать как относительную δ_i , так и абсолютную ε_i составляющие погрешности

$$y_i = y(x_i, P) = y_i^*(x_i, P)(1 + \delta_i) + \varepsilon_i, \quad |\delta_i| \leq \delta_{\max}, \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{\max},$$

где i – номер замера; x_i – значение аргумента в i -том замере; y_i – замер с погрешностью; $y_i^*(x_i, P)$ – неизвестное истинное значение зависимости; δ_{\max} , ε_{\max} – максимальные величины компонент погрешности измерений. Если информация о структуре ошибки отсутствует, то погрешность ограничивается эквивалентной суммарной величиной ε_{\max} .

Множество неопределенности (МН) единичного замера. Множество (область) значений аргумента и функции, совместных с пределами погрешности измерений аргумента и функции в данном замере. Для случая модели только с абсолютными погрешностями максимальных величин Δx_{\max} и Δy_{\max} и однородной выборки

$$H_i = [x_i - \Delta x_{\max}, x_i + \Delta x_{\max}] \times [y_i - \Delta y_{\max}, y_i + \Delta y_{\max}].$$

В общем случае модели ошибки, МН замера строится по специальным формулам [7]. В случае, если аргумент замера точно, МН данного замера является **интервалом неопределенности**

$$H_i = [y_i - \Delta y_{\max}, y_i + \Delta y_{\max}].$$

Действительная (допустимая) зависимость. Функция заданного вида, проходящая через МН всех ее замеров.

Действительное (допустимое) значение вектора параметров. Значение вектора параметров, определяющих действительную зависимость.

Априорное множество IS_0 возможных значений параметров. Область значений вектора параметров, границы которой оценены *a priori* теоретически или определены по результатам предшествующих измерений.

Парциальное информационное множество $PIS_{i,j,k}$ действительных (допустимых) значений параметров. Множество (область) значений параметров, совместных с некоторой группой i, j, k замеров заданной выборки.

Информационное множество $IS(P)$ параметров зависимости. Область действительных значений параметров зависимости, совместных со всей полученной выборкой замеров и заданным типом зависимости.

Трубка $F(x)$ действительных (допустимых) значений зависимости. Область значений зависимости, совместных с заданной выборкой замеров, заданным типом зависимости и информационным множеством параметров. Область описывается совокупностью интервалов $F(x) = \{[F_{i,\min}, F_{i,\max}], i = 1, N\}$, $F_{i,\min} = \min_{P \in IS(P)} \{y(x_i, P)\}$, $F_{i,\max} = \max_{P \in IS(P)} \{y(x_i, P)\}$.

Совместная выборка. Выборка совместна, если информационное множество ее параметров непусто. Эквивалентно: если существует хотя бы одна действительная зависимость.

Для наиболее простого случая зависимости $y = C = \text{Const}$, т.е., постоянной измеряемой физической величины, упрощаются следующие определения.

Множество неопределенности H единичного замера. Область возможных значений единичного замера, зависящая от диапазона погрешности средства или методики измерений; диапазон определяется заранее на основе предварительных исследований в соответствии с моделью погрешности измерений. В случае наличия только абсолютной ошибки, интервал неопределенности каждого замера y_i описывается $H_i = [y_i - \Delta y_{\max}, y_i + \Delta y_{\max}]$.

Интервал $I(C)$ действительных значений постоянной физической величины. Интервал значений измеряемой величины, совместных с заданной выборкой замеров; интервал ограничен снизу максимальной из нижних границ множеств неопределенности единичных замеров, а сверху – минимальной из верхних границ множеств неопределенности

$$I(C) = \bigcap_i H_i = [h_{\min}, h_{\max}], \quad i = 1, N, \quad h_{\min} = \max_i \{y_i - \Delta y_{\max}\}, \quad h_{\max} = \min_i \{y_i + \Delta y_{\max}\}.$$

3. Построение информационного множества параметров

Подход основан на методах оптимального наблюдения в условиях неопределенности [5] и методах интервального анализа [6–8], когда на ошибку измерений накладывается только геометрическое ограничение (ограничение на максимум модуля ошибки). Вероятностные характеристики ошибок замеров неизвестны.

В качестве первого варианта разрабатываемой методики предлагается наиболее простой и интересный для практического применения случай, когда исследуемый процесс описывается полиномом независимого аргумента первой или второй степени и правой частью, линейной относительно неизвестных коэффициентов. Использование указанной формы зависимости от параметров позволяет применить быстрые процедуры выпуклого анализа для построения множеств допустимых значений параметров – информационных множеств. Методика может использоваться и для оценивания параметров зависимостей, сводящихся к указанному виду относительно параметров [9–11].

Проиллюстрируем основные процедуры на примере линейной зависимости $y = Ax + B$, параметры которой оцениваются по заданной выборке замеров с погрешностями $\{y_i, x_i\}$, $i = 1, N$ длиной N в значениях x_i аргумента, когда значения аргумента (абсцисса) известны точно и полагаются строго упорядоченными по возрастанию $x_i < x_j$ для всех $i < j$. Примем, для простоты изложения, что модель ошибки замера содержит только абсолютную компоненту Δy_{\max} . Заданной выборке замеров поставим в соответствие набор множеств неопределенности

$$H_i = [h_{i,\min}, h_{i,\max}], \quad h_{i,\min} = y_i - \Delta y_{\max}, \quad h_{i,\max} = y_i + \Delta y_{\max}, \quad i = 1, N.$$

Оценка безусловных интервалов параметров. По аналогии с [1] оценим полезные на практике безусловные интервалы I_A и I_B параметров. Для каждой пары МН H_i, H_j замеров $i = 1, N - 1; j = i + 1, N$ границы парциальных интервалов параметра A рассчитываются

$$A_{i,j} = [a_{i,j,\min}, a_{i,j,\max}], \quad a_{i,j,\min} = (h_{j,\min} - h_{i,\max}) / (x_j - x_i), \quad a_{i,j,\max} = (h_{j,\max} - h_{i,\min}) / (x_j - x_i).$$

Границы парциальных интервалов параметра B рассчитываются

$$B_{i,j} = [b_{i,j,\min}, b_{i,j,\max}], \quad b_{i,j,\min} = h_{i,\min} - a_{i,j,\max} x_i, \quad b_{i,j,\max} = h_{i,\max} - a_{i,\min} x_i.$$

Безусловные интервалы параметров находятся пересечением парциальных интервалов по парам замеров $i = 1, N - 1, j = i + 1, N$,

$$I_A = \bigcap_{i,j} A_{i,j} = [a_{\min}, a_{\max}], \quad a_{\min} = \max\{a_{i,j,\min}\}, \quad a_{\max} = \min\{a_{i,j,\max}\},$$

$$I_B = \bigcap_{i,j} B_{i,j} = [b_{\min}, b_{\max}], \quad b_{\min} = \max\{b_{i,j,\min}\}, \quad b_{\max} = \min\{b_{i,j,\max}\}.$$

Эти безусловные интервалы дают бок-оценку сверху области возможных значений оцениваемых параметров. Такая оценка хотя и полезна для прикидочных расчетов, но может оказаться весьма грубой.

Точная оценка двумерного информационного множества $IS(A, B)$ параметров. Это множество является аналогом доверительной двумерной области [1] значений параметров при заданном уровне доверительной вероятности. Для каждой пары МН H_i и H_j замеров $i = 1, N - 1; j = i + 1, N$ рассчитываются парциальные двумерные информационные множества

$$PIS_{i,j}(A, B) = PIS_{i,j}.$$

на плоскости $a \times b$ оцениваемых параметров. Вследствие линейности правой части зависимости по данным параметрам и строгой упорядоченности значений аргумента замеров, каждое множество $PIS_{i,j}$ является замкнутым, выпуклым четырехугольником – параллелограммом. Такой параллелограмм задается четырьмя вершинами и линейными границами между ними. *Здесь очевидным образом конкретизируются интервальные процедуры построения в явном виде двумерных множеств параметров использованием функции, обратной заданной описывающей функции* [6,7,9–11]. Вершины (упорядоченные, например, отсчетом по часовой стрелке от правой верхней) каждого параллелограмма находятся:

$$a_{i,j}^1 = (h_{j,\max} - h_{i,\max}) / (x_j - x_i), \quad b_{i,j}^1 = h_{i,\max} - a_{i,j}^1 x_i,$$

$$a_{i,j}^2 = (h_{j,\max} - h_{i,\min}) / (x_j - x_i), \quad b_{i,j}^2 = h_{i,\min} - a_{i,j}^2 x_i,$$

$$a_{i,j}^3 = (h_{j,\min} - h_{i,\min}) / (x_j - x_i), \quad b_{i,j}^3 = h_{i,\min} - a_{i,j}^3 x_i,$$

$$a_{i,j}^4 = (h_{j,\min} - h_{i,\max}) / (x_j - x_i), \quad b_{i,j}^4 = h_{i,\max} - a_{i,j}^4 x_i.$$

Точная оценка двумерного информационного множества параметров $IS(A, B)$ находится специализированной быстрой операцией пересечения выпуклых парциальных множеств по всем парам замеров [9–11]

$$IS(A, B) = \bigcap_{i,j} PIS_{i,j}, \quad i = 1, N - 1, \quad j = i + 1, N.$$

Данное множество является замкнутым выпуклым многоугольником с ограниченным числом вершин и точными линейными границами между ними.

Трубка $F(x)$ действительных значений линейной зависимости. В рассматриваемой методике трубка действительных значений зависимости является аналогом области доверительных значений зависимости для каждого значения аргумента. В соответствии с приведенным выше определением, трубка $F(x) = \{[F_{i,\min}, F_{i,\max}], i = 1, N\}$ действительных значений зависимости находится

$$F_{i,\min} = \min_{(A,B) \in IS(A,B)} \{Ax_i + B\}, \quad F_{i,\max} = \max_{(A,B) \in IS(A,B)} \{Ax_i + B\}.$$

Оценка совместности заданной выборки. Использование идеологии интервального анализа позволяет ввести принципиально новую операцию **конструктивного анализа совместности** заданной выборки замеров с погрешностями. Именно, появляется возможность прямого выявления факта совместности – несовместности выборки при заданном уровне Δy_{\max} максимальной ошибки замера.

В процессе вычисления двумерного информационного множества $IS(A, B)$ при действительном значении ограничения на ошибку пересечение парциальных множеств **для совместной выборки всегда непусто**. В случае **несовместности** выборки, например, наличия хотя бы одного промаха $[1, 2, 4]$, пересечение **всегда пусто**, т.е. информационное множество не существует.

Разбиение несовместной выборки на совместные подвыборки и выявление одиночных промахов. В существующих стандартах [1, 2], опирающихся на методы математической статистики, выявление и исключение промахов выполняется по стандартному правилу “два сигма”. В случае наличия нескольких промахов разных знаков или сильного систематического смещения некоторой группы замеров относительно остальной части выборки, правило “два сигма” может оказаться просто неприменимым или приводить к фатальным искажениям результата.

Использование идеологии интервального анализа позволило разработать конструктивную операцию **разбиения несовместной выборки замеров на совокупность внутренне совместных подвыборок**. Здесь следующим образом были использованы процедуры выделения полных подграфов из заданного графа [12]. Набор парциальных информационных множеств

$$\{PIS_{i,j}, i = 1, N - 1; j = i + 1, N\},$$

полагается графом с данными множествами в качестве вершин. Каждая произвольная пара вершин $PIS_{i,j}$ и $PIS_{k,l}$ полагается связанной ребром $(i, j) - (k, l)$, если пересечение $PIS_{i,j} \cap PIS_{k,l}$ непусто. В противном случае вершины не связаны и ребро отсутствует.

Группа вершин образует полный связный подграф, если все они попарно связаны между собой ребрами. В терминах парциальных множеств это означает непустоту их полного пересечения, т.е., означает, что замеры соответствующих номеров образуют **совместную подвыборку**. Таким образом, если совместная подвыборка образует некоторый полный подграф, например, с числом вершин M , то к каждой его вершине подходит не менее M ребер. В отличие от этого, каждый одиночный промах приводит к изолированным вершинам (парциальным информационным множествам), которые не имеют связующих ребер.

Алгоритмы выделения полных связных подграфов достаточно широко известны. Однако, поскольку с ростом числа замеров в выборке количество попарных парциальных информационных множеств сильно растет, то для получения быстрых процедур разработаны специальные алгоритмы построения парциальных множеств и выделения совместных подвыборок в случае несовместности заданной выборки.

Рассмотренная методика применялась как для оценивания полиномиальных зависимостей с размерностью вектора параметров три и более, так и для оценивания нелинейных зависимостей. Был разработан специальный комбинированный алгоритм. В нем для части параметров и, особенно, для параметров, нелинейно входящих в зависимость, используется сеточное представление, а по остальным параметрам, линейно входящим в зависимость, выполняется рассмотренное точное оценивание двумерных сечений многомерного информационного множества параметров. Методика также успешно применялась в случаях, когда заменой переменных нелинейную зависимость описывающей функции от параметров удается свести к линейной.

В Институте математики и механики УрО РАН (ИММ) совместно с Уральским научно-исследовательским институтом метрологии (УНИИМ) и Метрологическим Центром УрО РАН (СЕРТИ-МЕТ) разработан задел по данной методике и соответствующему экспериментальному программному обеспечению для выполнения расчетов на ЭВМ. Специализированные варианты методики и программное обеспечение были исследованы на представительном круге практических задач обработки экспериментальной информации в теплофизике, высокотемпературной электрохимии, органическом синтезе лекарственных средств, оценивании показателей стабильности эталонных образцов, в системах управления воздушным движением и управления космическими аппаратами [9–11].

Подготовлены предварительные материалы для совместной работы с заинтересованными Российскими организациями и зарубежными организациями, разрабатывающими ISO-стандарты (например, в Европейском Сообществе).

4. Литература

1. ГОСТ 8.207-76. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.
2. МИ 2083-93. Рекомендации. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей.
3. Guide to the Expression of Uncertainty in measurement. International Organization for Standardization. ISO, ISBN 92-67-10188-9, 1992.
Перев. с англ. Руководство по выражению неопределенности измерения. ВНИИМ им. Д.И.Менделеева. – С.-Петербург, 1999.
4. Стандарт РМГ 29-99. Метрология. Основные термины и определения.
5. КУРЖАНСКИЙ А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.
6. NEUMAIER A. Interval Methods for Systems of Equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
7. JAULIN L., KIEFER M., DIDRIT O., WALTER E. Applied Interval Analysis. London, Berlin: Springer, 2001.
Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. Прикладной интервальный анализ. Перев. с англ. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
8. MILANESE M. AND NORTON J.P. (EDS.) Bounding Approaches to System Identification. London, New York: Plenum Press, 1996.
9. КУМКОВ S.I. Method of Informational Sets in Problems of Filtration, Identification, and Control. Tampere International Center for Signal Processing, Tampere, Finland, March 2001.
<http://sigwww.cs.tut.fi/TICSP/PRESENTATIONS/2001.htm> , pp. 1-33.
10. КУМКОВ S.I. Informational Sets in Applied Problems of Evaluation. Proceedings of the IFAC International Workshop "Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization". June, 17-20, 1998, Chelyabinsk, Russia. – P. 130-134.
11. КУМКОВ S.I. Application of Minimax Evaluation Procedures for Expansion of Metrological Standards on Noised Measurements. Proceeding of International Conference "SIMULATION-98". University of York, UK, 30 September – 2 October 1998, IEE Publication Number 457. – P. 162-167.
12. СВАМИ М., ТХУЛАСИРАМАН К. Графы, сети и алгоритмы. Перев. с англ. – М.: Мир, 1983.

РАСШИРЕННАЯ ИНТЕРВАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА В MATLAB²

Л.В. Куприянова, В.С. Денисов

Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
410026 Саратов, Россия, ул. Астраханская 83, СГУ, факультет КНИТ
E-mail: KupriyanovaLV@info.sgu.ru, Viltor_Den@mail.ru

Аннотация

Арифметика Каухера, некоторые алгоритмы работы с ограниченными по амплитуде неопределённостями реализованы в среде MATLAB как методы класса `interval`. Все функции написаны на языке MATLAB, для лучшей мобильности, и могут быть использованы везде, где установлена эта система. Широко используются так называемый формальный подход, развиваемый С.П. Шарым, и предложенные им алгоритмы нахождения численных решений.

Ключевые слова: интервальная арифметика, MATLAB, формальный подход, внутренние оценки, интервал, методы класса

Keywords: interval arithmetic, MATLAB, formal approach, inner estimations, interval, class methods

1. Введение

В настоящее время для получения гарантированных результатов вычислений, или, другими словами, для получения верных оценок погрешности результата, широко используется интервальная арифметика, имеющая дело с элементами множества $\{\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$. В таких задачах, как правило, предполагается, что ширина интервала достаточно мала и представляет собой величину погрешности оценки действительного числа границами интервала. Такая арифметика реализована в MATLAB С.Румпом [2] как библиотека INTLAB. Несмотря на большие возможности этой библиотеки в ней не предусмотрена работа с неправильными интервалами, необходимая при решении некоторых задач автоматического управления, теории принятия решений и других, т.е. в тех областях, которые имеют дело с ограниченными по амплитуде неопределённостями. Возникающие здесь задачи часто требуют не гарантированной оценки погрешности вычислений, а получения множества действительных чисел (интервала), каждое из которых является решением. Такие задачи обычно сводятся к нахождению внутренних оценок каких-либо множеств решений уравнений с интервальной неопределённостью параметров, причём ширина этих интервальных параметров не обязана быть малой и, вообще говоря, может быть какой угодно большой. Арифметика Каухера [1], заданная на множестве интервалов $\{\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{R}\}$, где снято ограничение $\underline{x} \leq \bar{x}$ (интервалы, удовлетворяющие условию $\underline{x} > \bar{x}$, называются неправильными — *improper*), используется в настоящее время именно в таких задачах. Теоретическому анализу и построению численных алгоритмов решения задач этого типа посвящен ряд работ С.П. Шарого (см. например, [4] и библиографию там же). Мы представляем реализацию в MATLAB класса `interval` и алгоритмов решения некоторых задач вышеупомянутого вида как методов класса `interval`.

При работе с системой MATLAB версии 6.5 и выше в среде Windows нужно просто разместить подкаталог `@interval` в одном из каталогов, описанных в путях доступа MATLAB, например, в `Toolbox\matlab\general`.

2. Задание объекта класса `interval`

Для создания переменной класса `interval` нужно вызвать конструктор класса с аргументом типа `double`, в котором количество столбцов должно быть чётным. Например, для создания единичного интервала

```
>> x = interval([1, 2])
```

```
interval x =
```

```
[1, 2]
```

²Работа поддержана грантом РФФИ 05-08-18082

Для формирования интервальных векторов и матриц используется обычная конструкция, такая же, как и для создания действительных векторов и матриц, когда строки отделяются друг от друга точкой с запятой, с тем отличием, что в нашем случае каждая пара чисел образует интервал. Т.о. при обращении к конструктору класса `interval` число элементов в каждой строке должно быть чётным. Например,

```
>> A = interval([2, 4, -1, 2; -2, 1, 2, 4])
```

```
interval A =
    [2, 4] [-1, 2]
    [-2, 1] [2, 4]
```

Причём интервалы могут быть как правильными ($\underline{x} \leq \overline{x}$), так и неправильными ($\underline{x} > \overline{x}$).

3. Арифметические операции над объектами класса `interval`

Реализованы унарные операции арифметики Каухера: `dual` (дуализация — перестановка концов интервала), `opp` (взятие обратного по сложению), `proper` (правильная проекция), `improper` (неправильная проекция); унарные операции $+$ и $-$, а также бинарные арифметические операции $+$, $-$, $*$, $/$. Все перечисленные операции реализованы также для интервальных массивов. Например,

```
>> A = interval([2, -1, 1, 2; -2, -1, 4, 2])
```

```
interval A =
    [2, -1] [1, 2]
    [-2, -1] [4, 2]
```

```
>> B = interval([2, -1, 1, 2, 0, 1; 1, -1, -2, -1, 4, 2])
```

```
interval B =
    [2, -1] [1, 2] [0, 1]
    [1, -1] [-2, -1] [4, 2]
```

```
>> A*B
```

```
interval ans =
    [5, -3] [-2, -2] [4, 4]
    [5, -6] [-8, -5] [14, 4]
```

```
>> C = dual(A)
```

```
interval C =
    [-1, 2] [2, 1]
    [-1, -2] [2, 4]
```

Для интервальных объектов возможны также такие операции как

- возведение в степень;
- поэлементное умножение;
- поэлементная степень;
- транспонирование;
- операции сравнения: $<$, $>$, $<=$, $>=$, $==$, $\sim=$.

4. Решение уравнений с параметрами класса `interval`

Поиск формального (алгебраического) решения уравнения

$$Cx = b$$

методом Шарого [3] (субдифференциальный метод Ньютона) осуществляется с помощью функции `islae1(C, b, tol, tau, imax)`, где `C` – квадратная интервальная матрица системы, `b` – вектор правой части, `tol` – относительная погрешность, `tau` – релаксационный параметр ($0 < \tau \leq 1$), `imax` – максимальное число итераций.

Пример:

```
>> C = interval([4, 2, 1, -2; 2, -1, 4, 2])

interval C =
      [4, 2] [1, -2]
      [2, -1] [4, 2]

>> b = interval([-2, 2; -2, 2])

interval b =
      [-2, 2]
      [-2, 2]

>> islae1(C, b, 1e-3, 1, 20)

Number of iterations = 2

1-norm or the defect of the approximate solution = 0.000e+000

interval ans =
      [-1, 1]
      [-1, 1]
```

Поиск формального (алгебраического) решения уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}$$

методом Шарого [3] (субдифференциальный метод Ньютона) осуществляется с помощью функции `islae2(C, d, tol, tau, imax)`, аргументы имеют тот же смысл, что и для `islae1`.

Пример:

```
>> C = interval([0.1, 0.3, -0.2 -0.1; -0.5, -0.2, 0.1, 0.3])

interval C =

    [0.1, 0.3] [-0.2, -0.1]
[-0.5, -0.1]  [0.1, 0.3]

>> d = interval([-0.12, 0.13; -0.13, 0.3])

interval d =

    [-0.12, 0.13]
    [-0.13, 0.3]

>> islae2(C, d, 1e-3, 1, 20)

Number of iterations = 3

1-norm or the defect og the approximate solution = 3.469e-017

interval ans =

    [-0.2, 0.3]
    [-0.4, 0.1]
```

Имеется также возможность поиска внутренних оценок объединённого, допустимого и управляемого множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений с помощью функций `uset`, `tset`, `cset`, соответственно. Кроме того методы класса `interval` включают также функции нахождения формальных решений, оценок множеств решений, реализующих альтернативные методы, функции нахождения формальных решений и внутренних оценок некоторых видов нелинейных интервальных уравнений.

5. Литература

1. KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space **IR** // Computing Supplement. – 1977. – N1. P. 65–79.
2. <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>
3. SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable computing. – 1996. – Vol.2, N1. – P. 3–33.
4. ШАРЫЙ С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: Дисс... докт. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 2000.
<http://www.ict.nsc.ru/interval/Dissers/Shary.pdf>

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИДЕМПОТЕНТНАЯ МАТЕМАТИКА³

Г.Л. Литвинов, А.Н. Соболевский

Независимый Московский Университет

E-mail: islc@dol.ru

Аннотация

Исследуются положительные алгоритмы и их интервальные версии в контексте теории положительных полуколец и идемпотентной математики [1, 2, 3, 4]. Такие алгоритмы возникают при решении оптимизационных задач, задач математической физики и др.

Ключевые слова: интервальный анализ, идемпотентная математика, положительные алгоритмы

Keywords: interval analysis, idempotent mathematics, positive algorithms

1. Положительные полукольца и идемпотентная математика

В докладе важные результаты идемпотентного интервального анализа, построенного в [1, 2], переносятся на максимально общий случай.

Идемпотентный интервальный анализ возник в рамках идемпотентной математики (см., например, [2–4]) в связи с приложениями к задачам оптимизации и математической физики. Идемпотентная математика, т.е. математика над полукольцами с идемпотентным сложением, параллельна традиционной математике над числовыми полями и получается из нее процедурой деквантования (см., например, [3]); при этом постоянная Планка стремится к нулю, принимая мнимые значения.

Рассмотрим полукольцо S , т.е. множество с двумя ассоциативными операциями: сложением \oplus и умножением \odot , обладающими нейтральными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ соответственно, причем сложение коммутативно, умножение дистрибутивно по отношению к сложению (слева и справа), $\mathbf{0} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x} \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ для всех $x \in S$ и $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$. Пусть полукольцо S частично упорядочено отношением \preceq , причем $\mathbf{0}$ является наименьшим элементом в S и из неравенства $x \preceq y$ следует, что $x \oplus z \preceq y \oplus z$, $x \odot z \preceq y \odot z$ и $z \odot x \preceq z \odot y$ для всех $x, y, z \in S$; в этом случае полукольцо S называется *положительным*. Полукольцо S называется *идемпотентным*, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$. Сложение \oplus определяет на любом идемпотентном полукольце S *стандартный частичный порядок* \preceq по правилу: $x \preceq y$ равносильно равенству $x \oplus y = y$. В этом случае по отношению к стандартному порядку полукольцо S положительно и $x \oplus y = \sup\{x, y\}$. В дальнейшем на идемпотентных полукольцах рассматривается только стандартный порядок.

В следующих примерах положительных числовых полуколец порядок \preceq совпадает с обычным линейным порядком \leq в \mathbf{R} : полукольцо \mathbf{R}_+ состоит из неотрицательных чисел с обычными операциями $\oplus = +$, $\odot = \cdot$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = 0$, $\mathbf{1} = 1$; полукольцо $\widehat{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ с теми же операциями, продолженными очевидным образом; полукольцо $\mathbf{R}_{\max} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = +$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = -\infty$, $\mathbf{1} = 0$; полукольцо $\widehat{\mathbf{R}}_{\max} = \mathbf{R}_{\max} \cup \{\infty\}$ с теми же операциями, продолженными очевидным образом; полукольцо $S_{\max, \min}^{[a, b]} = [a, b]$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, с операциями $\oplus = \max$, $\odot = \min$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = a$, $\mathbf{1} = b$. Последние три полукольца идемпотентны. Полукольца $\widehat{\mathbf{R}}_+$, $\widehat{\mathbf{R}}_{\max}$ и $S_{\max, \min}^{[a, b]}$ являются полными частично упорядоченными множествами. Полукольцо \mathbf{R}_{\max} часто называют *алгеброй max-plus*, а полукольцо $S_{\max, \min}^{[a, b]}$ – *алгеброй max-min*. Десятки других примеров можно найти в [1–4]. Декартово произведение $S_1 \times S_2$ положительных полуколец является положительным полукольцом относительно декартова произведения порядков в S_1 и S_2 .

2. Интервалы и неубывающие отображения

Пусть S – множество с заданным отношением частичного порядка \preceq . *Замкнутым интервалом* в S называется подмножество вида $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] = \{\mathbf{x} \in S \mid \underline{\mathbf{x}} \preceq \mathbf{x} \preceq \bar{\mathbf{x}}\}$, а элементы $\underline{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{x}}$ называются *нижней* и *верхней границами* интервала \mathbf{x} . Множество всех замкнутых интервалов в S обозначим через $I(S)$. Ясно, что $I(S) \subset S \times S$ и порядок в $S \times S$ индуцирует (частичный) порядок в $I(S)$: $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$

³Работа поддержана грантом РФФИ 05–01–00824.

тогда и только тогда, когда $\underline{x} \preceq \underline{y}$ и $\overline{x} \preceq \overline{y}$. Если S – положительное полукольцо, то $S \times S$ и $I(S)$ – положительные полукольца.

Пусть S и T – частично упорядоченные множества. отображение $f : S \rightarrow T$ называется *неубывающим*, если из соотношения $x \preceq y$ следует, что $f(x) \preceq f(y)$ для всех $x, y \in S$. В этом случае интервальная версия $\mathbf{f} : I(S) \rightarrow I(T)$ отображения f также определена: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(\underline{x}), f(\overline{x})]$. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n, T_1, \dots, T_m$ – частично упорядоченные множества и алгоритм \mathcal{P} по набору данных $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ строит набор результатов $t = (P_1(s), \dots, P_m(s)) \in T_1 \times \dots \times T_m$. Назовем алгоритм \mathcal{P} *положительным* или *неубывающим*, если соответствующее отображение $S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow T_1 \times \dots \times T_m$ является неубывающим. В этом случае, разумеется, определена и интервальная версия $I(\mathcal{P})$ алгоритма \mathcal{P} , отображающая $I(S_1) \times \dots \times I(S_n)$ в $I(T_1) \times \dots \times I(T_m)$.

Теорема 1. *Положительный интервальный алгоритм $I(\mathcal{P})$ дает точные интервальные оценки результатов применения исходного положительного алгоритма \mathcal{P} . Сложность алгоритма $I(\mathcal{P})$ совпадает со сложностью алгоритма \mathcal{P} . Композиция положительных алгоритмов является положительным алгоритмом.*

Этот результат легко выводится непосредственно из определений. Применение алгоритма $I(\mathcal{P})$ сводится к применению алгоритма \mathcal{P} к нижним и верхним границам исходных интервальных данных. Поэтому оба алгоритма имеют одинаковую сложность.

3. Интервальный анализ над положительными полукольцами

Пусть S – положительное полукольцо и $x \in S$. Положим $x^* = \sup_n \{ \mathbf{1} \oplus x \oplus x^2 \oplus \dots \oplus x^n \}$, $n = 1, 2, \dots$, если указанная верхняя грань существует. Унарная операция $x \mapsto x^*$ (обычно называемая *замыканием*) всюду определена, если S полно как упорядоченное множество. Бинарные операции \oplus и \odot и унарную операцию $x \mapsto x^*$ назовем *основными операциями* в (или над) S .

Теорема 2. *Унарная операция $x \mapsto x^*$ порождает неубывающее отображение $S \rightarrow S$; основные бинарные операции порождают неубывающее отображение $S \times S \rightarrow S$. Если алгоритм \mathcal{P} сводится к комбинации основных операций над положительными полукольцами, то этот алгоритм – положительный.*

Эта теорема легко выводится из принятых определений и теоремы 1. Отметим, что в числовых полукольцах операция $*$ определяется очень простыми правилами, см. [1, 2].

4. Интервальное уравнение Беллмана

Через $\text{Mat}_{mn}(S)$ обозначается множество всех матриц (a_{ij}) с m строками и n столбцами с коэффициентами из полукольца S , т.е. $a_{ij} \in S$. Сумма $A \oplus B$ матриц $A, B \in \text{Mat}_{mn}(S)$ и произведение AB этих матриц определяются для операций сложения \oplus и умножения \odot в S по обычным правилам матричной алгебры. В $\text{Mat}_{mn}(S)$ имеется естественный частичный порядок: $A = (a_{ij}) \preceq B = (b_{ij})$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \preceq b_{ij}$ в S для всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Множество $\text{Mat}_{nn}(S)$ квадратных матриц является некоммутативным полукольцом с нулевым элементом $O = (o_{ij})$, где $o_{ij} = \mathbf{0}$ при всех i, j , и единицей $E = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \mathbf{1}$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = \mathbf{0}$ при $i \neq j$. Если полукольцо S идемпотентно (соответственно положительно), то и полукольцо $\text{Mat}_{nn}(S)$ идемпотентно (соответственно положительно). Если S полно (как упорядоченное множество), то и $\text{Mat}_{nn}(S)$ является полным полукольцом.

Операцию замыкания $A \mapsto A^*$ в $\text{Mat}_{nn}(S)$ можно выразить через операцию замыкания $a \mapsto a^*$ в S индуктивно: $A^* = (a_{11})^* = (a_{11}^*)$ при $n = 1$, а при $n > 1$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} \in \text{Mat}_{kk}(S)$, $A_{12} \in \text{Mat}_{k, n-k}(S)$, $A_{21} \in \text{Mat}_{n-k, k}(S)$, $A_{22} \in \text{Mat}_{n-k, n-k}(S)$, $1 \leq k \leq n$, матрица A^* имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* \oplus A_{11}^* A_{12} D^* A_{21} A_{11}^* & A_{11}^* A_{12} D^* \\ D^* A_{21} A_{11}^* & D^* \end{pmatrix},$$

где $D = A_{22} \oplus A_{21} A_{11}^* A_{12}$. Эти рекуррентные соотношения с точностью до используемых алгебраических операций совпадают с формулами, возникающими при обращении матрицы методом окаймления. Отсюда следует, что данный алгоритм вычисления операции замыкания $A \mapsto A^*$ требует полиномиального по n числа основных операций полукольца S .

Пусть S – положительное полукольцо, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \text{Mat}_{mn}(S)$ – матрица, коэффициентами которой являются замкнутые интервалы в S . Матрицы $L(\mathbf{A}) = (\underline{\mathbf{a}}_{ij})$, $U(\mathbf{A}) = (\overline{\mathbf{a}}_{ij}) \in \text{Mat}_{mn}(S)$ называются *нижней* и *верхней матрицами* интервальной матрицы \mathbf{A} ; очевидно, что $L(\mathbf{A}) \preceq U(\mathbf{A})$ в $\text{Mat}_{mn}(S)$. Легко видеть, что $\text{Mat}_{nn}(I(S))$ и $I(\text{Mat}_{nn}(S))$ – изоморфные положительные полукольца, а операции сложения и умножения матричных интервалов сводятся к раздельному матричному сложению и умножению их нижних и верхних границ.

Дискретное стационарное уравнение Беллмана сводится к уравнению

$$X = AX \oplus B, \quad (*)$$

где $A \in \text{Mat}_{nn}(S)$, $X, B \in \text{Mat}_{ns}(S)$, S – некоторое положительное полукольцо, s – целое число, т.е. к системе линейных алгебраических уравнений над S с неизвестной матрицей X . Обычно $s = 1$ и X является вектором, подробнее см., например в [2]. Нетрудно проверить, что матрица $X = A^*B$ является наименьшим решением уравнения Беллмана (*).

Пусть $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{nn}(I(S))$, $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{ns}(I(S))$. *Объединенным множеством (наименьших) решений* уравнения Беллмана (*) называется множество $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{A^*B | A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$; при этом (*наименьшим*) *алгебраическим решением* интервальной версии уравнения (*) называется интервал $\mathbf{X} = \mathbf{A}^*\mathbf{B} \in \text{Mat}_{ns}(I(S))$, удовлетворяющий уравнению в алгебраическом смысле.

Теорема 3. *Объединенное множество решений $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ уравнения (*) содержится в замкнутом интервале $[L(\mathbf{A}^*\mathbf{B}), U(\mathbf{A}^*\mathbf{B})]$ в $\text{Mat}_{ns}(S)$, соответствующем алгебраическому решению, и в то же время само содержит границы этого интервала $L(\mathbf{A}^*\mathbf{B}), U(\mathbf{A}^*\mathbf{B})$. Алгебраическое решение $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ может быть построено за полиномиальное число операций.*

Эта теорема, доказанная в [1, 2] (равно как и другие основные результаты из [2]) легко выводится из теорем 1 и 2 (см. выше). В случае интервальной линейной алгебры над полукольцом \mathbf{R}^+ данная теорема хорошо известна. Если полукольцо S идемпотентно и основные операции удовлетворяют естественным дополнительным условиям, то $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [L(\mathbf{A}^*\mathbf{B}), U(\mathbf{A}^*\mathbf{B})]$; в этом случае авторам неизвестны задачи интервальной линейной алгебры, приводящие к *NP*-трудным вычислительным проблемам. В традиционной интервальной линейной алгебре ситуация противоположна. Отметим, что после появления работ [1, 2] некоторые результаты из этих работ были заново открыты для полуколец \mathbf{R}_{\max} и $\hat{\mathbf{R}}_{\max}$ (Р.А. Канингхем-Грин, К. Циммерман и др.).

К решению дискретного уравнения Беллмана сводятся многочисленные задачи дискретной оптимизации и динамического программирования (см., например, [2, 4, 5]). Для решения уравнения (*) обычно используются полукольцевые версии стандартных алгоритмов линейной алгебры (исключение по Гауссу, LU и LDU факторизация, итерационные методы), см., например, [2]. Различные алгоритмы (все они положительны) соответствуют различным методам оптимизации. Положительные алгоритмы возникают и при решении дифференциальных уравнений (например, уравнений Гамильтона-Якоби, Беллмана, Айзекса и др.).

Авторы благодарны В.П. Маслову, С.П. Шарому и Г.Б. Шпизу за ценные обсуждения.

5. Литература

1. Литвинов Г.Л., Соболевский А.Н. Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и полиномиальная сложность задач интервальной идемпотентной линейной алгебры // Докл. АН. – 2000. – Т. 374, № 5. – С. 304–306.
2. LITVINOV G.L., SOBOLEVSKIĬ A.N. Idempotent interval analysis and optimization problems // Reliable Computing. – 2001. – Vol. 7, N 5. – P. 353–377.
3. Литвинов Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2005. – Т. 326. – С. 145–182.
4. LITVINOV G.L., MASLOV V.P. (Eds.) Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. – Providence: Amer. Math. Soc., 2005 (Contemporary Mathematics, Vol. 377).
5. FLEMING W.H., McENEANEY W.M. Max-plus approaches to continuous space control and dynamic programming // Ibid. – P. 145–160.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ИДЕМПОТЕНТНОЙ МАТЕМАТИКЕ⁴

Г.Л. Литвинов, Г.Б. Шпиз

Независимый Московский Университет
E-mail: islc@dol.ru

Аннотация

В рамках идемпотентной математики [1, 2] исследуются интервальные решения обобщенных алгебраических уравнений с одной переменной.

Ключевые слова: интервальный анализ, идемпотентная математика, алгебраические уравнения
Keywords: interval analysis, idempotent mathematics, algebraic equations

1. Обобщенные многочлены над алгеброй Макс-Плюс

Пусть \mathbf{R} – поле вещественных чисел, а \mathbf{R}_{\max} – алгебра Макс-Плюс, т.е. (идемпотентное) полуполе $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$ и $\odot = +$, причем элемент $-\infty$ является нулем этого полуполя и обозначается $\mathbf{0}$.

Обобщенным многочленом над \mathbf{R}_{\max} называется линейная комбинация вида

$$P = \bigoplus_{s \in \Delta} k_s \odot X^{\odot s}, \quad (1)$$

где $\Delta = \Delta(P)$ – конечное подмножество в \mathbf{R} , $k_s \in \mathbf{R}_{\max}$, $k_s \neq \mathbf{0}$; в дальнейшем под многочленом будем понимать обобщенный многочлен. Многочлен P порождает функцию

$$P(x) = \bigoplus_{s \in \Delta} k_s \odot x^{\odot s} = \sup_{s \in \Delta} (k_s + sx) \quad (2)$$

на \mathbf{R} , где по определению идемпотентная степень $x^{\odot s}$ совпадает с обычным произведением чисел sx . Легко видеть, что такие функции – в точности выпуклые (с выпуклым надграфиком) кусочно-линейные (в обычном смысле) функции на \mathbf{R} . Для $T \subset \Delta$ положим

$$P_T = \bigoplus_{s \in T} k_s \odot X^{\odot s}.$$

Для $s \in \Delta$ положим

$$P_s = k_s \odot X^{\odot s}, \quad P_{\leq s} = \bigoplus_{t \in \Delta, t \leq s} k_t \odot X^{\odot t} \quad \text{и} \quad P_{> s} = \bigoplus_{t \in \Delta, t > s} k_t \odot X^{\odot t}.$$

Основное определение. Число $r \in \mathbf{R}$ называется *корнем* многочлена (1), если существует такое собственное подмножество $T \subset \Delta = \Delta(P)$, что

$$P_T(r) = P_{\Delta-T}(r).$$

Предложение 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) число r является корнем многочлена P ;
- 2) существует такое число $s \in \Delta = \Delta(P)$, что $P_{\leq s}(r) = P_{> s}(r)$;
- 3) существуют такие числа $s, t \in \Delta$, что $s \neq t$ и $P_s(r) = P_t(s)$ и $P_s(r) \geq P_q(r)$ для любого числа $q \in \Delta$;
- 4) число r является проекцией некоторой вершины надграфика функции (2), т.е. $P(x)$, на ось аргументов.

⁴Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00824.

Замечание 1. Утверждения 3) и 4) предложения 1 показывают, что наше основное определение согласуется с определениями, принятыми в идемпотентной (тропической) алгебраической геометрии, см. [3], а также [1, 2].

Предложение 2. Для каждого корня r многочлена P существуют ровно два элемента s_r и t_r из Δ (где $s_r < t_r$), удовлетворяющих условию 3) предложения 1.

Число $t_r - s_r$ (см. предложение 2) будем называть *кратностью* корня r и обозначать через $d(r)$. Приведенной степени $dg(P)$ многочлена P будем называть число $\sup(\Delta(P)) - \inf(\Delta(P))$.

Предложение 3. Для любого многочлена P сумма кратностей корней равна его приведенной степени.

2. Интервальные корни многочленов над \mathbf{R}_{\max}

Пусть $\mathbf{i} = [a, b]$ – интервал, содержащий нуль. Число $r \in \mathbf{R}$ назовем *\mathbf{i} -корнем* многочлена P , если существует такое собственное подмножество $T \subset \Delta = \Delta(P)$, что

$$[P_T(r) - P_{\Delta-T}(r)] \in \mathbf{i}.$$

Предложение 4. Для любого \mathbf{i} -корня r многочлена P существует такой элемент $s \in \Delta = \Delta(P)$, что

$$[P_{>s}(r) - P_{\leq s}(r)] \in \mathbf{i}.$$

Функция $f_s(x) = [P_{>s}(x) - P_{\leq s}(x)]$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией. Для произвольных P и $s \in \Delta(P)$ положим $\mathbf{i}_s = f_s^{-1}(\mathbf{i})$. Множество \mathbf{i}_s либо пусто, либо содержит такой корень r многочлена P , что $P_{>s}(r) = P_{\leq s}(r)$.

Предложение 5. Для любого \mathbf{i} -корня r многочлена P существует такой элемент $s \in \Delta = \Delta(P)$, что $[P_{>s}(r) - P_{\leq s}(r)] \in \mathbf{i}$.

Следствие 1. Множество всех \mathbf{i} -корней многочлена P является объединением всех интервалов вида \mathbf{i}_s , где s пробегает $\Delta = \Delta(P)$.

Назовем многочлен P *приведенным*, если из линейной комбинации (1) нельзя выбросить ни одного члена, не меняя функции (2), т.е. $P(x)$.

Теорема 1. Если P – приведенный многочлен, а интервал \mathbf{i} имеет достаточно малую длину (зависящую от P), то длина интервала \mathbf{i}_s равна длине интервала \mathbf{i} , деленной (в обычном смысле) на кратность $d(r)$ корня r , заданного уравнением $P_{>s}(r) = P_{\leq s}(r)$, см. предложение 1, утверждение 2. Каждый такой непустой интервал содержит один корень многочлена P .

3. Корни обобщенных многочленов с интервальными коэффициентами

Обозначим через $K = \mathbf{R}_{\max}(T)$ полукольцо всех функций, определенных на фиксированном множестве T и принимающих значения в \mathbf{R}_{\max} , относительно поточечных операций. Пусть $I(\mathbf{R}_{\max})$ – идемпотентное полукольцо всех замкнутых интервалов $\mathbf{i} = [\underline{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{i}}]$ в \mathbf{R}_{\max} , см. [4–6] и [1, 2]. Если множество T состоит из двух элементов, то $I(\mathbf{R}_{\max})$, очевидно, вкладывается в $K = \mathbf{R}_{\max}(T)$. Для любого множества T в полукольце K естественно определены (идемпотентные) степени с вещественными показателями, так что формулы (1) и (2) определяют обобщенные многочлены с коэффициентами из K и соответствующие функции со значениями из K . На этот случай непосредственно (и дословно) переносятся определения многочленов P_T , P_s , $P_{\leq s}$, $P_{>s}$ и определение корня многочлена. При этом мы рассматриваем в качестве корней только такие функции (т.е. элементы из K), которые не обращаются в $\mathbf{0}$ на T (ни в одной точке); функция будет корнем многочлена P с коэффициентами из K тогда и только тогда, когда ее значение в каждой точке $\tau \in T$ будет корнем многочлена, полученного из P заменой коэффициентов на их значения в точке τ . В результате предложение 1 допускает следующее обобщение.

Предложение 1а. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $r \in K$ является корнем многочлена P ;
- 2) для каждого элемента $\tau \in \mathcal{T}$ существует такое число $s \in \Delta = \Delta(P)$, что $P_{\leq s}(r(\tau)) = P_{> s}(r(\tau))$;
- 3) для каждого элемента $\tau \in \mathcal{T}$ существуют такие числа $s, t \in \Delta = \Delta(P)$, что $s \neq t$ и $P_s(r(\tau)) = P_t(r(\tau))$ и $P_s(r(\tau)) \geq P_q(r(\tau))$ для любого числа $q \in \Delta$.

Из предложения 1а вытекает, что среди всех корней многочлена P выделяется специальный набор корней, задаваемых уравнениями

$$P_{\leq s}(r) = P_{> s}(r), \quad (3)$$

где $s \in \Delta$. Такие корни назовем *элементарными*. Все остальные корни получаются “перемешиванием значений” элементарных корней, т.е. при каждом значении аргумента τ любой корень совпадает с некоторым элементарным корнем.

Поскольку полукольцо $I(\mathbf{R}_{\max})$, состоящее из интервалов, вкладывается в K , если \mathcal{T} состоит из двух точек, предложение 1а применимо и к $I(\mathbf{R}_{\max})$. Поскольку значение многочлена над \mathbf{R}_{\max} в любой точке является выпуклой изотонной функцией коэффициентов, то значение многочлена $P = \bigoplus_{s \in \Delta} k_s \odot X^{\odot s}$ над K на интервале $[x, x]$ совпадает с интервалом значений, которые принимают в точке x все многочлены вида $Q = \bigoplus_{s \in \Delta(P)} q_s \odot X^{\odot s}$ над \mathbf{R}_{\max} , для которых $q_s \in k_s$ при любой степени $s \in \Delta(P)$. Если все числа из $\Delta(P)$ неотрицательны (в обычном смысле), то многочлен P над \mathbf{R}_{\max} является выпуклой изотонной функцией коэффициентов и аргумента. В этом случае значение многочлена $P = \bigoplus_{s \in \Delta(P)} k_s \odot X^{\odot s}$ над K на произвольном интервале $[a, b]$ совпадает с интервалом всех значений, которые принимают в точках $x \in [a, b]$ все многочлены $q = \bigoplus_{s \in \Delta(P)} q_s \odot X^{\odot s}$ над \mathbf{R}_{\max} , для которых $q_s \in k_s$ при любой степени $s \in \Delta(P)$. Таким образом, для многочленов с неотрицательными степенями над полукольцом интервалов $I(\mathbf{R}_{\max})$ корни удовлетворяют уравнению (3) и справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $P = \bigoplus_{s \in \Delta} [p_s, q_s] \odot X^{\odot s}$ является обобщенным многочленом над полукольцом интервалов $I(\mathbf{R}_{\max})$. Тогда интервал $[a, b]$ является корнем этого многочлена тогда и только тогда, когда a является корнем многочлена $P_{\min} = \bigoplus_{s \in \Delta} p_s \odot X^{\odot s}$, b является корнем многочлена $P_{\max} = \bigoplus_{s \in \Delta} q_s \odot X^{\odot s}$. Если P – обобщенный многочлен с неотрицательными степенями s , то интервал $[a, b]$ удовлетворяет уравнению (3).

Замечание 2. Основные определения и результаты, сформулированные для алгебры \mathbf{R}_{\max} , можно перенести на случай уравнений над произвольными алгебраически замкнутыми идемпотентными полуполями, а также (с техническими осложнениями) уравнений с интервальными степенями.

4. Литература

1. Литвинов Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2005. – Т. 326. – С. 145–182.
2. LITVINOV G.L., MASLOV V.P. (Eds.) Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. – Providence: Amer. Math. Soc., 2005 (Contemporary Mathematics, Vol. 377).
3. RICHTER-ГЕВЕРТ J., STURMFELS B., ТНЕОВАЛД Т. First steps in tropical geometry // Ibid. – P. 289–318.
4. Литвинов Г.Л., Соболевский А.Н. Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и полиномиальная сложность задач интервальной идемпотентной линейной алгебры // Докл. АН. – 2000. – Т. 374, № 5. – С. 304–306.
5. LITVINOV G.L., SOBOLEVSKIĬ A.N. Idempotent interval analysis and optimization problems // Reliable Computing. – 2001. – Vol. 7, N 5. – P. 353–377.
6. Литвинов Г.Л., Соболевский А.Н. Положительные интервальные алгоритмы и идемпотентная математика // Настоящий сборник.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ВОЗМУЩЕНИЙ КАК ОСНОВА МНОЖЕСТВЕННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

М.М. Лычак

*Институт космических исследований НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: set@space.is.kiev.ua*

1. Введение

В данной работе излагается подход, предложенный в [1], и названный там теорией хаотичности. Введение интервальных характеристик для хаотических дискретных и непрерывных процессов обеспечивает полноту такой модели неопределённых процессов [2, 3], которая является альтернативой вероятностной модели неопределённости [4, 5]. Теория хаотичности развивается в рамках теоретико-множественного подхода к задачам оценивания.

2. Интервальные функции распределения и скользящего среднего для хаотических последовательностей

Пусть возможные проявления исследуемого явления, результаты рассматриваемого исследования или наблюдения принадлежат некоторому замкнутому ограниченному упорядоченному множеству элементарных событий \mathcal{X}_0 . Последовательные реализации того или другого проявления, результата или наблюдения образуют некоторую последовательность, которую можно рассматривать как последовательное применение некоторого алгоритма выбора элементов этого множества. В дальнейшем, для простоты будем считать, что множество элементарных событий \mathcal{X}_0 имеет вид замкнутого интервала на числовой оси $[x_{\min}; x_{\max}]$, где $x_{\max} > x_{\min}$ – некоторые числа.

Рассмотрим хаотическую последовательность [1] x_n ($n = 1, 2, \dots$), члены которой принадлежат заданному числовому интервалу, т. е.

$$x_{\min} \leq x_n \leq x_{\max} \quad \forall n > 0. \quad (1)$$

Введем такую индикаторную функцию от $x \in [x_{\min}; x_{\max}]$ и членов любой неопределенной последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$), что

$$F(x, x_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } x_n \leq x, \\ 0 & \text{при } x_n > x. \end{cases} \quad (2)$$

Определение 1. Нижней и верхней гранями интервальной функции распределения членов ограниченной согласно (1) последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$) будем называть такие функции

$$1 \geq P_l(x, N) \geq 0, \quad 0 \leq P_u(x, N) \leq 1, \quad (3)$$

где $x \in \mathcal{X}_0$, а $N = 1, 2, \dots$ – последовательные значения числа рассматриваемых подряд любых членов последовательности, что для функций (3) и соответствующих членов хаотической последовательности согласно (2) выполняется система неравенств

$$P_l(x, N) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i}) \leq P_u(x, N) \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \text{при } N = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Такую последовательность будем называть хаотической, а ее члены – хаотическими событиями.

Определение 2. Если для всех $x \in \mathcal{X}_0$ существует пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_l(x, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_u(x, N) = P(x), \quad (5)$$

то такие хаотические последовательности будем называть случайными, а функцию $P(x)$ – функцией распределения случайных событий – членов случайной последовательности, сформированной из \mathcal{X}_0 .

Т.е. вероятностная характеристика [4] получается из интервальной функции распределения в результате предельного перехода, если он существует.

Утверждение 1. Для интервальной функции распределения (из Определения 1) членов хаотической последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$) существует соответствующая интервальная функция среднего на скользящем интервале ширины N , нижняя и верхняя грани которой определяются как

$$m_l(N) = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_u(x, N) dx, \quad m_u(N) = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_l(x, N) dx, \quad (6)$$

а значения членов любой части данной последовательности удовлетворяют системе неравенств

$$m_l(N) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \leq m_u(N) \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \text{при } N = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Действительно, вычислим

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F(x, x_n) dx = \int_{x_n}^{x_{\max}} dx = x_{\max} - x_n, \quad (8)$$

откуда

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i}) \right] dx = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F(x, x_{n+i}) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{\max} - x_{n+i}).$$

Возьмем такой же интеграл от других членов соотношения (4) для этого случая (рассматривая N как параметр) и получим неравенства вида

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_H(x, N) dx \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{\max} - x_{n+i}) \leq \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_B(x, N) dx. \quad (9)$$

Неравенства (9) можно переписать в виде (7).

Отметим, что подобного Утверждения нет в аксиоматической теории вероятностей [4, 5]. Попытки через знание функции распределения $P(x)$ вычислить некоторые аналоги интервальных оценок для конечных частей последовательности, а значит фактически определить интервальную функцию распределения (3)–(4), являются некорректными изначально.

Неравенства (7) непосредственно выделяют ограничения на среднеарифметическое значение членов любой части хаотической последовательности определенной длины и устанавливают связь этих ограничений с гранями интервальной функции распределения числовых хаотических событий.

Следствие 1 (из Утверждения 1). Если выполняются (6) и (5), то существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_l(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_u(N) = m_0, \quad (10)$$

где m_0 – можно рассматривать как полный аналог математического ожидания членов случайной числовой последовательности из \mathcal{X}_0 [4].

Действительно, существование пределов (10) непосредственно следует из (6) и (5).

3. Методика множественного оценивания

Неравенства (7) служат естественной основой множественного оценивания [6, 7]. Пусть имеются результаты измерений или наблюдений в виде последовательности

$$z_n = y_n + x_n, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

где x_n – ограниченная хаотическая последовательность, отображающая ошибки измерений или наблюдений на временном интервале $n = \overline{1, M}$ ($M = \text{const} > 0$), для которой известны грани интервального скользящего среднего (6), задающие ограничения (7), а

$$y_n = \sum_{k=1}^S l_k \cdot \varphi_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad (12)$$

где l_k ($k = \overline{1, S}$, $S = \text{const}$) — неизвестные постоянные параметры, подлежащие определению в результате обработки M полученных значений z_n ($n = \overline{1, M}$), и составляющие вектор $L^T = (l_1; l_2; \dots; l_S)$, а $\varphi_k^{(n)}$ — известные функции времени или такие, что их значения вычисляются в процессе измерений или наблюдений (в том числе, зависящие от каких либо других известных факторов), составляющие вектор-строку $\Phi_n = (\varphi_1^{(n)}; \varphi_2^{(n)}; \dots; \varphi_S^{(n)})$.

Центральным пунктом теоретико-множественного подхода к постановке и решению задачи оценивание вектора постоянных параметров L в условиях неопределенности является предположение [6], что известна лишь его априорная оценка в виде заданного ограниченного замкнутого множества L_0 в пространстве параметров, которому заведомо принадлежит значение вектора L , то есть

$$L \in L_0. \quad (13)$$

Процедура множественного оценивания состоит в том, что на основании информации, получаемой в результате измерений или наблюдений, строится новая множественная оценка вектора параметров

$$L \in L_M, \quad L_M = L^M \cap L_0, \quad (14)$$

где L^M — апостериорная множественная оценка, получаемая в процессе обработки результатов измерений

Для описания алгоритма определения апостериорной оценки L^M перепишем (11) в виде

$$z_n - \Phi_n \cdot L = x_n, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (15)$$

Тогда, можно записать выражения для суммы любых N таких равенств подряд, начиная с некоторого n -го

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (z_{n+i} - \Phi_n \cdot L) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i}, \quad \text{при } N = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, \dots, M - N + 1. \quad (16)$$

Отсюда, согласно (7), следует система неравенств

$$m_l(N) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (z_{n+i} - \Phi_n \cdot L) \leq m_u(N) \quad \text{при } N = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, \dots, M - N + 1. \quad (17)$$

Её можно переписать в компактном виде

$$\bar{z}(n, N) - m_u(N) \leq \bar{\Phi}(n, N) \cdot L \leq \bar{z}(n, N) - m_l(N) \quad \text{при } N = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, \dots, M - N + 1, \quad (18)$$

где

$$\bar{z}(n, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z_{n+i}, \quad \bar{\Phi}(n, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_{n+i}. \quad (19)$$

Тогда справедливо следующее.

Утверждение 2. Пусть имеются результаты измерений или наблюдений на временном интервале $n = \overline{1, M}$ ($M = \text{const} > 0$) в виде последовательности (11) выхода объекта (12) с неизвестными постоянными параметрами, для которых лишь задана априорная оценка (13). Тогда, если ошибки измерений или наблюдений составляют хаотическую последовательность с заданными интервальными характеристиками (7) или (3) (через (3) можно вычислить (6)), то результирующая множественная оценка L_M вектора неизвестных постоянных параметров L определяется согласно (14), где апостериорная множественная оценка L^M выделяется системой линейных неравенств (18).

Следствие 2 (из Утверждения 2). Если априорная оценка L_0 в (13) имеет вид многогранника, то и результирующая множественная оценка L_M в (14) будет многогранником. Это позволит определить оценки параметров в виде неулучшаемых интервальных внешних оценок

$$l_k \in [l_k^{(\min)}; l_k^{(\max)}], \quad l_k^{(\min)} = \min_{L \in L_M} (l_k), \quad l_k^{(\max)} = \min_{L \in L_M} (-l_k), \quad (20)$$

т.е. как решение соответствующих задач линейного программирования (ЛП).

Действительно, любой многогранник выделяется системой линейных неравенств, а объединенная система линейных неравенств (оценка (3) дополняется неравенствами (18)) выделит некоторый уточненный многогранник, принадлежащий априорной оценке.

Отметим, что для таких задач ЛП имеется разработанный новый эффективный итерационный алгоритм [8], позволяющий учитывать результаты новых измерений или наблюдений в виде дополнительных линейных неравенств, которые участвуют в продолжении процесса итераций. Т.е., эти дополнительные неравенства не приводят к необходимости начинать процедуру решения заново.

Действительно, из (18) видно, что при замене $M - 1$ величиной M к предыдущим неравенствам добавляется еще M линейных неравенств

$$\bar{z}(M-N+1, N) - m_u(N) \leq \bar{\Phi}(M-N+1, N) \cdot L \leq \bar{z}(M-N+1, N) - m_l(N) \quad \text{при } N = 1, 2, \dots, M. \quad (21)$$

Следствие 3 (из Утверждения 2). Если справедливо Утверждение 2, то процедура множественного оценивания вектора неизвестных постоянных параметров L описывается разностным уравнением эволюции таких множественных оценок [4], [9]

$$\mathbf{L}_M = \bar{\mathbf{L}}_M \cap \mathbf{L}_{M-1}, \quad M = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где множественная оценка $\bar{\mathbf{L}}_M$ выделяется системой неравенств (21).

Так, например, множественная оценка $\bar{\mathbf{L}}_1$ задается в виде гиперполосы в пространстве параметров, выделяемой двухсторонним неравенством (вытекающим из (21))

$$z_1 - m_u(1) \leq \Phi_1 \cdot L \leq z_1 - m_l(1). \quad (23)$$

4. Хаотические непрерывные процессы и их интервальные характеристики

Скалярный непрерывный процесс — это некоторая функция непрерывного времени $x(t)$, $t \geq t_0$ (t_0 — начальный момент времени).

Будем считать, что значения функции $x(t)$ ограничены по величине и принадлежат некоторому множеству \mathcal{X}_0 , в виде заданного интервала $[x_{\min}; x_{\max}]$, где $x_{\max} > x_{\min}$ — некоторые числа, то есть

$$x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \quad \forall t \geq t_0. \quad (24)$$

Естественно, что аналогично, как и для хаотических последовательностей, можно ввести понятие хаотического непрерывного процесса. Для этого введем функцию от переменной $x \in [x_{\min}; x_{\max}]$

$$\tilde{F}[x, x(t)] = \begin{cases} 1 & \text{при } x(t) \leq x, \\ 0 & \text{при } x(t) > x. \end{cases} \quad (25)$$

Определение 3. Нижней и верхней гранями интервальной функции распределения значений ограниченного согласно (24) непрерывного процесса $x(t)$, $t \geq t_0$ (t_0 — начальный момент времени), будем называть такие функции от $x \in \mathcal{X}_0$, $T > 0$ — некоторый параметр,

$$1 \geq \tilde{P}_l(x, T) \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \tilde{P}_u(x, T) \leq 1, \quad (26)$$

что для функций (26) и значений $x(t)$ выделенного класса справедливы неравенства

$$\tilde{P}_l(x, T) \leq \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{F}[x, x(t)] dt \leq \tilde{P}_u(x, T) \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{при любом } T > 0. \quad (27)$$

Такой непрерывный процесс будем называть хаотическим [3].

Определение 4. Если для всех $x \in [x_{\min}; x_{\max}]$ существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}_l(x, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}_u(x, T) = \tilde{P}(x), \quad (28)$$

то такой хаотический процесс будем называть случайным процессом [7,8], а функцию $\tilde{P}(x)$ будем называть функцией распределения значений случайного процесса для каждой его случайной реализации.

Утверждение 3. Для интервальной функции распределения (из Определения 3) значений хаотического непрерывного процесса $x(t)$ ($t \geq t_0$) существует соответствующая интервальная функция среднего значения на скользящем временном интервале длительности $T > 0$, нижняя и верхняя грани которой определяются как

$$\tilde{m}_l(T) = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \tilde{P}_u(x, T) dx, \quad \tilde{m}_u(T) = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \tilde{P}_l(x, T) dx, \quad (29)$$

а значения хаотического непрерывного процесса на скользящем временном интервале длительности $T > 0$, начиная с любого $t \geq t_0$, удовлетворяют интегральному неравенству

$$\tilde{m}_l(T) \leq \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt \leq \tilde{m}_u(T). \quad (30)$$

5. Литература

1. Лычак М.М. Элементы теории хаотичностей и ее применения // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 52–63.
2. Лычак М.М. Интервальные характеристики хаотических последовательностей // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 5. – С. 58–71.
3. Лычак М.М. Хаотические непрерывные процессы и их интервальные характеристики // Проблемы управления и информатики. – 2004, № 3.
4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. – 1978. – 224 с.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука. – 1974. – 120 с.
6. KUNTSEVICH V.M., ЛЫЧАК М.М. Guaranteed Estimations, Adaptation and Robustness in Control Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 209 p.
7. Лычак М.М., ШЕВЧЕНКО В.Н. Адаптивное управление скалярным статическим объектом на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 2. – С. 16–27.
8. Лычак М.М., ШЕВЧЕНКО В.М., ЦАРУК Н.П. Решение задачи линейного программирования на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 4. – С. 103–111.
9. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Элементы теории эволюции множеств и устойчивость этих процессов // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 105–111.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕТОЧНО ЗАДАНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М.М. Лычак

*Институт космических исследований НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: set@space.is.kiev.ua*

1. Введение

В абсолютном большинстве случаев важным этапом научных исследований является решение задачи уточнения значений параметров математических моделей исследуемых явлений или объектов при неточных исходных данных и зашумленных измерениях, т.е. в условиях неопределённости. Для линейных по постоянным параметрам моделей эта задача сводится к согласованию определяемых значений параметров с получаемыми в результате измерений или наблюдений линейными соотношениями, которым они должны удовлетворять с учетом неопределённости [1]–[3].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с неточно заданными параметрами

$$AX = B, \quad (1)$$

где X – m -мерный вектор, подлежащий определению, A – матрица коэффициентов этой системы размерности $m \times n$, B – n -мерный вектор правых частей. Пусть из элементов матрицы коэффициентов A и вектора правых частей B составлен вектор параметров L . Предположим, что задано замкнутое ограниченное множество L_0 (в пространстве размерности вектора L), которому он принадлежит, т.е.

$$L \in L_0. \quad (2)$$

Будем искать множественное решение системы (1)–(2) в виде множества \mathcal{X} , каждому элементу $X \in \mathcal{X}$ которого соответствует элемент множества L_0 из (2) такой, что для этой пары элементов удовлетворяется (1).

Отметим, что искомое множество \mathcal{X} имеет свойство композитивности [4], когда каждому подмножеству L_0 соответствует некоторое подмножество \mathcal{X} (в частности, им может быть и пустое подмножество), причем объединение подмножеств L_0 определяет объединение подмножеств \mathcal{X} .

3. Решение задачи для выпуклого множества вектора параметров

Пусть ограниченное множество L_0 в (2) замкнуто и выпукло, а для некоторой его внутренней точки в виде элемента $L_0 \in L_0$ найден соответствующий элемент $X_0 \in \mathcal{X}$ множественного решения системы (1). Рассмотрим вначале тот случай, когда известно, что множество \mathcal{X} полностью принадлежит одному из ортантов пространства E^m [5], т.е. части пространства, где все координаты сохраняют свой знак. Каждый i -ый ортант выделяется системой линейных неравенств

$$(I - 2E^{(i)})X \geq 0, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (3)$$

где $N = 2^m$ – количество ортантов в пространстве E^m , I – единичная матрица, а

$$E^{(i)} = \text{diag} \{e_j^{(i)}\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где j -я диагональная компонента равна "0", если $x_j \geq 0$ в i -ом ортанте, и "1" – если $x_j \leq 0$.

Обозначим через L_k ($k = 1, 2, \dots$) (соответствующие матрица A_k и вектор B_k) некоторый набор значений вектора L , принадлежащих границе множества L_0 . В этом случае справедлива следующая лемма [6].

Лемма. Пусть для системы (1)–(2) задано замкнутое ограниченное выпуклое множество \mathbf{L}_0 и для некоторой его внутренней точки в виде элемента $L^{(i)} \in \mathbf{L}_0$ найден соответствующий элемент $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$ множественного решения системы (1), лежащий внутри i -ого ортанта \mathbf{E}^m , который выделяется неравенствами (3) для соответствующего номера ортанта. Тогда все множество $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(i)}$ – решение этой системы в указанном ортанте выделяется совместно с (3) неравенствами вида

$$\begin{cases} A_k \cdot X - B_k \geq 0, & \text{если } A_k \cdot X_0^{(i)} - B_k \geq 0, \\ A_k \cdot X - B_k \leq 0, & \text{если } A_k \cdot X_0^{(i)} - B_k \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ – номера некоторой специально выбранной (в общем случае бесконечной) последовательности точек L_k на границе множества \mathbf{L}_0 . Т.е., все точки X , удовлетворяющие этой системе неравенств, являются элементами множества решений системы (1)–(2) $X \in \mathcal{X}^{(i)}$ в данном ортанте.

Прежде всего, отметим, что если для некоторого значения $L = L^{(i)}$ найден элемент решения в виде точки $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$, лежащей внутри некоторого ортанта, то в пространстве параметров всегда существует такое замкнутое выпуклое множества в пространстве параметров, в виде окрестности точки $L^{(i)}$, что соответствующее ему множественное решение полностью принадлежит этому же ортанту. Таким образом, в общем случае ограниченного выпуклого множества \mathbf{L}_0 , из существования элемента решения в виде точки $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$, лежащей внутри некоторого ортанта, следует существование в данном ортанте непустого подмножества $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ – множественного решения системы (1)–(2).

В том частном случае, когда для коэффициентов системы и правых частей заданы лишь интервальные оценки

$$\underline{a}_{ji} \leq a_{ji} \leq \bar{a}_{ji}, \quad \underline{b}_j \leq b_j \leq \bar{b}_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где $\underline{a}_{ji}, \bar{a}_{ji}, \underline{b}_j, \bar{b}_j$ – некоторые числа, т.е. множество \mathbf{L}_0 имеет вид гиперпараллелепипеда, справедливость леммы следует из результатов работы [4]. В этом случае нет необходимости искать в i -ом ортанте точку $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$, а вместо точек L_k , фигурируют определенные вершины этого параллелепипеда. А именно, неравенства (5) заменяются неравенствами

$$\begin{cases} A^{(0)} \cdot X - B^{(0)} \geq 0, & \text{где } a_{ji}^{(0)} = \bar{a}_{ji} \text{ при } e_j^{(i)} = 0 \text{ или } a_{ji}^{(0)} = \underline{a}_{ji} \text{ при } e_j^{(i)} = 1, \quad a b_j^{(0)} = \underline{b}_j, \\ A^{(1)} \cdot X - B^{(1)} \leq 0, & \text{где } a_{ji}^{(1)} = \underline{a}_{ji} \text{ при } e_j^{(i)} = 0 \text{ или } a_{ji}^{(1)} = \bar{a}_{ji} \text{ при } e_j^{(i)} = 1, \quad a b_j^{(1)} = \bar{b}_j, \end{cases} \quad (7)$$

и если в данном ортанте подмножество решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ пустое, то система неравенств (7) будет противоречивой. Проверить это можно, определяя внешние неуплучшаемые интервальные оценки вида

$$x_k \in [\underline{x}_k^{(i)}, \bar{x}_k^{(i)}], \quad \underline{x}_k^{(i)} = \min_{X \in \mathcal{X}^{(i)}} (x_k), \quad \bar{x}_k^{(i)} = \max_{X \in \mathcal{X}^{(i)}} (x_k), \quad k = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где подмножество решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ выделяется неравенствами (7). Если будут получены непротиворечивые решения соответствующих задач линейного программирования [7], то координаты

$$x_k = \frac{1}{2} [\underline{x}_k^{(i)} + \bar{x}_k^{(i)}], \quad k = \overline{1, m}, \quad (9)$$

задают фактически в этом случае точку $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$.

Отметим, что согласно лемме будут записаны неравенства (5) для всех вершин гиперпараллелепипеда, однако из этих неравенств можно выписывать лишь неравенства для используемых в (7) вершин (остальные будут заведомо неинформативными).

Для доказательства леммы укажем, что всякое замкнутое ограниченное выпуклое множество \mathbf{L}_0 можно представить с любой наперед заданной точностью в виде совокупности конечного числа гиперпараллелепипедов, в которых часть вершин каждого принадлежит границе данного множества, а другие лежат внутри (при этом они будут лежать на гранях соседних гиперпараллелепипедов). Отсюда и из свойства комpositивности следует, что множество решений \mathcal{X} будет объединением подмножеств, являющихся решениями для соответствующих гиперпараллелепипедов. Однако можно легко убедиться, что всякое неравенство, где принимает участие вершина, лежащая внутри множества \mathbf{L}_0 , будет заведомо неинформативным. Действительно, неравенство с участием вершин соседнего гиперпараллелепипеда, на грани которого лежит эта точка–вершина, выделяет область внутри полупространства, задаваемого данным неравенством. Это следует из того, что для соседнего гиперпараллелепипеда указанная точка не является его вершиной, а согласно результатам работы [4]

подмножество решений для каждого ортанта в пространства E^m [5], для этого гиперпараллелепипеда выделяется неравенствами с участием лишь его вершин. Все сказанное выше и доказывает справедливость леммы.

Следствие из леммы. Если при условиях леммы множество L_0 — выпуклый многогранник, то непустое подмножество решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ в i -ом ортанте является выпуклым полиэдром, который выделяется совместно с (3) неравенствами (5), где L_k принадлежат последовательности всех вершин указанного многогранника, а точка $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$, принадлежит подмножеству решений выделяемому неравенствами (7) для некоторого гиперпараллелепипеда в пространстве параметров, принадлежащем множеству L_0 .

Действительно, пусть некоторая точка $X = X^{(k)} \in \mathcal{X}$ принадлежит полупространству, которое выделяется неравенством вида (5) для некоторой точки $L^{(k)}$, лежащий на одной из граней многогранника и не являющийся его вершиной. Тогда она, очевидно, также принадлежит полупространству, которое выделяется аналогичным неравенством, но с L_k , принадлежащей одной из вершин многогранника, лежащей на границе этой грани. Это следует из того, что левая часть неравенств (5) линейна по L , поэтому при данном фиксированном $X = X^{(k)}$ она принимает экстремальные значения в вершинах рассматриваемой грани. Согласно определению, для любой точки $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$, лежащей в i -ом ортанте, существует соответствующая точка $L^{(i)}$, а значит и ее некоторая окрестность, в том числе в виде некоторого гиперпараллелепипеда, порождающая множественную оценку, выделяемую неравенствами вида (7) и принадлежащую подмножеству решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$. Отсюда и следует, что координаты этой точки будут задаваться выражениями вида (9).

Представим общее решение в виде

$$\mathcal{X} = \bigcup_i \mathcal{X}^{(i)}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (10)$$

где каждое подмножество $\mathcal{X}^{(i)}$ полностью принадлежит соответствующему ортанту (для некоторых ортантов эти подмножества могут быть пустыми).

Теорема. Пусть для системы (1)–(2) задано замкнутое и выпуклое множество L_0 , а для каждого i -ого ортанта ($i = \overline{0, N-1}$), в котором существует непустое подмножество решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$, принадлежащее данному ортанту, известна точка-элемент $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$ множественного решения системы (1)–(2), лежащая внутри этого ортанта. Тогда все множество \mathcal{X} решений такой системы определяется в виде (10), где подмножества $\mathcal{X}^{(i)}$ для каждого i выделяются совместными неравенствами (3) и (5) для соответствующих $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$.

Справедливость теоремы следует из леммы и свойства коммутативности.

Следствие из Теоремы. Если при условиях Теоремы множество L_0 — выпуклый многогранник, то множество \mathcal{X} решений такой системы определяется в виде (10), где непустое подмножество решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ в каждом таком i -ом ортанте ($i = \overline{0, N-1}$) является выпуклым полиэдром, который выделяется совместно с (3) неравенствами (5) для соответствующих $X_0^{(i)} \in \mathcal{X}$, а L_k принадлежат последовательности всех вершин указанного многогранника, причём для данного ортанта внешние интервальные неулучшаемые оценки множественного решения системы (1)–(2) определяются согласно (8), где подмножество решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ выделяется неравенствами (3) и (5).

Справедливость данного следствия следует из следствия из леммы и свойства коммутативности.

4. Решение задачи для множества вектора параметров общего вида

Пусть ограниченное замкнутое множество L_0 в пространстве параметров может быть представлено в виде

$$L_0 = \bigcup_j L^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (11)$$

где M — количество таких подмножеств, а каждое подмножество L^j является замкнутым и выпуклым (при этом их границы могут частично совпадать).

Утверждение. Пусть для системы (1)–(2) задано ограниченное замкнутое множество L_0 в пространстве параметров, которое может быть представлено в виде (11) и для каждого подмножества L^j ($j = \overline{1, M}$) в каждом из ортантов пространства решений определено подмножество $\mathcal{X}_j^{(i)} \in \mathcal{X}$

($i = \overline{0, N-1}$), принадлежащее данному ортанту (в общем случае часть из них будут пустыми). Тогда всё множество \mathcal{X} решений такой системы определяется в виде

$$\mathcal{X} = \bigcup_j \bigcup_i \mathcal{X}_j^{(i)}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (12)$$

где подмножества $\mathcal{X}_j^{(i)}$ при каждом j для всякого i выделяются совместными неравенствами (3) и (5) для каждого подмножества L^j и соответствующего $X_0^{(i)}(j) \in \mathcal{X}$, являющегося элементом непустого множественного решения внутри i -го ортанта ($i = \overline{0, N-1}$), в котором оно существует, для рассматриваемого замкнутого и выпуклого подмножества L^j ($j = \overline{1, M}$).

Справедливость данного утверждения следует из теоремы и свойства комpositивности.

Следствие 1 из Утверждения. Если при условиях Утверждения множества L^j – замкнутые и выпуклые многогранники, то множество \mathcal{X} решений такой системы определяется в виде (12), где для каждого выпуклого многогранника L^j каждое непустое подмножество решений $\mathcal{X}_j^{(i)} \in \mathcal{X}$ в соответствующем i -ом ортанте ($i = \overline{0, N-1}$) является выпуклым полиэдром, который выделяется совместно с (3) неравенствами (5) для соответствующих $X_0^{(i)}(j) \in \mathcal{X}$, где L_k принадлежат последовательности всех вершин рассматриваемого замкнутого и выпуклого многогранника L^j ($j = \overline{1, M}$).

Следствие 2 из Утверждения. Если при условиях Утверждения множества L^j – замкнутые и выпуклые многогранники, то результирующая множественная оценка решений $\mathcal{X}^{(i)} \in \mathcal{X}$ в каждом i -ом ортанте ($i = \overline{0, N-1}$), где она существует как непустое подмножество полного множества решений \mathcal{X} , является объединением выпуклых полиэдров $\mathcal{X}_j^{(i)}$

$$\mathcal{X}^{(i)} = \bigcup_j \mathcal{X}_j^{(i)}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (13)$$

Это позволит определить оценки множественного решения системы (1)–(2) в виде внешних неуклучшаемых интервальных оценок для каждого i -го ортанта

$$x_k \in [\underline{x}_k^{(i)}, \overline{x}_k^{(i)}], \quad \underline{x}_k^{(i)} = \min_j \min_{X \in \mathcal{X}_j^{(i)}} (x_k), \quad \overline{x}_k^{(i)} = \max_j \max_{X \in \mathcal{X}_j^{(i)}} (x_k), \quad k = \overline{1, m}, \quad (14)$$

т.е. как результат сравнения решений соответствующих задач линейного программирования [7].

5. Выводы

Получено общее решение системы линейных алгебраических уравнений с неточно заданными параметрами, когда имеется замкнутое ограниченное множество L_0 (в пространстве размерности вектора параметров L), которому принадлежат неизвестные значения параметров. А именно, находится множественное решение \mathcal{X} , каждому элементу $X \in \mathcal{X}$ которого соответствует такой элемент множества L_0 , что для этой пары элементов удовлетворяется данная система уравнений. Оно конкретизировано для случая выпуклого множества L_0 (или объединения таких множеств). В случае выпуклого многогранника (или объединения выпуклых многогранников) построен конструктивный алгоритм определения такого множественного решения в виде полиэдров (или объединения полиэдров) в каждом ортанте пространства решений E^m . Также приведена методика определения внешних неуклучшаемых интервальных оценок множественного решения, на основе результатов решения соответствующих задач линейного программирования.

6. Литература

1. KUNTSEVICH V.M., ЛЫЧАК М.М. Guaranteed Estimations, Adaptation and Robustness in Control Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 209 p.
2. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 5. – С. 34–41.
3. ZYELUK YA., ЛЫЧАК М. Interval-Set Analysis Toolbox Applications for Estimation and Identification Problems // Proceeding of the MATLAB 2002 International conference. – Praha. – 2002. – P. 452–464.
4. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Никитенко А.С. Решение системы линейных уравнений при наличии неопределённости в её обеих частях // Кибернетика. – 1988. – № 4. – С. 47–52.
5. ЧАРИН В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества. – Киев: Вища школа. – 1978. – 192 с.
6. Лычак М.М. Элементы теории хаотичностей и ее применения // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 52–63.
7. Лычак М.М., ШЕВЧЕНКО В.М., ЦАРУК Н.П. Решение задачи линейного программирования на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 4. – С. 103–111.

МЕТОДИКА КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Д.С. Ляпин

Московский государственный университет приборостроения и информатики
Россия, 107996, г. Москва, ул. Стромынка, 20
E-mail: LyapinDm@yandex.ru

Аннотация

Разработан алгоритм кластеризации многомерных линейных интервальных моделей, построенных по измеряемой технологической информации. Алгоритм применен для выявления системных связей и построения интервальных линейных моделей измеряемых параметров и заданных характеристик изделия на машиностроительном предприятии.

Ключевые слова: кластеризация, линейные интервальные модели статических систем
Keywords: clusterization, linear interval models of static systems

Одной из составляющих частей задачи установления системных связей и закономерностей в измеряемых параметрах промышленных объектов является задача кластеризации. Интервальный характер данных определяется невозможностью точного измерения параметров и заданных в виде диапазонов значений ряда характеристик, таких, например, как характеристики качества, определяемых нормативной документацией.

Для создания средств кластеризации предлагается использовать методы интервального анализа [1–3] с целью разработки средств моделирования системных связей, ориентированных на интеграцию с существующими промышленными программными комплексами сбора и анализа информации [4].

Рассмотрим объекты, о структуре и форме взаимодействия измеряемых параметров которых нет информации.

Предположим, что исследуется система Σ , которая задается совокупностью:

$$\Sigma = \langle \mathbf{x}, F(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle,$$

где \mathbf{x} – интервальные входные возмущения; \mathbf{y} – интервал, в который необходимо обеспечить гарантированное попадание значение отображения $F(\mathbf{x})$.

В интервальном анализе наилучшей интервальной моделью считают наиболее простую функцию, проходящую через все интервальные измерения [5].

Пусть дана $\mathbf{A} = \|\mathbf{a}_{ij}\|$ – интервальная матрица, размерностью $m \times n$, где элементы $\mathbf{a}_{ij} = [a_{ij} - \varepsilon, a_{ij} + \varepsilon]$ матрицы \mathbf{A} представляют собой интервальные значения измеренных параметров системы, где a_{ij} – значение измерения; j -е столбцы соответствуют параметру ($j = \overline{1, n}$); i -ые строки – значения, полученные при i -м измерении ($i = \overline{1, m}$); ε – ошибка измерения.

Задача состоит в кластеризации матрицы \mathbf{A} , т.е. в отыскании подсистем $\widehat{\Sigma}$ системы Σ .

Для моделирования необходима разработка алгоритма первоначальной обработки данных, полученных в результате измерений. При исследованиях количество измеряемых параметров систем может варьироваться от десятков до сотен, причем степень воздействия каждого из них на систему Σ в начальный момент не ясна. Приступать к работе по непосредственному определению модели в этих условиях нельзя, так как может оказаться, что некоторые из измеряемых параметров мало информативны или вообще не воздействуют и не участвуют в системе Σ . Также в данных могут обнаруживаться пропуски и некорректно занесенная информация, далеко отстоящая от реальных измеряемых значений параметров.

Предложен следующий алгоритм предобработки.

1. *Заполнение пропусков в данных.* Пустые значения \mathbf{a}_{ij} заполняются величиной \mathbf{a}_j^* среднего значения интервала по измеряемому параметру, рассчитываемого по формуле

$$\mathbf{a}_j^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [a_{ij}, \overline{a_{ij}}].$$

2. *Нахождение и исправление ошибочных значений параметров.* Требования практических методов управления качеством определяет, чтобы измеряемые параметры не отклонялись от среднего значения интервала больше, чем на величину

$$\sigma = 3 \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\max(|\underline{\mathbf{a}}_{ij} - \underline{\mathbf{a}}_j^*|, |\overline{\mathbf{a}}_{ij} - \overline{\mathbf{a}}_j^*|))^2}.$$

Если расстояние от интервала \mathbf{a}_{ij} до \mathbf{a}_j^* больше, чем σ , то его заменяем на значение среднего интервала \mathbf{a}_j^* .

3. *Отброс малоинформативных параметров.* Процедура нахождения и исправления ошибочных значений измеряемых параметров также дает преимущество при исключении параметров, количество пропусков в которых велико. При этом получаем интервальный вектор с одинаковыми значениями, не изменяющимися по всей совокупности измерений и, следовательно, не влияющий на остальные параметры. Такие параметры могут изначально содержаться в исходной матрице \mathbf{A} . Все они являются неинформативными, поэтому удаляются из \mathbf{A} .

На следующем этапе отброса малоинформативных параметров осуществляем поиск хорошо обусловленной матрицы \mathbf{A} .

Предложен следующий алгоритм.

1. *Рассчитать точечную матрицу* $A = \|a_{ij}\|$, размерностью $m \times n$, где $a_{ij} = \text{mid } \mathbf{a}_{ij}$, $\mathbf{A} = \|\mathbf{a}_{ij}\|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

2. *Рассчитать матрицу Грама* $G = \|g_{kl}\|$ для точечной системы $A = \|a_{ij}\|$, где $k, l = \overline{1, n}$; n – количество столбцов матрицы A ; m – количество строк матрицы A ;

$$g_{kl} = \frac{m \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{il} - \sum_{i=1}^m a_{ik} \sum_{i=1}^m a_{il}}{\sqrt{\left(m \sum_{i=1}^m (a_{ik})^2 - \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} \right)^2 \right) \left(m \sum_{i=1}^m (a_{il})^2 - \left(\sum_{i=1}^m a_{il} \right)^2 \right)}}.$$

3. *Проверить последовательно все миноры матрицы Грама.* Если минор равен 0, то в совокупности векторов содержатся линейно-зависимые. Поэтому удаляем последний вектор из дальнейшего рассмотрения из \mathbf{A} , как малоинформативный и получаем G без этого вектора. Возвращаемся к предыдущему шагу, размерность минора не увеличиваем.

В дальнейших исследованиях используется полученная невырожденная матрица Грама G в качестве матрицы мер взаимодействия между измеряемыми параметрами для выявления структуры системы.

Разработан алгоритм кластеризации данных с целью моделирования системных связей. В случае кластеризации матрицы измеряемых параметров систем необходимо получить некоторую структуру в интервальных данных и установить наличие взаимосвязей в подсистемах. В каждый кластер должны попасть параметры, имеющие сходство. Сходство или различие между классифицируемыми параметрами устанавливается в зависимости от выбранной количественной оценки. От выбора меры сходства для классифицируемых параметров зависит состав и количество формируемых кластеров, а также степень сходства параметров внутри кластеров.

Разработан следующий алгоритм кластерного анализа по интервальной матрице, содержащей данные измерений.

1. *Выбор меры сходства между измеряемыми параметрами.* Пусть \mathbf{a}_k и \mathbf{a}_l – интервальные вектора из матрицы \mathbf{A} , где $k, l = \overline{1, n}$; n – количество столбцов матрицы A . Предложены следующие количественные оценки:

– *расстояние между измеряемыми параметрами* $\text{dist}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l) = \max \{ |\underline{\mathbf{a}}_k - \underline{\mathbf{a}}_l|, |\overline{\mathbf{a}}_k - \overline{\mathbf{a}}_l| \}$, определяемое с помощью метрики $\text{dist}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l) = \max \{ \|\underline{\mathbf{a}}_k - \underline{\mathbf{a}}_l\|, \|\overline{\mathbf{a}}_k - \overline{\mathbf{a}}_l\| \}$, где $\|\cdot\|$ – векторная норма на R_n .

– *коэффициент* $k_{\text{line}}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l)$, характеризующий степень линейной зависимости между измеряемыми параметрами; где $k_{\text{line}}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l)$ рассчитывается по формуле, аналогичной для элемента матрицы Грама g_{kl} .

2. *Расчет матрицы взаимных мер сходств между измеряемыми параметрами.* При этом если выбранная мера сходства есть $k_{\text{line}}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l)$, то используем не вырожденную матрицу Грама из алгоритма предобработки данных.

3. *Кластеризация измеряемых параметров на основе рассчитанных матриц взаимных мер сходств.* Применяем классические методы кластеризации, такие как метод одиночной связи, метод полных связей, метод средней связи и другие.

На выходе алгоритма кластеризации имеем дерево подсистем, описанных интервальными матрицами $S_z = \|s_{ij}\|$, где $z = \overline{1, k}$, k – количество подсистем, j -ые столбцы соответствуют каждому отдельно взятому параметру подсистемы ($j = \overline{1, n}$), а i -ые строки содержат конкретные значения параметров подсистем, полученные при i -ом измерении ($i = \overline{1, m}$).

Для определения линейной зависимости между измеряемыми параметрами подсистем $\hat{\Sigma}$, представим матрицу-кластер S_z в следующем виде. Пусть y – выход подсистемы, представляющий собой m -мерный столбец матрицы S_z ; матрица линейного отображения A , образована путем исключения из S_z выбранного столбца. Тогда, имеем интервальную систему:

$$Ax = y.$$

Для получения x используются методы аппроксимации допустимого множества решений интервальной системы линейных уравнений, предложенные С.П. Шарым и В.В. Шайдуровым.

В случае, если размерность интервальной линейной системы уравнений велика, прямое описание её допустимого множества решений, при котором выписываются все ограничивающие гиперплоскости, становится трудоёмким. По этой причине используются внутренние оценки для допустимого множества решений или, что равносильно, его некоторая аппроксимация.

При невозможности получения линейного интервального отображения разработана и реализована методика получения зависимостей между измеряемыми параметрами на основе нейросетевой аппроксимации функций.

Апробация разработанных методик производилась для системы управления качеством изготовления лопастей ЛБВ1.030.000.000 из материала «Изолан»-7ПМ/4:Пенопласт на Научно-производственном предприятии "Аэросила" (Московская обл., г. Ступино). Исходными данными для оценки качества являлись измерение 24 лопастей по установленным значимым 14 параметрам: x_1 – угол армирования горбушки, x_2 – угол армирования рабочей поверхности, x_3 – высота, x_4 – увод, x_5 – толщина монослоя на рабочей поверхности, x_6 – собственная частота, x_7 – диаметр обоймы после наклейки, x_8 – угол ϕ , x_9 – масса, x_{10} – влажность в производственном помещении, x_{11} – время пропитки, x_{12} – время термообработки, x_{13} – температура в производственном помещении, x_{14} – усадка.

Применение разработанных методов и алгоритмов выявило пять подсистем, в двух из них допустимого множества решений, и соответственно, интервального линейного отображения, не существует.

Первое найденное отображение имеет вид:

$$x_5 = [-0.3356, -0.3354]x_9 + [0.0399, 0.0401]x_7,$$

при этом основные характеристики модели: значение функционала в максимуме 0.0157, среднеквадратичное отклонение модели от измеряемых данных 0.0394.

Второе отображение –

$$x_6 = [0.7407, 0.7463]x_{14} + [0.2052, 0.2108]x_3 + [0.0487, 0.0543]x_8,$$

значение функционала в максимуме 0.8734, среднеквадратичное отклонение модели от измеряемых данных 0.4071.

Третье отображение –

$$x_4 = [0.0136, 0.0144]x_{11} + [-0.0799, -0.0791]x_{12} + [-0.0894, -0.886]x_{13},$$

значение функционала в максимуме 0.2328, среднеквадратичное отклонение модели от измеряемых данных 1.8034.

На основе полученных зависимостей экспертной системой управлением качеством предприятия были определены рекомендации по управлению и оценки качества изготовления лопастей. Таким образом, результаты внедрения подтвердили эффективность предложенных методик и алгоритмов.

Литература

1. ШАРЫЙ С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение // Дис... докт. физ.-мат. наук. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2000.
2. АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987.
3. ШОКИН Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981.
4. ЛЯПИН Д.С. Анализ интервальной технологической информации авиастроительного предприятия // Математическое моделирование и управление в сложных системах: Сб науч. тр. Вып. 8. – М.: МГАПИ, 2005. – С. 49–53.
5. ВОЩИНИН А.П., СОТИРОВ Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.–София: Изд-во МЭИ-Техника, 1989.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДИФИКАЦИИ ПРИМЕРА БАБУШКИ–ВИТАСЕКА–ПРАГЕРА

Г.Г. Меньшиков

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: GregoryG.Menshikov@inbox.spbu.ru

Аннотация

Как известно, примером Бабушки-Витасека-Прагера задаётся неустойчивый вычислительный процесс точечного типа. Найдено, что неустойчивость может сохраниться при переходе к интервальной манере вычислений. Однако автором показано, что в интервально-локализирующем варианте возможно стабилизирующее усовершенствование примера за счет применения пересечений локализаторов. В данной работе описывается ещё одно усовершенствование примера.

Ключевые слова: локализующие вычисления, интервальные вычисления, локализатор, интервал, отрезок, монотонность по включению, Бабушка, Витасек, Прагер

Keywords: localizing computing, interval computing, localizator, interval, segment, inclusion monotonicity, Babuska, Vitasek, Prager

1. Введение

В известной книге [1] рассмотрен пример нахождения чисел

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Ясно, что $I_0 = 1 - e^{-1}$. Выразим I_n через I_{n-1} . Интегрируя по частям, получаем рекуррентное равенство

$$I_n = 1 - nI_{n-1}. \quad (2)$$

Если проводить вычисление I_1, I_2, \dots по формуле (2) на реальном компьютере, т.е. с учетом округлений, то уже при n порядка 15–30 появляются заведомо неправдоподобные (отрицательные) значения I_n (см. столбцы 4, 6 табл. 1).

Таблица 1. Результаты основной разновидности примера БВП

n	I_n	n	I_n	n	I_n
0	.632 1205	7	.112 4296	14	-597. 5973
1	.367 8795	8	.100 563	15	119 6496
2	.207 2786	9	9.493 256 E-02	16	-194 38.3
3	.170 8932	10	5.067 444	17	325 4453
4	.145 534	11	.442 5812	18	-485 8015 E+07
5	.126 7958	12	-4.310 974	19	1.113 023 E+09
6	.112 4296	13	57.042 16 E-05	20	-2.226 046 E+10

Можно показать [2], что вызывается эта неприятность вычитанием близких значений.

С другой стороны, ясно, что итерационный процесс (2) неустойчив.

Из первого и третьего столбцов табл. 1 в [4] видно, что переход к удлиненной мантиссе не спасает от катастрофы. Она лишь слегка откладывается.

2. Интервально-локализирующее исполнение примера БВП

Повторим тот же пример, на этот раз в интервально-локализирующей манере. Следуя второй теореме о композициях [2], запишем правую часть рекуррентного соотношения в отрезках-локализаторах. Получим включение

$$I_n \in 1 - n [I_{n-1}] \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

В нем под $[I_{n-1}]$ имеется в виду находимый машиной интервал-локализатор для I_{n-1} .

Так как правая часть по упомянутой второй теореме является локализатором для I_n , то можно ее так и обозначить: $[I_n]$. Тогда, принимая во внимание мажоризацию (т.е. вспомогательное расширение локализатора при выполнении стандартных операций, связанных с появлением погрешностей), запишем дальнейшую разновидность соотношения (2):

$$[I_n] = 1 - n [I_{n-1}] \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (4)$$

Соответствующая программа на языке интервального ассемблера [2] оформлена в [3], табл. 212.1. Результаты же нескольких шагов интервального расчета приведены в столбцах 2–3 таблицы 1 в [4].

Неустойчивость процесса (2) переносится, естественно, на процесс (4). Именно, при возрастании n ширина локализатора растет, причем с ускорением. Наконец, уже при $n = 9$ можно констатировать, что дальнейший расчет беспредметен из-за резкого падения точности.

Итак, интервально-локализирующий расчет позволяет все время контролировать точность (чего нет при обычных, точечных вычислениях), поскольку он обладает свойством доказательности. Но ему может быть свойственна ненормально большая ширина локализатора, а значит, низкий интервальный критерий качества.

Отметим, что с позиций устойчивости численных расчётов иначе не могло и быть.

3. Локализирующее усовершенствование примера БВП

Наконец, в [4] сделан решительный прорыв — использованы те преимущества, какие даёт пересечение разных локализаторов одного и того же числа или множества. Попутно рассмотрено, как может уточнить расчеты локализация, полученная аналитически. Традиционные вычисления этой возможности не имеют.

С одной стороны, по интервальному аналогу (4) рекуррентной формулы (2) только что вычислялись локализаторы и подтверждена вычислительная неустойчивость данного процесса.

С другой стороны, теоретическим путем в [2] доказана ограниченность $\{I_n\}$ — получено неравенство $1/(n+1) < I_n < 1/n$.

Соответствующий отрезок — не что иное как еще одна система локализаторов:

$$[I_n]' = [1/(n+2), 1/(n+1)] \ni I_n.$$

С их помощью можно "унять" катастрофический рост ширины.

В самом деле, пересечение интервальных локализаторов есть интервальный локализатор:

$$I_n \in (1 - n [I_{n-1}]) \cap [I_n]'. \quad (5)$$

Положим

$$\begin{aligned} [I_0]^* &= [I_0], \\ [I_n]^* &= (1 - n [I_{n-1}]^*) \cap [I_n]' \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Как видно (в идеальной модели интервальных вычислений [3]),

$$w([I_n]^*) \leq w\left(\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что $w(I_n) \rightarrow 0$.

Посредством этой усовершенствованной интервальной алгоритмики *прямого хода* (табл. 2) проведем ещё одну серию численных экспериментов.

Следуя этой программе, проделаем вычисления при тех же n , что ранее.

Результаты содержатся в 1, 4, 5 столбцах таблицы 1 в [4]. На этот раз ширина не только не возрастает, но, более того, имеет тенденцию к относительно сколь угодно малым значениям.

Более того, относительная ширина также является бесконечно малой:

$$\frac{w([I_n]^*)}{|I_n|} \leq \frac{w([I_n]^*)}{(n+1)} \leq \frac{1}{(n+2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (8)$$

Таким образом, результаты $[I_n]^*$ становятся всё более точными.

Итак, усовершенствование интервального подхода позволяет экспериментально исследовать точность и управлять ею.

Заметим, что программа табл. 2 написана на языке интервального ассемблера, в основу которого положен QBasic [2]. Заметим, что в таблицах 2 и 3 аббревиатура G обозначает оператор GOSUB.

Таблица 2. Первая модификация примера БВП

QB-строки	Комментарии
1000 CLS	Очистка экрана
1200 G 2	Инициализация
1210 D=0	Зануление n
1220 A=-1: G 86	$-1 \Rightarrow$ пара 0
1230 A=0: G 16	$e^{-1} \Rightarrow$ пара 0
1240 G 9	$e^{-1} \Rightarrow$ пара 0
1250 A=1: G 80	$1 - e^{-1} \Rightarrow$ пара 0
1260 PRINT "n="; D, " [I _n]* = ";	Печать: n
1270 A=0: G 50.1	Печать: $[I_n]^*$
1275 A=1: G 40	$[I_n]^* \Rightarrow$ пара 1
1280 D=D+1	Увеличение n на 1
1290 A=-D: G 82	$-(n+1) [I_n]^* \Rightarrow$ пара 0
1300 A=1: G 80	$[I_{n+1}]^* = 1 - (n+1) [I_n]^* \Rightarrow$ пара 0
1310 A=1: G 40	$1 - (n+1) [I_n]^* \Rightarrow$ пара 1
1320 $K(0) = \frac{1}{D+2} : L(0) = \frac{1}{D+1} : G 7$	$[I_n]' = \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right] \Rightarrow$ пара 0
1380 A=1: G 34	$[I_{n+1}]^* = [I_{n+1}]^* \cap [I_{n+1}]' \Rightarrow$ пара 0
1390 GOTO 1260	Переход к строке 1260

4. Ещё одна модификация, основанная на свойствах пересечения

Предположим, что получаемые на "прямом ходе" значения $[I_n]^*$ заносятся в память. Именно, задаёмся перед процессом (2) некоторым натуральным числом $n(max)$. Пусть сначала n варьируется на множестве $0 \leq n \leq n(max)$.

Таблица 3. Вторая модификация примера БВП

QB-строки	Комментарии
1000 CLS	Очистка экрана
1200 INPUT "n(max)="; DA; G 2	Ввод $n(max)$, инициализация
1210 D=0	Зануление n
1220 A=-1: G 86	$-1 \Rightarrow$ пара 0
1230 A=0: G 16	$e^{-1} \Rightarrow$ пара 0
1240 G 9	$e^{-1} \Rightarrow$ пара 0
1250 A=1: G 80	$1 - e^{-1} \Rightarrow$ пара 0
1255 A=5: G 40	\Rightarrow пара 5
1260 PRINT "n="; D, " [I _n]* (пр. ход) = ";	Печать: n
1270 A=0: G 50.1	Печать: $[I_n]^*$
1280 D=D+1	Увеличение n на 1
1290 A=-D: G 82	$-(n+1) [I_n]^* \Rightarrow$ пара 0
1300 A=1: G 80	$[I_{n+1}]^* = 1 - (n+1) [I_n]^* \Rightarrow$ пара 0
1310 A=1: G 40	$[I_{n+1}]^* \Rightarrow$ пара 1
1320 $K(0)=1/(D+2): L(0)=1/(D+1): G 7$	$[I_n]' = \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right] \Rightarrow$ пара 0
1380 A=1: G 34	$(\text{Пара } 1) \cap [I_n]' \Rightarrow$ пара 0
1385 A=D+5: G 60	Пара $n+5 \Rightarrow$ пара 0
1390 GOTO 1260	Переход к строке 1260
1400 A=D+4: G 60	Пара $n+4 \Rightarrow$ пара 0
1402 G 9	Перемена знака в паре 0
1404 A=1: G 80	$1 + \text{пара } 0 \Rightarrow$ пара 0
1406 A=D-1: G 83	$(\text{Пара } 0)/(n-1) \Rightarrow$ пара 0
1408 A=G+3: G 34	$(\text{Пара } 0) \cap (\text{пара } n=3) \Rightarrow$ пара 0
1410 PRINT "n="; D-1; "[I _n]**(об. ход) =";	Печать на экране
1420 A=0: G 50.1	(продолжение)
1430 D=D-1	Замена n на $n-1$
1440 IF D>-1 THEN 1400 ELSE END	Переход к 1400, если $n > -1$, и конец, если иначе

Заносим $[I_0]^* = [1 - e^{-1}]$ в 5-ю пару, $[I_1]^*$ в 6-ю пару, ..., $[I_{n(max)}]^*$ в $n(max) + 5$ -ю пару.

После того, как n достигнет значения $n(max)$, начинается обратный ход, определяемый формулой (9) при $n = n(max)$, $n(max) - 1$, $n(max) - 2$, ..., 1

$$[I_{n-1}] = \frac{1 - [I_n]}{n}. \quad (9)$$

Более того, обозначим

$$[I_{n-1}]^{**} = \frac{[1 - I_n]^{**}}{n} \cap [I_{n-1}]^*. \quad (10)$$

Таким образом, при получении каждого $[I_{n-1}]^{**}$ производится пересечение с ранее запасённым на прямом ходе $[I_{n-1}]^*$.

Результаты второй модификации примере БВП см. в табл. 4 для $n(max)=15$. Прямой ход (получение $[I_n]^*$) демонстрируется столбцами 1–5. Обратный ход (получение $[I_n]^{**}$) — столбцами 6–9. Стрелки показывают направление изменения n .

Отметим совпадение результатов при $0 \leq n \leq 5$ в то время, как $w([I_n]^{**}0) < w([I_n]^*0)$ при $6 \leq n \leq 13$.

Таблица 4. Результаты второй модификации примера БВП

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	↓	$[I_n]^*$	$\overline{[I_n]}^*$	$w([I_n]^*)$	$[I_n]^{**}$	$\overline{[I_n]}^{**}$	$w([I_n]^{**})$	↑
0	↓	.632 1203	.632 1208	4.77E-07	.632 1203	.632 1208	4.77E-07	↑
1	↓	.367 8789	.367 88	4.01E-07	.367 8789	.367 88	1.01E-06	↑
2	↓	.264 2398	.264 2424	2.56E-07	.264 2398	.264 2424	2.56E-06	↑
3	↓	.207 2724	.207 281	8.52E-07	.207 2724	.207 281	8.52E-06	↑
4	↓	.170 8758	.170 9106	3.48E-05	.170 8758	.170 9106	3.48E-05	↑
5	↓	.145 4466	.145 6215	1.75E-04	.145 4466	.145 6215	1.75E-04	↑
6	↓	.126 2766	.127 3209	1.05E-03	.126 2706	.126 9842	7.14-04	↑
7	↓	.111 1111	.116 1059	4.99E-03	.111 1111	.112 5001	1.39E-03	↑
8	↓	9.99 9999E-02	.111 1111	1.11E-02	9.99 9999E-02	.101 0102	1.01E-03	↑
9	↓	9.09 0909E-02	.1	9.09E-03	9.09 0909E-02	9.10 9971E-02	7.58E-04	↑
10	↓	8.33 3333E-02	.090 9091	7.58E-03	8.33 3333E-02	8.39 1612E-02	5.53E-04	↑
11	↓	7.69 2307E-02	8.33 3334E-02	6.41E-03	7.69 2307E-02	7.73 8099E-02	4.58E-04	↑
12	↓	7.14 2857E-02	7.69 2309E-02	5.49E-03	7.14 2857E-02	.0717 949	3.66E-04	↑
13	↓	6.66 6666E-02	7.14 2857E-02	7.76E-03	6.66 6666E-02	6.66 6430E-02	2.98E-06	↑
14	↓	6.24 9999E-02	6.66 6668E-02	4.17E-03	—	—	—	↑

5. Литература

1. БАБУШКА И., ВИТАСЕК Э., ПРАГЕР М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. – М.; 1969. – 368 с.
2. МЕНЬШИКОВ Г.Г. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Вып. 1. Введение в интервально-локализирующую организацию вычислений. – СПб. – 2003. – 89 с.
3. МЕНЬШИКОВ Г.Г. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Вып. 2. Задачи композиционного расчёта и проблема грубости их интервально-локализирующего решения. – СПб. – 2003. – 59 с.
4. MEN'SHIKOV G.G. Example of Babuška, Práger and Vitásek in Interval Computations // Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics ICCMM-2004. Workshops / Eds.: Yu. I. Shokin et al. – Novosibirsk: ICM&MG Publisher. – 2004. – P. 285–288.

ПОСТАНОВКА ЛОКАЛИЗУЮЩИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Г.Г. Меньшиков, В.Б. Орлов

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: GregoryG.Menshikov@pobox.spbu.ru

Аннотация

Обсуждаются следующие вопросы: выигрыш, даваемый локализуемыми вычислениями, вклад русских и советских математиков, в том числе Л.В. Канторовича, роль В.И. Зубова в создании этого научного направления на факультете ПМ-ПУ, создание курса «Локализуемые вычисления» посредством реконструкции курса «Методов вычислений», создание учебных пособий и лабораторных работ, нынешнее положение курса ЛВ, перспективы этого направления в СПб Университете.

Ключевые слова: локализуемые вычисления, интервальные вычисления, локализатор, интервал, отрезок, монотонность по включению

Keywords: localizing computing, interval computing, localizator, interval, segment, inclusion monotonicity

1. Введение

Сложность, свойственная современным научно-техническим расчётам, делает сомнительными их результаты, выполненные в традиционной, «классической» манере, когда хаотичность погрешности округления представляется неизбежной, а получение расчётных формул проводится по методике, описанной в книге И.П. Мысовских [1] на с. 434 и основанной на пренебрежении остаточным членом. Рост результирующей погрешности вследствие её трансформации, а главное, её неконтролируемость делают получаемые численные результаты совершенно искажёнными. Таков пример Бабушки-Витасека-Прагера в [2, с. 13].

К счастью, имеется альтернативный подход к организации вычислений, *локализуемый*, который отличается от традиционного тем, что для искомого числового результата ищутся в машинных числах достоверные верхняя и нижняя границы на данном множестве X . Эти границы образуют для искомого числа (множества чисел) отрезок, называемый *локализатором*. Его длина является мажорантой абсолютной погрешности с учётом всевозможных причин её возникновения. Поскольку она выводится на экран, отпадает дорогостоящее исследование погрешности после проведения рабочих вычислений, свойственное традиционному выполнению научных расчётов. Нетрудно заметить связь с задачами оптимизации.

Этот подход намечен в работах В.М. Брадиса [напр. 3, 4], развит в статье академика Л.В. Канторовича [5] и получил широкую известность после появления книги Р.Э. Мура [6]. На русском языке первая книга по *локализуемым вычислениям* издана академиком Ю.И. Шокиным [7]. Разновидности этого подхода намечены в работах чл.-корр. РАН Ю.И. Матияевича [8] и А.С. Нариньяни [9], а также в учебнике академика Н.С. Бахвалова [10], с. 528.

Канторович высказал этот подход в 1962, но никто тогда не поддержал его. Причины: слабая техническая база, недостаточно развитые математические основы (книге Мура ещё предстояло выйти), перемена самим Канторовичем профиля научной работы и его отъезд из Ленинграда, где он прежде жил и работал. Наш Университет лишился научного приоритета.

Вначале, с появлением книги Мура казалось, что все проблемы решаются интервальным арифметическим расчётом. Отсюда — термин «интервальные вычисления».

Со временем стало ясно, что муровская интервальная арифметика сама по себе не только не решает всех трудностей, но иногда является источником нежелательного расширения получаемого локализатора. К счастью, нашлось немало других приёмов создания локализаторов. В частности, использование того факта, что пересечение интервальных локализаторов — всегда интервальный же локализатор.

Последний приём замечателен ещё и потому, что пустое пересечение свидетельствует о наличии принципиальных ошибок при подготовке расчётов.

Интервализация сообщает вычислительной работе новое качество: информированность о достигнутой точности. В определённых случаях решаются задачи существования и единственности математического объекта. Математик-вычислитель, перейдя на расчёты в локализуемой манере, как бы снимает со своих глаз повязку, скрывавшую состояние дел с метрологией вычислений.

Мы думаем, что интервально-локализирующие расчёты — это самое яркое достижение вычислительной науки и техники со времени появления компьютеров.

2. Создание курса «Локализирующие вычисления» реконструкцией «Методов вычислений»

Задача локализирующей реконструкции курса «Методы вычислений» была поставлена перед нами в 1993 тогдашним председателем Методической комиссией факультета чл.-корр. РАН профессором В.И. Зубовым (скончался в 2000). Зубов на основании своего опыта понимал, что создание нового научного направления в Университете возможно только при активнейшем участии студентов. Он принял во внимание также и то, что у нас была к тому времени с 1987 некоторая практика чтения материала по интервальным вычислениям сначала в составе общего курса «Введение в специальность», а затем ряда спецкурсов и спецдисциплин ЦИПС. В 1990 в одной из студенческих групп почти всеми студентками (студенты отбывали воинскую повинность) успешно защищены дипломные работы по интервальной тематике.

Почему именно Зубов приветствовал наши попытки? По той причине, что его научному направлению — теории управления присущи задачи типа интервальной локализации. Его сотрудникам В.Л. Харитонову и Д.А. Овсянникову принадлежат незаурядные результаты по таким задачам. Зубов постоянно следил за нашими научными и методическими достижениями.

Результаты нашей работы показали, прежде всего, что поставленная Зубовым задача реальна. Методическое освоение этого научного направления — вещь своеобразная и непростая. Но, как оказалось, — вполне доступная как студентам, так и, в меньшей степени, преподавателям.

Итогом реконструкции курса МВ явилась следующая структура.

Пролог

Вводная глава: метрология традиционных вычислений.

Глава 1. Введение в интервально-локализирующую организацию вычислений.

Глава 2. Решение элементарных задач.

Глава 3. Проблема грубости композиционного интервального расчёта.

Глава 4. Интервализация приближённых формул.

Глава 5. Численное суммирование рядов.

Глава 6. Введение в аппроксимацию функций.

Глава 7. Исследование функций одной переменной.

Глава 8. Дифференцирование функций.

Глава 9. Локализирующее вычисление интегралов.

Глава 10. Аппроксимация функций и верификация приближений.

Глава 11. Итерационные процессы и системы числовых уравнений.

Глава 12. Элементы локализирующего интегрирования дифференциальных уравнений.

Глава 13. Локализирующее интегрирование дифференциальных уравнений на основе формулы Коши-Дюамеля.

Глава 14. Аналитическая и алгебраическая поддержка локализирующего интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава 15. Интервально-аналитические дополнения.

Работа по улучшению учебного курса продолжается. В конечном счёте, она сводится к созданию и совершенствованию учебных пособий.

3. Создание учебных пособий

По начитанному материалу составлялись и издавались учебные пособия — конспекты лекций. Тираж определялся численностью потока, который слушал очередной цикл лекций по «Методам вычислений». В процессе общения со студентами обнаруживались и исправлялись опечатки. Благодаря такой организации дела, студентами лучше усваивался материал, а, с другой стороны, последующие издания оказывались более чистыми.

Первоначально наши конспекты издавались под общим названием «Интервальный анализ и методы вычислений». С 2003 года мы перешли на термин *Локализирующие вычисления*.

4. Создание лабораторных работ

Ещё когда наше направление было оснащено только специальными курсами, мы разрабатывали учебные лабораторные работы, опираясь на ту технику, которой располагали. К настоящему времени разработано и испытано на студентах 11 так называемых домашних контрольных работ. Тематика их отражена в учебной программе нашего курса (кстати, единственной из сборника [13], оснащённой практически-лабораторной частью):

1. Базовая интервальная программная система и локализирующие вычисления элементарных функций.
2. Локализирующее суммирование числового ряда.
3. Суммирование по Эйлеру медленно сходящихся рядов.
4. Исследование функции с помощью программной системы «Знак».
5. Локализирующее вычисление определённого интеграла.
6. Локализирующее вычисление несобственного интеграла.
7. Исследование интеграла с переменным верхним пределом.
8. Исследование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
9. Раздельный режим локализирующего интегрирования дифф. уравнения.
10. Локализирующее интегрирование линейной системы дифференциальных уравнений.
11. Локализирующее интегрирование нелинейной системы дифференциальных уравнений.
12. Абсолютная аппроксимация с применением локализирующих расчётов.
13. Относительная аппроксимация с применением локализирующих расчётов.
14. Решение систем числовых уравнений.
15. Решение алгебраических уравнений в комплексных числах.

СOLIDНАЯ подготовка, получаемая студентами в курсе «Технология программирования», позволяет им создавать программы достаточно высокого качества.

Последовательность самостоятельных работ подобрана так, чтобы в каждой последующей работе студент мог использовать результаты (и части программ) предыдущих работ. Для выполнения этого требования программа должна иметь блочную структуру: основные операции (метод вычисления, программы ввода, вывода и т.д.) должны быть оформлены в виде отдельных блоков (подпрограммы, модули), к которым можно обращаться как изнутри программы, так и извне (из других программ).

Таким образом, студент создаёт собственную библиотеку подпрограмм, пригодных к использованию в дальнейшей работе. Заменяя в созданной им программе один или несколько блоков, характеризующих исследуемую функцию, студент может немедленно получить результат в интересующем его случае.

Вычислительная работа (создание программы) не является самоцелью. Предварительно студент должен провести аналитическое исследование. Если речь идёт о суммировании ряда или вычислении несобственного интеграла, требуется доказать сходимость ряда или интеграла. Кроме того, необходимо получить формулы, выражающие границы интервала, содержащего остаток. Только после этого студент приступает к составлению программы и вычислениям.

Таким образом, каждая работа студента, выполненная в лаборатории, является законченным научным исследованием (пусть и простейших задач).

Характерен следующий факт, сообщённый нам нашими студентами. В условиях студенческого общежития столь необычная вычислительная работа, как локализирующая, не могла не привлечь внимания студентов со смежных факультетов: физического и математико-механического. Не долго думая, эти студенты охотно брали темы домашних контрольных у наших и использовали наш материал в качестве своих курсовых работ. Мы — польщены.

5. Курс «Локализирующие вычисления» после кончины В.И. Зубова

Мы ощущали постоянную заботу при жизни Владимира Ивановича. Но после его смерти в апреле 2002 года новая Методическая комиссия решила перевести созданный нами курс в разряд курсов по выбору студентов. Поэтому со второй половины 2002 года мы стали встречаться с новыми трудностями.

Прежде всего — это проблема привлекательности для потенциальных слушателей. Мы нашли её решение в наличии учебных пособий. Поэтому частично была решена извечная проблема посещаемости. Мы сразу же посылаем студентов раздобыть изданные конспекты лекций. Естественно, на

студентов возлагается необходимость самостоятельной подготовки. На лекциях же мы излагаем методический материал: ключевые вопросы, план самостоятельной подготовки, замеченные опечатки, вещи, изложение которых в конспекте оказалось недостаточным. Таким образом, стал реальностью полузаочный режим учебной работы. Для нынешних суровых условий жизни это вполне актуально. Приходится заботиться и о рекламе.

6. Перспективы ЛВ в Университете

Инициатива В.И. Зубова нацеливает нас и на другую суперзадачу — ликвидацию практически повального невежества в области локализующих вычислений.

Дело в том, что научно-техническая интеллигенция не только не имеет представления, но, хуже того, в массе не понимает толком, зачем нужна точность вычислений, даже традиционных, и как она достигается. Метрологическая культура технических расчётов, например, в области САПР, увы, практически отсутствует. Подготовка и переподготовка кадров, которым предстоит исправлять это положение, — наша обязанность, факультета ПМ-ПУ.

В течение 15 лет это научное направление было одним из немногих положительных отличий научной тематики нашего факультета от математико-механического.

Конечно, ликвидацию этого невежества надо было начинать с себя, с факультета ПМ-ПУ. Несмотря на наши предложения, В.И. Зубов не успел сделать это при своей жизни. Решением же новой Методической комиссии ликвидация невежества заменена переводом нашего передового курса в более низкий класс.

Между тем, свидетельством роста интереса к нашему научному направлению со стороны мировой математической общественности служит приглашение нас на ряд международных конференций по данному направлению. Например, на всемирную конференцию «SCAN 2000 – INTERVAL 2000», проведённую Институтом Прикладной Математики в Карлсруэ (ФРГ).

Поэтому имеет смысл поставить вопрос об организации Университетского Учебно-Научного Центра ЛВ на базе нашей кафедры математической теории микропроцессорных систем управления, которой уже более 20 лет руководит один из авторов. Этот Центр мог бы обслуживать три факультета: физический, математико-механический и прикладной математики – процессов управления. Ближайшая цель Центра — ликвидация невежества в области компьютерной метрологии.

7. Литература

1. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений: учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1998. — 472 с.
2. БАБУШКА И., ВИТАСЕК Э., ПРАГЕР М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Перев. с англ. — М.: Мир, 1969. — 368 с.
3. БРАДИС В.М. Приближённые вычисления в школьном курсе математики // Сб. «Вопросы математики и её преподавания» под ред. И. Чистякова и Н. Соловьёва. — М.: ГИЗ, 1923. — С. 87–117.
4. БРАДИС В.М. Устный и письменный счёт. Вспомогательные средства вычислений // Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. — М.: Учпедгиз, 1951. — С. 357–441.
5. КАНТОРОВИЧ Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701–709.
6. MOORE R.E. Interval analysis. — Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1966. — 190 p.
7. ШОКИН Ю.И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
8. МАТИЯСЕВИЧ Ю.В. Вещественные числа и ЭВМ // Кибернетика и вычислительная техника. — 1986. — № 2. — С. 104–133.
9. НАРИНЬЯНИ А.С. Недоопределённость в системе представления и обработки знаний // Техническая кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 3–28.
10. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). — М.: Наука, 1975.
11. МЕНЬШИКОВ Г.Г. Интервальный анализ и методы вычислений: Конспект лекций. В 1996–2001 гг. издано 12 выпусков. Названия перечислены в разделе 2 настоящего доклада. — СПб: ООП НИИХ СПбГУ.
12. МЕНЬШИКОВ Г.Г. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Издано 4 выпуска. — СПб: Отдел оперативной полиграфии НИИ Химии СПбГУ, 2003.
13. МЕНЬШИКОВ Г.Г., ОРЛОВ В.Б. Методы вычислений. Программа основного курса // Программы общих и специальных курсов факультета прикладной математики – процессов управления. — СПб: НИИ Химии СПбГУ, 2001. — С. 84–90.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Ю.Л. Меньшиков

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина
E-mail: du-mmff@ff.dsu.dp.ua

Аннотация

Рассматривается задача определения правой части (неоднородности) обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами по результатам обработки частного решения этого уравнения, которое задано в виде графика с некоторой априори заданной погрешностью в пространстве непрерывных функций. Вводится понятие неконтролируемой погрешности, наличие которой качественно искажает решение обратной задачи. Предлагается несколько методов устранения негативного влияния неконтролируемой погрешности на приближенное решение. Выполнен тестовый расчет.

Ключевые слова: идентификация воздействия, неконтролируемая погрешность, фильтрация, полиномы Лежандра, регуляризация

Keywords: impact identification, uncontrollable inaccuracy, filtration, Legendre polynomials, regularization

1. Введение

При экспериментальных измерениях физических величин неизбежно присутствует погрешность измерений. Она складывается из погрешности измерительной аппаратуры, шумов, погрешности средств визуализации и т.д. Величину этой погрешности можно оценить по техническим показателям измерительной аппаратуры и она, как правило, не превосходит 5–10 процентов. Во многих задачах экспериментальные измерения берутся как исходные данные для последующих расчетов с помощью математических моделей. К таким задачам, например, относятся обратные задачи для эволюционных процессов [1, 2], задачи управления с использованием экспериментальных данных [3, 4] и т.д. В этих задачах присутствуют значения экспериментально измеренных функций $x(t)$ и значения производных различных порядков в начальный момент времени ($t_0 = 0$) $x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), \dots$. Оценить погрешность этих производных принципиально невозможно и, поэтому эту оценку следует принимать равной бесконечности. В такой ситуации приближенное решение задачи расчета с использованием экспериментальных данных теряет смысл. Указанная погрешность исходных данных названа неконтролируемой [6, 7].

2. Постановка задачи

Исследуем влияния неконтролируемой погрешности на примере обратной задачи для уравнения [5, 6, 8]

$$x^{(n)}(t) + d_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + d_n(t)x(t) = z(t). \quad (1)$$

Относительно неизвестной функции $z(t)$ может быть получено интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t, \tau)z(\tau)d\tau = u_\delta(t, x(0), x^{(1)}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)), \quad (2)$$

правая часть которого содержит члены с неконтролируемой погрешностью. В работе [8] показано, что неконтролируемая погрешность приведет к появлению в искомом решении дополнительных слагаемых вида

$$c_0(t)\delta(t) + c_1(t)\delta^{(1)} + \dots + c_{n-1}(t)\delta^{(n-1)}(t). \quad (3)$$

Как видно из выражения (3), неконтролируемая погрешность в данном случае искажает искомое решение в начале отрезка $[0, T]$. Проанализировать влияние неконтролируемой погрешности при численных расчетах весьма проблематично. Под численным расчетом в данном случае понимается решение уравнения типа (2) методом регуляризации А.Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по методу невязки. Отметим лишь общие тенденции влияния этой погрешности. Отклонение приближенного решения от точного в равномерной метрике может быть значительным. С ростом величины погрешности исходных данных δ ($\delta \geq \|u_\delta(t) - u_T(t)\|_U$, $u_T(t)$ есть точная правая часть в уравнении (2)) приближенное решение искажается в меньшей степени в равномерной метрике. Чем точнее измерения функции $u_\delta(t)$ (чем меньше δ), тем больше погрешность приближенного решения в равномерной метрике. Это утверждение остается справедливым и в нелинейных задачах, хотя характер этого влияния может быть более сложным.

3. Фильтрация исходных данных

Наиболее простой способ устранения влияния неконтролируемой погрешности в обратной задаче для уравнения (1) есть исключение из полученного решения некоторого интервала $[0, \beta]$ (β есть малая величина), где решение не является достоверным. Кроме того, там где это возможно, решение обратной задачи следует начинать в момент времени, когда исследуемый процесс находится в состоянии покоя. Тогда из физических соображений все слагаемые, которые определяют неконтролируемую погрешность, следует принять равными нулю.

В данной работе предлагается следующий прием устранения влияния неконтролируемой погрешности: из функции $u_\delta(t)$ в уравнении (2) исключаются слагаемые, которые определяются неконтролируемыми значениями начальных производных путем специальной фильтрации [6, 8].

Нетрудно показать, что начальные производные в правую часть уравнения (2) входят в виде слагаемых

$$x^{(k)}(0)\phi_k(t), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\phi_k(t)_{k=1}^{k=n}$ образуют фундаментальную систему решений для однородного линейного дифференциального уравнения (1) на выбранном отрезке $[0, T]$.

Пусть U есть гильбертово функциональное пространство и U_1 есть линейное подпространство U , которое натянуто на базис $\phi_k(t)$. Тогда U может быть единственным образом представлено в виде прямой суммы

$$U = U_1 \oplus U_2.$$

Выберем произвольный элемент $u_\delta(t) \in U$. Эту функцию можно представить в виде разложения

$$u_\delta(t) = u_\delta^1(t) + u_\delta^2(t),$$

где $u_\delta^1(t) \in U_1$, $u_\delta^2(t) \in U_2$. Для исключения влияния ошибок в определении начальных производных функции $x(t)$ на результат приближенного решения уравнения идентификации предлагается вместо функции $u_\delta(t)$ в уравнении (2) использовать функцию

$$u_\delta^f(t) = u_\delta(t) - u_\delta^1(t).$$

В этом случае, любая ошибка в начальных производных не изменит правой части уравнения (2) и не окажет влияния на решение уравнения (2). Функция $u_\delta^f(t)$ может быть получена в результате проектирования $u_\delta(t)$ на подпространство U_2 . Для этого вводится в рассмотрение некоторый ортонормированный базис $f_k(t)$ в U_1 (этим базисом может быть и $\phi_k(t)$). Затем определяются все коэффициенты Фурье α_k в разложении $u_\delta(t)$ по системе $f_k(t)$:

$$\alpha_k = \int_0^T u_\delta(\tau) f_k(\tau) d\tau.$$

Далее находится функция $u_\delta^f(t)$:

$$u_\delta^f(t) = u_\delta(t) - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t),$$

которая используется в дальнейшем в правой части уравнения (2).

Например, в задаче идентификации дисбаланса [5, 8] из функции $u_\delta(t)$ в уравнении (2) исключаются составляющие типа $b_0, b_1 t, b_2 t^2, b_3 t^3$ (b_0, b_1, b_2, b_3 есть константы), так как именно эти слагаемые не могут быть оценены. Функция $u_\delta(t)$ определена на интервале $[0, T]$ и $u_\delta(0) = 0$. Эта функция продолжается на интервал $[-T, 0]$ нечетным образом. Далее используются свойства полиномов Лежандра. Определим величины b_0, b_1, b_2, b_3 из выражений

$$b_0 = b_0^* - 0.5b_2, \quad b_1 = b_1^* - 1.5b_3^*, \quad b_2 = 1.5b_2^*, \quad b_3 = 2.5b_3^*,$$

где $b_0^*, b_1^*, b_2^*, b_3^*$ есть коэффициенты Фурье для полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} b_0^* &= \frac{1}{12T} \int_{-T}^T u_\delta(t) dt, & b_1^* &= \frac{3}{2T^2} \int_{-T}^T t u_\delta(t) dt, \\ b_2^* &= \frac{5}{4T^3} \int_{-T}^T (3t^2 - T^2) u_\delta(t) dt, & b_3^* &= \frac{7}{4T^4} \int_{-T}^T (5t^3 - 3tT^2) u_\delta(t) dt. \end{aligned}$$

Затем, функция $u_{\delta}^f(t)$ используется как правая часть в уравнении (2) при определении характеристик дисбаланса:

$$u_{\delta}^f(t) = u_{\delta}(t) - b_0 - b_1t - b_2t^2 - b_3t^3.$$

Численные расчеты тестовых примеров показали высокую эффективность предложенного способа.

4. Заключение

Рассмотрено влияние погрешности производных в начальный момент времени от функций полученных экспериментально (неконтролируемая погрешность) на решение обратной задачи. Показано, что эта погрешность может качественно искажать решение обратной задачи. Предложено несколько приемов устранения отрицательного влияния неконтролируемой погрешности, в частности, предложен метод специальной фильтрации исходных данных обратной задачи.

3. Литература

1. Прилепко А., Орловский Д. Об обратных задачах для нестационарных систем // Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1983. – № 34. – С. 85–92.
2. МЕНЬШИКОВ Ю. Обратная задача астродинамики // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике. – Днепропетровск, Украина, 1990. – С. 19–26.
3. RADCLIFFE C., MOTE JR. Identification and control of rotating disk vibration // Trans.ASME: Int. Symp. Dyn. Syst., Meas. and Control. – 1983. – V. 105, N 1. – P. 39–45.
4. DUBOWSKY St. Active control of mechanical systems: the state-of the-art for robotics manipulators // 26th Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Orlando, Fla, Apr.15–17, 1985, Pt. 2. Coll. Techn. Pap. / New York, 1985. – P. 258–261.
5. МЕНШНИКОВ YU., ПОЛЯКОВ N. Operative evaluation of unbalance characteristics of a deformable rotor // Proc. 8th Int. Symp. on Technical Diagnostics (IMEKO), Dresden, 23–25 Sept. 1992. – P. 399–408.
6. МЕНЬШИКОВ Ю. Влияние неконтролируемой погрешности исходных данных на результаты диагностики механических объектов // Вибродиагностика машин и механизмов. Методы и средства. – Запорожье, Украина, 1985. – С. 65–66.
7. МЕНШНИКОВ YU. The Evaluation of the Unbalance Characteristics of a Rotor by the New Operative Method // Proc. of GAMM. – 1996. – V. 4. – P. 103–105.
8. МЕНЬШИКОВ Ю. Неконтролируемая погрешность в экспериментальных измерениях // Сб. науч. работ: Дифференциальные уравнения и их применение. – Днепропетровск: ДГУ, 1998. – С. 20–26.
9. КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Нью-Йорк, Торонто, Лондон, 1970. – 720 с.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Н.В. Панов, С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН
Россия, 630090 г. Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6
E-mails: rupo@ngs.ru, shary@ict.nsc.ru

Аннотация

Работа посвящена экспериментальному сравнению стохастических интервальных алгоритмов глобальной оптимизации с традиционными детерминированными интервальными и неинтервальными (точечными) стохастическими методами. Приводятся данные численных экспериментов с этими алгоритмов, показывающие их сравнительную производительность и ресурсоёмкость.

Ключевые слова: интервальный анализ, глобальная оптимизация, стохастические методы
Keywords: interval analysis, global optimization, stochastic methods

1. Введение

Оптимизация в широком смысле слова находит применение в науке, технике и любой другой области человеческой деятельности. Она встречается в задачах проектирования, распределения ограниченных ресурсов, при моделировании физических явлений, анализе данных и т.п. При этом, как правило, особую ценность имеет отыскание глобального оптимума.

Для решения задачи глобальной оптимизации используются различные подходы, как классические, так и всё более популярные интервальные, основанные на адаптивном дроблении области определения целевой функции в сочетании с оцениванием её областей значений по получающимся подмножествам исходной области определения [3, 4]. Такие алгоритмы хорошо работают для функций сложного рельефа и не слишком большого числа переменных, надёжно находя гарантированные двусторонние оценки для глобального оптимума и аргументов, его доставляющих.

Ценное свойство современных интервальных методов — доказательность (гарантированность) результатов, но оно же является одной из причин их недостаточной вычислительной эффективности в сравнении с традиционными неинтервальными подходами. Возникает вопрос: нельзя ли повысить эффективность, отказавшись, в той или иной степени, от доказательности и (или) чисто детерминистского характера интервальных оптимизационных методов? На наш взгляд, ответ на этот вопрос положителен, и отказ от жёсткого детерминизма интервальных методов может привести к созданию численных алгоритмов с качественно новыми свойствами, в частности, с улучшенной эффективностью.

Впервые такой подход к решению задач оптимизации был предложен С.П. Шарым в работе [1], где, в частности, была сформулирована интервальная версия алгоритма «симулированного отжига». Цель настоящей работы — представление предварительных результатов экспериментальных сравнений стохастических и детерминированных интервальных методов глобальной оптимизации.

2. Описание алгоритмов и экспериментов.

Итак, мы решаем задачу глобальной оптимизации вещественнозначной функции $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ на прямоугольном брусе $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям:

$$\text{найти } \min_{x \in \mathbf{X}} F(x).$$

В качестве базового интервального алгоритма глобальной оптимизации нами был взят традиционный метод адаптивного дробления области определения. Его блок-схема изображена на Рис. 1. Этот алгоритм оперирует с *рабочим списком*, образованным подбрусами области определения \mathbf{X} вместе с оценками области значений целевой функции, которые вычисляются посредством интервального расширения F . На первом шаге работы алгоритма рабочий список состоит из одного бруса — исходной области определения \mathbf{X} , а далее выполняется последовательное дробление \mathbf{X} на всё более

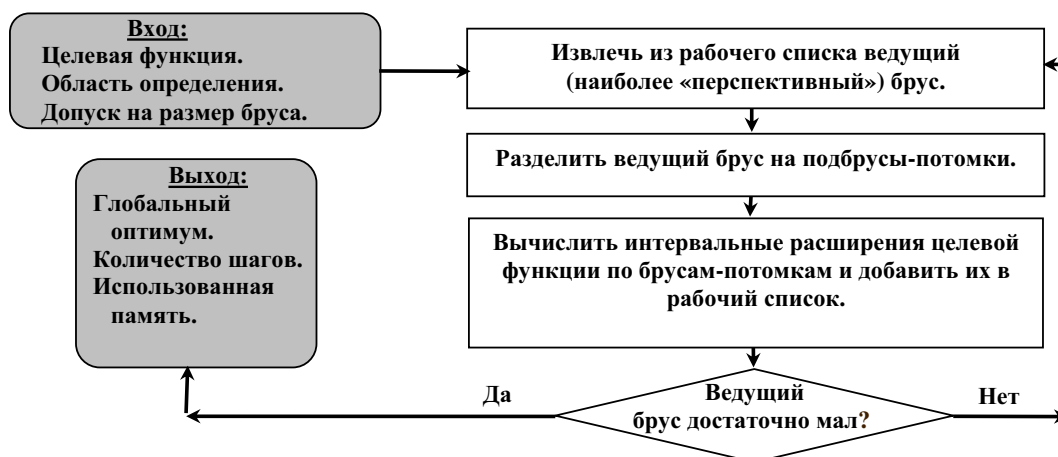


Рис. 1: Блок-схема оптимизационного алгоритма адаптивного интервального дробления.

мелкие подбрусы в соответствии со стратегий известного из комбинаторной оптимизации «метода ветвей и границ» (см. Рис. 1).

Хорошо известно, что точность интервального расширения функции существенным образом зависит от размеров бруса, вида функции и типа применяемого интервального расширения функции. Чем меньше брус оценивания, тем лучше любое интервальное расширение приближает область значений функции — эффект, на котором основана работа описанных выше интервальных методов глобальной оптимизации. Но интервальное оценивание областей значений функций нередко осложняется так называемым явлением «застаивания интервальной оценки», когда, несмотря на стремление размеров бруса к нулю точность интервального расширения на этом бруске растет не обязательно пропорционально уменьшению размера бруса.

Рассмотрим работу этого алгоритма на примере решения задачи поиска на области $[-10, 10] \times [-10, 10]$ глобального минимума функции $f(x, y) = 4x^2 - 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4$, также известной как «шестигорбый верблюд» [2] (Рис. 2). Результаты проиллюстрированы графиком на Рис. 3, где

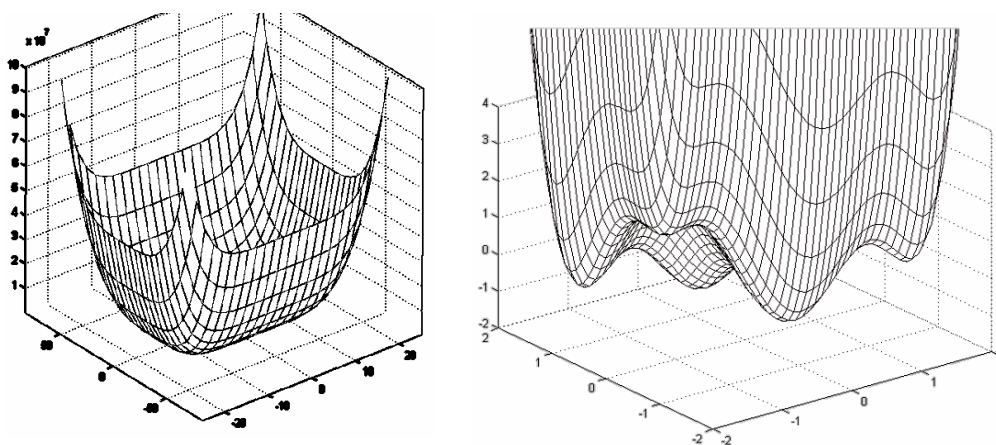


Рис. 2: Графики целевой функции «шестигорбый верблюд».

по оси ординат отложены логарифмы нижней и верхней границы оптимума, по оси абсцисс — время работы в секундах. Несомненно, что абсолютное время работы алгоритма зависит от используемого аппаратного обеспечения, но в нашей работе оно приводится лишь для относительного сравнения алгоритмов друг с другом.

На Рис. 3 хорошо видны области «застаивания» интервальной оценки, когда в течении достаточно большого количества итераций она улучшалась лишь незначительно. Также виден недостаток «чистого» адаптивного интервального дробления — большие трудозатраты: получение приемлемых результатов требует не менее ста секунд.

На каждом шаге этого алгоритма «наиболее перспективный» брус из рабочего списка дробится

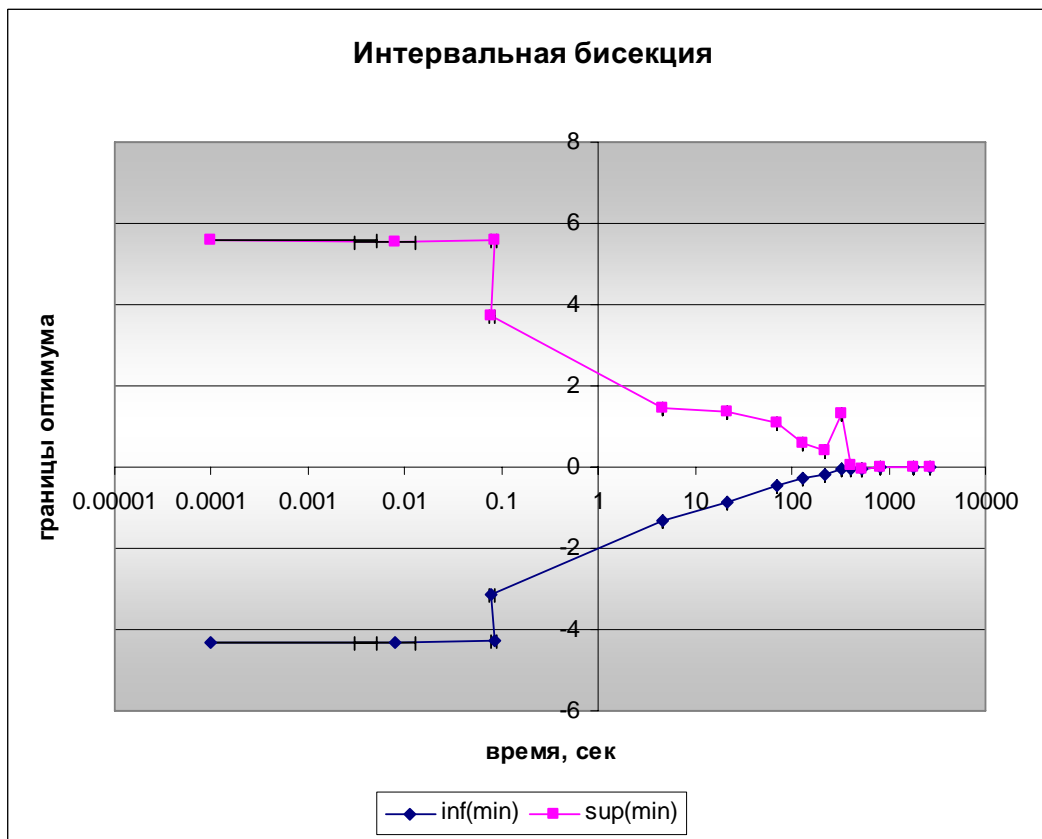


Рис. 3: Точность интервального оценивания оптимума алгоритмом адаптивного интервального дробления (бисекции) в зависимости от времени работы.

на более мелкие подбрусы, но при этом интервальная оценка часто уточняется лишь незначительно, так что алгоритм бывает вынужден последовательно дробить практически все брусы из рабочего списка. Кроме того, с увеличением рабочего списка увеличивается время на его сортировку на каждой итерации алгоритма, а при значительном размере рабочего списка задача может исчерпать всю оперативную память ЭВМ, после чего работа алгоритма чрезвычайно замедлится.

Традиционный путь улучшения методов этого типа — улучшение точности используемого интервального расширения функции, введение процедур отбраковки брусков или уменьшения размеров брусков за счет отбрасывания бесперспективных частей и т.п. В стохастических интервальных методах глобальной оптимизации мы предлагаем в дополнение к этому модифицировать процедуру выбора брусков, подлежащих дроблению, основываясь на использовании вероятностного перехода. Это приводит, в частности, к «рысканью» траектории поиска по всей области определения целевой функции, что усиливает его «глобальность». На Рис. 4 показана упрощённая блок-схема метода интервального симулированного отжига, предложенного в [1]. За его основу взят популярный классический (точечный) метод, моделирующий физические процессы отжига или кристаллизации.

На Рис. 5 представлено сравнение алгоритмов интервального симулированного отжига и адаптивного интервального дробления (бисекции) на целевой функции «шестигорбый верблюд». Видно, что для этой задачи метод симулированного отжига быстрее на порядки. Для каждого из алгоритмов приведены два графика — с дроблением брусков по наиболее широкой стороне или по всем сторонам сразу. В целом, дробление каждый раз по всем сторонам даёт небольшой выигрыш.

Отметим, что поведение алгоритма симулированного отжига сильно зависит от так называемой «температуры» — параметра T и способа его изменения. Этот эффект хорошо известен для неинтервальных (точечных) версий симулированного отжига, и мы зафиксировали его для интервального симулированного отжига. Так, применение этого метода с теми же настройками, что и в предыдущем случае, для поиска минимума функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y) \quad (*)$$

дало плохие результаты. На Рис. 6 показан график ширины интервальной оценки от времени для алгоритмов адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симулированного отжига, применённых к этой целевой функции.



Рис. 4: Блок-схема интервального симулированного отжига.

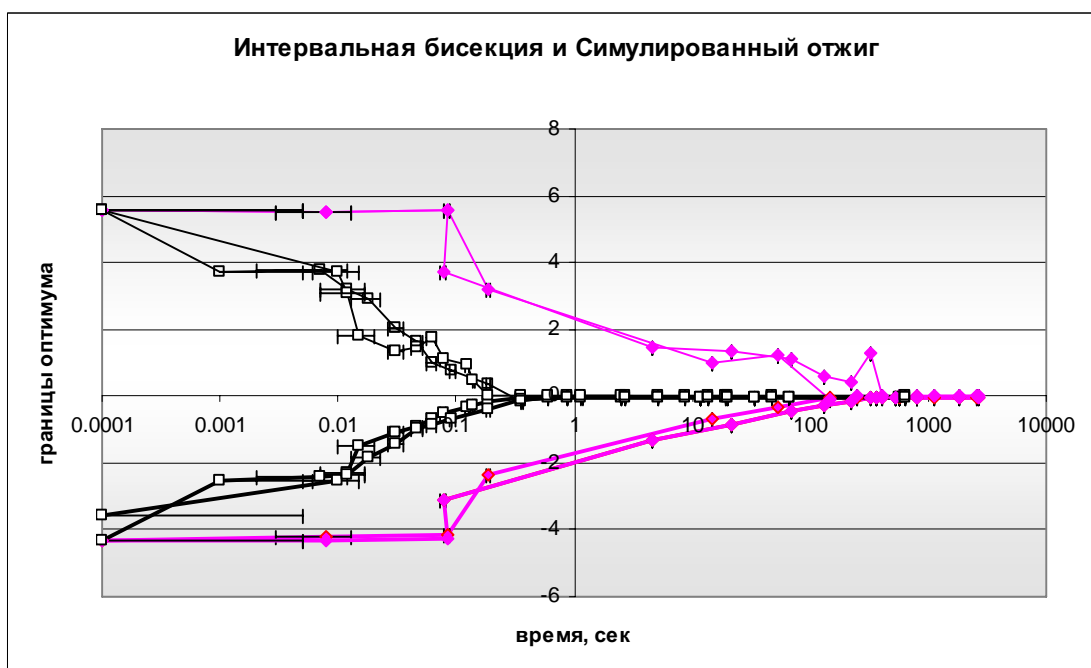


Рис. 5: Сравнение адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симулированного отжига на «шестигорбом верблюде».

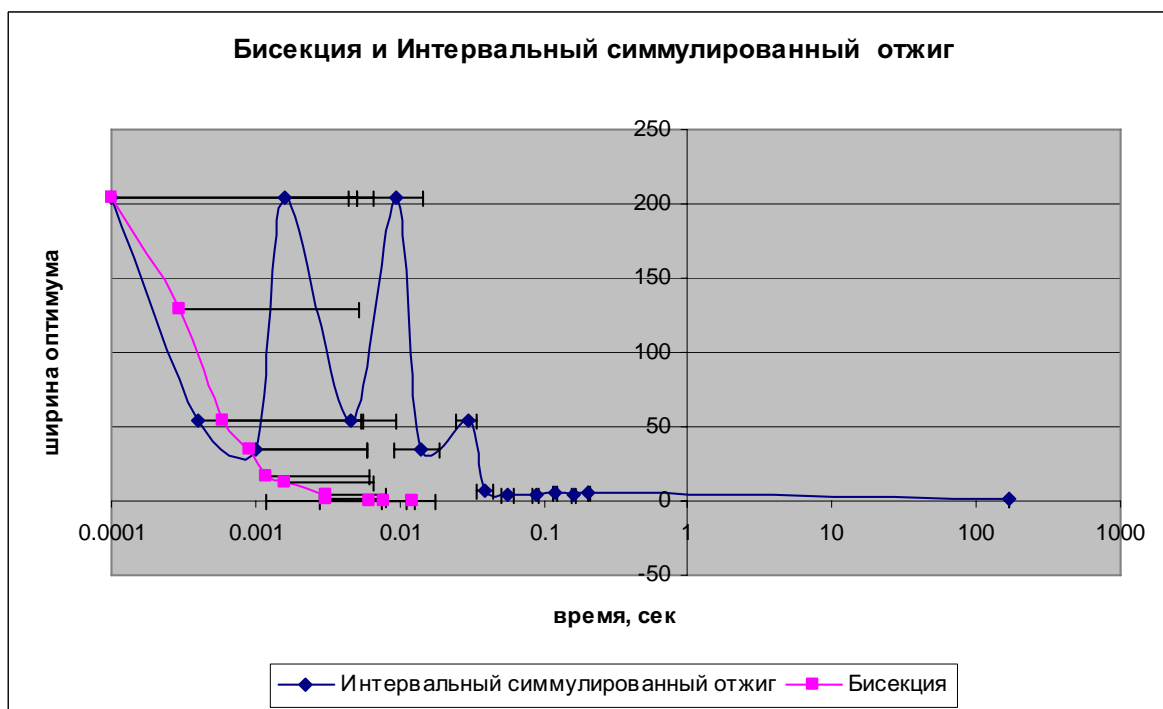


Рис. 6: Сравнение адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симулированного отжига на целевой функции (*).

Остается сообщить, что рассматриваемые алгоритмы были реализованы на языке C++ с использованием интервальной библиотеки из пакета Boost [5].

3. Заключение.

Вычислительные эксперименты показывают, что применение стохастических подходов в интервальных методах глобальной оптимизации оправдано и требует дальнейшего изучения. В частности, интервальный метод симулированного отжига демонстрирует хорошие результаты в сравнении с детерминированным адаптивным интервальным дроблением на целевых функциях, для которых точность существующих форм интервального расширения оказывается не очень хорошей.

4. Литература

1. ШАРЫЙ С.П. Стохастические подходы в интервальной глобальной оптимизации // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск – Северобайкальск, 2–8 июля 2005 года. Том 4 «Интервальный анализ». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – С. 85–105.
2. КУЛИШ У., РАЦ Д., ХАММЕР Р., ХОКС М. *Достоверные вычисления*. – Издательство РХД: Москва–Ижевск, 2005.
3. HANSEN E.R. *Global optimization using interval analysis*. – N.Y.: Marcel Dekker, 2004.
4. KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
5. <http://www.boost.org/libs/numeric/interval/doc/interval.htm>

ОСОБЕННОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА СО СВОЙСТВОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

Я.И. Петрикевич, В.Я. Карташов

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия
E-mail: kartash@ic.kemsu.ru

Аннотация

Интервальный метод структурно-параметрической идентификации с использованием непрерывных дробей предоставляет возможность учёта неточности исходных данных, поскольку в качестве входных переменных в предлагаемом подходе используются интервалы, внутри которых лежат измеренные значения вход-выходных переменных объекта.

Ключевые слова: непараметрическая идентификация, непрерывные дроби, интервальные методы идентификации

Keywords: nonparametric identification, continuous fractions, interval methods of identification

1. Введение

Рассматривается динамический объект, допускающий построение линеаризованной модели, с непрерывным входным воздействием $x(t)$, непрерывным выходным воздействием $y(t)$ и непрерывной передаточной функцией (НПФ) $G(s)$. Задача структурно-параметрической идентификации состоит в том, что необходимо на основе измеренных значений вход-выходных переменных в дискретные моменты времени построить интервальную дискретную модель в форме передаточной функции объекта и получить оценки параметров дискретной и непрерывной моделей объекта.

2. Интервальный модифицированный метод Висковатова

Считается, что шаг дискретизации можно варьировать в пределах некоторого диапазона, определяемого возможностями аппаратуры и свойствами самого объекта и содержащего допустимые значения $(\Delta t_{min}, \Delta t_{max})$, при которых объект является идентифицируемым. Производится дискретизация вход-выходных величин с заданным шагом $\Delta t \in (\Delta t_{min}, \Delta t_{max})$, в результате получают последовательности отсчетов $x(n\Delta t)$ и $y(n\Delta t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для построения исходных интервалов $[x_{min}(n\Delta t), x_{max}(n\Delta t)]$ и $[y_{min}(n\Delta t), y_{max}(n\Delta t)]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ производится серия измерений, либо используются оценки уровня зашумленности данных, значения предельных допускаемых погрешностей средств измерений, устанавливаемые нормативно-техническими документами.

Далее рассчитывается идентифицирующая матрица с интервальными элементами $[a_{mn}, b_{mn}]$, где $a_{0n} = x_{min}(n\Delta t)$, $b_{0n} = x_{max}(n\Delta t)$, $a_{1n} = y_{min}(n\Delta t)$, $b_{1n} = y_{max}(n\Delta t)$, $n = 0, 1, \dots$, а границы следующих элементов матрицы вычисляются последовательно по формуле

$$[a_{mn}, b_{mn}] = \frac{[a_{m-2,n+1}, b_{m-2,n+1}]}{[a_{m-2,0}, b_{m-2,0}]} - \frac{[a_{m-1,n+1}, b_{m-1,n+1}]}{[a_{m-1,0}, b_{m-1,0}]}, \quad m = 2, 3, 4, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисление интервальных элементов матрицы прекращается с появлением строки, все элементы которой содержат в себе число 0. Появление такой строки однозначно определяет длину непрерывной дроби, то есть порядок дискретной модели. Из элементов нулевого столбца идентифицирующей матрицы составляется правильная С-дробь с интервальными коэффициентами, которая затем сворачивается по правилам классической интервальной арифметики, образуя дискретную передаточную функцию (ИДПФ) в виде дробно-рационального выражения с коэффициентами-интервалами:

$$G^{IR}(z) = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{p-1} z^{-(p-1)} + A_p z^{-p}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{q-1} z^{-(q-1)} + B_q z^{-q}}$$

Таким образом, получена интервальная модель объекта в виде дискретной передаточной функции объекта. Интервальные коэффициенты являются оценками точечных значений истинных значений коэффициентов модели. Для вычисления интервальных оценок нулей и полюсов НДФ необходимо найти интервальные нули и полюса ИДФ и перевести их с помощью естественного интервального расширения обратного Z-преобразования

$$S = \frac{1}{\Delta t} \ln |z| + \frac{i}{\Delta t} \arg z \quad (1)$$

в s-плоскость. В качестве интервального аналога числовой функции $\arg z$ в (1) используется естественное интервальное расширение этой функции, получаемое подстановкой интервальных значений $\operatorname{Re} Z$ и $\operatorname{Im} Z$ вместо соответствующих вещественных значений.

Достоверность полученных оценок проверяется путем изменения шага дискретизации. При этом также устанавливается эквивалентность полученных интервальных дискретных моделей.

3. Решение интервального квадратного уравнения

Для вычисления полюсов (аналогично – нулей) ИДФ объекта второго порядка предлагается использовать способ решения интервального квадратного уравнения на основе классической интервальной арифметики. Характеристический полином для нахождения интервальных полюсов объекта второго порядка имеет общий вид

$$F(z) = z^2 + [b_1, b_2]z + [c_1, c_2], \quad (2)$$

причем значения и ширина интервальных коэффициентов, а следовательно, и самих полюсов ИДФ зависят от шага дискретизации Δt . В качестве способа нахождения нулей функции (2) рассмотрим расширение известного метода вычисления дискриминанта квадратичной функции на множество интервальных чисел. Тогда дискриминант принимает интервальный вид

$$D = B^2 - 4C = [D_1, D_2], \quad (3)$$

где границы и ширина интервала зависят от Δt . Для получения внешних оценок нулей квадратичной функции (2) предлагается рассматривать интервальную параболу вида, представленного на рис. 1.

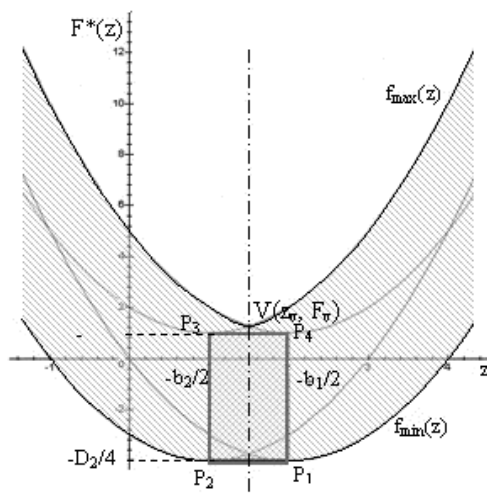


Рис. 1: Общий вид интервальной параболы

Для вычисления интервальных значений полюсов Z_1, Z_2 вводится интервальное расширение метода нахождения корней вещественной квадратичной функции с помощью дискриминанта:

$$Z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2}, \quad (4)$$

Если $0 \in D$, то расширение известного выражения $Z_{1,2} = -B/2$ дает в общем случае в качестве решения интервального уравнения лишь подмножество точек реального интервала – корня уравнения. Для вычисления внешней оценки решения необходимо найти нули функции по формулам (4), а затем произвести объединение действительных частей полученных интервалов, в результате получив один вещественно-значный интервал $Z = [z_{1min}, z_{2max}]$, который и будет являться внешней оценкой нуля функции (2).

4. Интервальная идентификация и различимость интервальных полюсов объекта 2-го порядка со свойством колебательности

В работе рассматривается динамический объект 2-го порядка со свойством колебательности, заданный непрерывной передаточной функцией $G(s) = \frac{1}{4s^2 + s + 1}$. Сложность дискретного моделирования такого класса объектов связана с тем, что они имеют комплексно-сопряженные полюса, и в случае интервальных исходных данных для идентификации колебательных объектов возникает необходимость в привлечении комплексной интервальной арифметики. В процессе идентификации (как точечной, так и интервальной) в зависимости от значений шага дискретизации свойство колебательности может сохраняться либо быть утеряно в результате подмены модели.

Полюса в непрерывной комплексной s -плоскости имеют значения $s_{1,2} = -0.125 \pm 0.484i$. Считается, что на вход объекта подается ступенчатое воздействие $x(t) = 1(t)$. Необходимо построить дискретные модели и оценки параметров НПФ при различных значениях Δt .

При $\Delta t = 1.5c$ ДПФ объекта после сворачивания непрерывной дроби принимает вид

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.237, 0.240]z^{-1} + [0.180, 0.236]z^{-2}}{1 + [-1.483, -1.008]z^{-1} + [0.334, 1.071]z^{-2}}$$

Так как единственный нуль ДПФ лежит на разрезе z -плоскости, то в НПФ нули отсутствуют. Для вычисления полюсов ИДПФ используется предложенный метод решения интервального квадратного уравнения. Вычисляется интервальный дискриминант характеристического уравнения: $D = [-3.267, 0.864]$, то есть при выбранном шаге дискретизации ИДПФ дискриминант является нуль-содержащим интервалом. Интервальные полюса, найденные по формулам (4), имеют следующие значения:

$$Z_1^{\Pi} = [0.039, 0.742] - [0, 0.904]i, \quad Z_2^{\Pi} = [0.504, 1.206] + [0, 0.904]i,$$

$$\text{wid } Z_1^{\Pi} = \text{wid } Z_2^{\Pi} = 1.606.$$

Очевидно, что полученные интервальные полюса являются комплексно-сопряженными лишь частично, то есть формально объект имеет одновременно как вещественные, так и комплексные полюса. Следовательно, при $\Delta t = 1.5c$ произошла подмена модели, и нельзя говорить о полном восстановлении модели, поскольку полученные результаты не поддаются однозначной интерпретации.

В Таблице 1 приводятся интервальные оценки параметров ДПФ объекта, полученные при увеличении шага дискретизации.

Таблица 1.

Δt	1.75 c	2 c	2.3 c	2.9 c	3.2 c
Re Z^{Π}	[0.449, 0.618]	[0.380, 0.505]	[0.286, 0.377]	[0.089, 0.143]	[-0.008, 0.037]
Im Z^{Π}	[0.192, 0.828]	[0.452, 0.786]	[0.574, 0.759]	[0.654, 0.716]	[0.652, 0.688]
wid Z^{Π}	0.805	0.461	0.276	0.116	0.081
Re S^{Π}	[-0.410, 0.019]	[-0.264, -0.034]	[-0.193, -0.072]	[-0.143, -0.108]	[-0.134, -0.117]
Im S^{Π}	[0.172, 0.614]	[0.364, 0.561]	[0.430, 0.526]	[0.468, 0.499]	[0.473, -0.487]
wid S^{Π}	0.869	0.427	0.217	0.067	0.978

Сравнение значений показывает, что с увеличением значения шага дискретизации происходит уточнение модели. Это происходит благодаря тому, что интервальный дискриминант характеристического уравнения смещается в направлении отрицательных значений. При Δt таком, что $D < 0$, происходит разделение интервальных комплексно-сопряженных полюсов ИДПФ при их перемещении внутри единичного круга $|z| < 1$. Разделение полюсов и их перемещение в комплексную область

значений говорит о сохранении свойства колебательности объекта в полученной дискретной модели. Следовательно, при таких Δt происходит полное восстановление дискретной и непрерывной моделей объекта с сохранением его функциональных свойств, а полученные интервальные значения являются достоверными оценками параметров.

Итак, при изменении значений шага дискретизации можно сделать следующие наблюдения.

1. При малых значениях $\Delta t \leq \Delta t_{min}$ происходит подмена модели, либо интервальные значения полюсов в s -плоскости частично попадают в область неустойчивости.
2. С увеличением Δt происходит перемещение z -полюсов внутри единичного круга и смещение их прообразов в область устойчивости. Сужение интервальных полюсов в z -плоскости и s -плоскости происходит со скоростью экспоненты.
3. При $\Delta t \geq \Delta t_{max}$ интервал $\text{Im } S^{\text{II}}$ перемещается в отрицательную полуплоскость. В связи с этим сначала происходит резкий скачок в $\text{wid } S^{\text{II}}$, а затем ширина интервала продолжает уменьшаться экспоненциально.

Эквивалентность моделей в интервальном случае следует понимать как вложенность интервальных оценок полюсов и нулей. Для комплексных интервалов может наблюдаться частичная вложенность – либо только действительных, либо действительных и мнимых частей комплексных полюсов при возрастании Δt . Так, для рассматриваемого объекта при $\Delta t_1 > \Delta t_2$ выполняются вложения $\text{Re } Z_1^{\text{II}} \subset \text{Re } Z_2^{\text{II}}$ и $\text{Re } S_1^{\text{II}} \subset \text{Re } S_2^{\text{II}}$.

Итак, применение ИММВ к колебательным объектам позволяет построить адекватную дискретную модель в виде ИДПФ и интервальной динамической характеристики, а также восстановить структуру непрерывной модели и найти адекватные интервальные оценки ее параметров. При этом точность восстановления модели зависит от шага дискретизации. Увеличение Δt в некоторых пределах, в которых объект является интервально-идентифицируемым, приводит к значительному уточнению интервальной модели. Однако, при больших значениях Δt теряется информация об особенностях переходного процесса, отмечающихся в начале отклика объекта на поступление входного воздействия.

5. Литература

1. КАРТАШОВ В. Я. Анализ и исследование аппроксимационных свойств непрерывных дробей при решении задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов // Препринт № 22. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 40 с.
2. КАРТАШОВ В.Я., ПЕТРИКЕВИЧ Я.И., АНСОЛ С.П. Интервальная структурно-параметрическая идентификация динамических объектов // Сборник докладов Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM'2003. – С.-Петербург: изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2003.
3. КАРТАШОВ В.Я., ПЕТРИКЕВИЧ Я.И., СТОЛЕТОВ А.В. Распознавание динамических характеристик систем с интервальной неопределённостью // Сборник докладов Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM'2004. – С.-Петербург: изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2004.
4. ПЕТРИКЕВИЧ Я. И., МАХАРЕВА О. А., САХНИН Д. Ю. Интервальная SP-идентификация и управление объектом второго порядка // Недра Кузбасса. Инновации: Труды V Всероссийской научно-практической конференции. – Кемерово: ИНТ, 2006.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ГРАФИКА

Е.С. Петров

*Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН
проспект академика Лаврентьева, дом 6, Новосибирск 630090
E-mail: pes@iis.nsk.su*

Аннотация

Наш доклад посвящен корректному вычислению интервального расширения функции переменных x и y , заданной выражением x^y . Мы сводим вычисление интервального расширения x^y без ограничений на значения переменных к случаю неотрицательного основания.

Ключевые слова: интервальные вычисления, степенная функция
Keywords: interval computations, power function

1. Введение

Несмотря на то, что алгоритмы вычисления интервальных расширений базовых математических функций хорошо известны (алгоритмы выполнения арифметических операций над интервалами даже запатентованы в США), до сих пор отсутствует систематический подход к вычислению интервального расширения степенной функции.

Существующие пакеты математического обеспечения (МО) для интервальных вычислений позволяют вычислять интервальное расширение степенной функции, однако при этом ограничивают значения переменных x и y . Наиболее распространенными ограничениями являются $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $y \in \mathbb{R}$. Наличие таких ограничений усложняет использование интервального МО для надежного решения задач математического моделирования. Во-первых, усложняется решение задач, в которых неизвестен показатель степенной функции. Во-вторых, затрудняется использование интервального МО совместно с символьными препроцессорами математических моделей. Например, замена $x^3 = \text{const}$ на $x = \text{const}^{1/3}$ является неэквивалентным символьным преобразованием для степенной функции, определенной только для положительного основания.

Вероятнее всего, такие ограничения при вычислении степенной функции являются следствием настороженного отношения разработчиков интервального МО к разрывным функциям: степенная функция, как функция двух переменных, является разрывной (либо не определена) в каждой точке (x, y) с отрицательным основанием x . Искусственно вводимые ограничения на значения x и y , по сути, выделяют области, в которых степенная функция непрерывна.

Целью исследования, которому посвящен наш доклад, была разработка систематического подхода к корректному вычислению интервального расширения степенной функции x^y без каких-либо ограничений на значения x и y . Разработанный подход был использован при реализации степенной функции для системы UniCalc [1].

Доклад организован следующим образом. В Разделе 2 рассказывается о сведении вычисления интервального расширения степенной функции к случаю неотрицательного основания. В Разделе 3 подход из Раздела 2 рассматривается для ряда частных случаев. В Разделе 4 обсуждаются вопросы использования предложенного подхода на ЭВМ. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. Сведение к случаю неотрицательного основания

В этом разделе мы показываем, что вычисление интервального расширения степенной функции без ограничений на основание и показатель легко сводится к случаю неотрицательного основания.

Суть нашего подхода состоит в разложении всего графика функции x^y на небольшое число частей, которые можно с помощью отражений относительно координатных плоскостей преобразовать в подмножества графика x^y для неотрицательного основания x . По построению, замыкание каждого такого подмножества даёт весь график x^y (в топологии евклидова пространства \mathbb{R}^3). Поэтому вычисление интервального расширения x^y без ограничений на значения x и y оказывается не намного сложнее вычисления интервального расширения x^y для неотрицательного основания x .

Мы рассматриваем x^y как сужение степенной функции комплексных переменных, вычисляемой для главной ветви аргумента $\arg(x) \in [0, 2 \cdot \pi)$:

$$x^y = |x|^y \cdot (\cos(y \cdot \arg(x)) + i \cdot \sin(y \cdot \arg(x))) \text{ при } x \neq 0;$$

$$0^y = 0 \text{ при положительном } y;$$

$$0^0 = 1.$$

Заданная таким образом функция принимает вещественные значения тогда и только тогда, когда $\sin(y \cdot \arg(x)) = 0$. Легко видеть, что это равенство выполняется только в одном из следующих случаев:

- y – несократимая дробь с нечетным знаменателем, $x \in \mathbb{R}$;
- y – несократимая дробь с четным знаменателем (и нечетным числителем), $x \in \mathbb{R}_+$;
- y – иррациональное число, $x \in \mathbb{R}_+$.

Следовательно, график x^y распадается на 4 части, заданные следующими условиями:

- y – несократимая дробь с нечетным знаменателем и четным числителем;
- y – несократимая дробь с нечетным знаменателем и числителем;
- y – несократимая дробь с четным знаменателем, $x \in \mathbb{R}_+$;
- y – иррациональное число, $x \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим через $\text{ch}(X)$ выпуклую оболочку множества X , через $\text{cl}(X)$ – замыкание множества X . Обозначим через X^Y образ декартова произведения множеств (не обязательно интервалов) $X \cap \mathbb{R}_+$ и Y под действием степенной функции. Обозначим через $-X$ множество $\{-x \mid x \in X\}$. Обозначим через $Y_{eo}, Y_{oo}, Y_{oe}, Y_{ir}$ подмножества Y , состоящие соответственно из несократимых дробей с нечетным знаменателем и четным числителем, нечетным знаменателем и числителем, четным знаменателем (и, следовательно, нечетным числителем), и иррациональных чисел.

В соответствии с нашим разложением всего графика x^y , образ бруса (\mathbf{x}, \mathbf{y}) под действием степенной функции задается следующим выражением:

$$\mathbf{x}^{y_{eo}} \cup (-\mathbf{x})^{y_{eo}} \cup \mathbf{x}^{y_{oo}} \cup (-\mathbf{x})^{y_{oo}} \cup \mathbf{x}^{y_{oe}} \cup \mathbf{x}^{y_{ir}}.$$

Очевидно, это выражение можно упростить следующим образом:

$$\mathbf{x}^y \cup (-\mathbf{x})^{y_{eo}} \cup (-\mathbf{x})^{y_{oo}}.$$

Обозначим через $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интервальное расширение степенной функции x^y для неотрицательно-го основания. Очевидно, $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается выражением $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\text{cl}(\mathbf{x}^y))$. Легко видеть, что для любого неточечного интервала \mathbf{y} и любого интервала \mathbf{x} справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, y_{eo}) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}, y_{oo}) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Приведем рассуждение только для y_{eo} (для y_{oo} рассуждение аналогично). Действительно, если \mathbf{y} не является точечным интервалом, то множество y_{eo} не пусто. По определению $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, y_{eo}) = \text{ch}(\text{cl}(\mathbf{x}^{y_{eo}}))$. Поскольку степенная функция непрерывна при неотрицательном основании (за исключением точки $x = y = 0$), имеем $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, y_{eo}) = \text{ch}(\text{cl}(\mathbf{x}^{y_{eo}})) = \text{ch}(\text{cl}(\mathbf{x})^{\text{cl}(y_{eo})}) = \text{ch}(\text{cl}(\mathbf{x}^y)) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Что и требовалось установить.

Интервальное расширение $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ степенной функции без ограничений на значения основания и показателя задается следующим выражением:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\text{cl}(\mathbf{x}^y \cup (-\mathbf{x})^{y_{eo}} \cup (-\mathbf{x})^{y_{oo}})).$$

С учетом изложенных соображений, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выражается через \mathbf{p}_0 следующим образом:

- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup \mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup -\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – не точечный интервал;
- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup \mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий несократимую дробь вида “четное/нечетное”;
- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup -\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий несократимую дробь вида “нечетное/нечетное”;

- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий иррациональное число или несократимую дробь вида “нечетное/четное”.

3. Примеры

В этом разделе мы приводим примеры, иллюстрирующие вычисление степенной функции в соответствии с описанным в Разделе 2 методом.

Пример 3.1 (неотрицательное основание).

Легко видеть, что при неотрицательном основании выражение для $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из Раздела 2 тождественно $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, т.к. в этом случае $\mathbf{p}_0(-\mathbf{x} \setminus \{0\}, \mathbf{y}) = \emptyset$.

Пример 3.2 (отрицательное основание).

При отрицательном основании выражение для $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из Раздела 2 принимает следующий вид:

- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup -\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – не точечный интервал;
- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий несократимую дробь вида “четное/нечетное”;
- $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий несократимую дробь вида “нечетное/нечетное”.

Видно, что в случае отрицательного основания интервал $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симметричен относительно нуля при любом (сколь угодно узком) неточечном интервале \mathbf{y} . Другими словами, при отрицательном основании уточнение интервала для показателя не помогает уточнить знак результата возведения в степень. Это согласуется с тем, что для любого отрицательного числа x и любой несократимой дроби y_1 вида “нечетное/нечетное” имеется несократимая дробь y_0 вида “четное/нечетное”, для которой x^{y_0} и x^{y_1} как угодно близки по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки.

Пример 3.3 (интервалы с машинно-представимыми границами).

Практический интерес представляет сужение $\mathbf{p}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интервального расширения $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ степенной функции на множество интервалов с машинно-представимыми границами в формате IEEE-754 [2]. Поскольку множество машинно-представимых вещественных чисел в формате IEEE-754 не содержит иррациональных чисел и несократимых дробей с нечетным знаменателем, отличным от 1 и -1, верны следующие равенства:

- $\mathbf{p}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup \mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup -\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – не точечный интервал;
- $\mathbf{p}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup \mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий четное целое число;
- $\mathbf{p}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{ch}(\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup -\mathbf{p}_0(-\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий нечетное целое число;
- $\mathbf{p}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если \mathbf{y} – точечный интервал, содержащий дробное машинно-представимое число.

4. Замечания об использовании предложенного подхода на ЭВМ

В этом разделе подход, предложенный в Разделе 2, рассматривается с точки зрения использования на ЭВМ.

Как уже отмечалось в Разделе 1, существует ряд пакетов МО, позволяющих вычислять интервальное расширение степенной функции для неотрицательного основания. Поэтому сведение вычисления интервального расширения степенной функции к случаю неотрицательного основания является оправданным.

С точки зрения программирования, предложенное в Разделе 2 сведение к случаю неотрицательного основания является тривиальным разбором вариантов, однако трудоемкость проверки условий, определяющих эти варианты, зависит от формата, в котором хранятся вещественные числа.

Если границы интервалов хранятся в формате IEEE-754, то, как мы видели в Примере 3.3, основное время при вычислении значений функции $p(x, y)$ тратится на вычисление значений функции $p_0(x, y)$ (мы используем обозначения из Раздела 2). Платой за обеспечение математической корректности в этом случае является примерно 2-кратное увеличение объема вычислений. Такая плата выглядит вполне приемлемой.

Если границы интервалов хранятся в формате, допускающем большее количество рациональных чисел с нечетным знаменателем, чем допускает формат IEEE-754, то нахождение несократимой дроби, которой соответствует данное машинно-представимое вещественное число, может потребовать существенного времени. Примером такого формата, “неудобного” с точки зрения предложенного в Разделе 2 подхода, является двоично-десятичный формат.

Наконец, следует иметь в виду, что значения функций $p(x, y)$ и $p_0(x, y)$, вычисленные на ЭВМ, из-за ошибок округления могут отличаться от истинных значений $p(x, y)$ и $p_0(x, y)$, даже если эти истинные значения являются машинно-представимыми. Все, что может гарантировать корректная реализация на ЭВМ предложенного в Разделе 2 подхода, – это то, что значение функции $p(x, y)$, вычисленное на ЭВМ, содержит истинное значение $p(x, y)$.

5. Заключение

В нашем докладе мы рассказали о корректном вычислении интервального расширения функции переменных x и y , заданной выражением x^y . Суть нашего подхода состоит в разложении всего графика функции x^y на небольшое число частей, которые можно с помощью отражений относительно координатных плоскостей преобразовать в подмножества графика x^y для неотрицательного основания x . Мы показали, что вычисление интервального расширения степенной функции без ограничений на основание и показатель легко сводится к случаю неотрицательного основания.

С точки зрения использования на ЭВМ, предложенный нами подход к вычислению интервального расширения степенной функции оказался зависимым от машинного представления вещественных чисел. Для ЭВМ, использующих распространенный формат IEEE-754, предложенный нами подход обеспечивает корректность вычисления интервального расширения степенной функции ценой примерно 2-кратного увеличения объема вычислений по сравнению со случаем неотрицательного основания.

Разработанный нами подход был использован при реализации степенной функции для новой версии системы UniCalc. Помимо обеспечения корректности вычислений, наш подход существенно упростил код на языке C++, который использовался в предыдущей версии системы UniCalc для вычисления интервального расширения степенной функции. Интересно отметить, что за счет уменьшения числа ветвлений в этом коде время вычисления интервального расширения степенной функции в новой версии системы UniCalc практически не увеличилось.

Автор благодарен Институту систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН и Российскому научно-исследовательскому институту искусственного интеллекта за материальную поддержку выполненного исследования. Автор также благодарен в.н.с. Института вычислительных технологий СО РАН д.ф.-м.н. С.П. Шарому за ценные комментарии по существу выполненного исследования.

6. Литература

1. Костов Ю.В., Липовой Д.А., Мамонтов П.Г., Петров Е.С. Новая версия универсального решателя UNICALC: возможности и перспективы развития // Труды VI международной конференции “Проблемы управления и моделирования в сложных системах” – Самара: Самарский Научный Центр РАН, 2004. – С. 183–189.
2. IEEE 754-1985: Standard for Binary Floating-Point Arithmetic // ACM SIGPLAN Notices 22(2), Feb. 1987.

ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ МАССИВОВ ХИМИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕСТАТИСТИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ

А.Л. Померанцев, О.Е. Родионова

Институт химической физики РАН
119 991, Москва, ул. Косыгина, 4
E-mail: rcs@chph.ras.ru

Описание экспериментальных данных, построение модели и предсказание новых значений, т.е. то, что кратко называется градуировкой или калибровкой, — это одна из старейших, но вечно актуальных задач. Традиционно, для её решения используется *регрессионный* подход, в основе которого лежит принцип минимизации отклонений модели от эксперимента — метод наименьших квадратов. По сравнению с простой градуировкой по нескольким «характеристическим каналам», методы многомерной градуировки дают значительный выигрыш в точности, а также позволяют ставить и решать задачи, которые невозможно решить в рамках одномерного подхода. При этом оценивание параметров многомерной модели превращается в сложную, некорректно поставленную математическую задачу. Для её решения были предложены различные методы, являющиеся, по сути, развитием традиционного метода наименьших квадратов, а именно: метод главных компонент, метод максимума правдоподобия, ридж-регрессия, проекция на латентные структуры и их различные модификации [1].

Достоинствами этих методов является то, что они применимы для решения сложных, некорректно поставленных задач, например в спектроскопии, где число неизвестных переменных (длин волн) значительно больше, чем число исследованных образцов.

Существенным недостатком их является то, что результат предсказания получается в виде точечной оценки, тогда как на практике часто нужна интервальная оценка, учитывающая неопределённость прогноза. Построение доверительных интервалов традиционными статистическими методами невозможно из-за сложности задачи, а использование имитационных методов затруднительно из-за большого времени расчетов.

В 1962 году Л.В. Канторович предложил *другой подход* [2] к анализу данных, суть которого состоит в том, чтобы заменить минимизацию суммы квадратов отклонений на систему неравенств, которая решается с помощью методов линейного программирования. Позднее этот подход развивался в работах [3, 4], при этом основное внимание уделялось задаче интервальной оценки параметров моделей, погружению области возможных значений этих параметров в гиперкуб, параллелепипед, эллипсоид и т.п.

Однако, если перенести основное внимание с явного описание области возможных значений параметров на построение интервального прогноза отклика, оказывается возможным предложить теоретические подходы, обосновывающие правильность метода и выработать стандартный алгоритм для решения задач линейной калибровки. В этом случае *результат прогноза сразу имеет вид интервала*, поэтому этот метод и был назван «простым интервальным оцениванием» (ПИО).

Рассмотрим линейную регрессионную модель вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \varepsilon, \quad (1)$$

где \mathbf{y} — это вектор откликов размерности $n \times 1$, \mathbf{X} — $n \times p$ -матрица предикторов, \mathbf{a} — вектор неизвестных параметров размерности $1 \times p$, ε — неизвестный вектор погрешностей размерности $n \times 1$. ПИО-метод основан на единственном предположении об ограниченности погрешностей. Это означает, что существует такая величина $\beta > 0$ — *максимальная погрешность* (МП), — что

$$\text{Prob} \{ |\varepsilon| > \beta \} = 0, \text{ и что для любых } 0 < b < \beta \quad \text{Prob} \{ |\varepsilon| > b \} > 0. \quad (2)$$

Основываясь на предположении (2) и используя обучающий набор (\mathbf{X}, \mathbf{y}) состоящий из n образцов, получаем систему неравенств, относительно неизвестных параметров модели \mathbf{a} ,

$$A = \{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{y}^- < \mathbf{X}\mathbf{a} < \mathbf{y}^+ \}, \text{ где } y_i^- = y_i - \beta \text{ и } y_i^+ = y_i + \beta. \quad (3)$$

Область A является замкнутым выпуклым многогранником в пространстве параметров и называется областью возможных значений (ОВЗ) для параметров \mathbf{a} . Область A является объемным аналогом точечной оценки неизвестных параметров в регрессионном анализе.

Используя ОВЗ, возможно решить задачу прогнозирования для нового вектора \mathbf{x} . Если параметры \mathbf{a} варьируются внутри области A , то предсказанное значение отклика $y = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$ принадлежит интервалу

$$V = [v^-, v^+], \quad \text{где } v^- = \min_{a \in A}(\mathbf{x}^T \mathbf{a}), \quad v^+ = \max_{a \in A}(\mathbf{x}^T \mathbf{a}). \quad (4)$$

Интервал V является результатом ПИО прогноза. Для вычисления прогнозных интервалов используются стандартные методы линейного программирования, при этом не нужно строить область A в явном виде.

Классификация образцов и интерпретация прогнозных интервалов. Учитывая то, что линейная калибровка (1) — это задача интерполяции, естественно полагать, что результат прогноза будет «хорошим» в том случае, когда *проверочные* или *новые* образцы будут «похожи» на обучающие образцы. Для характеристики качества прогноза и формализации понятия «похожих» и «непохожих» образцов в рамках ПИО вводятся две меры: ПИО остаток $r(\mathbf{x}, y)$ (разница между центром прогнозного интервала и значением y — характеристика *смещения*), и ПИО размах $h(\mathbf{x})$ (полуширина прогнозного интервала, деленная на МП, — характеристика *воспроизводимости*). Рассмотрим, какие изменения могут произойти с моделью, т.е. с ОВЗ A , при добавлении образца в обучающий набор. Очевидно, что увеличиться A не может. Образец (\mathbf{x}, y) называется

- *внутренним* по отношению к модели, когда он не изменяет ОВЗ, при этом $|r(\mathbf{x}, y)| \leq 1 - h(\mathbf{x})$;
- *выбросом*, когда при его добавлении он уничтожает ОВЗ, при этом $|r(\mathbf{x}, y)| > 1 + h(\mathbf{x})$;
- *внешним*, если он уменьшает ОДЗ, при этом $|r(\mathbf{x}, y)| > 1 - h(\mathbf{x})$;
- *абсолютно внешним*, если $h(\mathbf{x}) > 1$.

По построению, все образцы из обучающего набора являются внутренними. При этом образец, удовлетворяющий $|r(\mathbf{x}, y)| = 1 - h(\mathbf{x})$, называется *граничным* образцом, и именно эти образцы формируют ОВЗ. Прогноз на внутренние («хорошие») образцы надежен, на выбросы — абсолютно неприемлем.

На практике, для решения задач многомерной калибровки, метод ПИО применяется совместно с проекционными методами, такими как метод главных компонент или проекции на латентные структуры [1], так как в мультиколлинеарных задачах $\text{rank } \mathbf{X} < p$. В этом случае ОВЗ параметров не ограничена, МП β стремится к нулю, а ширина интервала прогноза стремится к бесконечности. Для того чтобы преодолеть эту трудность, необходимо регуляризовать задачу, например, спроецировать исходную задачу (1) на подпространство меньшей размерности.

Объединение проекционных методов и ПИО позволяет решать две задачи:

1. Отделение полезной информации от шума (с помощью проекционных методов).
2. Установление области неопределенности для прогноза искомого отклика, т.е. оценка точности построенной калибровки, индивидуально для каждого образца (с помощью ПИО).

В работе приводятся многочисленные практические примеры применения ПИО метода в области хемометрики [6, 7].

Литература

1. HOSKULDSSON A. Prediction Methods in Science and Technology. Vol. 1. – Thor Publishing, Copenhagen, Denmark, 1996.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В. // Сиб.мат.журн. – 1962. – Т. 3, № 5. – С. 701–709.
3. ВОЩИНИН А.П., БОЧКОВ А.Ф., СОТИРОВ Г.Р. // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56, № 7. – С. 76–95.
4. БЕЛОВ В.М., СУХАНОВ В.А., УНГЕР Ф.Г. Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределенности. – Новосибирск: Наука, 1995.
5. ПОМЕРАНЦЕВ А.Л., РОДИОНОВА О.Е. Построение многомерной градуировки методом простого интервального оценивания // Журн. Аналит. Хим. – 2006 (в печати).
6. RODIONOVA O.YE., ESBENSEN K.H., POMERANTSEV A.L. Application of SIC (Simple Interval Calculation) for object status classification and outlier detection – comparison with PLS/PCR // Journal of Chemometrics. – 2004. – V. 18. – P. 402–413.
7. POMERANTSEV A.L., RODIONOVA O.YE., HOSKULDSSON A. Process Control and Optimization with Simple // Chemom. Intell. Lab. Syst. – 2006. – V. 81, N2. – P. 165–179.

ИММУНОКОМПЬЮТИНГ ДЛЯ АНАЛИЗА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДАННЫХ

С.П. Соколова, Л.А. Соколова

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sokolova_sv@mail.ru

Аннотация

Представлены математические модели и вычислительные процедуры иммунокомпьютинга с интервальной техникой для анализа многомерных оперативно получаемых данных с неопределенностью интервального типа (интервальных OLAP-кубов). Приведены примеры решения важных прикладных задач.

Ключевые слова: подход иммунокомпьютинга, многомерная интервальная матрица, интервальный OLAP-куб, сингулярное разложение многомерной интервальной матрицы, вычислительная процедура распознавания

Keywords: immunocomputing approach, interval multidimensional matrix (IMM), singular value decomposition

1. Введение

Последние годы характеризуются значительным ростом информатизации и компьютеризации различных коммерческих, производственных, государственных и других структур. Мощные компьютерные системы, хранящие и управляющие огромными базами данных (хранилищами данных), стали неотъемлемым атрибутом их жизнедеятельности. При оперировании значительными потоками информации возникает задача извлечения из них знаний, необходимых для оперативного принятия эффективных решений и улучшения деятельности организации. Однако естественное стремление усовершенствовать этот процесс нередко наталкивается на значительный объем, сложную структуру и наличие различного типа неопределенностей в информационных потоках.

Для решения таких задач наряду с использованием традиционных подходов необходимы методы современного искусственного интеллекта, к числу которых относится подход иммунокомпьютинга. Он представляет набор математических моделей и вычислительных процедур, основанных на эффективных механизмах обработки информации биомолекулами и свойствах формальной иммунной сети (ФИС) [1–3]. Для этого подхода разработаны теоретические основы и вычислительные процедуры базового алгоритма иммунокомпьютинга [1–3]: проецирование обучающей выборки в пространство ФИС, анализ эволюции клеток ФИС, сингулярное разложение, оптимизация, обучение, распознавание и кластеризация и т.д. Сравнительный анализ эффективности вычислений на основе традиционного подхода (метод наименьших квадратов), интеллектуальных технологий (нейрокомпьютинг, генетические алгоритмы) и подхода иммунокомпьютинга продемонстрировал преимущество последнего по быстродействию и точности [1–2].

В плане развития подхода иммунокомпьютинга на класс интервальных систем можно отметить отдельные результаты: вычислительные алгоритмы сингулярного разложения интервальных действительных (плоских) матриц на основе центрального и адаптивного подходов, и градиентного метода [4–5], результаты решения задач обучения и распознавания [4].

В докладе представлены результаты развития подхода иммунокомпьютинга для анализа интервальных многомерных, оперативно получаемых данных (интервальных OLAP-кубов).

2. Градиентный алгоритм сингулярного разложения интервальной многомерной матрицы

Пусть анализируемые исходные данные оперативно представляются в виде интервальной многомерной матрицы (OLAP-куба) $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}$, $\mathbb{IR}^{n \times m \times k}$ – интервальное пространство соответствующей размерности. Как известно, точечную многомерную матрицу $A = \{a_{ijl}\} \in \mathbb{R}^{n \times m \times k}$, $A \in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}$ можно представить через компоненты сингулярного разложения в виде:

$$A = s_1 Z_1^B X_1 Y_1^T + s_2 Z_2^B X_2 Y_2^T + \dots + s_p Z_p^B X_p Y_p^T,$$

где $s_i = X_i^T A Y_i Z_i^B$, $Y_i^T Y_i = 1$, $X_i^T X_i = 1$, $Z_i^{TB} Z_i^B = 1$, $i = 1, 2, \dots, p$; p – ранг матрицы; $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_p \geq 0$ – ранжированные сингулярные числа матрицы A ; Y_i, X_i, Z_i – соответственно нормированные левый, правый и глубинный сингулярные векторы; верхние индексы T и B , соответственно, означают операции транспонирования и транспонирования в глубину.

Сингулярное число $s_i(\mathbf{A})$ интервальной многомерной матрицы представляется интервалом, ограничивающим множество i сингулярных чисел любой матрицы $A \in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}$:

$$s_i(\mathbf{A}) = \square\{s_i(A) | (\forall A \in \mathbf{A})\}.$$

Задача. Найти минимум и максимум матричной целевой функции — сингулярного числа $s_i(\mathbf{A})$ в области определения элементов интервальной матрицы $A \in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}$.

Решение поставленной задачи получено с использованием модификации градиентного алгоритма вычисления интервального сингулярного числа [5] для случая интервальной многомерной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}$. Вычислительная процедура минимизации и максимизации сингулярного числа $s_i(\mathbf{A})$ поэлементно в интервале $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{A}_k &= A_k + d \cdot Z_i^B(A_k) \cdot X_i(A_k) \cdot Y_i^T(A_k), \\ A_{k+1}(i, j, l) &= \begin{cases} A(i, j, l), & \hat{A}_k(i, j, l) < \underline{A}(i, j, l), \\ \bar{A}(i, j, l), & \hat{A}_k(i, j, l) > \bar{A}(i, j, l), \\ \hat{A}_k(i, j, l), & \hat{A}_k(i, j, l) \in \mathbf{A}(i, j, l), \end{cases} \\ A_0 &\in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m \times k}, \end{aligned}$$

где $Z_i(A_k)$, $X_i(A_k)$, $Y_i(A_k)$ — соответственно, глубинный, левый и правый сингулярные векторы матрицы A_k , $d \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ — коэффициент, характеризующий направление (минимизация, максимизация) и длину шага оптимизации, A_0 — начальная матрица итерации.

Вышеуказанная итеративная процедура позволяет определить нижнюю и верхнюю границы интервальных сингулярных чисел $s_i(\mathbf{A})$ интервальной сингулярной матрицы \mathbf{A} с заданной точностью.

Критерии останова итеративной процедуры определяются следующими переменными:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{l} \sum_{j=k-l+1}^k s_i(A_j), \\ J &= \frac{1}{2} \sum_{j=k-l+1}^k |\text{sign}(M - s_i(A_j)) - \text{sign}(M - s_i(A_{j-1}))|, \end{aligned}$$

где A_j — j -ая матрица итеративной процедуры, k — номер текущего цикла итерации, M — среднее арифметическое i сингулярных чисел, полученных на l последних циклах. Переменная J указывает на количество колебаний целевой функции (относительно установившейся величины), полученной на l последних циклах итерации. Итерацию необходимо останавливать в следующих случаях:

- количество колебаний за определенное количество циклов превосходит заданную величину;
- отсутствие колебаний;
- достижение целевой функции нуля.

Условие останова итерации имеет вид:

$$(J > l - 2) \text{ or } (J = 0) \text{ or } (s_i(A_k)).$$

При минимизации i сингулярного числа, итеративную процедуру можно значительно ускорить, добавив в каждом цикле следующее условие: если $A_{k+1} \neq \hat{A}_k$, $A_0 \in \mathbf{A}$, $A_0 = \sum_j^{i-1} s_j \cdot Z_j^B X_j \cdot Y_j^T$, то $A_{k+1} = A_0$.

Ниже приведен вычислительный алгоритм получения оценки границ i интервального сингулярного числа интервальной многомерной матрицы \mathbf{A} .

Пусть $A_0 \in \{\inf(A), \text{mid}(A), \sup(A)\}$, величина шага оптимизации равна $d = -1$ при вычислении нижней границы, $d = 1$ — верхней границы.

Предложенный алгоритм содержит следующие шаги:

Шаг 1. Провести вышеуказанную итерацию, останов осуществить при выполнении условия останова итерации.

Шаг k. Провести вышеуказанную итерацию, но в качестве начальной матрицы принять матрицу, на которой остановилась эта итерация на предыдущем шаге. При этом коэффициент d уменьшить в два раза.

По завершению данного алгоритма получатся три значения $S = \{S^{(\text{inf})}, S^{(\text{mid})}, S^{(\text{sup})}\}$ при трех различных стартовых матрицах. Причем, при $d < 0$ наименьший элемент из множества S будет оценкой нижней границы множества i сингулярных чисел всевозможных точечных матриц из \mathbf{A} . При $d > 0$, наибольший элемент из S будет оценкой верхней границы с точностью ε .

Таким образом:

$$\inf\{S^{(\text{inf})}, S^{(\text{mid})}, S^{(\text{sup})}\} \approx \inf\{s_i(A) | (\forall A \in \mathbf{A})\}, \quad d < 0,$$

$$\sup\{S^{(\text{inf})}, S^{(\text{mid})}, S^{(\text{sup})}\} \approx \sup\{s_i(A) | (\forall A \in \mathbf{A})\}, \quad d > 0.$$

В докладе приведены численные примеры реализации предложенного алгоритма, оценены параметры его быстродействия. На основе этого алгоритма получены и представлены модификации вычислительных процедур классификации и кластеризации интервальных многомерных данных.

Приведены результаты разработки интеллектуальных систем для решения реальных прикладных задач. Представлены математические модели, вычислительные процедуры и результаты оценивания кредитных рисков, классификации стадий эпизоотического процесса в различных ландшафтно-экологических районах природного очага чумы.

3. Литература

1. TARAKANOV A.O., SKORMIN V.A., SOKOLOVA S.P. Immunocomputing: Principles and Applications. – N.Y.: Springer, 2003. – 193 с.
2. TARAKANOV A., DASGUPTA D. A formal model of an artificial immune system // BioSystems. – 2000. – 55 (1-3). – P. 151–158.
3. SOKOLOVA L.A. Index design by immunocomputing // Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2787. – Berlin: Springer. – 2003. – P. 120–127.
4. SOKOLOVA S.P., SOKOLOVA L.A. Immunocomputing for Complex Interval Objects // Conference Proceedings of the 1-st International Conference on Artificial Immune Systems, University of Kent at Canterbury, 2002, UK. – P. 222–230.
5. Соколова С.П., Тохтабаев А.Г. Вычислительная процедура определения сингулярных чисел интервальной действительной матрицы // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Том 4, Интервальный анализ. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – С. 66–71.
6. Соколова С.П., Зиямов Т.П., Абрамов Б.А., Абдуллина В.З. Интеллектуальный анализ многомерных данных. – Алматы, 2006. – 108 с.

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ И НЕЧЁТКИЙ МЕТОДЫ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В.Т. Тарушкин

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vttar@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается классическая вычислительная задача определения по методу наименьших квадратов закона растворимости азотнокислого натрия в зависимости от температуры. Проводится расширение поля вещественных чисел за счет использования чисел интервальных и нечетких. Сообщается о результатах моделирования на ЭВМ.

Ключевые слова: интервальные вычисления, нечеткие вычисления
Keywords: interval computing, fuzzy computing

1. Интервальный метод наименьших квадратов

Рассматривается задача Д.И. Менделеева–А.А. Маркова–Ю.В. Линника [1] определения закона растворимости $y = ax + b$ азотнокислого натрия $NaNO_3$ для значений температур x_i :

$$0, 4, 10, 15, 21, 29, 36, 51, 68.$$

Величины растворимости азотнокислого натрия для введенных температур предполагаются интервальными числами Y_i

$$[66.6, 66.8], [70.0, 72.0], \dots, [125.0, 125.2]. \quad (1)$$

В силу (1) интервальными считаются значения температур X_i

$$0 = [0, 0], 4 = [4, 4], \dots, 68 = [68, 68],$$

а также неизвестные параметры $A = [a - \delta, a + \delta]$, $B = [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$. Здесь $a = 67.5$, $b = 0.87$ – классические значения оцениваемых параметров, δ , ε – неизвестные поправки. Введем модули невязок

$$\eta_i = |Y_i - A - B \times X_i| \quad (i = 1, \dots, 9).$$

Параметры δ , ε находятся из условия того, чтобы

$$Q = \sum_{i=1}^9 \eta_i^2$$

была минимальной, что приводит к уравнениям

$$\partial Q / \partial \varepsilon = 0,$$

$$\partial Q / \partial \delta = 0.$$

Приводятся результаты моделирования на ЭВМ этих уравнений.

Общий случай исследования этой задачи, а также задач томографии [2] состоит в исследовании систем

$$z_k = H_k x \quad (k = 1, \dots, N), \quad (2)$$

где z_k – m -мерный вектор измеряемых интервальных значений (в рассматриваемом примере $m = 9$ величин растворимости), H_k – известная матрица из m строк и n столбцов (в рассматриваемом примере $n = 2$), x – n -мерный интервальный вектор неизвестных параметров. На основе теории стохастических процессов [2] изучаются теоремы существования решений в (2).

2. Нечеткий метод наименьших квадратов

Вектор измеряемых величин (1) можно записать в виде треугольных нечетких чисел

$$[66.6, /66.7, /66.8], \dots, [125.0, /125.1, /125.2]. \quad (3)$$

Числа (3) являются частным случаем нечетких трапецевидных чисел [3] вида

$$C = [c_1, /c_2, /c_3, /c_4], \quad (4)$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Как нечеткое множество C запишется в виде

$$C = \{(x, \mu_C(x)) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

функция принадлежности

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < c_1, \\ (x - c_1)/(c_2 - c_1), & \text{если } c_1 \leq x \leq c_2, \\ 1, & \text{если } c_1 < x < c_2, \\ (x - c_4)/(c_3 - c_4), & \text{если } c_3 \leq x \leq c_4, \\ 0, & \text{если } x > c_4. \end{cases}$$

Эта формула не определена для $c_1 = c_2, c_3 = c_4$. Полагая для этого случая

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < c_1, \\ 1, & \text{если } c_1 \leq x \leq c_4, \\ 0, & \text{если } x > c_4, \end{cases}$$

приходим к интервальным числам

$$[c_1, /c_2, /c_3, /c_4] = [c_1, c_4].$$

Аналогичным образом, если $c_2 = c_3$, получаем нечеткие треугольные числа.

Пусть $A = [a_1, /a_2, /a_3, /a_4], B = [b_1, /b_2, /b_3, /b_4]$ – трапецевидные нечеткие числа, для которых определим сложение, вычитание, умножение:

$$A + B = [a_1 + b_1, /a_2 + b_2, /a_3 + b_3, /a_4 + b_4], \quad (5)$$

$$A - B = [a_1 - b_4, /a_2 - b_3, /a_3 - b_2, /a_4 - b_1], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A \times B = & [\min(a_1b_1, a_4b_1, a_1b_4, a_4b_4), \\ & \min(a_2b_2, a_3b_2, a_2b_3, a_3b_3), \\ & \max(a_2b_2, a_3b_2, a_2b_3, a_3b_3), \\ & \max(a_1b_1, a_4b_1, a_1b_4, a_4b_4)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $0 \notin [b_1, b_4], 0 \notin [b_2, b_3]$ и $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ таковы, что $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, тогда определено трапецевидное нечеткое число $C = [c_1, /c_2, /c_3, /c_4]$, являющееся делением нечетких трапецевидных чисел A на B через деление интервальных чисел, т. е.

$$[c_1, c_4] = [a_1, a_4]/[b_1, b_4] = [a_1, a_4] \times [1/b_4, 1/b_1],$$

$$[c_2, c_3] = [a_2, a_3]/[b_2, b_3] = [a_2, a_3] \times [1/b_3, 1/b_2].$$

Из (5), (6) следуют законы коммутативности

$$A + B = B + A, \quad A \times B = B \times A,$$

а также законы ассоциативности

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Обозначим через $0 = [0, /0/, 0, /0]$, $1 = [1, /1/, 1, /1]$ нейтральные элементы для сложения и умножения:

$$A + 0 = A, \quad A \times 1 = A,$$

но, как и для интервальных чисел,

$$0 \in (A - A), \quad 1 \in (A/A).$$

Закон субдистрибутивности

$$A(B + C) \subseteq AB + AC$$

подобно [4] может быть проиллюстрирован практически на том же примере, учитывая, что интервальные числа являются частым случаем нечетких трапецевидных чисел:

$$[1, /1/, 2, /2]([1, /1/, 3, /3] + [-2, /-2/, 2, /2]) = [-2, /-2/, 10, /10],$$

$$[1, /1/, 2, /2][1, /1/, 3, /3] + [1, /1/, 2, /2][-2, /-2/, 2, /2] = [-3, /-3/, 10, /10].$$

Запишем значения температур X_i в виде трапецевидных нечетких чисел:

$$[0, /0/, 0, /0], [4, /4/, 4, /4], \dots, [68, /68/, 68, /68].$$

Аналогичным образом запишем величины Y_i растворимости азотнокислого натрия:

$$[66.6, /66.7/, 66.7, /66.8], \dots, [125.0, /125.1/, 125.1, /125.2].$$

Полагая неизвестные параметры a , b закона растворимости $y = ax + b$ нечеткими трапецевидными числами A , B , получим условные уравнения нечеткого метода наименьших квадратов:

$$Z_i = Y_i - A - B \times X_i \quad (i = 1, \dots, 9),$$

где $Z_i = [z_i^1, /z_i^2/, z_i^3, /z_i^4]$ – нечеткая трапецевидная невязка, для которой модуль η_i определен как

$$\eta_i = |Z_i| = \max(|z_i^4 - z_i^1|, |z_i^3 - z_i^2|)$$

(здесь при $z_i^4 = z_i^3$, $z_i^1 = z_i^2$ модуль нечеткого трапецевидного числа совпадает с модулем интервального числа). Неизвестные параметры $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ находим из условия минимума

$$Q = \sum_{i=1}^9 \eta_i^2$$

при условии, что

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4,$$

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4.$$

Приведем пример программы FUZZYARITH на языке Паскаль, моделирующей арифметику трапецевидных нечетких чисел:

```
PROGRAM FUZZYARITH (OUTPUT);
  TYPE FN = RECORD FTM1 , FTM2 , FTM3 , FTM4 : REAL END ;
  VAR A , B : FN ;
BEGIN
  A.FTM1 := 1 ;
  A.FTM2 := 2 ;
  A.FTM3 := 3 ;
  A.FTM4 := 4 ;
  B := A ;
  WRITELN('A=[', A.FTM1:1:0, ',/', A.FTM2:1:0, ',/',
          A.FTM3:1:0, ',/', A.FTM4:1:0, ']');
  WRITELN('A+B=[', A.FTM1 + B.FTM2:1:0, ',/', A.FTM2 + B.FTM2:1:0,
          ',/', A.FTM3 + B.FTM3:1:0, ',/', A.FTM4 + B.FTM4:1:0, ']');
END.
```

Программа с помощью оператора присваивания образует нечеткое трапецевидное число

$$A = [1, /2, /3, /4],$$

определяет ему равное $B = A$, печатает A и $A + B$.

Если вместо операторов присваивания

```
A.FTN1 := 1 ;  
A.FTN2 := 2 ;  
A.FTN3 := 3 ;  
A.FTN4 := 4 ;
```

вести операторы ввода:

```
WRITELN('a1='); READ( A.FTN1 );  
WRITELN('a2='); READ( A.FTN2 );  
WRITELN('a3='); READ( A.FTN3 );  
WRITELN('a4='); READ( A.FTN4 );
```

то получим усиление свойства массовости программы.

Если к программе добавить оператор

```
WRITELN('A - B = [ ', A.FTN1 - B.FTN4:1:0, ', /', A.FTN2 - B.FTN3:1:0,  
', / ', A.FTN3 - B.FTN2:1:0, ', /', A.FTN4 - B.FTN1:1:0, ' ] ');
```

то получим вычитание нечетких трапецевидных чисел.

Если ввести процедуры – функции отыскания максимума и минимума, можно запрограммировать умножение нечетких трапецевидных чисел и т.д. Возникает задача построения на языке Паскаль модуля для нечетких арифметических операций (пакета прикладных программ, что может быть рассмотрено отдельно).

Подобным образом остальные законы интервальной арифметики, применяемые в методе наименьших квадратов, находят свое обобщение для случая арифметики нечеткой.

3. Литература

1. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.:ГИФМЛ, 1958. – 333 с.
2. Тарушкин В.Т. Стохастические задачи реконструктивной томографии. Материалы международной конференции и чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. – М.: Из-во МГУ, 1996. – С. 332–335.
3. Кузьмин Б.В. , Травкин С.И. Теория нечетких множеств в задачах управления и принципах устройства нечетких процессоров // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 11. – С. 3–33.
4. Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Введение в интервальные методы вычислительной математики. – Иркутск: Из-во ИГУ, 1982. – 108 с.

О КВАНТОВАНИИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН

Л.С. Терехов

*Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Россия, 644099 г. Омск, ул. Певцова, 13
E-mail: terekhov@iitam.omsk.net.ru*

Опыт и разработки по оценкам погрешностей измерения привели к необходимости уйти от определения погрешности как отличия измеренного значения величины от истинного.

Неприемлемость указанного определения погрешности состоит в том, что истинное значение измеряемой величины, отождествляемое с точным, оказывается для физики, имеющей своей основой эксперимент, значением гипотетическим и, таким образом, не может быть опорным в определении погрешности измерения. Систематический отход от опоры на не измеряемые значения предпринят в теоретической работе по метрологии [1]. В этой работе погрешности измерения рекомендуется оценивать на основе нового подхода к статистической обработке массива отсчётов, а также предложено использовать выражение, отвечающее новому подходу — "неопределённость измерения" вместо — "погрешность". Но сомнения в адекватности представления результата измерения величиной с точным значением пока нет: "Неопределённость измерений понимают как неполное знание значения измеряемой величины. . ." [1].

Однако неопределённость сомножителей соотношения неопределённости в его классических формах тождественна размытости самих измеряемых величин, а не вследствие неполноты знания о значении измеряемой величины. Например, если измеряемыми величинами являются время прихода сигнала t и частота f , то их неопределённости соответственно суть: длительность сигнала Δt и полоса частот сигнала Δf . Полосе частот уединённого сигнала Δf соответствует сплошной спектр. Сигналу длительности Δt соответствует непрерывная функция времени. Неопределённости Δt и Δf , входящие в физическое соотношение неопределённости для макроскопических величин, имеют, таким образом, заметное отличие от понятия неопределённости измерения в метрологии [1]. В работе по метрологии результат измерения представлен как неопределённость, описывающая результат полнее, нежели действительное, точечное число. Однако окончательный шаг по освобождению от модели точечного числа при представлении результата измерения не делается, возможно, по следующей причине. В практике измерений и обработки, а также и в теории измерений выявляется и зреет противоречие. С одной стороны, результат измерений содержит неустранимую неопределённость, размытую как целое по некоторому интервалу. И, согласно операционному принципу физики, величина именно такой природы должна быть в физике основной, поскольку она порождена в натурном измерении. С другой же стороны вычисления в естествознании и математике, в том числе — вычисление самих неопределённостей — ведутся с действительными числами, свойства которых заметно отдалены от величин, порождаемых измерениями. В [1] принято, можно сказать, соломоново решение. Допускается, что результат измерения — это величина с неустранимой неопределённостью. Но не изгоняется и точное значение: оно лишь неточно локализовано в пределах неопределённости. Такой компромисс — это основание для пользования свободной от указанного противоречия традиционной математикой действительных чисел.

В работе [2] сделан шаг к полному отказу от использования понятия точного значения при представлении результата измерения параметра макроскопической величины. Что, конечно, лишь подчёркивает указанное выше противоречие. Однако такой шаг — следствие обобщённого радиолокационного соотношения неопределённостей (РСН), полученного для оценки погрешностей (неопределённостей) измерения параметров макроскопических объектов. Выражение для обобщённого РСН, в отличие от его классической, не обобщённой формы, допускает минимизацию неопределённости измеряемой величины. Минимизация, в свою очередь, достигается квантованием сомножителей неопределённости РСН. В отличие от классических форм соотношений неопределённости, в которых сомножители являются непрерывными величинами, и вследствие этого допускающими, хотя бы и потенциально, возможность нулевой неопределённости одного из сомножителей, квантованная неопределённость ни одного из сомножителей обобщённого РСН не может быть уменьшена

до нуля. Последнее означает новое понятие результата измерения: точное значение не существует в измерении даже потенциально. Например, минимальная неопределённость измерения частоты и соответствующая ей оптимальная длительность времени измерения (иначе — времени анализа, накопления, усреднения) — это не равные нулю кванты. Квант — это неделимое целое и в пределах кванта значения измеряемой величины неразличимы. В этом качестве квант удовлетворяет понятию физически бесконечно малой. Физически бесконечно малая — понятие, определённое лишь качественно, и строгого количественного критерия не имеет. В предлагаемом подходе физически бесконечно малая отождествлена с интервалом неопределённости и определена количественно [2]. Оптимальный интервал неопределённости измеряемой величины определяется её локальным масштабом неоднородности в конкретном явлении и отношением сигнала к шуму. Обсуждаемый результат — следствие обобщения РСН, состоящего в дополнении РСН не выявляемым ранее, детерминированным, но неустраняемым компонентом погрешности измерения. Результат о недостижимости точного значения, пусть даже и потенциально, принципам физики не противоречит. Измерение — это физический процесс, необходимым параметром которого является энергия. Энергия физического процесса не может быть "размещена" в нулевом интервале какой бы то ни было физической величины. Например, энергию нельзя сосредоточить на одной единственной частоте или — в мгновении нулевой длительности.

Аналогия минимизации погрешности измерения имеется с результатом по минимизации погрешности вычислений в известном учебнике Н.С. Бахвалова с соавторами [3]. Указанная аналогия, однако, не совсем полная, поскольку в задачах физики [2, 4] шаг и интервал в общем случае не вырождаются в одно понятие; численно они также в общем случае могут быть неравными.

Основные величины физики должны вводиться так, чтобы находиться в согласии с операционным принципом, согласно которому можно указать последовательность операций, измерений, определяющих эту величину. На основе развиваемого подхода можно говорить, что выявленное существование неустраняемой неопределённости как неотъемлемое свойство основной физической величины есть критерий того, что рассматриваемая физическая величина удовлетворяет операционному принципу и не является артефактом. В отличие, например, от величин, определение которых не исключает, гипотетически, конечно, их нулевой погрешности.

Процесс измерения, управляемый в соответствии с алгоритмом минимизации неопределённости измерения, характеризуется на каждом шаге (при каждом отсчёте) и на всём пути, в соответствии с пошаговой генерацией сетки отсчётов [2, 4], минимумом физической величины, называемой действием. Наименьшая неопределённость измерения на всём пути есть следствие того, что путь процесса измерения отвечает принципу наименьшего действия. Обсуждаемый процесс измерения включает отсчёты, вычисления и управление параметрами измерителя. Поэтому можно говорить, что весь измерительно-вычислительный процесс, построенный в соответствии с алгоритмами [2, 4, 5], есть имитация физического процесса, имеющего наименьшее действие. Например, в [4] представлены способ, алгоритм и программа имитационного моделирования радиозондирования неоднородного слоя плазмы в соответствии с рассматриваемым алгоритмом. В приложении к стандартным параметрам ионосферного слоя F2 полученные основные результаты суть следующие. Количество отсчётов и длительность сеанса должны уменьшиться в ~ 3 раза (без потери точности), погрешность измерения в самой "трудной" области в окрестности максимума электронной концентрации слоя F2 должна уменьшиться в ~ 7 раз. Можно предположить, что процесс вычисления, управляемый по алгоритму [2] и имитирующий ход натурального процесса, окажется по результирующей эффективности (и — прежде всего — по погрешности) приемлемым.

Если принимать за истинное значение величину с наименьшей неопределённостью, то известное определение погрешности получает новое содержание в почти прежней форме: погрешность — это отличие измеренного значения от истинного; истинное значение величины — это результат измерения величины с наименьшей неопределённостью.

Целью настоящего сообщения было показать, что результат натурального измерения — это величина, содержащая неустраняемую и неравную нулю неопределённость. То есть, это физическая величина, математической моделью которой в наибольшей степени может служить величина интервальная [6, 7]. Поскольку законы естествознания записаны в форме, ориентированной на работу с натуральными, рациональными и действительными числами, но не интервальными, то затронутая проблема может быть близкой специалистам, развивающим методы интервального анализа.

Литература

1. Применение "Руководства по выражению неопределённости измерений" МИ 2552-99. Рекомендация. Государственная система обеспечения единства измерений. — Санкт-Петербург: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999.
2. ТЕРЕХОВ Л.С. Интервальная природа числа в физике как следствие минимизации погрешности измерения // Труды Пятой междунар. конф., посвящённой памяти академика А.П. Ершова "Перспективы систем информатики. Международное совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений". — Новосибирск: ИСИ, 2003. — С. 149–152.
3. БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. Численные методы. — М.: лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 83–84.
4. ТЕРЕХОВ Л.С. О полной погрешности радиоволновых измерений параметров неоднородного слоя плазмы // Геомагнетизм и аэрономия. — 1998. — Т. 38, № 6. — С. 142–148.
5. Патент на изобретение № 2066051 РФ МПК G01N 22/00 от 05.11.92 г. "Способ определения профиля электронной концентрации слоя плазмы" авторов Терехова Л.С., Зеленкова В.Е., Шапцева В.А. Бюллетень изобретений № 14 от 1996 г. Заявитель ИИТПМ СО РАН. Решение о выдаче патента на изобретение от 26.01.95 г.
6. ШАРЫЙ С.П. Решение интервальных линейных систем со связями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отделение. — Новосибирск, 2004. — Т. 7, № 4. — С. 363–376.
7. ШОКИН Ю.И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ КООРДИНАТ СМЕЩЕНИЙ ТОРЦОВ ЛОПАТОК И ЛОПАСТЕЙ ГТД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

В.В. Тулупова

*Институт проблем управления сложными системами РАН
443020, Самара, ул. Садовая, 61, Россия
E-mail: tulupova@iccs.ru*

Аннотация

Основная составляющая погрешностей систем измерения многокоординатных смещений торцов лопаток компрессора и лопастей винтовентилятора газотурбинного двигателя — трансформированные погрешности алгоритмов вычисления координат, обусловленные погрешностями преобразований в измерительных каналах. В работе рассматривается способ уменьшения трансформированных составляющих погрешностей с использованием интервальной математики. Приводятся сравнительные оценки эффективности алгоритмов вычислений координат смещений торцов лопаток и лопастей ГТД при традиционной реализации метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений и его интервальной модификации, реализованной на PASCAL-XSC.

Ключевые слова: газотурбинный двигатель, лопатки компрессора, лопасти винтовентилятора, координаты смещений, кластер одновитковых вихретоковых датчиков, алгоритмы вычисления координат, трансформированная погрешность

Keywords: gas-turbine engine, blades of compressors, ducted prop-fans, coordinates of displacements, cluster of eddy-current sensors, algorithms for coordinates calculation, transformed miscalculation

В работе [1] рассматриваются системы измерения многокоординатных смещений: система измерения X, Y, Z -координат смещений торцов лопаток, ориентированных на применение в экспериментальных исследованиях компрессора ГТД в предпомпажном и помпажном состояниях, и система измерения X, Y, Z, φ -координат для испытаний винтовентилятора в рабочих режимах работы двигателя. Системы основаны на совокупных методах измерения координат смещений, предусматривающих использование кластера одновитковых вихретоковых датчиков (ОВТД) с чувствительными элементами в виде отрезка проводника [2, 3]. Количество и расположение чувствительных элементов датчиков кластера зависит от характера измеряемых смещений и определяется числом искомым координатных составляющих, а вычисление координат осуществляется путем решения системы уравнений, полученных на основе экспериментальных семейств градуировочных характеристик (ГХ), связывающих коды, соответствующие выходным сигналам датчиков с искомыми координатами. Алгоритмы вычисления координат в системах измерения, реализующих эти методы, базируются на аппроксимации семейств ГХ полиномиальными или кусочно-линейными функциями нескольких переменных и решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона. Проведенный анализ погрешностей систем измерения показал, что наибольший вклад вносят погрешности алгоритмов вычисления координат, причем основная составляющая — трансформированная погрешность, обусловленная наличием погрешностей входных данных алгоритма, определяемых предыдущими преобразованиями в системе измерения [4, 5]. Величина трансформированной погрешности не зависит от используемых в системе способов представления семейств ГХ и возрастает с увеличением числа искомым координат.

Уменьшение трансформированной составляющей погрешности возможно за счет ужесточения требований к точности преобразования и обработки, т.е. путем снижения погрешности входных данных. Однако для разработчика системы измерений погрешности входных данных в большинстве случаев являются заданными, так как погрешности средств измерений и согласующих устройств не могут быть уменьшены для конкретных физических реализаций. Задача сложна еще и тем, что имеются погрешности аппроксимации семейств ГХ, получаемых экспериментально, и, в общем случае, является некорректной по Тихонову [6]. Поэтому проблема уменьшения погрешностей результатов измерений за счет уменьшения трансформированной составляющей путем выбора эффективных по точностным показателям алгоритмов вычислений является очень актуальной при разработке систем измерения многокоординатных смещений.

Для повышения точности результатов вычислений за счет уменьшения трансформированной составляющей предлагается использовать развитый математический аппарат интервальных вычислений [7, 8]. Этот аппарат позволяет единообразным способом учесть все виды погрешностей

вычислительного процесса: приближенно известные входные данные заменяются интервалами с гарантированно точными значениями границ, погрешности округлений лишь несколько расширяют границы промежуточных результатов, а численный метод строится так, чтобы погрешность метода включалась в вычисленные границы конечного результата. Переход от точечных представлений кодов каналов измерений к интервальным возможен на основе данных о границах суммарной погрешности каналов с использованием действующих нормативных документов по метрологии. К преимуществам этого подхода относятся возможности оценки погрешности результатов измерений в ходе эксперимента, анализ распространения ошибок вычислений (Error Propagation) при проектировании алгоритмического обеспечения системы. Несомненным достоинством интервальных вычислений для систем измерения является возможность использования в условиях реального времени.

В качестве программного инструментария для реализации алгоритмов в системах измерений предлагается использовать SC-языки, обладающих высокой независимостью программного обеспечения от аппаратных платформ и операционных систем и эффективностью реализации по критериям реального времени за счет аппаратной поддержки любыми процессорами с плавающей точкой, соответствующим стандарту ANSI/IEEE-754 [9].

В работе рассматриваются сравнительные оценки трансформированных составляющих погрешностей алгоритмов вычисления координат смещений торцов лопаток и лопастей ГТД при традиционной реализации метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений и его интервальной модификации, реализованной на PASCAL-XSC. Анализ точности алгоритмов осуществляется с помощью специально разработанной программы, моделирующей измерения координат кластером ОБТД и решение системы нелинейных уравнений.

Погрешности алгоритмов обеих реализаций определялись с помощью специальной программы моделирования [5], которая содержит блоки “Измерение”, “Вычисление координат” и “Погрешности”.

В блоке “Измерение” имитируется преобразование многокоординатных смещений торцов лопаток (X, Y, Z) и лопастей в цифровые коды (C_1, C_2, C_3) . Зависимости цифровых кодов от координат смещений, представляющие собой семейства ГХ измерительных каналов, задаются полиномиальными функциями нескольких переменных. Для анализа влияния погрешностей входных данных на точность алгоритмов вычисления моделируются также связанные с ними изменения кодов $(\Delta C_1, \Delta C_2, \Delta C_3)$. Для оценки погрешностей традиционной реализации при полиномиальном представлении семейства ГХ и измерения X, Y, Z -координат моделирование изменения кодов осуществляется как

$$C_n = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K a_{ijk} X^i Y^j Z^k \pm \alpha_{pn} \Delta C_n, \quad n = 1, 2, 3,$$

где a_{ijk} – коэффициенты полиномиальной аппроксимирующей функции, I, J, K – степени полинома, ΔC_n – абсолютные погрешности предыдущих преобразований в канале измерения, α_{pn} – p -тый элемент множества, характеризуемого в комбинаторике как размещение с повторением [10], определяющий один из вариантов знака погрешности ΔC_n $(-1, +1)$ для n -ого канала; введение коэффициента знака погрешности α_{pn} необходимо для перебора возможных комбинаций погрешностей каналов (например, для трех каналов (три ОБТД в составе кластера) число таких комбинаций равно 8).

А для оценки погрешности интервальной реализации конструируются интервалы кодов с учетом погрешностей преобразований ΔC_n в n -ом канале измерения

$$\left[\left(\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K a_{ijk} X^i Y^j Z^k - \Delta C_n \right), \left(\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K a_{ijk} X^i Y^j Z^k + \Delta C_n \right) \right], \quad n = 1, 2, 3.$$

В блоке “Вычисление координат” осуществляется решение системы уравнений. В ходе решения для значений кодов (на выходе блока “Измерение”), соответствующих измеряемым координатам, находятся расчетные значения координат (на выходе блока “Вычисление координат”). Решение системы нелинейных уравнений осуществляется с помощью метода Ньютона в традиционной реализации и подпрограммы AllNLSS модуля nlss PASCAL-XCS в интервальной реализации. При этом если семейства ГХ представлены аппроксимируемыми полиномиальными функциями, то системы уравнений заданы в виде массивов коэффициентов этих функций. При представлении семейств ГХ кусочно-линейными интерполирующими функциями системы уравнений задаются в виде таблиц значений кодов, вычисленных для определенных значений координат с помощью полиномиальной функции.

Сравнение измеряемых и расчетных значений координат производится в блоке “Погрешности” и полученные на его выходе оценки характеризуют искомые погрешности. Они представляются в

виде приведенных погрешностей ($\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_\varphi$) и определяются по формулам:

$$\delta_x = \Delta X / (X_{max} - X_{min}), \quad \delta_y = \Delta Y / (Y_{max} - Y_{min}),$$

$$\delta_z = \Delta Z / (Z_{max} - Z_{min}), \quad \delta_\varphi = \Delta \varphi / (\varphi_{max} - \varphi_{min}),$$

где $\Delta X = X^* - X$, $\Delta Y = Y^* - Y$, $\Delta Z = Z^* - Z$, $\Delta \varphi = \varphi^* - \varphi$, X_{max} и X_{min} , Y_{max} и Y_{min} , Z_{max} и Z_{min} , φ_{max} и φ_{min} — границы диапазонов измерений. При интервальной реализации в качестве точечных оценок (X^* , Y^* , Z^*) выбираются средние точки (*mid*) соответствующих интервалов.

Погрешности вычисления координат являются функциями нескольких переменных, причем число переменных совпадает с числом измеряемых координат (или числом ОВТД в кластере). Для удобства графического представления погрешностей вычисления X, Y, Z - и X, Y, Z, φ -координат используется алгоритм последовательного перебора. Он заключается в том, что для фиксированных значений координат X и Z перебираются все возможные значения координаты Y (и, если необходимо, φ), оцениваются значения погрешностей ($\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_\varphi$) и выбираются максимальные значения ($\delta_x^{max}, \delta_y^{max}, \delta_z^{max}, \delta_\varphi^{max}$), которые и соответствуют фиксированным значениям X и Z . Такой алгоритм позволяет получить верхние оценки погрешностей во всем рабочем диапазоне изменений, которые графически отображаются в системах координат (δ_x^{max}, X, Z), (δ_y^{max}, X, Z), (δ_z^{max}, X, Z), ($\delta_\varphi^{max}, X, Z$).

В работе представлены результаты численных экспериментов по оценке точности алгоритмов решения систем нелинейных уравнений для традиционной и интервальной реализаций.

Литература

1. Тулупова В.В. Системы измерения многокоординатных смещений торцов лопаток компрессора и лопастей винтовентилятора. Дисс. канд. техн. наук. – Самара, 2005.
2. Патент 2138012 РФ, МКИ G 01 В 7/14. Способ измерения параметров движения лопаток ротора турбомашин / Боровик С.Ю., Игонин С.Н., Секисов Ю.Н., Скобелев О.П., Тулупова В.В., Хритин А.А., Слепнев А.В. - №96121455/28; Заявл. 01.11.96; Опубл. 20.09.99, бюл. №26.
3. Патент 2272990 РФ, МКИ G 01 В 7/14. Способ измерения многомерных перемещений и обнаружения колебаний торцов лопаток ротора турбомашин / Боровик С.Ю., Райков Б.К., Секисов Ю.Н., Скобелев О.П., Тулупова В.В. - №2002117185/28; Заявл. 27.06.2002; Опубл. 27.03.2006, бюл. №9.
4. МИ 2174-91 ГСИ. Аттестация алгоритмов и программ обработки данных при измерениях. Основные положения. – Санкт-Петербург, 1991. – 19 с.
5. Инюцин А.А., Тулупова В.В. Анализ погрешностей алгоритмов вычисления координат смещений торцов лопаток и лопастей // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды VII международной конференции. – Самара, 2005. – С. 181–188.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.
7. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
8. Меньшиков Г.Г. Интервальный анализ и методы вычислений: Конспект лекций (12 выпусков). – СПб: НИИ Химии СПбГУ, 1996–2001.
9. Клатте Р., Кулиш У., Неага М., Рац Д., Ульльрих Х. PASCAL-XSC. Язык численного программирования. – М.: Изд. "ДМК Пресс". – 2000. – 350 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

СИМВОЛЬНО-ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА УПРАВЛЕНИЙ И РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

Н.А. Хлебалин, А.Ю. Костиков, В.В. Данилов

*Электростальский Политехнический Институт (филиал)
Московского Государственного Института Стали и Сплавов
Россия, 144000, Электросталь, Первомайская ул., 7
E-mail: khleb@kodos.ru*

Необходимость решения упомянутой в названии доклада задачи возникает в связи с разработкой алгоритмов настройки цифровых управлений, регулирующих устройств и компенсаторов нелинейностей и возмущений в современных технологических установках с учётом их механической системы.

Для обеспечения плавности движения мехатронной автоматической системы (МАС) нужно подавать на входы ее приводов “сглаженные” (имеющие ограниченные скорость, ускорение и рывок) задающие воздействия (управления). Генерирование таких воздействий осуществляется путем решения задачи условного нелинейного математического программирования (УНЛП) в интервальной постановке.

Для получения робастных регуляторов МАС можно искать, например, решение интервальной задачи модального управления (ИЗМУ) [1]. При точно известной модели объекта и задании требований к замкнутой системе “объект–регулятор” в виде коэффициентов желаемого характеристического полинома она сводится к нескольким стандартным задачам линейной алгебры. Если же значения параметров объекта известны с точностью до принадлежности к некоторым интервалам, приходится рассматривать ее как оптимизационную задачу. В этом случае процедура решения ИЗМУ основывается на сочетании методов УНЛП, аппарата интервального анализа (ИА) и возможностей компьютерных систем символьных вычислений (КССВ). При этом появляется свобода выбора как методов УНЛП, так и целевой функции в выбранном методе. Исследования особенностей реализации алгоритма решения ИЗМУ в системе символьных вычислений Maple и системе Matlab приводятся в докладе.

На плавность движения МАС сильное влияние оказывают нелинейности, например, трение. Современные динамические модели трения содержат интервальные параметры, что делает актуальной задачу их исследования с привлечением интервальной математики [2].

Литература

1. Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // ДАН СССР. — 1991. — Т. 316, № 4. — С. 846–850.
2. Хлебалин Н.А., Костиков А.Ю. Библиотека моделей трения в SIMULINK (опыт создания и использования) // Труды Второй Всероссийской научной конференции “Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB”. — М.: ИПУ РАН, 2004 (на компакт-диске, ISBN 5-201-14971-5). — С. 1611–1633.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ СПРОСОМ И ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОТЕРЬ ЗАПАСА⁵

Е.В. Чаусова

Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: chau@ef.tsu.ru

Аннотация

Рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с неопределенностью в данных. Неизвестные параметры системы (спрос и коэффициенты потерь запаса) задаются в виде интервалов, в границах которых они произвольным образом принимают свои значения. Предполагается, что спрос имеет нестационарный характер и интервал его возможных значений меняется во времени. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления с обратной связью, определены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами и разработан вычислительный алгоритм ее построения.

Ключевые слова: система управления запасами, сетевая модель, неизвестный спрос, потери запаса, интервальная неопределенность, интервальный анализ, арифметика Каухера

Keywords: inventory control system, network model, unknown demand, storage loss, interval uncertainty, interval analysis, Kaucher interval arithmetic

1. Введение

К проблеме управления запасами сводятся многие задачи оптимального планирования складских, производственных, транспортных, финансовых и других систем. В классической теории управления запасами принято считать, что априорная неопределенность, свойственная реальным системам управления запасами, имеет стохастический характер [1–3]. Однако применение стохастических моделей на практике во многих случаях затрудняется из-за отсутствия информации о вероятностных характеристиках системы. В работах [4–8] рассматриваются интервальные модели управления запасами, основанные на предположении о нестохастической природе неопределенности, присутствующей в системе. Неизвестные параметры системы описываются интервалами, в границах которых они произвольным образом принимают свои значения. На практике описание неопределенности по сравнению с вероятностным является более простым и доступным, поскольку границы интервалов неопределенности оценить проще, чем вероятностные характеристики. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики [9–12], который позволяет эффективно решать задачи с интервальной неопределенностью и в последнее время привлекает все большее внимание практиков. В [5–7] рассматриваются динамические сетевые модели систем управления запасами с интервальной неопределенностью спроса. Неизвестный спрос задается в виде интервала с постоянными (стационарный спрос) или переменными (нестационарный спрос) границами. В работе [8] в модель со стационарным спросом вводится дополнительная неопределенность, источником которой являются коэффициенты потерь запаса, учитывающие естественные изменения в его количестве и свойствах (порчу, убыль, устаревание запаса и т.д.). Это объясняется тем, что в большинстве случаев на практике известными бывают не сами значения коэффициентов потерь, а интервалы их возможных значений.

В данной работе рассматривается динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом и интервальными коэффициентами потерь запаса. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, доказана теорема об оптимальном допустимом уровне запаса, определены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления, гарантирующей асимптотическую сходимость к оптимальному запасу, и разработан вычислительный алгоритм построения этой стратегии.

⁵ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-3097.2005.8

2. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему управления запасами с периодическим контролем уровня запасов и бесконечным горизонтом планирования. Структуру системы представим в виде динамической сети [13, 14], узлы которой задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, возможно перерабатывая их, и планируют поставки извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы в узлах сети, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения. Динамика сети описывается рекуррентным соотношением:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний системы, i -я компонента которого описывает уровень запаса в i -м узле сети (на i -м складе) в момент времени t ; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t ; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t . Структура сети определяется структурой матриц $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$; диагональная матрица $A(t) = \text{Diag}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ учитывает возможные потери запаса в узлах сети в момент времени t .

Неизвестный спрос $d(t)$ имеет нестационарный характер (например, сезонный), поэтому интервал его возможных значений меняется во времени:

$$d(t) \in \mathbf{D}(t) \subseteq \mathbf{D}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{D}(t), \mathbf{D} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$, $\mathbf{D}(t) = [\underline{\mathbf{D}}(t), \overline{\mathbf{D}}(t)]$, $\mathbf{D} = [\underline{\mathbf{D}}, \overline{\mathbf{D}}]$, $\mathbf{D} \geq 0$; $\mathbb{I}\mathbb{R} = \{\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \mid \underline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\}$ – множество всех правильных интервалов. В случае нестационарного спроса такое (более точное) задание интервала неопределенности позволяет уменьшить уровень запаса в системе, и, как следствие, затраты на его хранение.

На состояния запаса $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, обусловленные возможностями системы:

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} = [0, \overline{\mathbf{X}}]$; $\mathbf{U} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^q$, $\mathbf{U} = [0, \overline{\mathbf{U}}]$.

Коэффициенты потерь запаса $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ заданы в виде интервалов:

$$A(t) \in \mathbf{A}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{A} = \text{Diag}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$, $\mathbf{a}_i = [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$, $0 \leq \mathbf{a}_i \leq 1$, $\text{wid } \mathbf{a}_i < 1$, $i = \overline{1, n}$; $\text{wid } \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}$ – ширина интервала \mathbf{x} , $\text{wid } \mathbf{x} \geq 0$.

Для системы (1) необходимо найти оптимальную (с точки зрения минимума затрат) стратегию управления, гарантирующую полное и своевременное удовлетворение спроса (2) на бесконечном периоде планирования с учетом возможных потерь запаса (5) и ограничений (3), (4).

Определение 1. Будем называть функцию $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, допустимым на интервале \mathbf{X} управлением для состояния $x(t)$ в момент времени t , $t \geq 0$, если при любых потерях запаса $A(t) \in \mathbf{A}$ для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}(t)$ выполнено включение $x(t+1) \in \mathbf{X}$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 2. Будем называть стратегию $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$ допустимой на интервале \mathbf{X} стратегией управления для начального запаса $x(0) \in \mathbf{X}$, если все управления $u(t)$, составляющие эту стратегию, являются допустимыми на интервале \mathbf{X} . Множество стратегий, допустимых на интервале \mathbf{X} при начальном запасае $x(0) \in \mathbf{X}$, будем обозначать $\Phi(x(0))$.

Определение 3. Будем называть \hat{x} , $\hat{x} \in \mathbf{X}$, допустимым уровнем запаса в системе, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}(0, \hat{x})$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}(0, \hat{x})$ стратегия управления, где $\mathbf{X}(a, b) = [a, b]$ – интервальнозначная вектор-функция, которая определена для $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Определим затраты системы на хранение запаса в виде функции

$$C(\hat{x}) = h' \hat{x}, \quad (6)$$

где $\hat{x} \in \mathbf{X}$ – допустимый уровень запаса; $h \in \mathbb{R}^n$ – вектор затрат, $h \geq 0$, $h \neq 0$, i -я компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i -м узле сети; символ $'$ (штрих сверху) означает транспонирование. Понятно, что, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, то $\bar{\mathbf{X}}$ является допустимым уровнем запаса и затраты системы в момент времени t не превышают $C(\bar{\mathbf{X}})$ при любых потерях запаса $A(t) \in \mathbf{A}$ и спросе $d(t) \in \mathbf{D}(t)$, $t \geq 0$. Чтобы минимизировать затраты системы, необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса \hat{x}^* , минимизирующий функцию затрат (6), и стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую включение

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \hat{x}^*), \quad t \geq \tau^* \geq 0,$$

при любых потерях запаса $A(t) \in \mathbf{A}$ и любом спросе $d(t) \in \mathbf{D}(t)$. Стратегию $\Phi^* \in \Phi(x(0))$ будем называть оптимальной допустимой стратегией управления для начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$, а время τ^* – скоростью сходимости системы к оптимальному допустимому запасу \hat{x}^* .

3. Определение оптимальной допустимой стратегии управления

Теорема 1 (о существовании допустимого управления). *Для любого состояния системы $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени t , $t \geq 0$, допустимое на интервале \mathbf{X} управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, существует и определяется из включения*

$$\underline{\mathbf{A}}x(t) + Bu(t) \in (I - \text{wid } \mathbf{A})\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t),$$

если и только если выполнены условия

$$\text{wid } \mathbf{ED}(t) \leq (I - \text{wid } \mathbf{A})\bar{\mathbf{X}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{ED}(t) \subseteq (I - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{X} + \{-BU\}, \quad (8)$$

где интервальный вектор $\mathbf{ED}(t) \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{ED}(t) = [\underline{\mathbf{ED}}(t), \overline{\mathbf{ED}}(t)]$, получен умножением матрицы E на интервальный вектор $\mathbf{D}(t)$; \ominus – операция внутреннего вычитания в полной интервальной арифметике Каухера [11, 12], $\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} = 0$; множество $\{-BU\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = -Bu, u \in \mathbf{U}\}$; $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – единичная матрица.

Теорема 2 (об оптимальном допустимом уровне запаса). *Оптимальный допустимый уровень запаса \hat{x}^* , минимизирующий функцию затрат (6), определяется из решения следующей оптимизационной задачи*

$$C(\hat{x}) = h' \hat{x} \Rightarrow \min_{\hat{x}},$$

при ограничениях

$$(I - \text{wid } \mathbf{A})^{-1} \max_{t \geq 0} \{\text{wid } \mathbf{ED}(t)\} \leq \hat{x} \leq \bar{\mathbf{X}},$$

$$\mathbf{ED}(t) \subseteq (I - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{X}(0, \hat{x}) + \{-BU\}, \quad t \geq 0.$$

В работе [7] показано, что если потери запаса отсутствуют, либо коэффициенты потерь точно известны, то сходимость системы к оптимальному запасу достигается за конечное число шагов при любом начальном состоянии $x(0) \in \mathbf{X}$, и найдена оценка скорости сходимости. Для случая с интервально заданными коэффициентами удалось доказать лишь асимптотическую сходимость системы и получить стратегию управления, гарантирующую

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \hat{x}^*) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad (9)$$

для любого $x(0) \in \mathbf{X}$. Достаточные условия существования такой стратегии приведены в Теореме 3.

Теорема 3 (о существовании оптимальной допустимой стратегии). *Если условия (7), (8) выполнены для всех $t \geq 0$, условие $(I - \underline{\mathbf{A}})r(t - 1) \leq r(t)$ выполнено для всех $t \geq 1$ и существует такое число $\epsilon > -\min_{i=1, n} \{(1 - \underline{\alpha}_i) \text{wid } \mathbf{a}_i\}$, что*

$$\mathbf{ED} + (\epsilon I + \text{wid } \mathbf{A})\mathbf{X}(0, \theta) \subseteq (I - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{X}(0, \hat{x}^*) + \{-BU\},$$

где $r(t) = (I - \text{wid } \mathbf{A})\hat{x}^* - \text{wid } \mathbf{ED}(t)$, $\theta = \bar{\mathbf{X}} - \hat{x}^*$, то для любого начального запаса $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале \mathbf{X} стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующая утверждение (9).

Согласно разработанному алгоритму, оптимальные управления $u^*(t)$, составляющие оптимальную допустимую стратегию $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$, определяются из решения следующей оптимизационной задачи

$$\text{Sp } \Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} -\overline{\text{ED}} \leq \underline{\text{A}}x(t) + Bu(t) &\leq (I - \text{wid } \mathbf{A})\widehat{x}^* - \overline{\text{ED}}(t) + \Lambda \theta, \\ u(t) &\in \mathbf{U}, \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 - \text{wid } \mathbf{a}_i, & \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – вспомогательные параметры. Момент времени τ^* , начиная с которого $\text{Sp } \Lambda = 0$, определяет скорость сходимости системы.

4. Литература

1. Лотоцкий В.А., Мандель А.С. Модели и методы управления запасами. – М.: Наука, 1991.
2. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001.
3. Рубальский Г.Б. Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами. – М.: Знание, 1987.
4. Домбровский В.В., Чаусова Е.В. Применение интервальных методов в управлении запасами // Вычислительные Технологии. – 2002. – Т. 7, № 2. – С. 50-58.
5. Домбровский В.В., Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вычислительные Технологии. – 2001. – Т. 6, Ч. 2. – С. 271–274 (Спец. выпуск, CD).
6. Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 103–108.
7. CHAUSOVA E.V. Dynamic Network Inventory Control Model with Interval Nonstationary Demand Uncertainty // Numerical Algorithms. – 2004. – V. 37. – P. 71–84.
8. Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерь запаса // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 208–215.
9. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
10. MOORE R.E. Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979.
11. KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space \mathbb{IR} // Computing Supplement. – 1980. – Vol. 2. – P. 33–49.
12. Шарый С.П. Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 67–114.
13. Ловецкий С.Е., Меламед И.И. Динамические потоки в сетях // Автоматика и Телемеханика. – 1987. – № 11. – С. 7–29.
14. GLOVER F., KLINGMAN D., PHILLIPS N.V. Network models in optimization and their applications in practice. – N.Y.: Wiley, 1992.

УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ⁶

Е.В. Чаусова

Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: chau@ef.tsu.ru

Рассматривается динамическая сетевая модель управления инвестиционным портфелем, состоящим из рискованных вложений и безрискового банковского вклада. Структура портфеля представляется в виде динамической сети, эволюция которой описывается многомерной моделью в пространстве состояний. Неизвестные доходности рискованных активов описываются интервалами, в границах которых они произвольным образом принимают свои значения. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами рискованных активов и банковского счета.

Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления, гарантирующей получение заданной желаемой доходности портфеля, применяется аппарат теории автоматического управления и интервальной математики.

Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной стратегии управления с обратной связью.

Приведены результаты численного моделирования.

⁶ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-3097.2005.8

ПЕРЕХОД К ОГРАНИЧЕННОМУ ДОПУСТИМОМУ МНОЖЕСТВУ РЕШЕНИЙ⁷

И.А. Шарая

Институт вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
E-mail: sharia@ict.nsc.ru

Аннотация

Описание алгоритма поиска неограниченной составляющей допустимого множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) и перехода к задаче об отыскании ограниченного допустимого множества решений ИСЛАУ. Реализация этого алгоритма в системе MATLAB.

Ключевые слова: интервальные линейные системы, допустимое множество решений
Keywords: interval linear systems, tolerable solution set

1. Введение

Определение [1]. Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ (где $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ обозначает интервальную матрицу размера $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор длины m , $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор длины n) *допустимым множеством решений* называется множество

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\}. \quad (1)$$

На языке интервальных включений это определение принимает вид (см., например, [2]):

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\}. \quad (2)$$

В [2] было доказано, что допустимое множество решений можно записать в виде:

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \Xi_{tol}(C, \mathbf{d}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \subseteq \mathbf{d}\}, \quad (3)$$

где C — уже не интервальная, а точечная матрица из $\mathbb{R}^{k \times n}$, $k = \sum_{i=1}^m |\text{vert}(\mathbf{A}_i)| \leq m \cdot 2^n$ — сумма числа вершин всех строк исходной матрицы \mathbf{A} , \mathbf{d} — интервальный вектор длины k .

Поясним определение допустимого множества решений ИСЛАУ двумя примерами.

Пример 1. Рассмотрим процесс, в котором вектор входных переменных x преобразуется в вектор выходных переменных b по линейному закону. Компоненты a_{ij} матрицы этого преобразования известны с точностью до интервалов \mathbf{a}_{ij} . Для компонент вектора выходных переменных заданы интервалы допустимых значений: $b_i \in \mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, m$. Найти такие векторы входных переменных, при которых, несмотря на неточность знаний о коэффициентах линейного преобразования, можно гарантировать, что выходные переменные будут удовлетворять заданным допускам.

Частные случаи допустимого множества решений отличаются от общего описания (1) дополнительными ограничениями. Обычно это ограничения вида: $\mathbf{A} \geq 0$, $x \geq 0$, $\mathbf{b} \geq 0$, \mathbf{A} — точечная.

Пример 2. (Идентификация параметров линейных объектов.) Дан объект (черный ящик). Предполагается, что в ящике происходит преобразование вектора входных переменных \tilde{a} в выходную переменную \tilde{b} по линейному закону $\tilde{b} = x_1 + x_2 \tilde{a}_1 + x_3 \tilde{a}_2 + \dots + x_n \tilde{a}_{n-1}$. Коэффициенты x_i , $i = 1, \dots, n$, этого преобразования неизвестны.

Проведено m экспериментов. В каждом эксперименте был точно измерен вектор входных переменных и получены границы для значения выходной переменной. Найти значения коэффициентов линейного преобразования, не противоречащие проведенным экспериментам.

В этом примере $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1(n-1)} \\ 1 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{m(n-1)} \end{pmatrix}$, где \tilde{a}_{ij} — значение измерения j -ой компоненты вектора входных переменных в i -ом эксперименте;

$\underline{b}_i, \bar{b}_i$ — границы полученные для выходной переменной \tilde{b} в i -ом эксперименте.

Здесь мы имеем дело с частным случаем допустимого множества решений, в котором матрица \mathbf{A} точечная и имеет единичный столбец. Заметим, что в случае точечной матрицы допустимое и

⁷ Работа выполнена в рамках Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-9886.2006.9)

объединенное множества решений ИСЛАУ совпадают. Поэтому в таких задачах годятся методы, разработанные для каждого из этих множеств решений.

Построение методов нахождения и оценивания допустимого множества решений упрощается, если известно, что это множество ограничено. Будем в этой работе считать, что мы умеем решать задачу нахождения или оценивания для ограниченного допустимого множества решений. Давайте убедимся, что методы, разработанные для ограниченного, можно применять и для произвольного допустимого множества решений, и разберемся, как это делать.

2. Неограниченная и ограниченная составляющие допустимого множества решений

В [2] было доказано, что допустимое множество решений представимо в виде суммы линейного подпространства с выпуклым многогранником:

$$\Xi_{tol} = L + V = \{l + v \mid l \in L, v \in V\}, \quad (4)$$

где L — линейное подпространство, V — выпуклый многогранник.

Если линейное подпространство $L \neq \{0\}$, то оно является неограниченной составляющей допустимого множества решений. Выпуклый многогранник V — это ограниченная составляющая допустимого множества решений.

Чтобы достичь цели, поставленной во введении, мы сейчас последовательно ответим на вопросы: Какими формулами описывается подпространство L и как его найти? Можно ли описать многогранник V как ограниченное допустимое множество решений, и как такие формулы получить? Как использовать эти знания при оценивании Ξ_{tol} ?

Но прежде, чем перейти к этим вопросам введем необходимые обозначения:

$N = \{1, \dots, n\}$;

$P = \{j \in N \mid \underline{A}_{:j} = \bar{A}_{:j}\}$ — множество номеров всех вырожденных столбцов матрицы A ;

$Q = N \setminus P$;

$p = |P|$ — число элементов в множестве P ;

\mathbb{R}_P — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , натянутое на оси с индексами из P , ($P = \emptyset$) \Leftrightarrow ($\mathbb{R}_P = \{0\}$);

A_P — матрица, составленная из столбцов исходной матрицы A с номерами из P ;

x_P — в зависимости от контекста: вектор из \mathbb{R}_P или проекция вектора $x \in \mathbb{R}^n$ на \mathbb{R}_P .

Там, где не оговорено особо, аналогичные обозначения будем использовать для других наборов индексов, подпространств, векторов и матриц.

3. Как найти подпространство L ?

Считаем, что найти подпространство значит указать какой-нибудь его базис.

В [2] было показано, что $L = \{l \in \mathbb{R}^n \mid Al = 0\}$ и доказано, что для $l \in \mathbb{R}^n$ имеет место эквивалентность

$$Al = 0 \iff \begin{cases} l_Q = 0, \\ A_P l_P = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Это означает, что $L \subset \mathbb{R}_P$ и базис подпространства L можно найти так:

- 1) ищем множество P и составляем матрицу A_P ,
- 2) находим какой-нибудь базис подпространства $L_P = \{l_P \in \mathbb{R}_P \mid A_P l_P = 0\}$,
- 3) записываем векторы этого базиса в пространстве \mathbb{R}^n (т.е. в каждом векторе дописываем нули на месте компонент с номерами из Q).

Заметим, что для непустого допустимого множества решений подпространство L единственно, но существует произвол в выборе его базиса. В описанном выше методе этот произвол связан с произволом выбора базиса в подпространстве L_P .

4. Как найти описание многогранника V ?

Найти выпуклый многогранник значит указать множество его вершин. Оценить — указать некоторые характерные точки и векторы оценивающего множества. Но прежде, чем найти или оценить выпуклый многогранник, надо получить формулы, которые его описывают. В нашем распоряжении пока есть только формулы для Ξ_{tol} и L . Попытаемся из них получить формулы для V .

Если $L = \{0\}$, то $V = \Xi_{tol}$ — формулы для V и Ξ_{tol} совпадают. Далее до конца раздела 4 будем считать, что $L \neq \{0\}$. В этом случае для непустого множества Ξ_{tol} существует бесконечно много

таких многогранников V , что $\Xi_{tol} = L + V$ (рис. 1). Воспользовавшись свободой выбора, поищем такой многогранник, который удобен для получения описывающих его формул и для вычислений.

1-ый этап выбора: многогранник из подпространства, дополнительного к L в \mathbb{R}^n .

Пусть V^0 — произвольный выпуклый многогранник, для которого $\Xi_{tol} = L + V^0$. Обозначим через L^1 какое-нибудь подпространство, дополнительное к L в \mathbb{R}^n , а через V^1 — многогранник, полученный проектированием V^0 на L^1 параллельно L . Он тоже выпуклый и тоже годится для разложения: $\Xi_{tol} = L + V^1$. При этом у V^1 вершин не больше, чем у V^0 , размерность V^1 не больше размерности V^0 — т.е. многогранник V^1 устроен не сложнее, а может быть только проще, чем V^0 . Кроме того, он обладает свойством $V^1 = \Xi_{tol} \cap L^1$. Это свойство можно использовать для получения формул, описывающих V^1 . Поясним как это сделать.

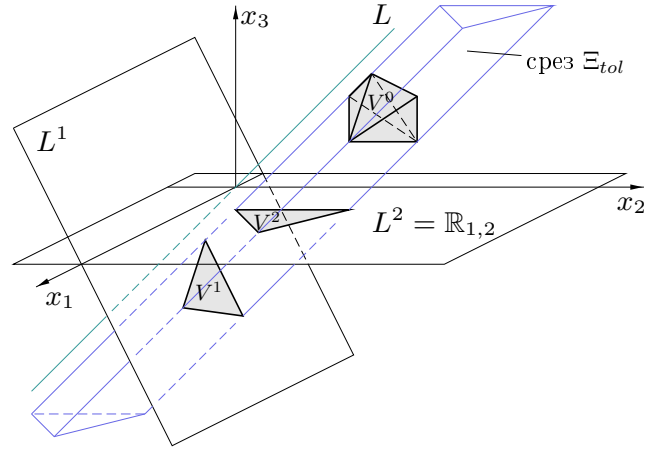


Рис. 1. $\Xi_{tol} = L + V^0 = L + V^1 = L + V^2$.

При $L^1 = \{0\}$ (т.е. при $L = \mathbb{R}^n$) нетрудно понять, что $V^1 = \begin{cases} \{0\} & \text{при } 0 \in \mathbf{b}, \\ \emptyset & \text{при } 0 \notin \mathbf{b}. \end{cases}$

Пусть теперь $L^1 \neq \{0\}$, размерность L^1 равна r и G — матрица, столбцы которой соответствуют базисным векторам подпространства L^1 .

Поскольку базис подпространства L нам известен, матрицу G выбрать несложно. Выбор этот неоднозначен. По ходу этого раздела мы рассмотрим некоторые ограничения к выбору матрицы G (которые будут сформулированы в виде требований к выбору подпространства, дополнительного к L в \mathbb{R}^n) и увидим, как эти ограничения упрощают формулы для искомого многогранника (от (7) через (8) к (9)–(10)). А начнем с матрицы G общего вида.

Для произвольного вектора x из L^1 можем записать $x = Gy$, где $y \in \mathbb{R}^r$ — вектор коэффициентов разложения x по базису G . Получим описание многогранника V^1 на основе формулы (3) для Ξ_{tol} :

$$\begin{aligned} V^1(C, \mathbf{d}, G) &= \Xi_{tol}(C, \mathbf{d}) \cap L^1(G) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \subseteq \mathbf{d}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = Gy, y \in \mathbb{R}^r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = Gy, y \in \mathbb{R}^r, Cx \subseteq \mathbf{d}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = Gy, y \in \mathbb{R}^r, C(Gy) \subseteq \mathbf{d}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = Gy, y \in \mathbb{R}^r, (CG)y \subseteq \mathbf{d}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Представление V^1 в виде (7) означает, что

$$V^1(C, \mathbf{d}, G) = G(\{y \in \mathbb{R}^r \mid (CG)y \subseteq \mathbf{d}\}) = G(\Xi_{tol}(CG, \mathbf{d})),$$

т.е. для нахождения (оценивания) многогранника V^1 в \mathbb{R}^n надо сначала найти (оценить) допустимое множество решений $\Xi_{tol}(CG, \mathbf{d})$, а затем перевести результат в \mathbb{R}^n с помощью умножения характеристических точек и векторов на матрицу G слева. Очевидно, что $\Xi_{tol}(CG, \mathbf{d})$ ограничено, так как V^1 и $\Xi_{tol}(CG, \mathbf{d})$ — это описания одного и того же множества в разных базисах.

Аналогичные рассуждения на основе формулы (2) для Ξ_{tol} встречают трудности при переходе (6)→(7), связанные с отсутствием дистрибутивности в интервальной арифметике. Эти трудности можно обойти, выбрав L^1 так, чтобы L_Q^1 совпало с \mathbb{R}_Q . Возможность такого выбора следует из (5). В этом случае

$$L^1 = L_Q^1 + L_P^1 = R_Q \oplus L_P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, y \in \mathbb{R}^s\},$$

где s — размерность подпространства L_P^1 , $G_P \in \mathbb{R}^{p \times s}$ — матрица базисных векторов пространства L_P^1 в \mathbb{R}^p . Формулы, описывающие многогранник V^1 , получаются так:

$$\begin{aligned} V^1(\mathbf{A}, \mathbf{b}, G_P) &= \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap L^1(G_P) = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, y \in \mathbb{R}^s\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, y \in \mathbb{R}^s, \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, y \in \mathbb{R}^s, \mathbf{A}_Q x_Q + \mathbf{A}_P x_P \subseteq \mathbf{b}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, y \in \mathbb{R}^s, \mathbf{A}_Q x_Q + \mathbf{A}_P(G_P y) \subseteq \mathbf{b}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, y \in \mathbb{R}^s, \mathbf{A}_Q x_Q + (\mathbf{A}_P G_P)y \subseteq \mathbf{b}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Описание V^1 в виде (8) означает, что для того, чтобы найти (оценить) выпуклый многогранник V^1 в \mathbb{R}^n надо сначала найти (оценить) его в L^1 , где он совпадает с ограниченным допустимым множеством решений $\Xi_{tol}(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{b}) = \{z = \begin{pmatrix} x_Q \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q+s} \mid \tilde{\mathbf{A}}z \subseteq \mathbf{b}\}$, для которого $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_Q, \mathbf{A}_P \mathbf{G}_P)$, а затем перевести характерные точки и векторы результата из L^1 в \mathbb{R}^n по правилу $x_Q = x_Q, x_P = \mathbf{G}_P y$.

2-й этап выбора: многогранник из базисного подпространства, дополнительного к L в \mathbb{R}^n .

Наиболее простые формулы для V и для перехода от одного базиса к другому получаются, если в качестве подпространства, дополнительного к L , выбрать базисное подпространство. Давайте в этом убедимся.

Пусть L^2 — какое-нибудь базисное подпространство, дополнительное к L , R — множество индексов базисных векторов, на которые оно натянуто (т.е. $L^2 = \mathbb{R}_R$). Обозначим $T = N \setminus R$. Поищем формулы для $V^2 = \Xi_{tol} \cap L^2$.

$$\begin{aligned} V^2(\mathbf{A}, \mathbf{b}, R) &= \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbb{R}_R = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0, \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0, \mathbf{A}_R x_R \subseteq \mathbf{b}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0, x_R \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}_R, \mathbf{b})\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично (или как частный случай полученной формулы) имеем

$$V^2(C, \mathbf{d}, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0, C_R x_R \subseteq \mathbf{d}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0, x_R \in \Xi_{tol}(C_R, \mathbf{d})\}. \quad (10)$$

Таким образом, для того чтобы найти (оценить) выпуклый многогранник V^2 из базисного подпространства \mathbb{R}_R , дополнительного к L , надо:

- 1) удалить из матрицы задачи столбцы с номерами из T ,
- 2) найти (оценить) допустимое множество решений с сокращенной матрицей $(\Xi_{tol}(\mathbf{A}_R, \mathbf{b}) = \Xi_{tol}(C_R, \mathbf{d}))$,
- 3) затем перевести результат в \mathbb{R}^n , дописав нулевые компоненты с номерами из T .

Остается только уточнить, как найти множество T : из (5) ясно, что $T \subseteq P$ и может быть найдено через базисное подпространство в \mathbb{R}_P , дополнительное к ядру вещественной матрицы \mathbf{A}_P . Поэтому выбор множества T осуществим традиционными методами линейной алгебры. В общем случае этот выбор неоднозначен.

Итак, в этом разделе мы получили ряд формул выпуклого многогранника V для разложения (4), показывающих, что при выборе V из подпространства дополнительного к L он описывается как ограниченное допустимое множество решений. Формулы (9)–(10) и соответствующий им процесс вычислений проще, чем формулы (7), (8) и сопутствующие им вычисления. Формула (9) предпочтительнее, чем (10): она ближе к исходной постановке и ее данные имеют более компактный вид.

5. Вычисление и оценивание допустимого множества решений

На основании результатов разделов 2–4 можно предложить такую схему вычисления (оценивания) допустимого множества решений Ξ_{tol} :

- I. Найти L (раздел 3).
- II. Выбрать дополнительное к L подпространство L' и получить в нем описание многогранника V (раздел 4).
- III. Найти (оценить) ограниченное допустимое множество решений, представляющее V в L' (считаем методы известными).
- IV. Перевести результат этапа III в \mathbb{R}^n (раздел 4).
- V. Дать ответ на основе I и IV (раздел 2).

Эта схема показывает, каким образом нахождение (оценивание) произвольного допустимого множества решений сводится к нахождению более простого ограниченного допустимого множества решений.

6. Программа поиска неограниченной составляющей и перехода к задаче об отыскании ограниченного допустимого множества решений

В заключение приведем программу, выполняющую шаги I и II для случая, когда дополнительное к L подпространство является базисным ($L' = L^2$). Она написана в виде функции `lta` в системе MATLAB. Функция `lta` по заданной интервальной матрице находит базис подпространства L , множество индексов T и матрицу A_R для (9). При наличии таких данных шаги IV и V выполняются элементарно.

Большинство обозначений с точностью до шрифта совпадает с теми, которые использовались выше. Отметим лишь те, которые отличаются, и новые:

`size`, `zeros`, `rref`, `length`, `eye`, `isempty` — стандартные функции MATLAB;

L — матрица, столбцы которой дают базис подпространства L ;

A — на входе это матрица A , на выходе остается A_R , при этом интервальная матрица записывается в виде трехмерной вещественной, для которой $A(:, :, 1) = \underline{A}$, $A(:, :, 2) = \overline{A}$;

AP — A_P ;

p , s , t — количество элементов в соответствующем множестве P , S , T ;

F , `pivcol`, `nopiv` — вспомогательные переменные.

<code>function [L,T,A]=lta(A)</code>	%	Пример использования функции <code>lta</code> :
<code>[m,n,q]=size(A);</code>	%	
<code>AP=zeros(m,0);</code>	%	$A(:, :, 1) =$
<code>P=[];</code>	%	1 2 0 0 1 0
<code>for j=1:n</code>	%	2 4 1 0 2 0
<code>if A(:,j,1)==A(:,j,2)</code>	%	3 6 0 0 3 0
<code>AP=[AP A(:,j,1)];</code>	%	$A(:, :, 2) =$
<code>P=[P;j];</code>	%	1 2 1 0 1 1
<code>end</code>	%	2 4 1 0 2 1
<code>end</code>	%	3 6 0 0 3 1
<code>T=[];</code>	%	<code>>> [L,T,AR]=lta(A)</code>
<code>p=length(P);</code>	%	$L =$
<code>if p>0</code>	%	-2 0 -1
<code>[F,pivcol]=rref(AP);</code>	%	1 0 0
<code>s=length(pivcol);</code>	%	0 0 0
<code>nopiv=1:p;</code>	%	0 1 0
<code>nopiv(pivcol)=[];</code>	%	0 0 1
<code>S=P(pivcol);</code>	%	0 0 0
<code>T=P(nopiv);</code>	%	$T =$
<code>t=p-s;</code>	%	2
<code>L=zeros(n,t);</code>	%	4
<code>if t>0</code>	%	5
<code>L(T,:)=eye(t,t);</code>	%	$AR(:, :, 1) =$
<code>if s>0</code>	%	1 0 0
<code>L(S,:)-=F(1:s,nopiv);</code>	%	2 1 0
<code>end</code>	%	3 0 0
<code>A(:,T,:)=[];</code>	%	$AR(:, :, 2) =$
<code>end</code>	%	1 1 1
<code>else L=zeros(n,0);</code>	%	2 1 1
<code>end</code>	%	3 0 1

7. Литература

1. ШАРЫЙ С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 51–61. (<http://www.ict.nsc.ru/shary/Papers/IzvAN.ps>)
2. ШАРАЯ И.А. Структура допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10, № 5. — С. 103–119.

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИЛИ МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО?

С.П. Шарый

*Институт вычислительных технологий СО РАН
630090 г. Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6
E-mail: shary@ict.nsc.ru*

Аннотация

Работа является критическим обзором некоторых постановок задач и методов их решения, принятых в современном интервальном анализе, с теоретико-вероятностных позиций. Обсуждаются понятия «гарантированности» и «доказательности» результата, показан их относительный характер и возможные пути модификации традиционных интервальных постановок, которые могут привести к созданию принципиально новых интервальных методик решения практических задач.

Ключевые слова: интервальный анализ, статистическое моделирование

Keywords: interval analysis, statistical modeling

1. Введение

Представляемая работа посвящена выяснению границ применимости методов интервального анализа. Мы попытаемся частично ответить на философские вопросы: зачем вообще нужен интервальный анализ? и что нового он привносит в практику математического моделирования?

В значительной мере эти вопросы являются риторическими, так как в течение последних десятилетий накоплено достаточно много примеров плодотворного применения интервальных методов к задачам, которые до сих пор никак иначе не решались или решались неудовлетворительно. Таковы, в частности, задачи доказательной глобальной оптимизации и доказательного глобального решения уравнений и систем уравнений [1, 2]. Кроме того, интервальный анализ предоставляет удобный язык для оперирования с ограниченными неопределённостями в данных, существенно обогащая тем самым практику математического моделирования.

Но вопросы о месте и роли интервального анализа не являются и бессмысленными. Дело в том, что ряд задач, с которыми имеет дело современный интервальный анализ, ставились и решались и раньше, в «доинтервальную» эру. Например, прямым статистическим моделированием неопределённостей в данных задачи, известным также как «метод Монте-Карло». Что же касается интервальных подходов, то, как известно, большинство интервальных задач в постановках, требующих оптимальных или гарантированно близких к оптимальным ответов, являются NP-трудными [3], так что получение для них «качественных» интервальных решений является очень трудоёмким делом. Наша цель — понять, в каких случаях применение интервального анализа в подобных задачах оправдано, а когда оно нецелесообразно и лучше воспользоваться статистическим моделированием.

2. Теоретико-вероятностный анализ интервальных постановок задач

Традиционным аргументом в пользу интервальных методов является следующий: статистическое моделирование не способно обеспечить «гарантированности» и «доказательности» ответов. Но это верно лишь отчасти, поскольку ответ, вероятность правильности которого превосходит, скажем, $(1 - 10^{-8})$, можно считать уже «практически достоверным» [4]. Получается, что при достижении этого порога достоверности и методы Монте-Карло способны по-своему «гарантировать» выдаваемые ими результаты.

В пользу статистического моделирования при этом говорит и то обстоятельство, что в функциях большого числа переменных, завязанных друг с другом, практически любые вероятностные распределения на областях определения аргументов преобразуются на области значений функции в распределение, плотность вероятности которого пренебрежимо мала в точках, лежащих вблизи границы области значений. Рассмотрим это важное утверждение более внимательно.

Для простых функций и простых вероятностных распределений оно может быть обосновано даже аналитически, и в качестве примера мы рассмотрим сумму $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ увеличивающегося числа n независимых равномерно распределённых на интервале $[-1, 1]$ слагаемых. Плотность

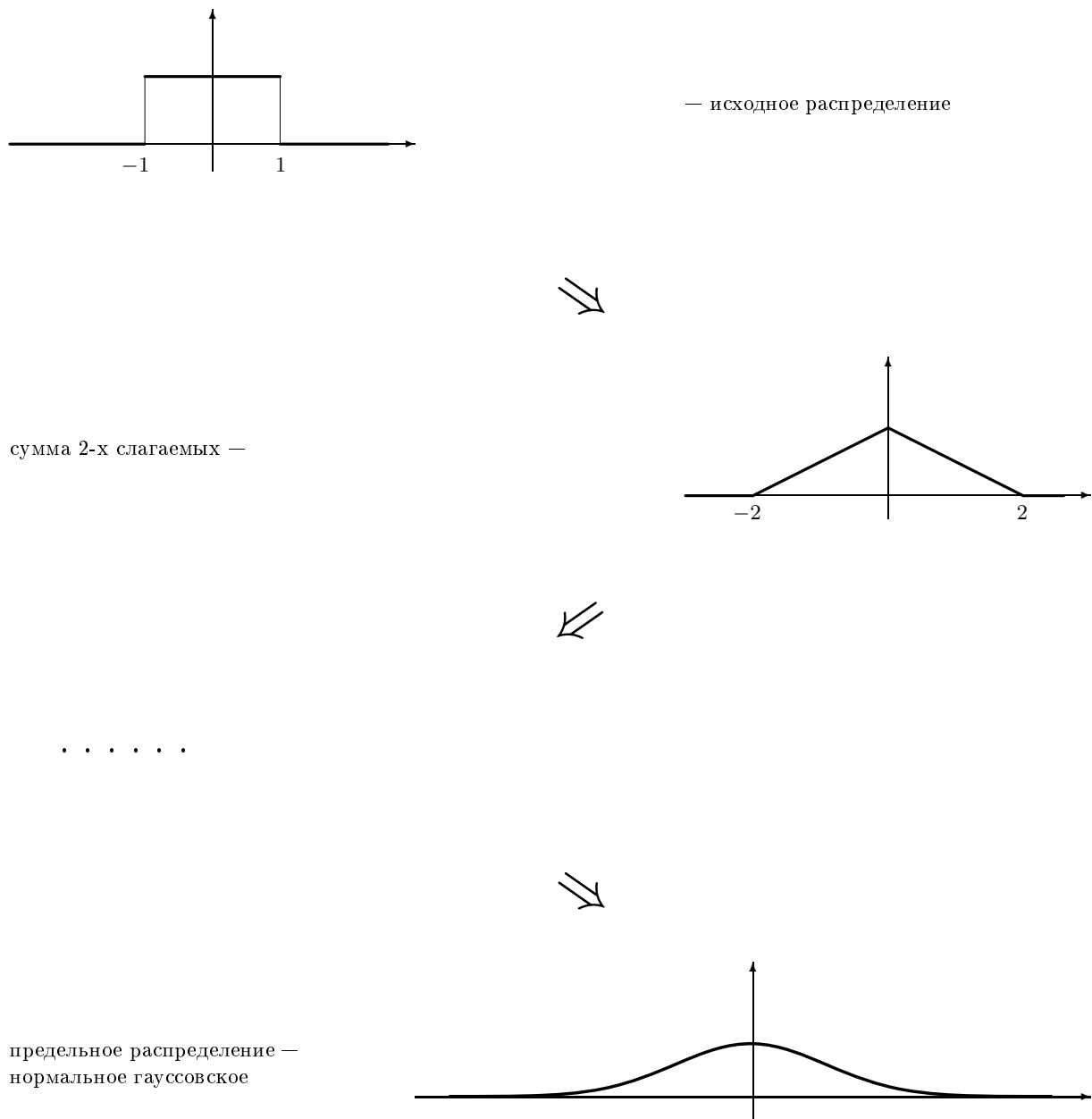


Рис. 1. Эволюция плотности вероятности на множестве значений суммы нескольких интервалов.

вероятности p_{x+y} суммы $(x + y)$ двух независимых случайных величин x и y есть, как известно, свёртка плотностей вероятности слагаемых — p_x и p_y , — так что

$$p_{x+y}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(\xi - s) p_y(s) ds.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно вычислить плотность вероятности суммы небольшого количества равномерно распределённых слагаемых (см. рис. 1): она оказывается убывающей от центра к границам области значений, причём с ростом количества слагаемых в сумме график её плотности вероятности вблизи границ прижимается к нулю сильнее, чем в центре.

При дальнейшем возрастании числа слагаемых вероятностное распределение нашей суммы согласно центральной предельной теореме теории вероятностей быстро стремится к нормальному гауссовскому распределению (см., к примеру, [5, 6]). Именно, наш случай одинаково распределённых слагаемых охватывается так называемой теоремой Линдберга-Леви [5], широко известным частным случаем упомянутого общего результата. Таким образом, при достаточно большом коли-

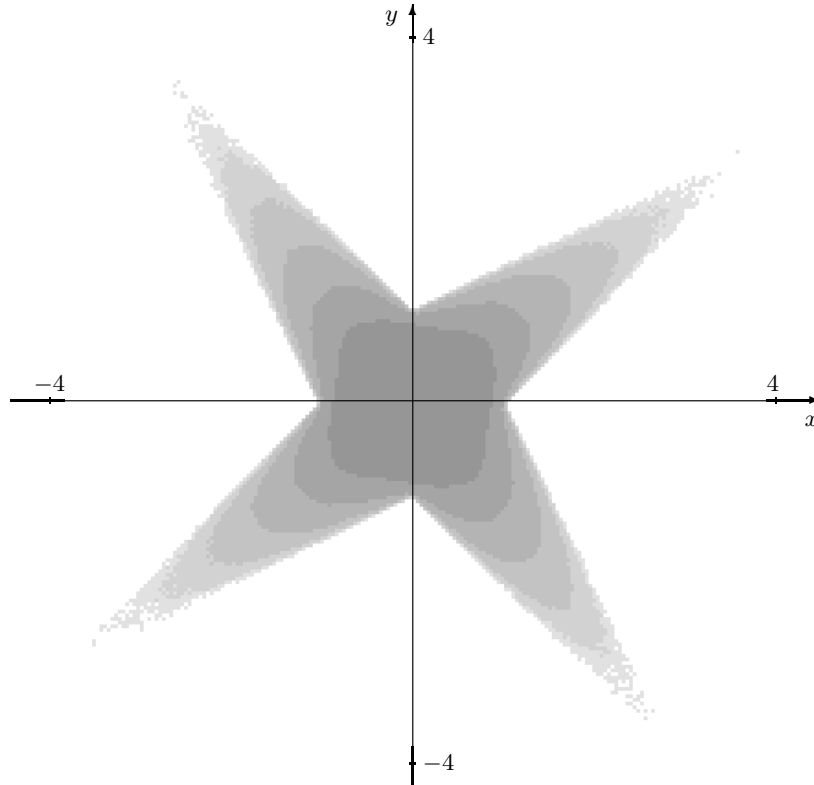


Рис. 2. Эмпирическая плотность вероятности на множестве решений интервальной линейной системы Барта-Нудинга (1) и оптимальные по координатным оценкам множества решений.

честве слагаемых в исследуемой сумме её плотность вероятности с хорошей степенью приближения даётся выражением

$$p(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где m — среднее значение, равное в нашем случае нулю, а σ — стандартное отклонение, равное $\sqrt{n/3}$, коль скоро дисперсии исходных равномерных распределений составляют $\frac{1}{3}$. Как видим, относительная разница в плотностях вероятности суммы вблизи среднего значения ($\xi = 0$) и около границ ($\xi = \pm n$) может сделаться сколь угодно большой.

Для сложных (и многомерных) выражений $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и произвольных вероятностных распределений на областях определения x_1, x_2, \dots, x_n результирующее распределение на множестве значений f уже невозможно найти аналитическими средствами. Но здесь на помощь может прийти статистическое моделирование на ЭВМ, и оно надёжно подтверждает сформулированный выше качественный вывод о том, что у границ области значений функции плотность вероятности, как правило, на порядки ниже, чем в центральных точках.

В качестве модельного примера рассмотрим результаты вычислительных экспериментов, выполненных по заказу автора В.В. Колдаковым с интервальными линейными системами уравнений. Он предпринял прямое статистическое моделирование разброса решений точечных линейных систем в пределах заданной интервальной линейной системы уравнений, предполагая равномерность распределений параметров на интервалах их изменений. Из интервалов в матрице и правой части случайно выбирались представители, полученная точечная система решалась точечным методом, и в процессе многократного повторения этой процедуры определялись, во-первых, разброс решений по каждой координате, и, во-вторых, частоты попаданий решений в те или иные участки пространства \mathbb{R}^n , т.е., фактически, эмпирическая (выборочная) плотность вероятности решений.

На рис. 2 изображены результаты такого статистического моделирования с популярной интервальной линейной системой

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (1)$$

из работы В. Барта и Е. Нудинга [6]. На следующем рис. 3 представлены результаты статистического

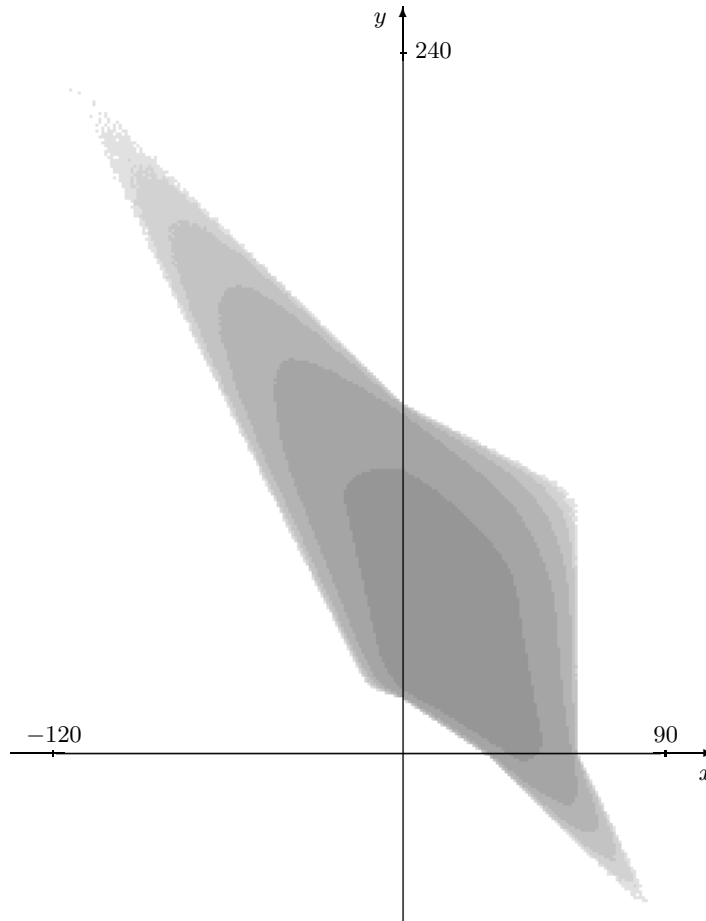


Рис. 3. Эмпирическая плотность вероятности на множестве решений интервальной линейной системы Хансена (2) и оптимальные по координатным оценкам множества решений.

моделирования поведения решений для другой известной интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix}, \quad (2)$$

предложенной Э. Хансеном (см., к примеру, [2]). Градации плотности серого цвета на этих рисунках изображают различные плотности вероятности решений, причём самому тёмному тону соответствует максимальная плотность вероятности решений, принимающая значение из сегмента $[10^{-2}, 10^{-1}[$ для системы Барта-Нудинга и $[10^{-4}, 10^{-3}[$ для системы Хансена. Каждый переход к более светлому тону соответствует уменьшению плотности вероятности на один порядок (т.е. в 10 раз). Напомним, что оптимальные (точные) внешние оценки множеств решений для этих интервальных систем равны

$$\begin{pmatrix} [-4, 4] \\ [-4, 4] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [-120, 90] \\ [-60, 240] \end{pmatrix}.$$

Хорошо видно, что в тех частях множеств решений, которые прилегают к удалённым границам, плотность вероятности на 6-7 порядков меньше той, что зафиксирована в центральных областях. Поэтому вероятность того, к примеру, что первая компонента точечного решения для системы Барта-Нудинга попадёт, скажем, в интервал $[3.9, 4]$, не превосходит 10^{-9} , что уже «практически невозможно» в рамках рассматриваемой теоретико-вероятностной модели. По этой причине брус $([-3.95, 3.9], [-3.9, 3.92])^T$, к примеру, будет столь же практически «гарантированной» и «доказательной» внешней оценкой множества решений системы Барта-Нудинга, как и оптимальная интервальная оценка $([-4, 4], [-4, 4])^T$.

Исчезающе малая плотность вероятности решений в приграничных точках наводит на серьёзные вопросы. Насколько вообще ценна в этих условиях гарантированность наших ответов? Может

быть, иногда можно поступиться «гарантированностью» и «доказательностью» ответов в духе традиционного интервального анализа, если этим достигается более простое или более эффективное решение задачи? Надежду на это дают как теоретические результаты, касающиеся трудоёмкости так называемых вероятностных (стохастических) алгоритмов [8], так и недавние практические расчёты с ними [9].

Другой аспект проблемы. В экспериментах В.В. Колдакова для получения рисунков 1 и 2 было выполнено по 400 000 000 (т.е. $4 \cdot 10^8$) бросаний, что потребовало нескольких часов работы современных ЭВМ. При увеличении размеров задачи мы не сможем выполнять столь дорогостоящие эксперименты за практически приемлемое время, количество испытаний неизбежно должно быть уменьшено, что неизбежно отразится на уровне достоверности результатов статистического моделирования. В конце концов этот уровень неизбежно уменьшится до такого неприемлемо низкого значения, что для достижения гарантированности решений никакой альтернативы методам интервального анализа уже не останется.

3. Заключение

Свойство «гарантированности» ответов, обеспечиваемое методами интервального анализа при решении задач оценивания областей значений функций, разброса решений систем уравнений и т.п. часто является избыточным с теоретико-вероятностных позиций, а соответствующие интервальные оценки (даже оптимальные) — недостижимыми и излишне «пессимистичными».

Ослабление требований «гарантированности» и «доказательности» решений до условия «приемлемой достоверности» в теоретико-вероятностном смысле в некоторых интервальных задачах может, на наш взгляд, привести к упрощению постановок и/или созданию более эффективных алгоритмов для их решения.

Интервальный анализ явно выигрывает конкуренцию с методами Монте-Карло в тех случаях, когда требуется за практически приемлемое время (т.е. «достаточно быстро») или в условиях ограниченных ресурсов ЭВМ вычислить действительно гарантированные оценки множеств решений задач, областей значений функций и т.п., не считаясь с возможным огрублением ответа в сравнении с идеальным математическим.

4. Литература

- [1] KEARFOTT R.B. Rigorous global search: continuous problems. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [2] HANSEN E.R., WALSTER G.W. Global optimization using interval analysis. – New York: Marcel Dekker, 2003.
- [3] КРЕЙНОВИЧ V., ЛАКЕУЕВ A.V., РОHN J., КАHL P. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [4] БЛЕХМАН И.И., МЫШКИС А.Д., ПАНОВКО Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – Москва: Наука, 1990.
- [5] КРАМЕР Г. Математические методы статистики. – Москва: Мир, 1975.
- [6] ЛОЭВ М. Теория вероятностей. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1962.
- [7] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // Computing. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [8] УСПЕНСКИЙ В.А., СЕМЁНОВ А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. – Москва: Наука, 1987.
- [9] ПАНОВ Н.В., ШАРЫЙ С.П. Стохастические подходы в интервальных методах глобальной оптимизации // См. настоящий сборник.

ДВОЙСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ДРОБЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.П. Шарый, А.А. Бондарь

*Институт вычислительных технологий СО РАН
Россия, 630090 г. Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6
E-mails: shary@ict.nsc.ru, aviayes@yandex.ru*

Аннотация

Работа посвящена задаче внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений, причём мы стремимся найти оптимальную (точную) внешнюю оценку. Эффективным средством решения этой задачи являются *методы дробления решений* (PSS-методы), основанные на идее адаптивного дробления в пространстве решений исследуемой системы. Ниже рассматривается новый класс методов для решения задачи оптимального внешнего оценивания множеств решений — так называемые *двойственные методы дробления решений*.

На примере интервальных линейных систем с одним или несколькими точечными столбцами в матрице обсуждаются вопросы организации работы двойственных методов дробления решений и даётся их сравнительный анализ с прямыми методами дробления решений.

Ключевые слова: интервальная линейная система, множество решений, оптимальная внешняя оценка, метод дробления решений, двойственный метод дробления решений

Keywords: interval linear system, solution set, optimal outer estimate, PSS-methods, dual PSS-methods

1. Введение

Предмет нашей работы — интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$Ax = b, \quad (1)$$

с интервальной $n \times n$ -матрицей \mathbf{A} и интервальным n -вектором \mathbf{b} в правой части. *Объединённым множеством решений* интервальной линейной системы (1) называется, как известно, множество

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\},$$

образованное всеми решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Ниже мы предполагаем неособенность матрицы \mathbf{A} , т.е. то, что неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. В этих условиях объединённое множество решений ИСЛАУ ограничено и связно, хотя его строение может быть весьма нетривиальным. Обычно решают задачи различного оценивания объединённого множества решений интервальной системы уравнений, и в нашей работе мы сконцентрируемся на задаче внешнего покоординатного оценивания этого множества решений:

*Для интервальной линейной системы уравнений $Ax = b$
найти оценки для величин $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу и
для величин $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ сверху, $\nu = 1, 2, \dots, n$.*

Далее мы считаем фиксированным индекс $\nu \in \{1, \dots, n\}$ — номер координатного направления, вдоль которого оценивается множество решений. Кроме того, пусть известен некоторый брус $\mathbf{V} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, уже содержащий множество решений, т.е. такой что $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{V}$. Он может быть найден, к примеру, из содержательных соображений, сопутствующих постановке задачи, или же с помощью какой-нибудь из известных процедур для грубого оценивания множества решений [1, 2]. Наша задача — нахождение, по-возможности, наиболее точной (оптимальной) оценки для множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ вдоль ν -го координатного направления.

2. Методы дробления решений

Для решения задачи оптимального внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ разработано немало подходов, и среди них своими качествами — адаптивностью и последовательной гарантией — выделяются методы дробления решений (PSS-методы) [3, 4] и методы дробления параметров

(PPS-методы) [4, 5]. В этой работе мы рассматриваем методы дробления решений и их дальнейшее развитие — двойственные методы дробления решений.

В методах дробления решений оценки множества решений ИСЛАУ получаются из информации о его пересечении с некоторыми простыми объектами пространства \mathbb{R}^n — прямыми, параллельными координатным осям, плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а также пучками таких параллельных прямых и плоскостей, имеющими перпендикулярное сечение в виде интервальных векторов-брусков \mathbf{r} . Чем тоньше пучок прямых или плоскостей, тем точнее определяется результат его пересечения с множеством решений ИСЛАУ, так что мы естественно приходим к идее дробления оценивающих пучков на более мелкие. Образно выражаясь, в таком процессе мы «нащупываем» множество решений с помощью измельчающихся пучков прямых или плоскостей.

Результаты пересечения этих пучков с множеством решений ИСЛАУ регистрируются в виде значений некоторых специальных функций, которые мы будем обозначать через $\Omega_1(\mathbf{r})$, $\Omega_2(\mathbf{r})$, $\Omega_{LP}(\mathbf{r})$, $\Omega_{BLP}(\mathbf{r})$. Точное их описание таково:

$\Omega_1(\mathbf{r})$ — функция, оценивающая экстремальные координаты пересечения пучка прямых прямоугольного сечения \mathbf{r} с $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Оценивание осуществляется посредством подстановки бруса \mathbf{r} , определяющего этот пучок, в систему $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и последующего решения полученной распавшейся ИСЛАУ. Для двойственных методов дробления решений Ω_1 выдаёт лишь заключение о том, пересекает пучок множество решений или нет, а не координаты пересечения.

$\Omega_2(\mathbf{r})$ — функция, оценивающая экстремальные координаты пересечения пучка прямых прямоугольного сечения \mathbf{r} с $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Оценка осуществляется посредством применения к ИСЛАУ на рассматриваемом брусе интервального метода Гаусса-Зейделя. Для двойственных методов дробления решений Ω_2 выдаёт, аналогично Ω_1 , лишь заключение о том, пересекает пучок множество решений или нет, а не координаты пересечения.

$\Omega_{LP}(\mathbf{r})$ — функция, оценивающая экстремальные координаты пересечения пучка прямых прямоугольного сечения \mathbf{r} с $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ посредством решения одной или двух задач линейного программирования (ЗЛП). Для применения данной функции необходимо, чтобы брус \mathbf{r} сечения этого пучка был *знакоопределённым*, т.е. находился бы в пределах одного координатного ортанта пространства \mathbb{R}^n . В этом случае пересечение соответствующего пучка прямых с множеством решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ есть объединение не более чем двух выпуклых многогранных множеств (см. далее).

$\Omega_{BLP}(\mathbf{r})$ — булевозначная функция, являющаяся сокращённым вариантом Ω_{LP} , который проверяет лишь совместность соответствующих ЗЛП. Ω_{BLP} более проста, чем её полноценный аналог Ω_{LP} , и используется в двойственных методах дробления решений.

В методах дробления решений на вход подаются матрица и правая часть ИСЛАУ, \mathbf{A} и \mathbf{b} , грубая внешняя интервальная оценка $\mathbf{V} \in \mathbb{IR}^n$ множества $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, номер координатного направления ν , вдоль которого необходимо найти «точную» оценку. На выходе получаем искомую оценку с некоторой точностью. Основная идея метода — адаптивное дробление пучка параллельных прямых, задаваемого бруском $\mathbf{V}' = (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ (компонента с номером ν не участвует в дроблении). В этом процессе каждому подбрусу бруса \mathbf{V}' сопоставляется оценка пересечения порождаемого им пучка (вдоль ν -ого координатного направления) с множеством решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которая получается с помощью одной из функций Ω_1 , Ω_2 или Ω_{LP} в зависимости от свойств бруса. Выбор очередного «кандидата» для дробления осуществляется на основе стратегии «ветвей и границ», и критерием выбора служит оценка множества решений, полученная на данном брусе. Алгоритм останавливается при достижении требуемой мелкости разбиения брусков или точности общей оценки множества решений.

Двойственные методы дробления решений реализуют идею так называемого «метода дробления графика», предложенного впервые в работе [6] и являющегося двойственным методом интервальной глобальной оптимизации. Входные и выходные данные в двойственных методах дробления решений те же, что и для прямого метода дробления решений, за исключением того, что двойственный метод требует ещё указания одного или нескольких «немых» координатных направлений. Двойственные методы дробления решений также осуществляют адаптивное (приспосабливающееся к задаче) дробление исходного пучка, содержащего множество решений ИСЛАУ, и оно применяется ко всем компонентам \mathbf{V} за исключением тех, что объявлены «немыми». Выбор очередного бруса для дробления осуществляется методом ветвей и границ, в качестве критерия выбора выступает значение компоненты \mathbf{V} соответствующей оцениваемому координатному направлению. Методы Ω_1 ,

Ω_2 , Ω_{BLP} в рамках двойственного метода дробления решений определяют, пусто или нет пересечение данного бруса с множеством $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (при этом Ω_{BLP} всегда даёт точный ответ, тогда как Ω_1 может выдавать «возможно непусто»), на основании чего делается вывод — рассматривать данный брус в дальнейшем или нет. После остановки работы метода искомая оценка содержится в соответствующей компоненте бруса являющегося «рекордным» на момент остановки.

3. Сравнительный анализ прямого и двойственного методов

Как видим, прямые и двойственные методы дробления решений работают существенно по-разному: прямые методы осуществляют «фронтальное» оценивание множества решений, тогда как двойственные методы оценивают множество решений как бы «сбоку», неявно. Когда уместно использование прямого метода дробления решений, а когда лучше двойственный? Ответ на этот вопрос существенным образом зависит от особенностей решаемой ИСЛАУ, и ниже мы рассматриваем его на примере ИСЛАУ, имеющих в матрице один или несколько полностью точечных столбцов.

Хорошо известно, что пересечение множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы (1) с каждым из координатных ортантов пространства \mathbb{R}^n является выпуклым многогранным множеством, так что в целом $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ есть объединение не более чем 2^n выпуклых многогранных множеств [7]. Но если в матрице ИСЛАУ есть точечные (неинтервальные) столбцы, то множество решений подобной системы, как показывают приводимые ниже результаты, имеет более простое строение. Мы рассмотрим, как прямые и двойственные методы дробления решений могут успешно эксплуатировать это упрощение задачи и к какому выигрышу в их трудоёмкости это приводит.

Предложение. Если в интервальной $n \times n$ -матрице \mathbf{A} столбец с номером k образован точечными элементами, то множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет выпуклые пересечения с объединениями пар ортантов пространства \mathbb{R}^n , у которых знаки 1-й, ..., $(k-1)$ -ой, $(k+1)$ -ой, ..., n -ой компонент точек совпадают (эти ортанты смежны относительно координатной плоскости $x_k = 0$).

Доказательство. Возьмём какие-либо две точки y и z — из пересечения $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с объединением двух ортантов, смежных относительно плоскости $x_k = 0$. При этом должны совпадать знаки y_1 и z_1 , ..., y_{k-1} и z_{k-1} , y_{k+1} и z_{k+1} , ..., y_n и z_n , а знаки y_k и z_k могут быть различными. Если $0 \leq \lambda \leq 1$, то лежит ли точка $\lambda y + (1 - \lambda)z$ в этом же самом пересечении? Этот вопрос равносильен вопросу о том, лежит ли она в множестве решений.

Из характеристики Бека для объединённого множества решений ИСЛАУ [2] следует, что

$$y \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff 0 \in \mathbf{A}y - \mathbf{b},$$

$$z \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff 0 \in \mathbf{A}z - \mathbf{b}.$$

Далее, хотя дистрибутивность умножения относительно сложения в интервальной арифметике в общем случае не имеет места, но

$$\mathbf{a}(y_i + z_i) = \mathbf{a}y_i + \mathbf{a}z_i \quad \text{при совпадении знаков } y_i \text{ и } z_i,$$

$$\mathbf{a}(y_i + z_i) = \mathbf{a}y_i + \mathbf{a}z_i \quad \text{для точечных } \mathbf{a}.$$

Отсюда следует, что для рассматриваемых нами точек y и z

$$\mathbf{A}(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \mathbf{A}(\lambda y) + \mathbf{A}((1 - \lambda)z),$$

поскольку знаки компонент y и z могут различаться лишь в k -ой, номер которой совпадает с номером точечного столбца в \mathbf{A} . Следовательно,

$$\mathbf{A}(\lambda y + (1 - \lambda)z) - \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{A}y - \mathbf{b}) + (1 - \lambda)(\mathbf{A}z - \mathbf{b}) \ni 0,$$

так как оба слагаемых последней суммы содержат нулевой вектор. Снова пользуясь характеристикой Бека, можем заключить, что точка $\lambda y + (1 - \lambda)z$ действительно лежит в множестве решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Следствие 1. Если в матрице $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ имеется p полностью точечных столбцов, номера которых суть $\{k_1, k_2, \dots, k_p\} = P \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, то множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной

Таблица: Организация выполнения методов дробления решений для ИС.ЛАУ с точечными столбцами в матрице и получаемая при этом экономия трудозатрат.

Методы	$p = 0$	$p = 1, \nu \notin P$	$p = 1, \nu \in P$	$p \geq 2, \nu \notin P$	$p \geq 2, \nu \in P$
Прямые методы дробления решений	Дробим брус, в котором исключена компонента под номером ν . При дроблении стараемся свести брусы к знаковому определённому.	Не дробим по направлению $k \in P$, количество итераций уменьшится максимум в 2 раза.	После сведения к знаковому определённому брусам количество вызовов Ω_{LLP} сократится максимум в 2 раза.	Не дробим по всем $k \in P$, количество итераций уменьшится максимум в $2^{(p-1)}$ раз. Скорость сходимости?	Не дробим по всем $k \in P$, количество итераций уменьшится максимум в $2^{(p-1)}$ раз. После сведения к знаковому определённому брусам количество вызовов Ω_{LLP} сократится максимум в 2 раза. Скорость сходимости?
Двойственные методы дробления решений	Дробим брус, в котором исключены «немые» направления. При дроблении стараемся свести брусы к знаковому определённому.	<p>I) Выбираем $k \in P$ в качестве «немой» переменной. Выигрыш: количество вызовов Ω_{VLP} сократится максимум в 2 раза.</p> <p>II) Если размерность матрицы ≥ 3, то выбираем в качестве «немого» направления, отличное от $k \in P$ и ν. Не дробим по $k \in P$, количество итераций уменьшится максимум в 2 раза.</p>	Выигрыша нет.	<p>I) Выбираем $k \in P$ в качестве «немой» переменной, по остальным компонентам с номерами $l \in P \setminus \{k\}$ не производим дробление. Выигрыш: количество вызовов Ω_{VLP} сократится максимум в 2 раза, количество итераций уменьшится максимум в $2^{(p-1)}$ раз.</p> <p>II) Если размерность матрицы ≥ 4, то выбираем в качестве «немого» направления, отличное от $k \in P$ и ν. Не дробим по $k \in P$, количество итераций уменьшится максимум в $2^{(p-1)}$ раз.</p>	<p>I) Выбираем $k \in P$ в качестве «немой» переменной, по остальным компонентам с номерами $l \in P \setminus \{k\}$ не производим дробление. Выигрыш: количество вызовов Ω_{VLP} сократится максимум в 2 раза, количество итераций уменьшится максимум в $2^{(p-2)}$ раз.</p> <p>II) Если размерность матрицы ≥ 4, то выбираем в качестве «немого» направления отличное от $k \in P$ и ν. Не дробим по $k \in P$ (но по ν дробим), количество итераций уменьшится максимум в $2^{(p-1)}$ раз.</p>

линейной системы $Ax = b$ имеет выпуклые пересечения с объединениями 2^P ортантов пространства \mathbb{R}^n , у которых знаки компонент точек с номерами из множества $\{1, 2, \dots, n\} \setminus P$ совпадают (эти ортанты смежны относительно координатных плоскостей $x_k = 0$, $k \in P$).

Следствие 2. Если в матрице $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеется p полностью точечных столбцов, то множество решений $\Xi(A, b)$ интервальной линейной системы $Ax = b$ является объединением не более 2^{n-p} выпуклых многогранных множеств.

Как можно использовать эти результаты в методах внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ? Преимущества от применения тех или иных методов дробления решений (прямых и двойственных) в случае присутствия полностью точечных столбцов в матрице системы A показаны в таблице.

Например, пусть в матрице A имеется единственный точечный столбец с номером k . Если при выполнении прямого метода дробления решений мы ищем внешнюю оценку множества решений по компоненте с тем же номером, т.е. $\nu = k$, то, пользуясь Предложением, распознавание пересечения заданного пучка прямых с множеством $\Xi(A, b)$ или оценивание это пересечения можно выполнить ценой решения всего одной задачи линейного программирования (сразу вдоль всего ν -го координатного направления), а не двух таких задач, соответствующих случаям $x_\nu \leq 0$ и $x_\nu \geq 0$.

В двойственном методе дробления решений при оценивании множества решений по направлению с номером ν , такому что $\nu \neq k$, у нас появляются даже две альтернативы возможной экономии трудозатрат:

- для распознавания пересечений пучка прямых с множеством решений можно, как и в прямых методах дробления решений, решать одну задачу линейного программирования вдоль всего координатного направления k вместо двух ЗЛП, соответствующих $x_k \leq 0$ и $x_k \geq 0$;
- в силу результата Предложения мы можем вообще не производить дробления пучков вдоль направления ν , что позволит уменьшить общие трудозатраты алгоритма максимум в 2 раза.

Напомним, что непосредственно в самой схеме двойственного метода дробления решений заложена возможность задания как направления ν , вдоль которого необходимо получить оценку множества решений, так и направлений, вдоль которых будет производиться дробление брусков, и эти направления могут не совпадать.

4. Литература

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления. – Москва: Мир, 1987.
- [2] NEUMAIER A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [3] SHARY S. P. On optimal solution of interval linear equations // SIAM J. Numer. Analysis. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [4] ШАРЫЙ С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение. – Диссертация . . . доктора физ.-мат. наук. — Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2000.
- [5] ШАРЫЙ С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть 1 // Вычислительные Технологии. – 2002. – Т. 7, №6. – С. 90–113.
ШАРЫЙ С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть 2 // Вычислительные Технологии. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 84–109.
- [6] SHARY S. P. A surprising approach in interval global optimization // Reliable Computing. – 2001. – No. 6. – P. 497–505.
- [7] OETTL W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // SIAM J. Numer. Analysis. – 1965. – Vol. 2, No. 1. – P. 115–118.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Г.Н. Шило

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина
E-mail: gshilo@zntu.edu.ua

Аннотация

Исследуются свойства интервальных структур с плавающими интервалами, границами и связанными интервалами. Рассматриваются ветвящиеся интервальные структуры с интервальными параметрами и величинами внешних воздействий. Показано применение интервальных структур в задачах выбора элементов электронных аппаратов.

Ключевые слова: внешние воздействия, электронные аппараты, ветвящиеся интервальные структуры, компенсация, выбор параметров элементов

Keywords: external action, electronic devices, branching interval structures, compensation, choice of element parameters

При производстве элементов электронных аппаратов невозможно контролировать и обеспечить параметры материалов с высокой точностью. Появляющиеся вследствие этого отклонения параметров элементов приводят к отклонениям выходных функций аппаратуры. При неизвестных законах распределения параметров для оценки точности аппаратуры используется принцип минимума-максимума, реализуемый в интервальных методах расчета. Интервальный подход позволил упростить не только процедуру оценивания отклонений выходных функций, но и разработать методы назначения допусков [1].

В процессе эксплуатации электронных аппаратов параметры элементов начинают изменяться вследствие внешних воздействий (изменение температуры, старение, действие влаги и т.д.). Для оценивания влияния этих воздействий могут использоваться интервальные структуры с плавающими интервалами и границами [2]. Такие структуры содержат информацию о диапазоне изменения параметров и могут использоваться в процедурах выбора элементов и компенсации внешних воздействий [3]. Различные стратегии выбора элементов реализованы при вещественных коэффициентах внешних воздействий [4].

Целью настоящей работы является разработка методов выбора элементов при интервальных коэффициентах внешних воздействий. Для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть способы образования и свойства интервальных структур, которые могли бы учитывать интервальные свойства коэффициентов внешних воздействий и разработать стратегии выбора элементов с учетом интервальных коэффициентов внешних воздействий.

Для перехода к интервальным структурам с интервальными параметрами внешних воздействий необходимо сначала формализовать соотношения для интервальных структур с плавающими интервалами и границами. Эти структуры оперируют с одними и теми же границами, из которых формируются интервальные величины.

Определение 1. Интервальной структурой называется интервальная пара интервалов:

$$F_x(\mathbf{x}, *, \mathbf{t}) = [\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_p], \quad (1)$$

где $F_x \in \{F_i, F_b, F_c\}$ – множество операторов интервальных структур;

$*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ – множество арифметических операций;

F_i, F_b и F_c – операторы интервальных структур с плавающими интервалами, границами и связанными интервалами;

$\mathbf{x} = [\underline{x}; \bar{x}]$ и $\mathbf{t} = [\underline{t}; \bar{t}]$ – интервалы параметра элемента и величины внешних воздействий;

\mathbf{x}_m и \mathbf{x}_p – нижний и верхний интервалы интервальной структуры.

Граничные интервалы интервальной структуры определяются с помощью выражений:

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x} * \mathbf{t}_m, \quad \mathbf{x}_p = \mathbf{x} * \mathbf{t}_p; \quad (F_x = F_i) \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_m = \underline{x} * \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}_p = \bar{x} * \mathbf{t}; \quad (F_x = F_b) \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x} * \text{dual } \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}_p = \mathbf{x} * \mathbf{t}; \quad (F_x = F_c) \quad (4)$$

где $\text{dual } \mathbf{t} = [\bar{t}_p; \underline{t}_m]$ – дуальный интервал величин внешних воздействий.

Интервальные структуры с плавающими интервалами позволяют оценить предельные значения интервальных параметров при граничных значениях внешних воздействий. Для оценивания диапазона изменения граничных отклонений используется интервальная структура с плавающими границами. Выражения (4) позволяют проводить внутреннее и внешнее оценивание изменения параметров. Они соответствуют интервальным структурам со связанными интервалами, имеют границы в виде интервалов и могут рассматриваться как интервальное расширение твинов [5, 6].

При одинаковых внешних воздействиях арифметические операции над интервальными структурами выполняются с помощью соотношений:

$$F_x(\mathbf{x}_1, *, \mathbf{t}) \diamond F_y(\mathbf{x}_2, *, \mathbf{t}) = [\mathbf{x}_{m1} \diamond \mathbf{x}_{m2}, \mathbf{x}_{p1} \diamond \mathbf{x}_{p2}], \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_1 \diamond F_x(\mathbf{x}_2, *, \mathbf{t}) = [\mathbf{x}_1 \diamond \mathbf{x}_{m2}, \mathbf{x}_1 \diamond \mathbf{x}_{p2}], \quad (6)$$

где $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Иначе используется нотация классической интервальной арифметики.

Из выражений (5) могут быть получены соотношения для разложения одной интервальной структуры на две составляющие:

$$F_x(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \cdot, \mathbf{t}) = F_x(\mathbf{x}_1, \cdot, \mathbf{t}) + F_x(\mathbf{x}_2, \cdot, \mathbf{t}); \quad (7)$$

$$F_x(\mathbf{x}, \cdot, f_1(\mathbf{t}) + f_2(\mathbf{t})) = F_x(\mathbf{x}, \cdot, f_1(\mathbf{t})) + F_x(\mathbf{x}, \cdot, f_2(\mathbf{t})); \quad (8)$$

$$F_x(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2, \cdot, f_1(\mathbf{t}) \cdot f_2(\mathbf{t})) = F_x(\mathbf{x}_1, \cdot, f_1(\mathbf{t})) \cdot F_x(\mathbf{x}_2, \cdot, f_2(\mathbf{t})); \quad (9)$$

где $f(\mathbf{t})$ – интервальное расширение функции внешних воздействий.

Разложение интервальной структуры на интервал и интервальную структуру вытекает из (7)–(9) при замене одного из слагаемых или сомножителя на вещественную величину:

$$F_x(1 + \mathbf{x}, \cdot, \mathbf{t}) = \mathbf{t} + F_x(\mathbf{x}, \cdot, \mathbf{t}); \quad (10)$$

$$F_x(\mathbf{x}, \cdot, 1 + f(\mathbf{t})) = \mathbf{x} + F_x(\mathbf{x}, \cdot, f(\mathbf{t})); \quad (11)$$

$$F_x(\mathbf{x}, \cdot, f_1(\mathbf{t}) \cdot f_2(\mathbf{t})) = f_1(\mathbf{t}) \cdot F_x(\mathbf{x}_2, \cdot, f_2(\mathbf{t})); \quad (12)$$

$$F_x(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2, \cdot, f(\mathbf{t})) = \mathbf{x}_1 \cdot F_x(\mathbf{x}_2, \cdot, f(\mathbf{t})). \quad (13)$$

Соотношения (5)–(13) используются при преобразовании моделей выходных функций электронных аппаратов.

Функция внешних воздействий может иметь параметры, которые представляются интервальными величинами. Если свойства этих интервалов не зависят от величины внешних воздействий, то они могут рассматриваться как независимые внешние воздействия. В этом случае возможности оценивания основных параметров элементов значительно расширяются. Такие оценки могут проводиться с помощью ветвящихся интервальных структур.

Определение 2. Ветвящейся интервальной структурой называется структура, у которой внешние воздействия являются интервальной структурой и которая представляется интервальной парой интервальных структур:

$$F_x(\mathbf{x}, *, F_y(\mathbf{d}, \diamond, \mathbf{t})) = [F_x(\mathbf{x}, *, \mathbf{d}_m), F_x(\mathbf{x}, *, \mathbf{d}_p)], \quad (14)$$

$F_y \in \{F_i, F_b, F_c\}$ – множество операторов интервальных структур;

$\mathbf{d} = [d_m; d_p]$ – интервал коэффициента внешних воздействий;

\mathbf{d}_m и \mathbf{d}_p – нижний и верхний интервалы интервальной структуры внешних воздействий.

Ветвящаяся интервальная структура может быть однородной, если в ней используются одинаковые операторы. Иначе структура становится смешанной. Если в (14) внешние воздействия задаются ветвящейся интервальной структурой, то тогда структура становится многократной. Запись (14) соответствует двойной интервальной структуре. С помощью соотношения (1) ветвящиеся интервальные структуры могут преобразовываться к парам интервалов. Процесс преобразования может представляться в виде бинарного графа. В кроне графа ветвящегося интервала n -ой кратности содержится 2^n интервалов. Двойной интервальной структуре (14) соответствует крона из двух пар интервалов. Арифметические операции над ветвящимися интервальными структурами выполняются с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} & F_x(\mathbf{x}_1, *, F_y(\mathbf{d}_1, \diamond, \mathbf{t})) \circ F_x(\mathbf{x}_2, *, F_y(\mathbf{d}_2, \diamond, \mathbf{t})) = \\ & = [F_x(\mathbf{x}_1, *, \mathbf{d}_{m1}) \circ F_x(\mathbf{x}_2, *, \mathbf{d}_{m2}), F_x(\mathbf{x}_1, *, \mathbf{d}_{p1}) \circ F_x(\mathbf{x}_2, *, \mathbf{d}_{p2})]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & Fx(x_1, *, t) \circ Fx(x_2, *, Fy(d, \diamond, t)) = \\ & = [Fx(x_1, *, t) \circ Fx(x_2, *, d_m), Fx(x_1, *, t) \circ Fx(x_2, *, d_p)]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$x_1 \circ Fx(x_2, *, Fy(d, \diamond, t)) = [x_1 \circ Fx(x_2, *, d_m), x_1 \circ Fx(x_2, *, d_p)], \quad (17)$$

где $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ – множество арифметических операций.

Если в выражениях (15), (16) используются различные виды внешних воздействий, то операции вычитания и деления используют нотации классической интервальной арифметики. Разложение ветвящейся интервальной структуры на две ветвящихся структуры возможно, если ее основной параметр или внешние воздействия задаются суммой или произведением интервалов или интервальных структур:

$$Fx(x_1 + x_2, *, Fy(d, \diamond, t)) = Fx(x_1, *, Fy(d, \diamond, t)) + Fx(x_2, *, Fy(d, \diamond, t)); \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & Fx(x, *, Fy(d_1, \diamond, f_1(t)) + Fy(d_2, \diamond, f_2(t))) = \\ & = Fx(x, *, Fy(d_1, \diamond, f_1(t))) + Fx(x, *, Fy(d_2, \diamond, f_2(t))); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & Fx(x_1 \cdot x_2, *, Fy(d_1, \diamond, f_1(t)) \cdot Fy(d_2, \diamond, f_2(t))) = \\ & = Fx(x_1, *, Fy(d_1, \diamond, f_1(t))) \cdot Fx(x_2, *, Fy(d_2, \diamond, f_2(t))). \end{aligned} \quad (20)$$

Разложение двукратной интервальной структуры на одно- и двукратную структуры вытекает из выражений (18)–(20) при замене одного из элементов на интервал или вещественную величину:

$$Fx(1 + x, *, Fy(d, \diamond, t)) = Fy(d, \diamond, t) + Fx(x, *, Fy(d, \diamond, t)); \quad (21)$$

$$Fx(x, *, Fy(d_1, \diamond, f_1(t)) + Fy(d_2, \diamond, f_2(t))) = Fx(x, \diamond, f_1(t)) + Fx(x, *, Fy(d_2, \diamond, f_2(t))); \quad (22)$$

$$Fx(x, *, Fy(d_1, \diamond, f_1(t)) \cdot Fy(d_2, \diamond, f_2(t))) = Fy(d_1, \diamond, f_1(t)) \cdot Fx(x, *, Fy(d_2, \diamond, f_2(t))); \quad (23)$$

$$Fx(x_1 \cdot x_2, *, Fy(d, \diamond, t)) = x_1 \cdot Fx(x_2, *, Fy(d, \diamond, t)). \quad (24)$$

Выражения (18)–(24) могут использоваться для декомпозиции интервально-структурных уравнений при решении задач, связанных с компенсацией внешних воздействий, выбором элементов и назначением допусков в случаях, когда параметры внешних воздействий являются интервальными величинами.

При изготовлении электронных аппаратов несовершенство технологических процессов приводит к отклонениям параметров элементов, в результате чего выходная функция аппарата становится интервальной [3]:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (25)$$

где y , x и a – интервалы выходной функции, параметров элементов и коэффициентов модели; n – количество параметров элементов.

Учет влияния внешних воздействий на параметры элементов обычно проводится с помощью выражений:

$$x = x_0(1 + d \cdot t),$$

где x_0 – значение входного параметра при отсутствии внешнего воздействия.

Внешние воздействия задаются нульсодержащим интервалом t . Если коэффициент внешних воздействий является вещественным числом, то оценивание выходной функции проводится с помощью интервально-структурного уравнения:

$$Fi(y, \cdot, 1 + d_y \cdot t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot Fi(x_i, \cdot, 1 + d_{x_i} \cdot t), \quad (26)$$

где d_y и d_x – коэффициенты внешних воздействий выходной функции и параметров элементов.

Уравнение (26) с помощью соотношений разложения разлагается на уравнение (25) и интервально-структурное уравнение компенсации внешних воздействий:

$$d_y \cdot Fi(y, \cdot, t) = \sum_{i=1}^n d_{x_i} \cdot a_i \cdot Fi(x_i, \cdot, t). \quad (27)$$

Отображение интервально-структурного уравнения (27) в область вещественных чисел приводит к четырем уравнениям, которые используются при выборе коэффициентов внешних воздействий. В этой процедуре возможно применение различных стратегий, позволяющих достичь максимальных показателей по одному параметру или по их группе. Возможно получение максимальных объемов пространства факторов компенсации или допусковой области. Задача решается в итерационном режиме с учетом эксплуатационных ограничений на выходную функцию, которая записывается аналогично (25). После выбора коэффициентов внешних воздействий назначаются номинальные отклонения параметров элементов. При этом в область действительных чисел последовательно отображается уравнение (26).

Если коэффициенты внешних воздействий задаются интервальной величиной, то оценивание выходной функции производится с помощью уравнения с двойными интервальными структурами:

$$Fi(\mathbf{y}, \cdot, 1 + Fi(\mathbf{d}_y, \cdot, \mathbf{t})) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \cdot Fi(\mathbf{x}_i, \cdot, 1 + Fi(\mathbf{d}_{x_i}, \cdot, \mathbf{t})), \quad (28)$$

где \mathbf{d}_y и \mathbf{d}_x – интервалы коэффициентов внешних воздействий выходной функции и параметров элементов.

При выборе элементов в случае (28) также используется разложение интервально-структурного уравнения выходной функции и выделение задачи компенсации внешних воздействий. Но отображение уравнения компенсации в область вещественных чисел приводит уже к восьми уравнениям. В этой связи возможно расширение видов стратегий выбора элементов.

Интервальные структуры являются эффективным инструментом описания процессов изменения выходных функций и параметров элементов при внешних воздействиях на электронные аппараты. Многообразие структур позволяет реализовать различные виды оценивания свойств аппаратуры. Применение ветвящихся интервальных структур позволяет учитывать не только интервальные величины внешних воздействий, но и интервальный характер их параметров. Задачи выбора элементов решаются при отображении интервально-структурных уравнений в область действительных чисел. В процессе выбора элементов могут использоваться различные стратегии.

Литература

1. Шило Г.М., Воропай О.Ю., Гапоненко М.П. Інтервальні методи призначення експлуатаційних допусків // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2003. – N 2. – С. 78–82.
2. Шило Г.М. Інтервали і інтервальні структури // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2001. – N 2. – С. 121–125.
3. Шило Г.Н., Намлинский А.А., Гапоненко Н.П. Компенсация и оптимизация при назначении номинальных допусков // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – N 2. – С. 39–44.
4. Крицук В.М., Шило Г.М., Намлинський А.О., Гапоненко М.П. Вибір елементів при компенсації зовнішніх впливів // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2004. – N 2. – Р. 26–41.
5. GARDENES E., TREPAT A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing. – 1980. – P. 161–179.
6. NESTEROV V. M. Interval and twin arithmetics // Reliable Computing. – 1997. – N 4. – P. 369–380.

МОЛЕКУЛЯРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ БИОМАКРОМОЛЕКУЛ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

А.П. Якимов, М.Г. Петухов

лаборатория биофизики макромолекул ОМРБ, Петербургский институт ядерной физики
188300, Гатчина / Санкт-Петербург
Email: pmg@omrb.pnpi.spb.ru

Аннотация

В работе предлагается новый подход в исследовании конформационного пространства белков и других биомacroмолекул с помощью методов интервальной глобальной оптимизации в обобщенных координатах (т.е. двугранных углов основной и боковых цепей). Рассматриваются вопросы эффективности и границ применимости этих методов в задачах поиска глобальных минимумов и конформационного анализа таких гетерополимеров как белки, ДНК, РНК и их комплексов.

Ключевые слова: интервальная геометрия, конформационный анализ, белки, глобальная оптимизация
Keywords: interval geometry, conformational analysis, proteins, global optimization

1. Введение

Пространственные структуры биологически активных макромолекул (таких как белки, ДНК, РНК и др., а также их комплексов) уже давно находятся в фокусе исследований современной молекулярной биологии. Эти молекулярные объекты состоят из многих тысяч атомов, часто весьма подвижны и имеют большое количество степеней свободы, исчисляемые сотнями переменных. Многие интересные задачи молекулярной биологии (например, задача предсказания пространственной структуры по аминокислотной последовательности белка и др.) могут быть поставлены как задачи поиска глобального минимума некоторого многомерного функционала, обычно имеющего астрономическое количество локальных минимумов.

Для белка сравнительно небольшого размера в 100 аминокислотных остатков, в фазовом пространстве двугранных углов его основной и боковых цепей имеется порядка 10^{100} индивидуальных конформаций [1], многие из которых стерически запрещены. И даже для таких сравнительно “простых” белков количество стерически разрешенных конформаций, вероятно, порядка этой же величины. Ясно, что такое количество возможных конформаций слишком велико для того, чтобы можно было проверить каждую из них и выбрать оптимальную. Перебор всех возможных конформаций белка для поиска той, возможно единственной конформации, в которой белок активен, невозможен и в природе, поскольку занял бы время порядка 10^{80} лет (так называемый парадокс Левинтала). Поэтому в живой клетке (*in vivo*) имеется сложный комплекс белков, служащий для ускорения сворачивания других белков в их активную конформацию (белки теплового шока, шапероны, белки GroEl, GroEs, цис-транс-пролизиомеразы и т.д.) [2]. *In vivo* имеется также специальный механизм для контроля правильности сворачивания белков. Неправильно свернутые белки быстро идентифицируются и уничтожаются, а их строительные блоки (аминокислоты) немедленно используются клеткой для синтеза новых белков.

Экспериментально показано, что *in vitro* (т.е. в пробирке) многие, хотя и не все, особенно небольшие однодоменные белки способны самопроизвольно сворачиваться в уникальную биологически активную конформацию [3] за сравнительно небольшие времена в интервале от миллисекунд до нескольких минут [4]. Однако, остается неизвестным является ли эта активная конформация глобальным минимумом свободной энергии данной последовательности или всего лишь одной из промежуточных структур, наиболее доступных кинетически за все время существования данного белка. Ответ на этот вопрос имел бы огромное значение не только с точки зрения фундаментальной физики белка, но и для искусственного конструирования белков с наперед заданными свойствами для использования в промышленности и в медицине.

Имеются также и другие интересные задачи молекулярной биологии, которые требуют эффективного исследования конформационного пространства исследуемых биомacroмолекул. Например: а) поиск всех энергетических минимумов, включая и глобальный, в определенном энергетическом диапазоне; б) поиск путей конформационных переходов из одного конформационного состояния

молекулы в другие, достаточно заселенные состояния; в) поиск конформаций взаимодействующих молекул при связывании различных лигандов в активных центрах белков; г) структурная интерпретация спектров ЯМР и др. К сожалению, в отличие от интервальных методов глобальной оптимизации, имеющиеся в настоящее время подходы, основанные на молекулярной динамике, Монте-Карло минимизации и различных методах локальной и глобальной минимизации, не гарантируют ни сходимости в глобальный минимум, ни полного исследования сколько-нибудь значительных частей конформационного пространства исследуемых биомакромолекул.

В последнее время в литературе появилось несколько работ, использующих интервальные подходы для конформационного анализа сравнительно небольших органических молекул размером до 40 атомов в декартовых координатах [5–7]. Однако, несмотря на относительную простоту, использование декартовых координат не только неоправданно увеличивает количество степеней свободы оптимизируемой системы ($\sim 3 \times$ количество атомов), но, и что еще более важно, не вполне физически обосновано. Известно, например, что при умеренной температуре ($\sim 300\text{K}$) колебания валентных связей вообще не возбуждены, а колебания валентных углов строго ограничены в области их равновесных значений. Кроме того, в интересующих нас биомакромолекулах часто встречаются большие группы атомов (например ароматические и гуанидиновые группы), которые ведут себя как твердые тела.

В данной работе, на основе современных методов интервального анализа, мы предпринимаем попытку создания методов моделирования и глобальной оптимизации молекулярных функционалов в обобщенных координатах для различных биомакромолекул и их комплексов. Такой подход позволяет, сохраняя максимально высокое разрешение полноатомной модели, минимизировать количество степеней свободы исследуемой молекулярной системы ($\sim 6 \times$ количество аминокислотных остатков) и, таким образом, повысить общую эффективность работы методов оптимизации. На первом этапе этой работы с помощью средств известного пакета программ GlobSol [8] для интервального анализа на языке программирования Fortran-90 нами созданы новые алгоритмы и реализующие их компьютерные программы, позволяющие рассчитывать необходимую для использования любых энергетических потенциалов полноатомную интервальную геометрию белков в обобщенных координатах (двугранные углы основной и боковых цепей белка) с произвольной аминокислотной последовательностью. Полученные результаты показывают как высокую эффективность, так и существенные ограничения применимости интервальных методов расчета в молекулярном моделировании биологически интересных молекулярных объектов.

2. Тест эффективности интервальной глобальной оптимизации

Интересные задачи глобальной оптимизации в молекулярной биологии характеризуются размерностью вектора переменных порядка $6 \times N$, где N – количество аминокислотных остатков в полимерной цепи белка или других биополимеров. Растительный белок Крамбин из *Crambe Abyssinica*, имеющий всего 46 аминокислотных остатков, является самым малым из известных глобулярных белков, все еще имеющих стабильную пространственную структуру. Самый большой из известных в настоящее время белков Титин имеет около 30000 аминокислотных остатков. Считается, что белки меньшие, чем Крамбин не имеют стабильной пространственной структуры и, поэтому, относятся к классу пептидов. К настоящему времени методами рентгеноструктурного анализа и двухмерного ЯМР получены пространственные структуры атомарного разрешения примерно 15000 белков из различных источников. Их средний размер составляет около 200 аминокислотных остатков. Таким образом, интересные для молекулярной биологии оптимизационные задачи имеют размерность, как минимум, нескольких сотен независимых степеней свободы.

На первом этапе этой работы мы попытались понять, имеют ли разработанные к настоящему времени методы интервальной глобальной оптимизации достаточную эффективность для такого рода задач. Для этого мы использовали известный пакет интервальной глобальной оптимизации GlobSol [8], позволяющий создавать собственные интервальные приложения неограниченной сложности на языке программирования Fortran-90. В качестве тестовой целевой функции использовалась стандартная тестовая математическая функция (Levy № 10 [9]) с произвольно изменяемым количеством переменных и локальных минимумов, а также с известным положением глобального минимума в точке $x_i = 1$:

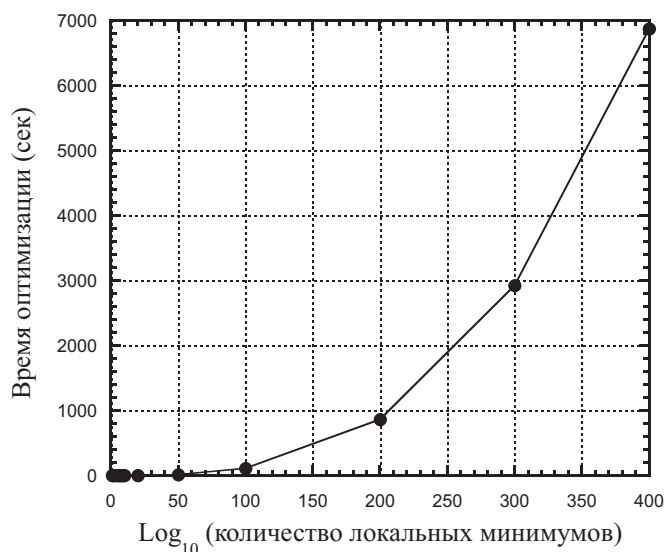
$$f(\bar{x}) = \sin^2(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - 1)^2 (1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1})) + (y_n - 1)^2; \quad (1)$$

$$y_i = 1 + (x_i - 1)/4; \quad x_i = [-10, 10]; \quad i = 1, \dots, n.$$

Известно, что при размерности n эта непрерывная дважды дифференцируемая математическая функция имеет в n -мерном боксе $[-10, 10]_i$ примерно 10^n индивидуальных локальных минимумов.

Рисунок 1 демонстрирует зависимость времен сходимости алгоритма GlobSol в глобальный ми-

Рисунок 1. Эффективность работы алгоритма интервальной глобальной оптимизации GlobSol[8] на примере оптимизации функции (1) в n -мерном боксе $[-10, 10]_i$.



нимум тестовой функции (1) от количества локальных минимумов этой функции (в логарифмической шкале). Расчеты проводили на персональном компьютере средней производительности типа Pentium IV/2000 под управлением Windows-XP и с использованием оптимизирующего компилятора Compaq Visual Fortran v.6.6 для языка программирования Fortran-90.

Эти результаты показывают, что с точки зрения сложности оптимизируемого функционала, т.е. обрабатываемого количества локальных минимумов и оптимизируемых переменных, имеющиеся алгоритмы интервальной глобальной оптимизации имеют адекватную эффективность для многих интересных задач молекулярной биологии и физики белка.

3. Сравнительный анализ алгоритмов построения интервальной геометрии белков

С точки зрения своей химической структуры белки представляют собой гетерополимерную цепочку остатков 20 природных аминокислот, имеющих одинаковую структуру основной цепи и отличающихся только составом боковых цепей (см. Рисунок 2). Пространственное расположение атомов

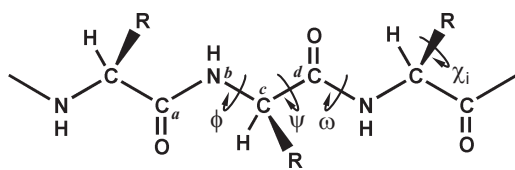
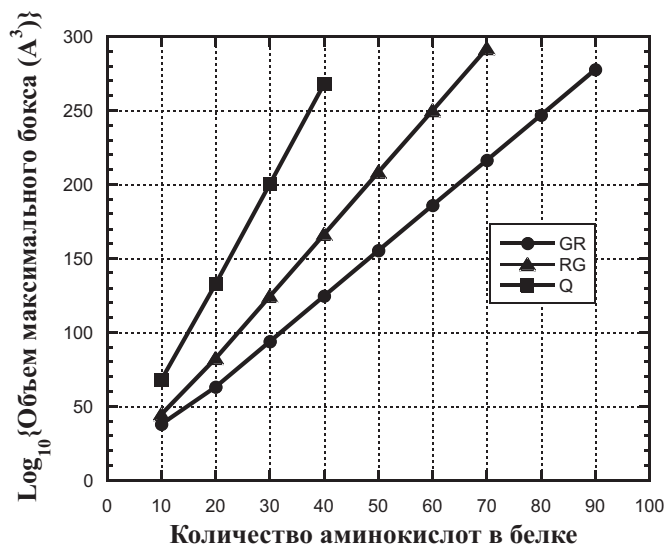


Рисунок 2. Структура полипептидной цепи белка и подвижные двугранные углы (φ, ψ и ω) основной цепи.

Рисунок 3. Сравнение эффективности трех методов построения интервальной геометрии белков.



(конформация белка) зависит от набора двугранных углов в его основной (φ, ψ и ω) и боковых цепях (χ_1, χ_2, \dots). Для решения многих задач конформационного анализа белков и других биомолекул с помощью методов интервального анализа и глобальной оптимизации вначале необходимо разработать вычислительно эффективный алгоритм построения интервальной геометрии белка

(т.е. преобразование интервалов двугранных углов $[-\pi, +\pi]$ в интервальные декартовы координаты всех атомов белка). Эта задача сводится к последовательным вращениям фрагментов цепи белка вокруг пространственных осей, проходящих через соответствующие ковалентные связи. Одной из главных проблем и причин возможных ограничений применимости здесь является проблема экспоненциального нарастания размеров интервалов координат атомов при последовательном вращении двугранных углов основной цепи (так называемая проблема зависимости переменных).

В общем случае вращение вектора \vec{R} вокруг пространственной оси \vec{bc} на угол θ может быть получено несколькими различными способами. Например, метод RG (Rodrigues-Gibbs) описывает вращение вектора следующим простым векторным выражением: $\vec{R}' = \vec{R} \cos \theta + \vec{bc} \times \vec{R} \sin \theta + (\vec{R} \cdot \vec{bc}) \vec{bc} (1 - \cos \theta)$. В методе GR (General Rotation) используется матрица вращения:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_x^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & \vec{u}_y \vec{u}_x(1 - \cos \theta) - \vec{u}_z \sin \theta & \vec{u}_z \vec{u}_x(1 - \cos \theta) + \vec{u}_z \sin \theta \\ \vec{u}_x \vec{u}_y(1 - \cos \theta) + \vec{u}_z \sin \theta & \vec{u}_y^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & \vec{u}_z \vec{u}_y(1 - \cos \theta) - \vec{u}_x \sin \theta \\ \vec{u}_x \vec{u}_z(1 - \cos \theta) - \vec{u}_y \sin \theta & \vec{u}_y \vec{u}_z(1 - \cos \theta) + \vec{u}_x \sin \theta & \vec{u}_z^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{pmatrix};$$

матрица вращения метода кватернионов описывается следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} s^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2xy - 2sz & 2xz - 2sy \\ 2xy - 2sz & s^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2yz + 2sx \\ 2xz + 2sy & 2yz - 2sx & s^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix},$$

где $s = \cos \frac{\theta}{2}$; $(x, y, z) = \sin \frac{\theta}{2} \vec{bc}$.

В этой работе мы создали алгоритм построения интервальной геометрии белков с произвольной последовательностью аминокислот. На примере белков различного размера (от 10 до 90 аминокислотных остатков) мы проверили эффективность работы нескольких широко используемых в молекулярном моделировании методов расчета пространственных координат атомов: метода Родригеса-Гибса (RG), метода обобщенного вращения (GR) и метода кватернионов (Q) [10]. Результаты этого анализа представлены на Рисунке 3.

4. Выводы

Полученные результаты показывают, что наиболее эффективным методом построения интервальной геометрии белка в настоящее время является метод GR. Однако и этот метод имеет существенные ограничения применимости. В частности, так как числа с плавающей точкой, которые могут быть представлены в современных компьютерах, ограничиваются величинами в диапазоне примерно от $\sim -10^{300}$ до $\sim +10^{300}$ метод GR позволяет применять интервальные методы анализа для небольших белков, размером примерно до 100 остатков имеющих около 600 независимых степеней свободы.

5. Литература

1. ФИНКЕЛЬШТЕЙН А.В., ПТИЦИН О.Б. Физика белка. — Москва: Книжный дом "Университет", 2002.
2. GRANTCHAROVA V., ET AL. Mechanisms of protein folding // Curr. Opin. Struct. Biol. — 2001. — 11(1). — P. 70–82.
3. ANFINSEN C.B Principles that govern the folding of protein chains. // Science. — 1973. — 181(96). — P. 223–30.
4. KUBELKA J., HOFRICHTER J., AND EATON W.A. The protein folding 'speed limit' // Curr. Opin. Struct. Biol. — 2004. — 14(1). — P. 76–88.
5. LAVOR C. A deterministic approach for global minimization of molecular potential energy functions // International Journal of Quantum Chemistry. — 2003. — 95(3). — P. 336–343.
6. LIN Y. AND STADTHERR M.A. Locating stationary points of sorbate-zeolite potential energy surfaces using interval analysis // The Journal of Chemical Physics. — 2004. — 121(20). — P. 10159–10166.
7. LIN Y. AND STADTHERR M.A. Deterministic global optimization of molecular structures using interval analysis // Journal of Computational Chemistry. — 2005. — 26(13). — P. 1413–1420.
8. KEARFOTT R.B. Rigorous Global Search: Continuous Problems. — Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.
9. LEVY A.V. AND MONTALVO A. The tunneling algorithm for the global minimization of functions // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1985. — 6. — P. 15–29.
10. PARSONS J., ET AL. Practical conversion from torsion space to Cartesian space for in silico protein synthesis // J. Comput. Chem. — 2005. — 26(10). — P. 1063–1068.

Содержание

Предисловие	3
Артюшенко Б.А., Шило Г.Н., Крищук В.Н. Применение генетического алгоритма для задач назначения интервальных допусков	5
Ахмеров Р.Р. О точности естественного интервального расширения функции	9
Беленький Л.Б. Об интервальной оценке неопределённости результата измерения зазора в шатунном подшипнике, скорректированного с использованием моделей	13
Бозоров М.Б. Интервальные вычисления в системах компьютерной алгебры	16
Бозоров М.Б., Юлдашев З.Х. О применении интервальных методов для решения задач обогащения полезных ископаемых	17
Бронз П.В. Оценка экономической эффективности инвестиционных проектов по интервальным данным	21
Виноградов Е.В. Погрешность вычисления ряда, оцениваемого геометрической прогрессией, на примере натурального логарифма	26
Виноградов Е.В., Зубов П.А., Меньшиков Г.Г. Реализуемость и доказательность гипотез о машинной арифметике, положенных в основу интервальных вычислений	30
Воцинин А.П., Скибицкий Н.В. Калибровка измерительных систем по данным интервальных измерений	34
Гайворонский С.А., Замятин С.В. Условия локализации корней интервального полинома в заданном секторе	38
Гофман И.Д., Инишев Д.А., Липатов А.А. Приложение структурных недоопределённых моделей с интервальными расширениями к задачам управления	42
Жилин С.И. Имитационное исследование методов последовательного планирования эксперимента при интервальной ошибке	47
Каминский Т.Э., Крюкова А.Л. Алгебраические, порядковые и метрические свойства интервальных округлений	51
Карташов В.Я., Столетов А.В. Идентификация интервальных моделей динамических объектов при наличии ошибок точечных измерений	55
Козина Г.Л., Кудерметов Р.К., Маслова Н.Д. Алгоритмы поиска оптимальных решений интервальных задач на графах	59
Кумков С.И. Разработка совместного Российского-ISO стандарта (методики) обработки измерительной информации в условиях неопределённости ошибок измерений и малого числа наблюдений (на основе методов интервального анализа)	63
Куприянова Л.В., Денисов В.С. Расширенная интервальная арифметика в MATLAB ...	68
Литвинов Г.Л., Соболевский А.Н. Положительные интервальные алгоритмы и идемпотентная математика	72

Литвинов Г.Л., Шпиз Г.Б. Интервальные решения обобщённых алгебраических уравнений в идемпотентной математике	75
Лычак М.М. Интервальные функции распределения и скользящего среднего возмущений как основа множественного оценивания	78
Лычак М.М. Решение системы линейных алгебраических уравнений с неточно заданными параметрами	83
Ляпин Д.С. Методика кластеризации для получения многомерных линейных интервальных моделей	87
Меньшиков Г.Г. Дальнейшие интервальные модификации примера Бабушки–Витасека–Прагера	90
Меньшиков Г.Г., Орлов В.Б. Постановка локализующих вычислений на факультете прикладной математики – процессов управления СПбГУ	94
Меньшиков Ю.Л. Обратная задача для дифференциального уравнения при неограниченной погрешности исходных данных	98
Панов Н.В., Шарый С.П. Стохастические подходы в интервальных методах глобальной оптимизации	101
Петрикевич Я.И., Карташов В.Я. Особенности интервальной структурно-параметрической идентификации линейного динамического объекта со свойством колебательности ...	106
Петров Е.С. Вычисление интервального расширения степенной функции методом декомпозиции графика	110
Померанцев А.Л., Родионова О.Е. Задачи обработки больших массивов химических данных при интервальной нестатистической ошибке	114
Соколова С.П., Соколова Л.А. Иммунокомпьютинг для анализа многомерных интервальных данных	116
Тарушкин В.Т. Интервальный и нечёткий методы наименьших квадратов	119
Терехов Л.С. О квантовании неопределённости измеряемых величин	123
Тулупова В.В. Повышение эффективности алгоритмов вычисления координат смещений торцов лопаток и лопастей ГТД с использованием интервальной математики	126
Хлебалин Н.А., Костиков А.Ю., Данилов В.В. Символьно-интервальные оптимизационные вычисления в задаче расчёта управлений и робастных регуляторов мехатронных систем	129
Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом и интервальными коэффициентами потерь запаса	130
Чаусова Е.В. Управление инвестиционным портфелем в условиях интервальной неопределённости	134
Шарая И.А. Переход к ограниченному допустимому множеству решений	135
Шарый С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло?	140
Шарый С.П., Бондарь А.А. Двойственный метод дробления решений для интервальных линейных систем уравнений	145
Шило Г.Н. Интервальные структуры и их применение	150
Якимов А.П., Петухов М.Г. Молекулярное моделирование пространственной структуры биомакромолекул с помощью методов интервального анализа и глобальной оптимизации в обобщённых координатах	154