

Проект
5-я редакция

УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Институт математики и механики УрО РАН

Центр метрологии и сертификации "Сертимет" УрО РАН

Научно–производственное объединение НПО "Весы" ЗАО

Новые информационные технологии в авиации "НИТА" ООО

Исследовательский институт атомных реакторов "Радиохимическое
объединение РФ"

?? ЕЩЁ Организации – соучредители ??

МЕТОДИКА

ГОСУДАРСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

ПОКАЗАТЕЛИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ НАБЛЮДЕНИЙ

Методика расчета

МИ–2011

Екатеринбург
2011

МИ–2011

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

Разработана:

Институт математики и механики УрО РАН. Исполнитель: С.И.Кумков

Центр метрологии и сертификации "Сертимет" УрО РАН. Исполнитель:
Л.А.Игнатенкова

Научно–производственное объединение НПО "Весы" ЗАО. Исполнитель: В.И.Чепков.

Новые информационные технологии в авиации "НИТА" ООО. Исполнитель:

Исследовательский институт атомных реакторов "Радиохимическое
объединение РФ". . Исполнитель:

?? ЕЩЁ Организации – соучредители и их исполнители ??

ПОДГОТОВЛЕНА К УТВЕРЖДЕНИЮ

Институтом математики и механики УрО РАН,
Центром метрологии и сертификации "Сертимет" УрО РАН.

ЗАРЕГИСТРИРОВАНА ВНИИМС

20.. г.

ВВЕДЕНА ВПЕРВЫЕ

20.. г.

Государственная система обеспечения единства измерений**ПОКАЗАТЕЛИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ
С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ НАБЛЮДЕНИЙ**

МИ.....–2011

Методика расчета

Введена
.....**1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ**

Настоящая рекомендация распространяется на результаты измерений с ограниченным числом наблюдений, для которых статистические методы обработки не могут быть использованы по причинам:

- недостаточной представительности объема наблюдений;
- полного отсутствия сведений о вероятностных характеристиках распределения погрешности наблюдений.

Рекомендация разработана в развитие ГОСТ 8.207-76 и основана на методах интервального анализа и анализа информационных множеств с использованием специальных программных средств и ЭВМ.

Основное применение – обработка результатов измерений: разрушающих испытаний, межлабораторных определений, круговых сличений и в случаях технических или экономических затруднений повторения эксперимента, а также в алгоритмах обработки результатов измерений быстро протекающих процессов в реальном масштабе времени.

2. НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ И ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

- 2.1. ГОСТ 8.207-76. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.
- 2.2. ГОСТ 8.508-84. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрологические характеристики средств измерений и точностные характеристики средств автоматизации ГСП. Общие методы оценки и контроля.
- 2.3. МИ 1317-86. Методические указания. Государственная система обеспечения единства измерений. Показатели точности и формы представления результатов измерений. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.
- 2.4. МИ 2083-93. Рекомендации. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание из погрешностей.

- 2.5. ГОСТ 126263-70. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения.
- 2.6. РУКОВОДСТВО по выражению неопределенности измерения. ВНИИМ им. Д.И.Менделеева. С.-Петербург, 1999. ISO, 1993, ISBN 92-67-10188-9.

При разработке настоящей Рекомендации использовались также сведения следующих научных и научно-технических источников.

- 2.7. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. –М., Наука, 1977.
- 2.8. Milanese M. and Norton J.P. (Eds.) Bounding Approaches to System Identification. Plenum Press, 1996, London, UK, New York, USA.
- 2.9. Jaulin L., Kiefer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. Springer, 2001, London, Berlin.
- 2.10. Kumkov S.I. Informational Sets in Applied Problems of Evaluation. Proceedings of the IFAC International Workshop "Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimisation". June, 17-20, 1998. Chelyabinsk, Russia. pp. 130-134.
- 2.11. Kumkov S.I. Application of Minimax Evaluation Procedures for Expansion of Metrological Standards on Noised Measurements. Proceeding of International Conference "SIMULATION-98". University of York, UK, 30 September – 2 October 1998, IEE Publication Number 457, pp.162-167.
- 2.12. Чернухо Е.И. Об интервальной модели неопределенности результата эксперимента // Измерительная техника, 1999, N 2, С.7-10.
- 2.13. Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А. Минимаксная обработка информации. –М., Энергоатомиздат, 1990.
- 2.14. Кумков С.И., Чепков В.И. Метод информационных множеств в метрологических процессах // Измерительная техника, 2000, N , С.
- 2.15. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. –М: Мир, 1983.
- 2.16. Ферстер Э., Ренц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. –М.: Финансы и статистика, 1983

??? РАСШИРИТЬ И ДОПОЛНИТЬ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРЕДЛОЖЕНИЯМ ОРГАНИЗАЦИЙ–СОУЧРЕДИТЕЛЕЙ ???

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей Методике вводятся и используются следующие основные понятия, термины и определения.

Множество неопределенности единичного наблюдения (H) – область возможных значений единичного наблюдения, зависящая от диапазона погрешности средства или методики измерений; диапазон определяется заранее на основе технических и статистических методов и декларируется как “абсолютный” интервал неопределенности

$$H_i = [x_i - \Delta_i, x_i + \Delta_i], \quad i = 1, N, \quad (3.1a)$$

$$\Delta_i = \Theta_i + 2\sigma, \quad (3.1б)$$

где x_i – наблюдение физической величины; N – длина выборки; Δ_i – максимальная величина погрешности в наблюдении при уровне доверия 0.95 (эквивалент суммарной погрешности); Θ_i – неисключенная систематическая (или хаотическая) составляющая; 2σ – случайная составляющая погрешности [2.6]. В общем случае для неравноточных наблюдений величины максимальных погрешностей Δ_i могут быть различны.

Интервал действительных (допустимых) значений (I) – интервал значений измеряемой величины, совместных с полученной выборкой наблюдений; интервал ограничен снизу максимальной из нижних границ, а сверху – минимальной из верхних границ множеств неопределенности (3.1a) полученной выборки

$$I = [h_{\min}, h_{\max}], \quad (3.2a)$$

$$h_{\min} = \max_i \{x_i - \Delta_i\}, \quad i = 1, N, \quad (3.2б)$$

$$h_{\max} = \min_i \{x_i + \Delta_i\}, \quad i = 1, N, \quad (3.2в)$$

где операции поиска максимума и минимума берутся по номерам наблюдений полученной выборки.

Оценка центрального действительного значения (x_c) – значение физической величины, равное середине интервала действительных значений

$$x_c = (h_{\min} + h_{\max}) / 2. \quad (3.3)$$

Максимальное действительное отклонение (Δx) – полуразмах интервала действительных значений; характеризует неопределенность значений физической величины

$$\Delta x = (h_{\max} - h_{\min}) / 2. \quad (3.4)$$

Оценка смещения единичного наблюдения (γ) – отклонение единичного наблюдения от оценки центрального действительного значения

$$\gamma_i = x_i - x_c, \quad i = 1, N. \quad (3.5)$$

Оцениваемая зависимость ($y = f(x, P)$) – функция заданного типа, зависящая как от значений аргумента x на интервале его изменения, так и от значений вектора параметров P ; оцениванию подлежат: множество действительных значений параметров (информационное множество) и область действительных значений зависимости (уточненная “трубка” значений зависимости).

Область неопределенности (H) единичного наблюдения зависимости – множество значений аргумента и функции, совместных с пределами погрешности измерений аргумента и функции в данном наблюдении

$$H_i = \{[x_i - \Delta x_i, x_i + \Delta x_i] \times [y_i - \Delta y_i, y_i + \Delta y_i]\}, i = 1, N, \quad (3.6)$$

где x_i, y_i – измеренные значения аргумента и функции в i -том наблюдении; N – длина выборки; Δx_i – максимальная величина погрешности измерения аргумента в данном наблюдении; Δy_i – максимальная величина погрешности измерения функции в данном наблюдении.

Примечания.

- 1) В общем случае величины максимальных погрешностей аргумента Δx_i и функции Δy_i могут быть различными для разных наблюдений.
- 2) В случае, когда измерения значений аргумента практически являются точными, область неопределенности (3.6) становится вертикальным отрезком.

Действительная (допустимая) зависимость – функция заданного вида, проходящая через множества неопределенности всех ее наблюдений.

Действительное (допустимое) значение вектора параметров – значение вектора параметров, определяющих действительную зависимость.

Априорная область возможных значений параметров (IS_0) – область значений вектора P параметров, границы которой оценены теоретически или определены по результатам предшествующих измерений.

Парциальная область действительных значений параметров оцениваемой зависимости (IS_{ijk}) – область значений параметров, совместных с некоторой группой наблюдений $\{(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)\}$ из оцениваемой выборки (**парциальное информационное множество**).

Область действительных значений параметров зависимости (IS) информационное множество) – область значений параметров зависимости, совместных со всей полученной выборкой наблюдений и заданным типом зависимости.

Область действительных значений зависимости ($F(x)$) – область значений зависимости, совместных с полученной выборкой наблюдений и заданным типом зависимости (**трубка действительных значений зависимости**); область описывается

$$F(x) = \{F_H(x), F_B(x); x \in [x_1, x_N]\}, \quad (3.7a)$$

$$F_H(x) = \min_P \{y(x, P)\}, P \in IS, \quad (3.7б)$$

$$F_B(x) = \max_P \{y(x, P)\}, P \in IS, \quad (3.7в)$$

где $[x_1, x_N]$ – интервал значений аргумента; $F_H(x), F_B(x)$ – нижняя и верхняя границы области значений зависимости для значения аргумента x ; данная область строится по информационному множеству IS параметров.

Интервал максимальной неопределенности действительной зависимости – наиболее широкое значение сечения трубки (3.7)

$$H_{\max} = \max_x [F_B(x) - F_H(x)].$$

Аргумент этого сечения

$$x_c : H(x_c) = H_{\max}.$$

Середина сечения (значение действительной зависимости)

$$y_c = (F_B(x_c) + F_H(x_c))/2.$$

Центральная действительная зависимость ($Y(x)$) – допустимая зависимость заданного типа, проходящая при x_c через середину y_c интервала максимальной неопределенности и на минимальном уровне наибольшего расстояния от границ сечений трубки (3.7а) для остальных значений аргумента

$$\min_P \max_{x \neq x_c} \{F_B(x, P) - Y(x, P), F_H(x, P) - Y(x, P)\}.$$

Максимальное действительное отклонение зависимости (МДО) – полуразмах d_{\max} сечения области действительных значений зависимости для значения аргумента, соответствующего максимальной неопределенности.

Минимальный предельный уровень погрешности в оцениваемой выборке (Δ_{\max}^*) – минимальная величина погрешности (3.1б), при которой данная выборка наблюдений является совместной, а интервал действительных значений (3.2) оцениваемой физической величины или информационное множество параметров оцениваемой зависимости вырождаются в точку

$$I^* = x^*, \\ IS^* = P^*.$$

Для совместной выборки величина Δ_{\max}^* является весьма полезной оценкой снизу уровня погрешностей, фактически реализовавшихся в оцениваемой выборке наблюдений. Для несовместной выборки данная величина оценивает снизу тот уровень погрешности, с которого выборка может считаться совместной.

Модель погрешности наблюдения. В ряде случаев исследователю при выполнении измерений может быть известна структура возникающей погрешности. При этом на практике используется модель, содержащая как относительную δ , так и абсолютную ε составляющие погрешности

$$x = x_{\text{и}} + \delta x_{\text{и}} + \varepsilon, \tag{3.8}$$

где x – наблюдение с погрешностью; $x_{\text{и}}$ – неизвестное истинное значение физической величины; $|\varepsilon| \leq \varepsilon_{\max}$ – составляющая погрешности, независящая от измеряемой величины (абсолютная погрешность), ограниченная по модулю; $\delta x_{\text{и}}$ – составляющая погрешности, зависящая от измеряемой величины, $|\delta| \leq \delta_{\max}$ – относительная погрешность, ограниченная по модулю.

Если информация о структуре ошибки (3.8) отсутствует, то погрешность описывается эквивалентной суммарной величиной (3.1а) и (3.1б).

4. МЕТОДИКА АНАЛИЗА ВЫБОРКИ НАБЛЮДЕНИЙ ЕДИНИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ И РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

4.1. Расчет множеств неопределенности выборки наблюдений

Представлена выборка данных

$$\{x_i, i = 1, \dots, N\}, \quad (4.1)$$

где x_i – наблюдение; N – длина выборки.

В случае равнооточных наблюдений по заданной величине Δ_{\max} максимальной погрешности (3.1б) нижняя $h_{ни}$ и верхняя $h_{ви}$ границы множества H_i неопределенности каждого наблюдения находятся

$$h_{ни} = x_i - \Delta_{\max}, \quad (4.2)$$

$$h_{ви} = x_i + \Delta_{\max}, \quad (4.3)$$

При неравнооточных наблюдениях, операции (4.2) и (4.3) выполняются с величиной $\Delta_{i\max}$, задаваемой для каждого наблюдения выборки.

4.2. Анализ совместности выборки

По границам (4.2),(4.3) множеств неопределенности H_i наблюдений рассчитываются вспомогательные экстремальные величины (по всем наблюдениям $i = 1, \dots, N$):

$$h_{\min} = \max_i h_{ни}, \quad (4.4)$$

$$h_{\max} = \min_i h_{ви}, \quad (4.5)$$

Эти две величины сравниваются между собой:

– если $h_{\min} > h_{\max}$, (4.6a)

то выборка несовместна и далее расчеты ведутся, начиная с пункта 4.6.

– если $h_{\min} \leq h_{\max}$, (4.6б)

то выборка совместна, и величины (4.4) и (4.5) являются нижней и верхней границами интервала I действительных значений оцениваемой единичной физической величины

$$I = [h_{\min}, h_{\max}], \quad (4.7)$$

при $h_{\min} = h_{\max}$ имеется предельный случай совместности выборки и интервал (4.7) вырождается в точку.

Если известен априорный интервал

$$I^{\text{ап}} = [x_{\min}^{\text{ап}}, x_{\max}^{\text{ап}}] \quad (4.8)$$

возможных значений оцениваемой физической величины, то границы интервала (4.7) действительных значений уточняются по (4.8).

Далее, начиная с пункта 4.3, выполняется расчет показателей неопределенности.

4.3. Расчет оценки центрального действительного значения

Оценка x_c рассчитывается как середина интервала действительных значений

$$x_c = (h_{\max} + h_{\min})/2. \quad (4.9)$$

4.4. Расчет максимального действительного отклонения

Максимальное отклонение рассчитывается как полуразмах интервала действительных значений

$$\Delta x = (h_{\max} - h_{\min})/2. \quad (4.10)$$

4.5. Расчет смещения каждого наблюдения

Смещения для всех наблюдений $i = 1, \dots, N$ определяется по соотношению

$$\gamma_i = x_i - x_c. \quad (4.11)$$

4.6. Выявление одиночных промахов

Расчеты по данному пункту выполняются при обнаружении (пункт 4.2) несовместности заданной выборки (4.1).

Рассчитывается совокупность попарных пересечений всех множеств H_i и H_j

$$P_{ij} = H_i \cap H_j, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N. \quad (4.12)$$

Данная процедура реализуется соотношениями

$$p_{nij} = \max\{h_{ni}, h_{nj}\}, \quad (4.13)$$

$$p_{vij} = \min\{h_{vi}, h_{vj}\}. \quad (4.14)$$

Если $p_{nij} > p_{vij}$, то множество P_{ij} не существует – *пусто*, и для этой пары вырабатывается нулевое значение признака совместности $S_{ij} = 0$.

Если $p_{nij} \leq p_{vij}$, то множество P_{ij} существует – *непусто*, а величины (4.13) и (4.14) являются его нижней и верхней границами, соответственно и для этой пары вырабатывается единичное значение признака совместности $S_{ij} = 1$.

Построенная *таблица совместности*

$$\{S_{ij}, S_{ji} = S_{ij}, \quad i = 1, N-1, \quad j = i+1, N\} \quad (4.15)$$

отображает попарную совместность наблюдений исходной выборки.

Одиночные промахи. Наблюдение с номером i является одиночным промахом, если его строка $\{S_{ij}, \quad j = 1, N \quad j \neq i\}$ целиком состоит из нулей.

Выявленные одиночные промахи удаляются – исходная выборка (4.1) усекается, ее дальнейший анализ выполняется по пункту 4.7.

4.7. Выделение подвыборок совместных наблюдений

Совместность любой подвыборки из трех и более наблюдений проверяется по следующей процедуре:

– берется последовательность номеров наблюдений $i_1, i_2, i_3, \dots, i_m$, упорядоченных по возрастанию $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_m$;

– рассчитывается произведение признаков совместности

$$S_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} = \left\{ \bigcap_{j=i_2, i_3, \dots, i_m} S_{i_1 j} \right\} \cdot \left\{ \bigcap_{j=i_3, \dots, i_m} S_{i_2 j} \right\} \cdot \dots \cdot \left\{ \bigcap_{j=i_{m-2}, \dots, i_m} S_{i_{m-1} j} \right\} \cdot S_{i_{m-1} i_m} \quad (4.16)$$

- если величина $S_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} = 1$, то данная подвыборка совместна;
- если величина $S_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} = 0$, то данная подвыборка несовместна.

Подвыборки только из двух совместных наблюдений однозначно выявляются по строкам с одной единицей. Интервал действительных значений подвыборки из двух наблюдений совпадает с соответствующим множеством из совокупности (4.12).

Полный анализ исходной выборки в случае ее несовместности, выделение совместных подвыборок и, в частности, подвыборки максимальной длины выполняется с помощью специальной программы, разработанной на основе методов теории графов [2.14]. Суть алгоритма построения совместной подвыборки максимальной длины заключается в следующем:

- в таблице совместности (4.15) последовательно просматриваются все строки;
- выбирается строка (строки, если их несколько) с максимальным числом единиц и выделяются соответствующие номера наблюдений – номера столбцов – с единичными значениями признака совместности; пусть это будет строка с номером l , а номера столбцов по возрастанию их номеров будут $\{j_1, j_2, j_3, \dots, j_m\}$; (4.17)
- берется первый столбец с номером j_1 и производится просмотр всех его элементов сверху вниз по $i = 1, N - 1, i \neq l$;
- при этом из последовательности (4.17) вычеркиваются элементы номеров с нулевыми значениями признаков S_{ij} и получаем измененный набор (4.7);
- повторяя операцию просмотра по всем остающимся номерам столбцов, получаем совокупность номеров наблюдений, составляющих искомую совместную подвыборку максимальной длины n, q, r, \dots, s .

В общем случае совместная подвыборка максимальной длины выделяется неединственным образом.

Для совместной подвыборки максимальной длины по совокупности ее номеров с помощью соотношений (4.4), (4.5) и (4.7) рассчитываются границы интервала действительных значений оцениваемой единичной физической величины, а по соответствующим соотношениям пунктов 4.3 – 4.5 дополнительные ее характеристики.

4.8. Минимальный предельный уровень погрешности

Для совместной выборки (4.1) в соотношениях (4.2), (4.3) уровень погрешности Δ_{\max} уменьшается и находится ее величина Δ_{\max}^* , при которой интервал (4.7) действительных значений оцениваемой единичной физической величины вырождается в точку

$$\Delta_{\max}^* : I^* = x^* = h_{\min} = h_{\max}.$$

Если выборка несовместна, то уровень Δ_{\max} увеличивается до появления непустого точечного множества (4.7).

Предельные величины находятся

$$\Delta_{\max}^* = (x_{\max} - x_{\min}) / 2, \quad (4.18)$$

$$x^* = (x_{\max} + x_{\min}) / 2, \quad (4.19)$$

где x_{\max} , x_{\min} – максимальное и минимальное наблюдения в исходной выборке (4.1).

Применение описанной методики анализа выборки наблюдений единичной физической величины, определения ее действительного значения и расчета показателей неопределенности иллюстрируется примерами в **Приложении 1**.

5. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

5.1. Модель оцениваемой зависимости

Оцениваемая зависимость описывается соотношением

$$y(x) = ax + b, \quad (5.1)$$

где x – аргумент, входная переменная; y – значение зависимости; a, b – параметры, коэффициент наклона и постоянная составляющая, соответственно.

Представлена выборка наблюдений

$$\{y_i, x_i, i = 1, \dots, N\}, \quad (5.2)$$

где y_i – наблюдение зависимости; x_i – значение аргумента; N – длина выборки.

Полагается, что величины аргументы известны точно, т.е. погрешность аргумента в (3.6) практически может считаться равной нулю; последовательность значений $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ упорядочена по возрастанию, и для удобства вычислений этот набор можно преобразовать так, что начальное значение $x_1 = 0$.

5.2. Расчет множеств неопределенности наблюдений

В случае равноточных наблюдений по заданной величине Δ_{\max} максимальной погрешности (3.1б) нижняя $h_{\text{ни}}$ и верхняя $h_{\text{вн}}$ границы множества H_i неопределенности каждого наблюдения находятся

$$h_{\text{ни}} = y_i - \Delta_{\max}, \quad (5.3)$$

$$h_{\text{вн}} = y_i + \Delta_{\max}. \quad (5.4)$$

При неравноточных наблюдениях, операции (5.3) и (5.4) выполняются с величиной $\Delta_{i\max}$, задаваемой для каждого наблюдения зависимости.

5.3. Расчет совокупности парциальных информационных множеств

На плоскости параметров вводится стандартная правая система координат, ось абсцисс которой ориентирована вправо и по ней отсчитывается параметр a ; ось ординат направлена вверх и по ней отсчитывается параметр b .

Рассчитывается совокупность парциальных информационных множеств, образованных парами наблюдений “от первого” $\{IS_{1j}, j = 2, N\}$. Это множество является областью значений параметров, совместных с каждой парой наблюдений $(1, j)$, $j = 2, N$ из заданной выборки (5.2).

Каждое парциальное информационное множество является замкнутым ограниченным четырехугольником, вершины которого отсчитываются по часовой стрелке от оси ординат в указанной системе отсчета, а их координаты вычисляются по формулам:

$$\{IS_{1j}, j = 2, N\}:$$

$$a_1(1, j) = (h_{\text{вн}} - h_{\text{вн1}})/(x_j - x_1),$$

$$b_1(1, j) = h_{\text{вн1}} - a_1(1, j)x_1,$$

$$a_2(1, j) = (h_{\text{ни}} - h_{\text{ни1}})/(x_j - x_1),$$

$$\begin{aligned}
b_2(1, j) &= h_{H1} - a_2(1, j)x_1, & (5.5) \\
a_3(1, j) &= (h_{Hi} - h_{H1})/(x_j - x_1), \\
b_3(1, j) &= h_{H1} - a_3(1, j)x_1 \\
a_4(1, i) &= (h_{Hi} - h_{B1})/(x_i - x_1), \\
b_4(1, j) &= h_{B1} - a_4(1, j)x_1.
\end{aligned}$$

5.4. Анализ совместности выборки

С помощью стандартной программы [2.9,2.10] пересечения выпуклых многоугольников последовательно выполняется операция пересечения

$$IS_{12} \cap IS_{13} \cap \dots \cap IS_{1j} \cap \dots, j \leq N. \quad (5.6)$$

Если на каком-то шаге операции (5.6) наступает *пустота* пересечения, то исходная выборка (5.2) несовместна. Дальнейший анализ исходной выборки наблюдений производится начиная с пункта 5.11.

5.5. Расчет области действительных значений параметров

При не наступлении пустоты, операция пересечения (5.6) доводится до конца, а результатом является искомое информационное множество – область действительных значений параметров

$$IS = \bigcap_{j=2, N} IS_{1j}. \quad (5.7)$$

На плоскости параметров a, b информационное множество является выпуклым многоугольником с линейными границами и набором вершин:

$$IS : (a_m, b_m), m = 1, M, \quad (5.8)$$

где (a_m, b_m) – координаты вершин; M – количество вершин.

Если известна некоторая априорная область значений параметров

$$IS_0 = [a_{\min}^{\text{ап}}, a_{\max}^{\text{ап}}] \times [b_{\min}^{\text{ап}}, b_{\max}^{\text{ап}}] \quad (5.9)$$

возможных значений оцениваемой физической величины, то множество (5.7) действительных значений параметров уточняется пересечением с прямоугольником (5.9). При этом количество вершин (5.8) может измениться.

Построенное информационное множество (5.7),(5.8) позволяет получить ряд необходимых выходных оценок.

5.6. Расчет безусловных интервалов действительных значений параметров

По множеству (5.8) находятся обычные безусловные интервалы значений параметров по значениям $m = 1, M$:

$$I_a = [a_{\min} = \min_i a_m, a_{\max} = \max_i a_m], \quad (5.10)$$

$$I_b = [b_{\min} = \min_i b_m, b_{\max} = \max_i b_m]. \quad (5.11)$$

Интервалы (5.10), (5.11) оцениваю сверху полные размеры информационного множества (5.7). По аналогии с правилами [2.1–2.4], прямоугольник $I_a \times I_b$ аппроксимирует информационное множество сверху.

Отметим, что если множество IS имеет вид узкой наклонной фигуры, то такая аппроксимация по стандартным правилам может быть весьма приближенной. Это доказывает необходимость расчета точного информационного множества (5.7).

5.7. Расчет условных интервалов действительных значений параметров

Более тонкая информация о структуре множества (5.7) дается условными интервалами действительных значений параметров:

– параметра a для каждого значения параметра b из безусловного интервала (5.11)

$$I(a/b) = [a_{\min}(b), a_{\max}(b)], \quad b \in I_b, \quad (5.12)$$

– параметра b для каждого значения параметра a из безусловного интервала (5.10)

$$I(b/a) = [b_{\min}(a), b_{\max}(a)], \quad a \in I_a. \quad (5.13)$$

5.8. Расчет области действительных значений зависимости (трубка)

На основе полученного информационного множества (5.8) действительных значений параметров строится область (3.7а)–(3.7в) действительных значений зависимости. По своей сути – это трубка допустимых значений зависимости.

Границы трубки $F_H(x_i), F_B(x_i)$ при каждом значении аргумента из заданного интервала $x_i \in [x_1, x_N]$ рассчитываются по вершинам (5.8) многоугольника – информационного множества:

$$F_H(x_i) = \min\{a_m x_i + b_m\}, \quad \text{по } (a_m, b_m), \quad m = 1, M, \quad (5.14)$$

$$F_B(x_i) = \max\{a_m x_i + b_m\}, \quad \text{по } (a_m, b_m), \quad m = 1, M. \quad (5.15)$$

5.9. Расчет центральной действительной зависимости, ее максимального действительного отклонения и центрального действительного вектора параметров

По исходному набору значений аргумента в (5.2) находится значение аргумента с максимально широким сечением трубки (5.14),(5.15)

$$x_c : \max\{F_B(x_i) - F_H(x_i)\}, \quad \text{по } \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}, \quad (5.16)$$

соответствующие значения границ и середина этого сечения

$$F_H(x_c), \quad F_B(x_c), \quad (5.17)$$

$$y_c = (F_B(x_c) + F_H(x_c))/2, \quad (5.18)$$

а максимальное действительное отклонение зависимости от границ трубки находится как полуразмах максимально широкого сечения трубки

$$d_{\max} = (F_B(x_c) - F_H(x_c))/2.$$

Через точку x_c, y_c проводится центральная действительная зависимость – прямая

$$Y = a_c(x - x_c) + y_c, \quad (5.19)$$

дающая минимакс расстояний до границ трубки. Здесь коэффициент a_c ищется из условия

$$a_c : \min_a \{ \max_{x_i, x_i \neq x_c} \{ |Y(x_i, a) - F_H(x_i)|, |Y(x_i, a) - F_B(x_i)| \} \}. \quad (5.20)$$

5.10. Расчет смещения каждого наблюдения

Смещение каждого наблюдения относительно центральной зависимости (5.19) определяется по соотношению

$$\gamma_i = y_i - Y(x_i), \quad i = 1, N. \quad (5.21)$$

5.11. Выявление одиночных промахов

Действия по данному пункту (и последующим пунктам) выполняются при выявлении несовместности выборки в п.5.4.

По стандартной программе [2.9,2.10] анализируется попарное пересечение парциальных множеств из совокупности (5.5) и составляется таблица значений признака совместности

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } IS_{i_i} \cap IS_{i_j} \text{ непусто,} \\ 0, & \text{если } IS_{i_i} \cap IS_{i_j} \text{ пусто,} \end{cases} \quad (5.22)$$

$$i = 2, N-1, \quad j = i+1, N.$$

Одиночные промахи. Наблюдение с номером i является одиночным промахом, если его строка $\{S_{ij}, j = 1, N, j \neq i\}$ целиком состоит из нулей.

Выявленные одиночные промахи удаляются из исходной выборки (5.2), а соответствующие парциальные множества IS_{1k}, IS_{1l}, \dots исключаются из совокупности парциальных множеств (5.5). Дальнейший анализ усеченной выборки анализ выполняется по пункту 5.4.

5.12. Прямой анализ совместности подвыборок наблюдений

Совместность любой подвыборки из трех и более наблюдений проверяется по следующей процедуре:

– берется последовательность номеров наблюдений $i_1, i_2, i_3, \dots, i_m$, упорядоченных по возрастанию $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_m$;

– рассчитывается произведение признаков совместности

$$S_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} = \left\{ \bigcap_{j=i_2, i_3, \dots, i_m} S_{i_1 j} \right\} \cdot \left\{ \bigcap_{j=i_3, \dots, i_m} S_{i_2 j} \right\} \cdot \dots \cdot S_{i_{m-1} i_m}, \quad (5.23)$$

– если величина $S_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} = 1$, то данная подвыборка совместна;

– если величина $S_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} = 0$, то данная подвыборка несовместна.

Подвыборки только из трех совместных наблюдений однозначно выявляются по строкам с одной единицей.

Полный анализ исходной выборки в случае ее несовместности, выделение совместных подвыборок и, в частности, подвыборки максимальной длины выполняется с помощью специальной программы, разработанной на основе методов теории графов [2.13]. Применяется алгоритм, аналогичный алгоритму п.4.7 Главы 4.

5.13. Минимальный предельный уровень погрешности наблюдений

Производятся следующие вычисления.

Если выборка (5.1) несовместна, то в соотношениях (5.3),(5.4) уровень Δ_{\max} увеличивается до появления непустого точечного множества (5.7).

$$\Delta_{\max}^* : \tag{5.24}$$

$$IS^* = (a^*, b^*). \tag{5.25}$$

Если выборка (5.1) совместна, то в соотношениях (5.3),(5.4) уровень погрешности Δ_{\max} уменьшается до сужения множества (5.7) в предельную точку (5.25).

Применение разработанной методики для определения области действительных значений параметров и области действительных значений линейной зависимости иллюстрируется примером **Приложения 2**.

6. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

6.1. Модель оцениваемой зависимости

Оцениваемая зависимость описывается соотношением

$$y(x) = cx^2 + ax + b, \quad (6.1)$$

где x – аргумент, входная переменная; y – значение зависимости; c, a, b – параметры.

Представлена выборка наблюдений

$$\{y_i, x_i, i = 1, \dots, N\}, \quad (6.2)$$

где y_i – наблюдение зависимости; x_i – значение аргумента; N – длина выборки.

Полагается, что величины аргументы известны точно, т.е. погрешность аргумента в (3.6) практически может считаться равной нулю; последовательность значений $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ упорядочена по возрастанию, и для удобства вычислений этот набор можно преобразовать так, что начальное значение $x_1 = 0$.

6.2. Расчет областей неопределенности наблюдений

В случае равноточных наблюдений по заданной величине Δ_{\max} максимальной погрешности (3.1б) нижняя $h_{ни}$ и верхняя $h_{ви}$ границы множества H_i неопределенности каждого наблюдения находятся

$$h_{ни} = y_i - \Delta_{\max}, \quad (6.3)$$

$$h_{ви} = y_i + \Delta_{\max}. \quad (6.4)$$

При неравноточных наблюдениях, операции (6.3) и (6.4) выполняются с величиной $\Delta_{i\max}$, задаваемой для каждого наблюдения зависимости.

РАЗДЕЛ А

ПЕРВИЧНЫЙ АНАЛИЗ СОВМЕЩНОСТИ ВЫБОРКИ И ВНЕШНЯЯ ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

На первом этапе обработки заданной выборки наблюдений определяется приближенная безусловная внешняя оценка области значений параметров. Данная область представляет собой параллелепипед в пространстве параметров $c \times a \times b$. Параллелепипед аппроксимирует сверху точное информационное множество действительных значений параметров. Сторонами этого параллелепипеда являются безусловные интервалы действительных значений параметров.

Далее по тексту и в иллюстрациях полагается, что в пространстве параметров используется стандартная правая тройка координат. При этом параметр b отсчитывается по оси абсцисс (в сторону наблюдателя), параметр c – по оси ординат (вправо), параметр a – по оси аппликат (вверх). Плоскость $b \times c$ горизонтальна, плоскость $c \times a$ вертикальна.

6.3. Расчет безусловного интервала действительных значений параметра c

6.3.1. Преобразование выборки и расчет парциальных интервалов неопределенности параметра c

Рассматриваются тройки y_i, y_j, y_k наблюдений с упорядоченными значениями аргумента $x_i < x_j < x_k$, где индексы принимают возможные сочетания из интервалов $i = 1, N - 2$, $j = i + 1, N - 1$ и $k = j + 1, N$. С учетом вида зависимости (6.1), для каждой такой тройки $i < j < k$ возможное значение параметра c оценивается:

$$c_i = [y_i / (x_k - x_i) - y_j / (x_k - x_j) + y_k (x_j - x_i) / ((x_k - x_j)(x_k - x_i))] / (x_j - x_i). \quad (6.4)$$

С учетом величин и знаков границ (6.3), (6.4) множеств неопределенности каждой тройки наблюдений производится расчет парциальных интервалов неопределенности параметра c :

$$c_{нijk} = [h_{ни} / (x_k - x_i) - h_{вj} / (x_k - x_j) + h_{нк} (x_j - x_i) / ((x_k - x_j)(x_k - x_i))] / (x_j - x_i), \quad (6.5)$$

$$c_{вijk} = [h_{ви} / (x_k - x_i) - h_{нj} / (x_k - x_j) + h_{вк} (x_j - x_i) / ((x_k - x_j)(x_k - x_i))] / (x_j - x_i), \quad (6.6)$$

$$i = 1, N - 2, \quad j = i + 1, N - 1 \quad \text{и} \quad k = j + 1, N.$$

6.3.2. Анализ совместности выборки и расчет безусловного интервала действительных значений параметра c

По границам интервалов (6.5), (6.6) рассчитываются вспомогательные экстремальные величины:

$$c_{\min} = \max_{i,j,k} c_{нijk}, \quad (6.7)$$

$$c_{\max} = \min_{ijk} c_{вijk}, \quad (6.8)$$

$$i = 1, N - 2, \quad j = i + 1, N - 1 \quad \text{и} \quad k = j + 1, N.$$

Эти две величины сравниваются между собой:

$$- \text{если } c_{\min} > c_{\max}, \quad (6.9a)$$

то выборка заведомо несовместна и далее расчеты ведутся по пункту 6.8;

$$- \text{если } c_{\min} \leq c_{\max}, \quad (6.9б)$$

то выборка может быть совместной, и величины (6.7) и (6.8) являются нижней и верхней границами безусловного интервала I_c действительных значений параметра c :

$$I_c = [c_{\min}, c_{\max}]. \quad (6.10)$$

При $c_{\min} = c_{\max}$ имеется предельный случай совместности выборки: интервал I_c вырождается в единственную точку.

Если известен некоторый априорный интервал

$$I_c^{\text{ап}} = [c_{\min}^{\text{ап}}, c_{\max}^{\text{ап}}] \quad (6.11)$$

возможных значений этого параметра, то границы (6.7) и (6.8) уточняются.

Далее, аналогично формулам пунктов 4.3 и 4.4, выполняется выходной расчет показателей неопределенности параметра c , в частности, центральное действительное значение c_c^* .

6.4. Расчет безусловного интервала действительных значений параметра a

6.4.1. Преобразование выборки замеров и расчет парциальных интервалов неопределенности параметра a

Рассматриваются тройки y_i, y_j, y_k наблюдений с упорядоченными значениями аргумента $x_i < x_j < x_k$, где индексы принимают возможные сочетания из интервалов $i = 1, N - 2$, $j = i + 1, N - 1$ и $k = j + 1, N$. С учетом вида зависимости (6.1), для каждой такой тройки $i < j < k$ возможное значение параметра a оценивается:

$$a_{ijk} = \{(x_i + x_k)(x_j + x_k)/(x_j - x_i)\}[-y_i/(x_k^2 - x_i^2) + y_j/(x_k^2 - x_j^2) - y_k(x_j^2 - x_i^2)/((x_k^2 - x_i^2)(x_k^2 - x_j^2))]. \quad (6.12)$$

С учетом величин и знаков границ (6.3),(6.4) множеств неопределенности каждой тройки наблюдений производится расчет парциальных интервалов неопределенности параметра a :

$$a_{нijk} = \{(x_i + x_k)(x_j + x_k)/(x_j - x_i)\}[-h_{вi}/(x_k^2 - x_i^2) + h_{нj}/(x_k^2 - x_j^2) - h_{вk}(x_j^2 - x_i^2)/((x_k^2 - x_i^2)(x_k^2 - x_j^2))], \quad (6.13)$$

$$a_{вijk} = \{(x_i + x_k)(x_j + x_N)/(x_j - x_i)\}[-h_{ни}/(x_k^2 - x_i^2) + h_{вj}/(x_k^2 - x_j^2) - h_{нк}(x_j^2 - x_i^2)/((x_k^2 - x_i^2)(x_k^2 - x_j^2))], \quad (6.14)$$

$$i = 1, N - 2, \quad j = i + 1, N - 1 \quad \text{и} \quad k = j + 1, N.$$

6.4.2. Анализ совместности выборки и расчет безусловного интервала действительных значений параметра a

По границам интервалов (6.13), (6.14) рассчитываются вспомогательные экстремальные величины:

$$a_{\min} = \max_{ijk} a_{нijk}, \quad (6.15)$$

$$a_{\max} = \min_{ijk} a_{вijk}, \quad (6.16)$$

$$i = 1, N - 2, \quad j = i + 1, N - 1 \quad \text{и} \quad k = j + 1, N.$$

Эти две величины сравниваются между собой:

$$\text{– если } a_{\min} > a_{\max}, \quad (6.17a)$$

то выборка заведомо несовместна и далее расчеты ведутся по пункту 6.8;

$$\text{– если } a_{\min} \leq a_{\max}, \quad (6.17б)$$

то выборка может быть совместной, и величины (6.15) и (6.16) являются нижней и верхней границами безусловного интервала I_a действительных значений параметра a :

$$I_a = [a_{\min}, a_{\max}]. \quad (6.18)$$

При $a_{\min} = a_{\max}$ имеется предельный случай совместности выборки: интервал I_a вырождается в единственную точку.

Если известен некоторый априорный интервал

$$I_a^{\text{ап}} = [a_{\min}^{\text{ап}}, a_{\max}^{\text{ап}}] \quad (6.19)$$

возможных значений этого параметра, то границы (6.17) и (6.18) уточняются.

Далее, по формулам пунктов 4.3 и 4.4 выполняется выходной расчет показателей неопределенности параметра a , в частности, центральное действительное значение a_c^* .

6.5. Расчет безусловного интервала действительных значений параметра b

6.5.1. Преобразование выборки замеров и расчет парциальных интервалов неопределенности параметра b

Рассматриваются тройки y_i, y_j, y_k наблюдений с упорядоченными значениями аргумента $x_i < x_j < x_k$, где индексы принимают возможные сочетания из интервалов $i = 2, N-2$, $j = i+1, N-1$ и $k = j+1, N$. С учетом вида зависимости (6.1), для каждой такой тройки $i < j < k$ возможное значение параметра b оценивается:

$$b_{ijk} = \{x_k x_j x_i / (x_j - x_i)\} [y_i / (x_i(x_k - x_i)) - y_j / (x_j(x_k - x_j)) + y_N(x_{N-1} - x_i) / (x_N(x_N - x_{N-1})(x_N - x_i))]. \quad (6.20)$$

С учетом величин и знаков границ (6.3), (6.4) множеств неопределенности каждой тройки наблюдений и с учетом $x_1 = 0$ производится расчет парциальных интервалов неопределенности параметра b :

$$b_{H1jk} = h_{H1}, \quad b_{B1jk} = h_{B1}, \quad i = 1 \text{ и любых } j = 2, N-1 \text{ и } k = j+1, N,$$

$$b_{Hijk} = \{x_k x_j x_i / (x_j - x_i)\} [h_{Hi} / (x_i(x_k - x_i)) - h_{Bj} / (x_j(x_k - x_j)) + h_{Hk}(x_j - x_i) / (x_k(x_k - x_j)(x_k - x_i))], \quad (6.21)$$

$$b_{Bijk} = \{x_k x_j x_i / (x_j - x_i)\} [h_{Bi} / (x_i(x_k - x_i)) - h_{Hj} / (x_j(x_k - x_j)) + h_{Bk}(x_j - x_i) / (x_k(x_k - x_j)(x_k - x_i))]. \quad (6.22)$$

$$i = 2, N-2, \quad j = i+1, N-1 \text{ и } k = j+1, N.$$

6.5.2. Анализ совместности выборки и расчет безусловного интервала действительных значений параметра b

По границам интервалов (6.21), (6.22) рассчитываются вспомогательные экстремальные величины:

$$b_{\min} = \max_{ijk} b_{Hijk}, \quad (6.23)$$

$$b_{\max} = \min_{ijk} b_{Bijk}, \quad (6.24)$$

$$i = 1, N-2, \quad j = i+1, N-1 \text{ и } k = j+1, N.$$

Эти две величины сравниваются между собой:

$$- \text{если } b_{\min} > b_{\max}, \quad (6.25a)$$

то выборка заведомо несовместна и далее расчеты ведутся по пункту 6.8;

– если $b_{\min} \leq b_{\max}$, (6.25б)

то выборка может быть совместной, и величины (6.23) и (6.24) являются нижней и верхней границами безусловного интервала I_b действительных значений параметра b :

$$I_b = [b_{\min}, b_{\max}]. \quad (6.26)$$

При $b_{\min} = b_{\max}$ имеется предельный случай совместности выборки: интервал I_b вырождается в единственную точку.

Если известен некоторый априорный интервал

$$I_b^{\text{ап}} = [b_{\min}^{\text{ап}}, b_{\max}^{\text{ап}}] \quad (6.27)$$

возможных значений этого параметра, то границы (6.17) и (6.18) уточняются.

Далее, по формулам пунктов 4.3 и 4.4 выполняется выходной расчет показателей неопределенности параметра b , в частности, центральное действительное значение b_c^* .

6.6. Расчет центральной действительной зависимости по результатам первичного анализа

Эта зависимость строится по найденной тройке центральных действительных значений

$$Y^* = c_c^* x^2 + a_c^* x + b_c^*. \quad (6.28)$$

Правильность вышеуказанных расчетов проверяется по допустимости центральной оценки (c_c^*, a_c^*, b_c^*) . Центральная оценка и центральная зависимость (6.28) **допустима**, если она проходит через множества неопределенности $H_i = [h_{\text{ни}}, h_{\text{ви}}]$ всех наблюдений $i = 1, N$. Это позволяет использовать центральную оценку и центральную зависимость в качестве выходной информации.

6.7. Расчет смещения каждого наблюдения

Выполняется по соотношению

$$\gamma_i = y_i - Y^*(x_i). \quad (6.29)$$

6.8. Выделение промахов и построение подвыборок совместных наблюдений

В случае обнаружения несовместности выборки по условиям (6.9а), (6.17а) или (6.25а) выполняются операции, аналогичные операциям пунктов 4.6 и 4.7 Главы 4. Рассчитываются таблицы признаков попарной совместности (4.15) парциальных интервалов неопределенности. При этом в качестве входных данных используются парциальные интервалы неопределенности (6.5), (6.6) параметра c , (6.15), (6.16) параметра a и (6.21), (6.22) параметра b , соответственно.

Промахи отбрасываются, производится выделение совместных подвыборок максимальной длины. Для них выполняется расчет выходных показателей неопределенности.

РАЗДЕЛ Б

ТОЧНЫЙ АНАЛИЗ СОВМЕСТИМОСТИ ВЫБОРКИ И ТОЧНАЯ ОБЛАСТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

Проведенный выше (Раздел А) первичный анализ дает эффективную информацию для точного построения трехмерного информационного множества параметров оцениваемой зависимости. Во-первых, после удаления промахов, для дальнейшего анализа построена совместная подвыборка максимальной длины; во-вторых, в силу линейной зависимости описывающей функции (6.1) от параметров, внутренняя часть области $I_c \times I_a \times I_b$ (6.10), (6.18), (6.26) вектора параметров содержит, по крайней мере, одну допустимую точку – центральное значение (c_c^*, a_c^*, b_c^*) .

Точный анализ выборки и построение информационного множества параметров зависимости (6.1) заключается в следующем. Искомое трехмерное информационное множество $IS(c, a, b)$ в пространстве параметров $c \times a \times b$ представляется набором плоских сечений $\{IS(c, a, b_k)\}$ параллельных плоскости $c \times a$ по сетке параметра $\{b_k\}$, $k = 1, \dots, K$ из безусловного интервала I_b данного параметра.

6.9. Сетка параметра b

Для обеспечения надежной работы численных процедур целесообразно сузить границы безусловного интервала (6.26) I_b на величину

$$\begin{aligned} b_{\min} &= b_{\min} + (2 \div 3)q, \\ b_{\max} &= b_{\max} - (2 \div 3)q \end{aligned}$$

где q – ошибка машинного округления или величина, составляющая технически приемлемую долю исходных граничных значений b_{\min} или b_{\max} .

На уточненном безусловном интервале I_b вводим равномерную сетку

$$B = \{b_k, k = 1, K\}, \quad (6.30)$$

$$d_b = (b_{\max} - b_{\min}) / (K - 1), \quad (6.31)$$

где K – представительное число узлов, нечетно; b_k – k -тый узел сетки; d_b – шаг сетки. граничные узлы $b_1 = b_{\min}$, $b_K = b_{\max}$.

6.10. Порядок построений

Для каждого значения b_k параметра из сетки (6.30) строим сечение $IS(c, a, b_k)$ информационного множества $IS(c, a, b)$. Таким образом, получаем набор сечений

$$\{IS(c, a, b_k) \times b_k, k = 1, K\} \quad (6.32)$$

искомого информационного множеств и уточненный безусловный интервал I_b параметра b . Каждое сечение является выпуклым многоугольником с линейными границами и определенным числом M_k вершин

$$\{c_{mk}, a_{mk}\}, m = 1, M_k, k = 1, K. \quad (6.33)$$

6.11. Построение сечения

Текущую величину параметра b_k вычитаем из строк (6.1) всех наблюдений. Получаем промежуточные выражения

$$y_i - b_k = x_i^2 c + x_i a, \quad i = 2, N. \quad (6.34)$$

Делим каждую такую строку на $x_i \neq 0$ и получаем зависимость, линейно связывающую параметры c, a

$$z_i = (y_i - b_k) / x_i = x_i c + a, \quad i = 2, N, \quad (6.35)$$

где левые части этих выражений являются по сути “преобразованными” наблюдениями

$$z_i = (y_i - b_k) / x_i, \quad i = 2, N.$$

Учитывая структуру каждого преобразованного наблюдения и используя границы h_{hi}, h_{vi} множеств неопределенности (6.3), (6.4) исходных наблюдений строим множества неопределенности $H_i^z = [z_{hi}, z_{vi}]$ преобразованных наблюдений с границами

$$\begin{aligned} z_{hi} &= (h_{hi} - b_k) / x_i, \\ z_{vi} &= (h_{vi} - b_k) / x_i, \\ i &= 2, N. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Используя линейную зависимость (6.35) и набор множеств неопределенности (6.36) ее преобразованных наблюдений, рассчитываем по методике Главы 5 точное информационное множество (6.32) параметров c, a при фиксированном значении параметра b_k из сетки (6.30). Прямоугольник безусловных интервалов $I_c \times I_a$, полученных на этапе предварительного анализа, используется в качестве априорного информационного множества для построения сечений (6.32).

6.12. Построение точной трубки действительных значений зависимости

На основе уточненного информационного множества (6.32) действительных значений параметров строится область (3.7а)–(3.7в) действительных значений зависимости. По своей сути – это трубка допустимых значений зависимости.

Границы трубки $F_H(x_i), F_B(x_i)$ при каждом значении аргумента из заданного интервала $x_i \in [x_1, x_N]$ рассчитываются по вершинам (6.33) многоугольников по всем значениям узлов b_k параметра b :

$$F_H(x_i) = \min_{b_k} \{ \min_{c_m, a_m} (c_m x_i^2 + a_m x_i + b_k) \}, \quad m = 1, M_k, \quad k = 1, K, \quad (6.37)$$

$$F_B(x_i) = \max_{b_k} \{ \max_{c_m, a_m} (c_m x_i^2 + a_m x_i + b_k) \}, \quad m = 1, M_k, \quad k = 1, K. \quad (6.38)$$

6.13. Расчет уточненной центральной действительной зависимости и уточненного центрального действительного вектора параметров

По исходному набору значений аргумента в (6.2) находится значение аргумента с максимально широким сечением трубки (6.37), (6.38)

$$x_c : \max_i \{ F_B(x_i) - F_H(x_i) \}, \quad i = 1, N, \quad (6.39)$$

соответствующие значения границ и середина этого сечения

$$F_H(x_c), F_B(x_c), \quad (6.40)$$

$$y_c = (F_B(x_c) + F_H(x_c))/2. \quad (6.41)$$

Через точку x_c, y_c проводится центральная действительная зависимость

$$Y = c_c(x - x_c)^2 + a_c(x - x_c) + y_c,$$

дающая минимум расстояний до границ трубки. Здесь коэффициенты c_c, a_c ищутся из условия

$$(c_c, a_c) : \min_{c, a} \{ \max_{x_i, x_i \neq x_c} \{ |Y(x_i, c, a) - F_H(x_i)|, |Y(x_i, c, a) - F_B(x_i)| \} \}. \quad (6.42)$$

В заключение рассчитывается параметр b_c

$$b_c = c_c x_c^2 - a_c x_c + y_c, \quad (6.43)$$

при этом центральная действительная зависимость принимает стандартный вид (6.1)

$$Y = c_c x^2 + a_c x + b_c. \quad (6.44)$$

6.14. Расчет смещения каждого наблюдения

Смещение каждого наблюдения относительно центральной зависимости (6.44) определяется по соотношению

$$\gamma_i = y_i - Y(x_i), \quad i = 1, N. \quad (6.45)$$

6.15. Расчет максимального действительного отклонения зависимости

Расчет выполняется

$$d_{\max} = (F_B(x_c) - F_H(x_c))/2. \quad (6.46)$$

Это построение позволяет расширять стандартные правила [2.1, 2.15] определения допустимых разбросов аппроксимирующей МНК кривой на рассматриваемый случай, когда из-за отсутствия вероятностных характеристик погрешности наблюдения использование статистического подхода затруднено.

6.16. Минимальный предельный уровень погрешности наблюдения

Производятся следующие вычисления.

Если выборка (6.1) несовместна, то в соотношениях (6.3), (6.4) уровень Δ_{\max} увеличивается до появления непустых точечных безусловных интервалов (6.10), (6.18), (6.26):

$$\Delta_{\max}^* : \quad (6.47)$$

$$c^* = I_c^* = c_{\min} = c_{\max}. \quad (6.48)$$

$$a^* = I_a^* = a_{\min} = a_{\max}. \quad (6.49)$$

$$b^* = I_b^* = b_{\min} = b_{\max}. \quad (6.50)$$

Если выборка (6.1) совместна, то в соотношениях (6.3),(6.4) уровень погрешности Δ_{\max} уменьшается до сужения интервалов (6.10),(6.18),(6.26) в точку (6.48)–(6.50).

Вследствие выпуклости трехмерного информационного множества (6.32) в пространстве параметров $c \times a \times b$ предельные значения c^*, a^*, b^* находятся единственным образом как по вырождению безусловных интервалов (6.10),(6.18),(6.26), так и по вырождению точного информационного множества (6.32).

Применение разработанной методики для определения области действительных значений параметров и области действительных значений квадратической зависимости иллюстрируется примером **Приложения 3**.

7. СРЕДСТВА ПРОВЕДЕНИЯ ОБРАБОТКИ

Средства выполнения обработки включают в себя: вычислительные программы, специализированные для каждого типа оцениваемой зависимости и типа модели погрешности измерения, а также ЭВМ необходимой мощности с обычным математическим и программным обеспечением.

Построение показателей неопределенности единичной физической величины, оценка областей действительных значений параметров и действительных областей зависимостей выполняется численно, аналитическое построение затруднено даже для зависимостей простых типов. Разработано специализированное алгоритмическое и программное обеспечение для каждого конкретного типа оцениваемой зависимости с различной размерностью вектора параметров.

Держателями данного программного обеспечения являются Институт Математики и Механики УрО РАН, Центр метрологии и сертификации "Сертимет" УрО РАН,

?? список держателей уточняется ??.

8. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К проекту МИ “Методика: Показатели неопределенности измерений с ограниченным числом наблюдений (Методика расчета)”

8.1. Основание для разработки

Разработка проекта МИ осуществляется в соответствии с рекомендацией VI Уральской научно-практической конференции по метрологии, Института математики и механики УрО РАН, планом перспективных работ Центра метрологии и сертификации Сертимаг УрО РАН, ??? АБЗАЦ УТОЧНЯЕТСЯ ОРГАНИЗАЦИЯМИ–СОУЧРЕДИТЕЛЯМИ???

Разработка настоящей Методики обусловлена необходимостью совершенствования и расширения методов обработки наблюдений с погрешностями. Особая потребность в новых методиках обработки результатов возникает в случаях, когда применение стандартных статистических методов (например, метода наименьших квадратов) затруднено из-за неопределенности или полного отсутствия информации о вероятностных характеристиках погрешностей измерений и при малых объемах имеющейся выборки наблюдений. Причем в таких условиях наибольшую трудность представляет вычисление областей действительных значений единичных физических величин и, областей действительных значений параметров зависимостей и областей их действительных значений.

8.2. Характеристика объекта стандартизации

Методика расчета показателей неопределенности измерений с ограниченным числом наблюдений, при неопределенности вероятностных характеристик погрешностей измерений и малой длине выборки наблюдений.

8.3. Соответствие проекта МИ законодательным аспектам и международным стандартам

При разработке проекта МИ учитывалось положение Закона ЗФ “Об обеспечении единства измерений”, устанавливающим ответственность государственных научных метрологических центров за создание, совершенствование, хранение и применение государственных эталонов единиц величин, а также за разработку нормативных документов по обеспечению единства измерений (ст.10, п.2).

Использованные в МИ понятия, термины и определения соответствуют и развивают положения ГОСТ 16263-70.

Учитываются также основные тенденции Рекомендации ISO, 1993, ISBN 92-67-10188-9.

При подготовке окончательной редакции МИ будут учтены практически все замечания и предложения ВНИИМ, СНИИМ, ВНИИМС.

8.4. Сведения о патентной чистоте

Предлагаемая Методика не содержит положений, являющихся предметом патентной защиты.

8.5. Сведения о взаимосвязи с другими НД

Разрабатываемый документ развивает положения ГОСТ 8.207, ГОСТ 8.508-84, ГОСТ 16263-70, методик МИ 1317-86 и МИ 083-03.

8.6. Сведения о согласовании

Согласование МИ не предусматривается

8.7. Источники информации

При разработке МИ использованы нормативные документы и источники, перечисленные в Главе 2 и в тексте настоящей записки.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
Определение области действительных значений и расчет показателей
неопределенности единичной физической величины

Пример П1.1. Совместная однородная выборка наблюдений
физической величины

Моделируется оценивание единичной физической величины при взвешивании. Истинное значение веса равно $G^* = 0.25$ гр. Модель погрешности содержит только абсолютную составляющую. Закон распределения плотностей вероятностей погрешности неизвестен. Выборка наблюдений полагается однородной. Максимальная погрешность каждого наблюдения ограничена по модулю и равна $\Delta_{\max} = 0.1$ гр.

Имеется выборка из $N = 12$ наблюдений

$$\begin{aligned} \{x_i, i = 1, \dots, 12\} = \\ = \{0.2910, 0.2570, 0.2660, 0.2280, 0.2110, 0.3050, \\ 0.1550, 0.3020, 0.3130, 0.2870, 0.3390, 0.2330\} \text{ гр.} \end{aligned}$$

Границы множеств неопределенности $H_i = [h_{hi}, h_{bi}]$, $i=1,12$ рассчитываются по соотношениям (4.2) и (4.3) и принимают значения

$$\begin{aligned} [0.1910, 0.3910], [0.1570, 0.3570], [0.1660, 0.3660], [0.1280, 0.3280], \\ [0.1110, 0.3110], [0.2050, 0.4050], [0.0550, 0.2550], [0.2020, 0.4020], \\ [0.2130, 0.4130], [0.1870, 0.3870], [0.2390, 0.4390], [0.1330, 0.3330] \text{ гр.} \end{aligned}$$

По соотношениям (4.4) и (4.5) рассчитываются вспомогательные экстремальные величины

$$\begin{aligned} h_{\min} = \max_i \{h_{hi}\} = 0.2390 \text{ гр, по наблюдению No.11,} \\ h_{\max} = \min_i \{h_{bi}\} = 0.2550 \text{ гр, по наблюдению No.7.} \end{aligned}$$

Поскольку $h_{\min} < h_{\max}$, то информационное множество (4.7) непусто, и границы интервала $I(G)$ действительных значений оцениваемой величины прямо совпадают с найденными вспомогательными величинами

$$I = [h_{\min}, h_{\max}] = [0.2390, 0.2550] \text{ гр.}$$

Оценка (4.9) центрального значения равна

$$x_c = (h_{\min} + h_{\max})/2 = 0.2470 \text{ гр.}$$

Максимальное действительное отклонение (4.10) равно

$$\Delta x = (h_{\max} - h_{\min})/2 = 0.0080 \text{ гр.}$$

Смещения $\{\gamma_i = x_i - x_c, i = 1, N\}$ наблюдений от центрального значения имеют величины

$$\begin{aligned} 0.0440, 0.0100, 0.0190, -0.0190, -0.0360, 0.0580, \\ -0.0920, 0.0550, 0.0660, 0.0400, 0.0920, -0.0140 \text{ гр.} \end{aligned}$$

По максимальному наблюдению – No.11, $x_{\max} = 0.339$ гр., и минимальному наблюдению – No.7, $x_{\min} = 0.155$ гр., определяются минимальный предельный уровень погрешности (4.18)

$$\Delta_{\max}^* = (0.339 - 0.155)/2 = 0.092 \text{ гр.}$$

и предельное значение (4.19) оцениваемой величины

$$x^* = (0.339 + 0.155)/2 = 0.247\text{-гр.}$$

Исходные данные и результаты расчетов показаны на рис.П1.1. Горизонтальной линией отмечено истинное значение физической величины. Крестиками обозначены наблюдения. Вертикальные отрезки с засечками представляют множества неопределенности наблюдений. Множества неопределенности минимального и максимального наблюдений отмечены жирными вертикальными отрезками, а стрелками указаны их границы, определяющие результирующее информационное множество – интервал $I(G)$ действительных значений. Пунктирные линии (границы данного интервала) позволяют сравнить исходные интервалы неопределенности с результирующим интервалом $I(G)$ действительных значений. Штрих–пунктирными линиями нанесены демонстрационные границы интервала $\pm 2\Delta_{\max}$ в две максимальных погрешности наблюдения вокруг истинного значения оцениваемой физической величины.

Применим теперь для обработки заданной выборки расчетные соотношения ГОСТ [2.1]. Это может быть сделано лишь формально, так как вероятностные характеристики погрешности наблюдения неизвестны. При этом средняя оценка по исходной выборке равна

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1, N} x_i \right) / N = 0.2655 \text{ гр,}$$

а среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\left(\sum_{i=1, N} (x_i - \bar{x})^2 \right) / (N - 1)} = 0.0516 \text{ гр.}$$

Смещения $\{\gamma_i = x_i - \bar{x}, i = 1, N\}$ наблюдений от среднего значения имеют величины

$$0.0254, -0.0085, -0.0004, -0.0375, -0.0545, 0.0394, \\ -0.1105, 0.0364, 0.0474, 0.0214, 0.0734, -0.0325 \text{ гр.}$$

Отметим, что оценка $\bar{x} = 0.2655$ гр, найденная по [2.1], строго говоря, несовместна с более точной оценкой, даваемой информационным множеством $[0.2390, 0.2550]$ гр, так как лежит вне этого интервала.

Видно также, что среднее квадратическое отклонение более чем в три раза превышает расчетное максимальное действительное отклонение $\Delta x_c = 0.0080$ гр.

По отклонению $2\sigma = 0.1033$ гр формально построенный доверительный интервал составляет

$$[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma] = [-0.1622, 0.3688] \text{ гр}$$

и значительно превосходит найденный интервал действительных значений оцениваемой физической величины.

Формальное применение по [2.1] правила 2σ для выявления промахов приводит к неверному выбрасыванию достоверного наблюдения No.7, так как его смещение превышает величину 2σ . Как следствие, усеченная выборка без наблюдения No.7 оказывается еще более смещенной в неверную сторону: ее средняя величина составляет $\bar{x} = 0.2756$ гр, при среднее квадратическом отклонении $\sigma = 0.0394$ гр.

Пример П1.2. Несовместная однородная выборка наблюдений физической величины

Как и в Примере П1.1 моделируется оценивание единичной физической величины при взвешивании. Истинное значение веса равно $G^* = 0.25$ гр. Модель погрешности содержит только абсолютную составляющую. Закон распределения плотностей вероятностей погрешности неизвестен. Выборка наблюдений полагается однородной. Максимальная погрешность каждого наблюдения ограничена по модулю и равна $\Delta_{\max} = 0.1$ гр.

Имеется выборка из $N = 12$ наблюдений

$$\begin{aligned} \{x_i, i = 1, \dots, 12\} = \\ = \{0.2910, 0.2570, \mathbf{0.4950}, 0.2280, 0.2110, 0.3050, \\ 0.1550, 0.3020, 0.3130, 0.2870, 0.3390, 0.2330\} \text{ гр.} \end{aligned}$$

В этой выборке наблюдение No.3 (выделено) заведомо является "подозрительным" (рис.П1.2)

Границы множеств неопределенности $H_i = [h_{hi}, h_{bi}]$, $i=1,12$ рассчитываются по соотношениям (4.2) и (4.3) и принимают значения

$$\begin{aligned} [0.1910, 0.3910], [0.1570, 0.3570], [\mathbf{0.3950}, \mathbf{0.5950}], [0.1280, 0.3280], \\ [0.1110, 0.3110], [0.2050, 0.4050], [0.0550, 0.2550], [0.2020, 0.4020], \\ [0.2130, 0.4130], [0.1870, 0.3870], [0.2390, 0.4390], [0.1330, 0.3330] \text{ гр.} \end{aligned}$$

По соотношениям (4.4) и (4.5) рассчитываются вспомогательные экстремальные величины

$$\begin{aligned} h_{\min} = \max_i \{h_{hi}\} = \mathbf{0.3950} \text{ гр, по наблюдению No.3} \\ h_{\max} = \min_i \{h_{bi}\} = 0.2550 \text{ гр, по наблюдению No.7} \end{aligned}$$

Проверка условия (4.8) показывает, что $h_{\min} > h_{\max}$, т.е. исходная выборка несовместна и необходимо проводить ее дополнительный анализ .по пунктам 4.6 и 4.7 Главы 4.

По соотношениям (4.12)–(4.14) проводим расчет Таблицы (4.15) признаков $\{S_{ij}, i = 1, N, j = 1, N, j \neq i\}$ попарной совместности множеств неопределенности наблюдений (Таблица П1.1).

Анализ строк Таблицы П1.1 показывает, что отсутствуют строки, состоящие целиком из нулей. Таким образом, исходная выборка не содержит одиночных промахов.

Действуя далее в соответствии с алгоритмом пункта 4.7 выделяем строку No.3 с максимальным числом нулей. Она определяет нам некоторую совместную подвыборку длиной существенно меньшей, чем у исходной. Это наблюдения с номерами No.1,3,6,8,9,11.

Определяем теперь совместную подвыборку **максимальной** длины. Берем первую строку, состоящую целиком из единиц, то есть отмечаем все наблюдения – с номерами $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Проверяем столбец No.2. Третья строка вниз в нем содержит нулевое значение признака совместности, поэтому из отмеченной последовательности номер 3 вычеркивается. Остальные номера сохраняются, так как остальные строки рассматриваемого второго столбца отличны от нуля.

Третий столбец не рассматривается, но рассматриваем последовательно столбцы номеров 4–12. При этом никакие новые номера (отличных от No.3) вычеркиванию не подлежат.

Таким образом, совместная подвыборка **максимальной** длины составляется из одиннадцати наблюдений с номерами {1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.

Отметим, что по рассмотренному алгоритму та же самая подвыборка максимальной длины выделяется строками 6,8,9 и 11, которые, как и строка 1, целиком состоят из единичных значений признака совместности, а также строками 4,5,7,10 и 12 с одним нулевым значением признака в вычеркиваемом 3 столбце.

Таблица П1.1

<i>i/j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0		0	0	1	0	1	1	0	1	0
4	1	1	0		1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1		1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
7	1	1	0	1	1	1		1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1
10	1	1	0	1	1	1	1	1	1		1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1
12	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	

Примечание: серой заливкой выделены тривиальные ячейки таблицы, не участвующие в анализе.

Наблюдение No.3 удаляется, и для совместной подвыборки максимальной длины выполняются все выходные расчеты. Очевидно, что все показатели, рассчитанные по настоящей методике, получаются теми же, что и в Примере П1.1:

- информационное множество, интервал (4.7) действительных значений) $I = [0.2390, 0.2550]$ гр;
- оценка (4.9) центрального значения равна $x_c = 0.2470$ гр;
- максимальное действительное отклонение (4.10) равно $\Delta x_c = 0.0080$ гр.

Теперь для совместной подвыборки максимальной длины применим расчетные соотношения ГОСТ [2.1]. Исключение третьего наблюдения и формальная обработка наблюдений {1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12} дает среднюю оценку $\bar{x} = 0.2655$ гр. Отметим, что опять эта оценка, строго говоря, несовместна с информационным множеством $[0.2390, 0.2550]$ гр, так как лежит вне этого интервала.

Для усеченной выборки имеем: среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0.0516$ гр, а ее удвоенная величина $2\sigma = 0.1033$ гр. Отклонения наблюдений от средней величины \bar{x} составляют

0.0254, -0.0085, (No.4) -0.0375, -0.0545, 0.0394,
No.7: -0.1105, 0.0364, 0.0474, 0.2145, 0.0734, -0.0325 гр.

Видно, что по формальному применению правил [2.1], достоверное наблюдение No.7 будет опять неверно выброшено.

Таким образом, примеры П1.1 и П1.2 показывают, что при короткой выборке и при экстремальных ошибках наблюдений разработанная методика позволяет проводить более тонкий анализ выборки и дает лучшие показатели точности, чем стандартная методика.

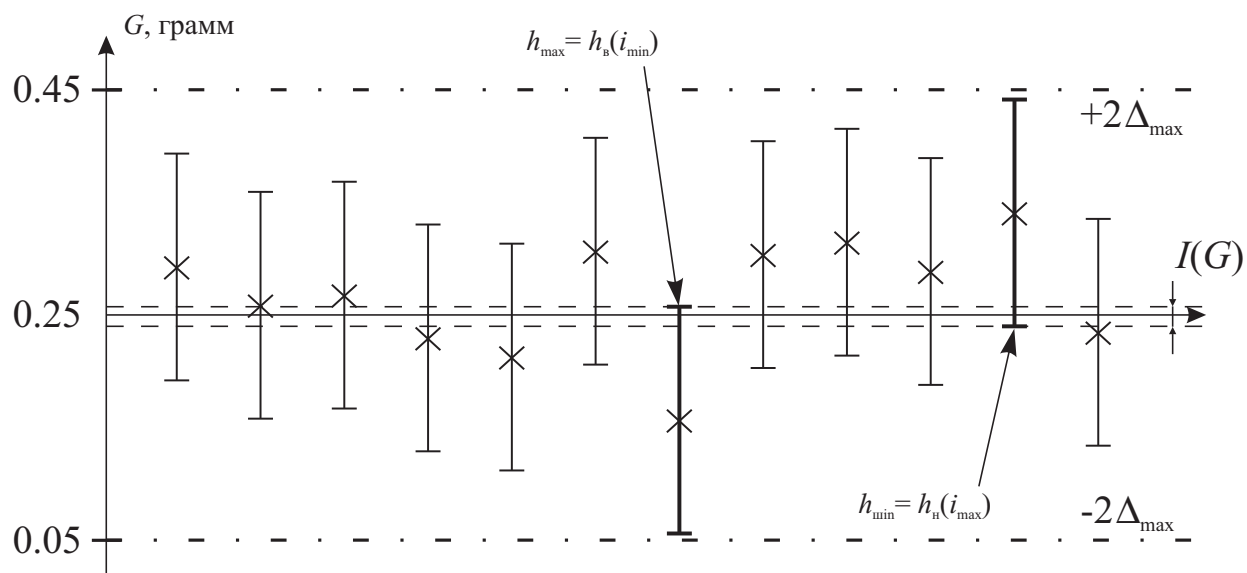


Рис.П1.1. Совместная выборка наблюдений единичной физической величины

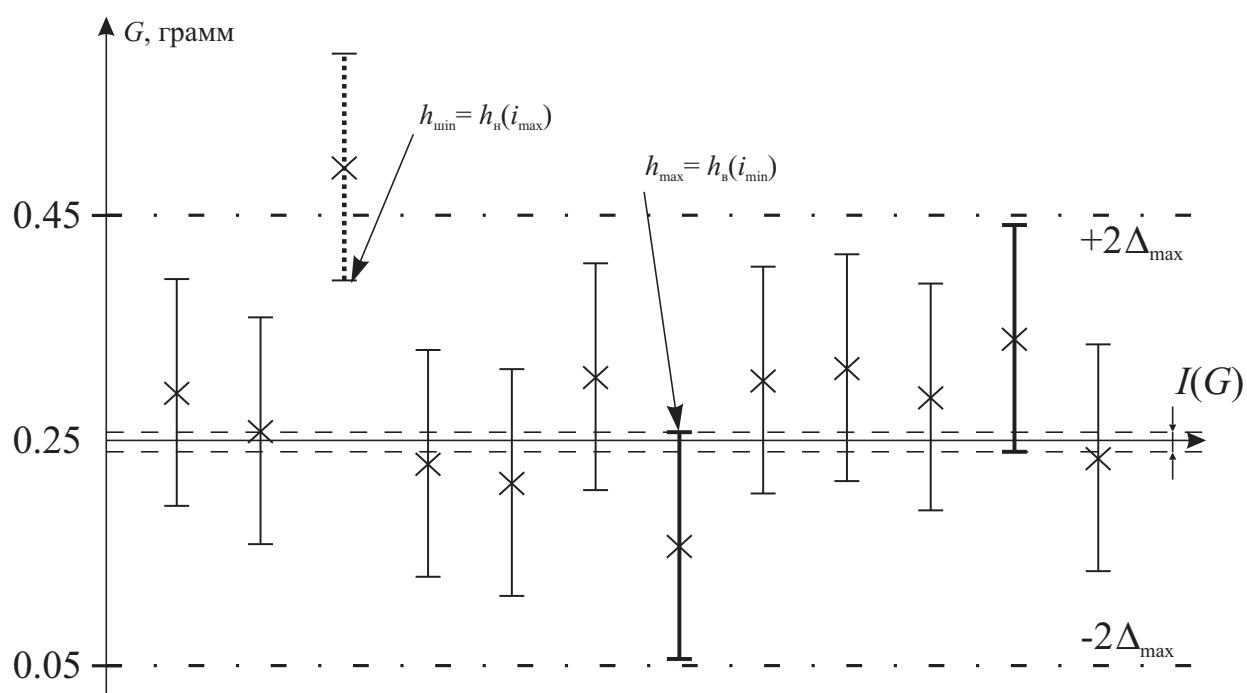


Рис.П1.2. Несовместная выборка наблюдений единичной физической величины

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценивание параметров линейной зависимости

Моделируется взвешивание и последующее оценивание параметров неопределенности линейной зависимости (5.1)

$$y(x, a, b) = ax + b.$$

Здесь x – аргумент; a – наклон зависимости; b – постоянная составляющая.

Модель погрешности наблюдения содержит только абсолютную (3.1a) составляющую Δ_j . Вероятностные характеристики погрешности неизвестны. Выборка однородна, а максимальная величина погрешности равна $\Delta_{\max} = 0,05$ кг. Истинное значение коэффициента наклона составляет 1,0 кг/кг. Истинное значение постоянной составляющей равно 0,1 кг. Шаг равномерной сетки измерений по входной переменной составляет 0,1 кг.

Совместная выборка $\{y_i, x_i, i = 1, N\}$ из $N = 8$ наблюдений имеет вид

$$\{x_i\} = \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7\} \text{ кг,}$$

$$\{y_i\} = \{0,055; 0,245; 0,260; 0,360; 0,545; 0,562; 0,651; 0,760\} \text{ кг,}$$

$$\{y_i^*\} = \{0,100; 0,200; 0,300; 0,400; 0,500; 0,600; 0,700; 0,800\} \text{ кг,}$$

где $\{y_i^*\}$ – истинные значения зависимости (приведены для сравнения).

Границы множеств неопределенности $H_i = [h_{hi}, h_{vi}]$, $i = 1, 8$ рассчитываются по соотношениям (5.3) и (5.4) и принимают значения

$$\begin{aligned} & [0,005, 0,105], [0,195, 0,295], [0,210, 0,310], [0,310, 0,410], \\ & [0,495, 0,595], [0,510, 0,612], [0,601, 0,701], [0,710, 0,810] \text{ кг.} \end{aligned}$$

Парциальные информационные множества вида (5.5) строились по парам множеств неопределенности наблюдений $\{1, i\}$, где $i = 2, \dots, 8$ и представляют собой параллелограммы. Вершины начального информационного множества, построенного по множествам неопределенности первого и второго наблюдений по соотношениям (5.5), на плоскости $a \times b$ "наклон–постоянная составляющая" имеют значения $\{1,900; 0,105\}$, $\{2,900; 0,005\}$, $\{1,900; 0,005\}$, $\{0,900; 0,105\}$, размерности кг/кг и кг, соответственно (рис. П2.1а,б граница отмечена пунктиром).

Вершины результирующего информационного множества (5.7),(5.8) имеют следующие координаты $\{0,994; 0,105\}$, $\{1,013; 0,094\}$, $\{0,999; 0,095\}$, $\{0,975; 0,105\}$, кг/кг и кг, соответственно.

Оценка, рассчитанная формально по стандартному методу наименьших квадратов [2.1], имеет координаты $\bar{a} = 0,9595$ кг/кг и $\bar{b} = 0,0940$ кг.

На плоскости оцениваемых параметров (рис.П2.1а) показано начальное информационное множество (пунктир), результирующее информационное множество (сплошная линия), истинное значение параметров отмечено крестиком, точка, найденная по методу наименьших квадратов, отмечена кружком.

Отметим (общий вид, рис.П2.1а и увеличенный фрагмент, рис.П2.1б) значительное улучшение размера информационного множества и тот факт, что точка метода наименьших квадратов несовместна с выборкой, так как лежит вне результирующего информационного множества.

По информационному множеству (5.8) определяются безусловные интервалы (5.10) и (5.11) параметров

$$I_a = [0.975, 1.013] \text{ кг/кг,}$$

$$I_b = [0.094, 0.105] \text{ кг.}$$

Поскольку вероятностные характеристики погрешности наблюдений неизвестны, нельзя указать закон совместного распределения плотности вероятностей коэффициента наклона и постоянной составляющей оцениваемой зависимости. Формально можно указать [2.15] безусловные оценки σ_a и σ_b среднеквадратических отклонений данных параметров и их стандартные безусловные доверительные интервалы по уровню $\pm 2\sigma_a$ и $\pm 2\sigma_b$ относительно формальных средних величин $\bar{a} = 0,9595$ кг/кг и $\bar{b} = 0,0940$ кг. Однако приближенный расчет этих оценок на основе численного дифференцирования вариаций (для параметра a) и обратного прогноза (для параметра b) между парами наблюдений получаются непредставительно грубыми. Данные интервалы оказываются существенно шире интервалов I_a и I_b , построенных по информационному множеству.

Результаты оценивания на плоскости "входной вес–наблюдение" показаны на рис.П2.2. Крестиками отмечены наблюдения, вертикальными отрезками отмечены интервалы неопределенности наблюдений. Пунктирные линии показывают условную начальную трубку значений зависимости, сплошные линии показывают границы трубки действительных значений зависимости, построенной по соотношениям (5.14) и (5.15). Границы трубки имеют значения

$$\{x_i\} = \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7\} \text{ кг,}$$

$$\{F_H(x_i)\} = \{0,937; 0,195; 0,295; 0,395; 0,495; 0,592; 0,690; 0,787\} \text{ кг,}$$

$$\{F_B(x_i)\} = \{0,105; 0,204; 0,303; 0,403; 0,502; 0,602; 0,701; 0,802\} \text{ кг,}$$

ширина сечения трубки

$$\{F_B(x_i) - F_H(x_i)\} = \{0,0112; 0,0094; 0,0088; 0,0082; 0,0076; 0,0095; 0,0114; 0,0151\} \text{ кг,}$$

Рис.П2.2 показывает, что результирующая трубка значительно сузилась.

Штриховая прямая линия соответствует точке \bar{a}, \bar{b} , рассчитанной по методу наименьших квадратов. Отметим, что эта линия (зависимость) несовместна с заданной выборкой, так как проходит вне интервалов неопределенности наблюдений:

$$\text{No 2 } y(x_2, \bar{a}, \bar{b}) = 0,1899 \text{ кг} < h_{H2} = 0,1950 \text{ кг,}$$

$$\text{No 5 } y(x_5, \bar{a}, \bar{b}) = 0,4778 \text{ кг} < h_{H5} = 0,4950 \text{ кг.}$$

Максимально широкое сечение трубки (5.14), (5.15) и (5.17) соответствует значению аргумента (5.16) для $x_c = x_8 = 0,7$ кг, при этом середина (5.18) сечения равна

$$y_c = 0,7945 \text{ кг.}$$

Максимальное действительное отклонение зависимости от границ трубки составляет

$$d_{\max} = (0,8020 - 0,7870)/2 = 0,0075 \text{ кг.}$$

Через точку x_c, y_c проводится центральная действительная зависимость (5.19), дающая минимакс расстояний центральной зависимости от границ трубки (5.14),(5.15). Ее коэффициент наклона (5.20) равен $a_c = 0.9939$ кг/кг.

Смещения (5.21) каждого из наблюдений относительно центральной зависимости (5.19) составляют

$$\{x_i\} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7\} \text{ кг,}$$

$$\{\gamma_i\} = \{-0.0443; 0.0462; -0.0381; -0.0375; 0.0480; -0.0338; -0.0442; -0.0350\} \text{ кг,}$$

Минимальный предельный уровень погрешности наблюдений (5.24) равен

$$\Delta_{\max}^* = 0.0405 \text{ кг,}$$

при этом информационное множество (5.7) вырождается в предельную точку (5.25)

$$a^* = 0.9797 \text{ кг/кг,}$$

$$b^* = 0.1040 \text{ кг}$$

Таким образом, рассмотренный пример оценивания действительных параметров линейной зависимости показывает, что, как и в случае оценивания единичной физической величины (Приложение 1), при короткой выборке и при существенных ошибках наблюдений разработанная методика позволяет проводить более тонкий анализ выборки и дает лучшие показатели точности, чем стандартная методика.

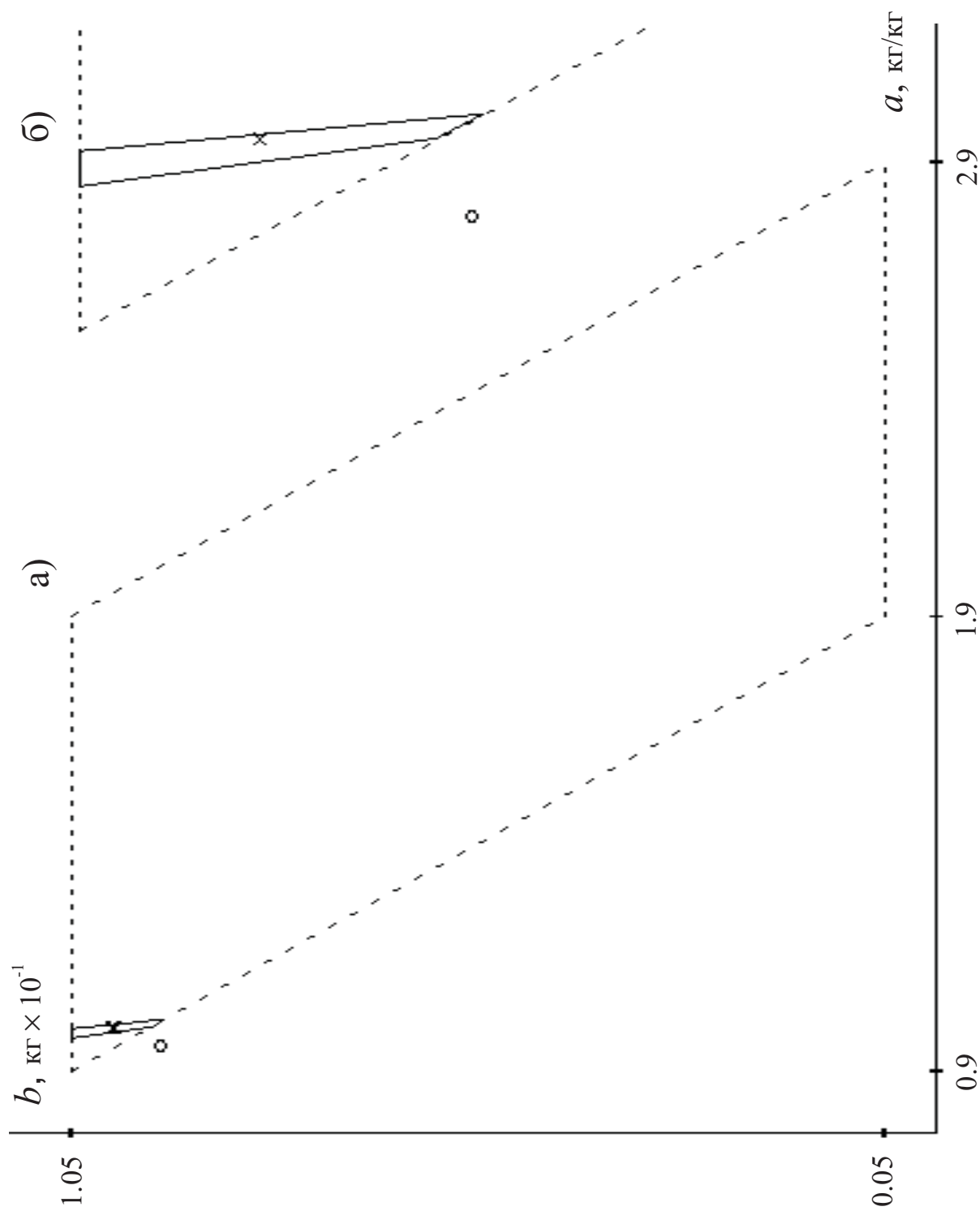


Рис. П2.1. Информационное множество параметров; а) общий вид; б) увеличенный фрагмент

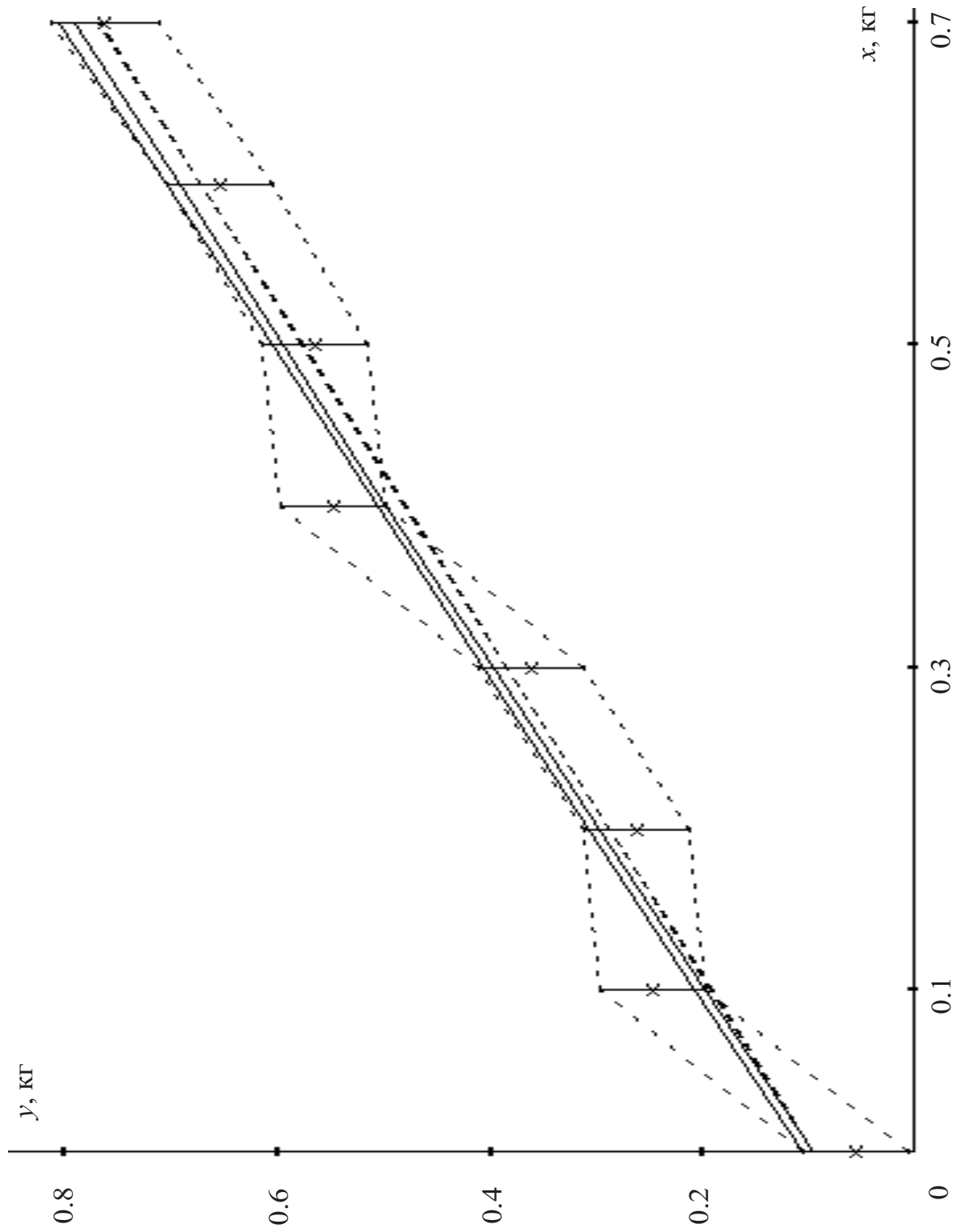


Рис.П2.2. Исходные данные, трубка допустимых значений зависимости, прямая по МНК

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Оценивание области действительных значений параметров и области действительных значений квадратической зависимости

Моделируется оценивание параметров неопределенности вольт-амперной характеристики преобразователя с зависимостью квадратического типа (6.1)

$$y(x, c, a, b) = cx^2 + ax + b.$$

Здесь y – выходной ток, А; x – аргумент, входная переменная, В; c, a, b – параметры зависимости с размерностями A/B^2 , A/B и A , соответственно.

Модель погрешности наблюдения содержит только абсолютную (3.1a) составляющую Δ_i . Вероятностные характеристики погрешности неизвестны. Совместная выборка составлена из достоверных равноточных наблюдений. Измерение выполняется с большой погрешностью, ее максимальная величина равна $\Delta_{\max} = 3.000$ А. С учетом этого ограничения фактические погрешности в наблюдениях моделировались специальным образом для получения наглядных результатов и упрощения понимания сути настоящей методики: погрешности $\{\Delta_i\}$ задавались точно на уровне $\pm 0.95\Delta_{\max}$.

Истинные значения параметров составляют $c_{\text{ист}} = 0.100$ А/В², $a_{\text{ист}} = 0.600$ А/В, $b_{\text{ист}} = 0.100$ А. Шаг равномерной сетки наблюдений по входной переменной равен 2 В.

Совместная выборка $\{y_i, x_i, i = 1, N\}$ из $N = 6$ наблюдений имеет вид

$$\{x_i\} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\} \text{ В,}$$

$$\{y_i^*\} = \{0.100, 1.700, 4.100, 7.300, 11.300, 16.100\} \text{ А,}$$

$$\{\Delta_i\} = \{2.850, -2.850, 2.850, -2.850, 2.850, -2.850\} \text{ А,}$$

$$\{y_i\} = \{2.950, -1.150, 6.950, 4.450, 14.150, 13.150\} \text{ А,}$$

где $\{y_i^*\}$ – истинные значения зависимости (приведены для сравнения).

Границы множеств неопределенности $H_i = [h_{Hi}, h_{Bi}]$, $i = 1, \dots, 6$ рассчитываются по соотношениям (6.3) и (6.4) и принимают значения

$$[-0.050, 5.950], [-4.150, 1.850], [3.950, 9.950], \\ [1.450, 7.450], [11.150, 17.150], [10.250, 16.250] \text{ А.}$$

Первичный анализ (Глава 6, Раздел А). Произведем оценку безусловных интервалов действительных значений параметров.

Выполняя действия (6.4)–(6.10), получаем безусловный интервал $I_c = [c_{\min}, c_{\max}]$ для параметра c

$$c_{\min} = 0.075 \text{ А/В}^2, \\ c_{\max} = 0.125 \text{ А/В}^2,$$

а по выражениям (4.9) и (4.10) определяем его центральную оценку и максимальное отклонение

$$c_c^* = (c_{\max} + c_{\min})/2 = 0.100 \text{ А/В}^2, \\ \Delta_c = (c_{\max} - c_{\min})/2 = 0.025 \text{ А/В}^2.$$

Выполняя действия (6.12)–(6.18), получаем безусловный интервал

$$I_a = [a_{\min}, a_{\max}] \text{ для параметра } a$$

$$a_{\min} = 0.300 \text{ A/B,}$$

$$a_{\max} = 0.800 \text{ A/B,}$$

и а по соотношениям (4.9) и (4.10) определяем его центральную оценку и максимальное отклонение

$$a_c^* = (a_{\max} + a_{\min})/2 = 0.550 \text{ A/B,}$$

$$\Delta_a = (a_{\max} - a_{\min})/2 = 0.250 \text{ A/B.}$$

Выполняя действия (6.20)–(6.26), получаем безусловный интервал

$$I_b = [b_{\min}, b_{\max}] \text{ для параметра } b$$

$$b_{\min} = -0.050 \text{ A,}$$

$$b_{\max} = 0.750 \text{ A,}$$

а по выражениям (4.9) и (4.10) определяем его центральную оценку и максимальное отклонение

$$b_c^* = (b_{\max} + b_{\min})/2 = 0.350 \text{ A,}$$

$$\Delta_b = (b_{\max} - b_{\min})/2 = 0.400 \text{ A.}$$

Определенная по безусловным оценкам центральная действительная зависимость (6.28) принимает вид

$$Y(x) = c_c^* x^2 + a_c^* x + b_c^* = 0.100 x^2 + 0.550 x + 0.350 \text{ A.}$$

Прямая проверка показывает, что центральная оценка (c_c^*, a_c^*, b_c^*) действительно **допустима**, так как соответствующая центральная зависимость проходит через указанные выше множества неопределенности $H_i = [h_{Hi}, h_{Vi}]$: $Y(x_i) \in H_i$, $i = 1, N$. Это позволяет использовать центральную оценку и центральную зависимость в качестве выходной информации.

Смещения γ_i (6.29) наблюдений относительно центральной действительной зависимости (6.28) принимают значения

$$\{x_i\} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\} \text{ В,}$$

$$\{y_i\} = \{2.950, -1.150, 6.950, 4.450, 14.150, 13.150\} \text{ А,}$$

$$\{Y_i\} = \{0.350, 1.850, 4.150, 7.250, 11.150, 15.850\} \text{ А,}$$

$$\{\gamma_i\} = \{-2.600, 3.000, -2.800, 2.800, -3.000, 2.600\} \text{ А.}$$

Здесь наблюдения $\{y_i\}$ и значения центральной зависимости $\{Y_i\}$ приведены для иллюстрации.

Исходные данные и результаты предварительного анализа представлены на рис.ПЗ.1. Истинная кривая нанесена штриховой линией. Наблюдения с погрешностями отмечены крестиками. Видно, что из-за большой величины возможной погрешности наблюдения сильно рассеиваются относительно истинной кривой. Вертикальные отрезки

показывают множества неопределенности наблюдений. Центральная кривая отмечена точечным пунктиром и проходит через множества неопределенности всех наблюдений.

Формальным применением метода наименьших квадратов [2.1] и [2.15] был произведен расчет средних значений параметров $c_{\text{МНК}} = 0.100 \text{ А/В}^2$, $a_{\text{МНК}} = 0.355 \text{ А/В}$, $b_{\text{МНК}} = 1.321 \text{ А}$. Зависимость, определяемая этими параметрами приведена на рис.П3.2 (штриховая линия) в сравнении с центральной зависимостью (точечный пунктир). Видно, что оценка $(c_{\text{МНК}}, a_{\text{МНК}}, b_{\text{МНК}})$ параметров по МНК **недопустима**, так как соответствующая зависимость проходит существенно вне множеств неопределенности наблюдений No.2 и No.5.

Точный анализ (Глава 6, Раздел Б). Напомним, что подход заключается в следующем. Искомое трехмерное информационное множество $I(c, a, b)$ в пространстве параметров $c \times a \times b$ представляется набором плоских сечений $I(c, a/b_k)$ параллельных плоскости $c \times a$ по сетке параметра $\{b_k\}$, $k = 1, \dots, K$ из безусловного интервала I_b данного параметра.

Необходимость уточнения границ интервала I_b действительно существует: при найденном значении $b_{\text{max}} = 0.750 \text{ А}$ и крайних значениях двух других параметров $c_{\text{max}} = 0.125 \text{ А/В}^2$ и $a_{\text{min}} = 0.300 \text{ А/В}$ (“правый–нижний” угол безусловной области $I_c \times I_a$) сечение информационного множества непусто, но вырождается в единственную точку, совпадающую с точкой $(c_{\text{max}}, a_{\text{max}})$.

При этом нижняя граница поднимается на несущественную величину $0.4 \times 10^{-7} \text{ А}$, а верхняя опускается на эту величину. В результате уточненные границы имеют значения $b_1 = b_{\text{min}} = -0.0499996 \text{ А}$, $b_K = b_{\text{max}} = 0.7499996 \text{ А}$.

Число K узлов сетки может задаваться в зависимости от требуемой точности визуализации трехмерного информационного множества. Для наглядности зададим $K = 11$.

Типичная картина пересечения парциальных информационных множеств для значения параметра $b_k = b_c^* = 0.350 \text{ А}$ показана на рис.П3.3. Здесь точечным пунктиром обозначены парциальные информационные множества (5.5), прямоугольником отмечена априорная область $I_c \times I_a$ безусловных значений параметров c, a .

Специальный расчет сечения информационного множества $I(c, a/b_{\text{ист}})$ для истинного значения параметра $b_{\text{ист}} = 0.100 \text{ А}$ дал:

– количество (6.33) вершин $M(b_{\text{ист}}) = 5$,

– координаты (c_m, a_m) его вершин (в последовательном порядке номеров m от 1 до 5)

[0.097, 0.640], [0.108, 0.527], [0.104, 0.543], [0.084, 0.706], [0.0875, 0.700]

(А/В^2 и А/В , соответственно).

При этом подтверждается состоятельность рассматриваемой методики (рис.П3.4): истинная точка (кружок) $c_{\text{ист}} = 0.100 \text{ А/В}^2$ и $a_{\text{ист}} = 0.600 \text{ А/В}$ находится внутри информационного множества, в то время как точка МНК (крестик) лежит заведомо вне информационного множества.

Структура набора сечений, составляющих полное трехмерное информационное множество показана на рис.П3.5. Сплошными линиями отмечены сечения информационного множества, точечным пунктиром показана априорная область

$I_c \times I_a$ безусловных значений параметров c, a . Последнее сечение (справа внизу) практически является точечным, но для наглядности изображения несколько увеличено в размере. Кружком отмечена истинная точка параметров $(c_{\text{ист}}, a_{\text{ист}})$. Квадратик показывает положение центральной оценки (c_c^*, a_c^*, b_c^*) , точка $(c_{\text{МНК}}, a_{\text{МНК}}, b_{\text{МНК}})$ по МНК отмечена крестиком и заведомо лежит вне информационного множества.

Трубка действительных значений оцениваемой зависимости (6.37),(6.38) показана на рис.П3.6. Границы трубки имеют значения

$$\{x_i\} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\} \text{ В,}$$

$$\{F_H(x_i)\} = \{-0.050, 1.530, 3.950, 7.050; 11.150, 15.450\} \text{ А,}$$

$$\{F_B(x_i)\} = \{0.750, 1.850, 4.350, 7.450, 11.470, 16.250\} \text{ А,}$$

ширина сечения трубки

$$\{F_B(x_i) - F_H(x_i)\} = \{0.800, 0.320; 0.400, 0.400, 0.320, 0.800\} \text{ А.}$$

Максимально широкое сечение трубки (6.37),(6.38) достигается при двух значениях аргумента 0 В и 10 В. Для наглядности анализа выбираем $x_c = x_1 = 0$ В, при этом середина (6.41) сечения равна $y_c = 0.350$ А и $b_c = y_c$. Для значения параметра $b_c = 0.350$ А рассчитывается соответствующее сечение информационного множества (6.32). Оно имеет

– количество (6.33) вершин $M(b_c) = 4$;

– координаты (c_m, a_m) его вершин (в последовательном порядке номеров m от 1 до 4)

$$[1.125, 0.450], [1.000, 0.550], [1.050, 0.540], [1.115, 0.440]$$

(A/B^2 и A/B , соответственно).

Максимальное действительное отклонение зависимости от границ трубки составляет

$$d_{\text{max}} = (0.750 - (-0.050))/2 = 0.400 \text{ А.}$$

Находим уточненную центральную точку (6.42), дающую минимакс расстояний уточненной центральной зависимости от границ трубки (6.37),(6.38),

$$c_c = 0.1075 \text{ А/В}^2,$$

$$a_c = 0.495 \text{ А/В.}$$

Уточненная центральная действительная зависимость (6.44) принимает вид

$$Y(x) = c_c x^2 + a_c x + b_c = 0.1075 x^2 + 0.495 x + 0.350 \text{ А.}$$

Смещения (6.45) каждого из наблюдений относительно уточненной центральной зависимости (6.44) составляют

$$\{x_i\} = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\} \text{ В,}$$

$$\{y_i\} = \{2.950, -1.150, 6.950, 4.450, 14.150, 13.150\} \text{ A}$$

$$\{Y(x_i)\} = \{0.350, 1.770, 4.050, 7.190; 11.190, 16.050\} \text{ A},$$

$$\{\gamma_i\} = \{2.600, -2.920; 2.900, -2.740, 2.960, -2.800\} \text{ A}.$$

Здесь наблюдения $\{y_i\}$ и значения уточненной центральной зависимости $\{Y_i\}$ приведены для иллюстрации.

Для рассматриваемого специального случая моделирования выборки наблюдений и их погрешностей минимальный предельный уровень погрешности в исходной выборке получается

$$\Delta_{\max}^* = 2.850 \text{ A},$$

что очевидно совпадает с фактически заданным точным уровнем $0.95 \Delta_{\max}$. При этом предельное информационное множество (6.32) очевидно вырождается в истинную точку

$$IS^* = \{ c^* = c_{\text{ист}} = 0.100 \text{ A/B}^2, a^* = a_{\text{ист}} = 0.600 \text{ A/B}, b^* = b_{\text{ист}} = 0.100 \text{ A} \}.$$

Таким образом, рассмотренный пример оценивания действительных значений параметров квадратической зависимости показывает, что, как в предыдущих примерах (Приложение 1 и Приложение 2), при короткой выборке и при существенных погрешностях наблюдений разработанная методика позволяет проводить более тонкий анализ выборки и дает лучшие показатели точности, чем стандартная методика.

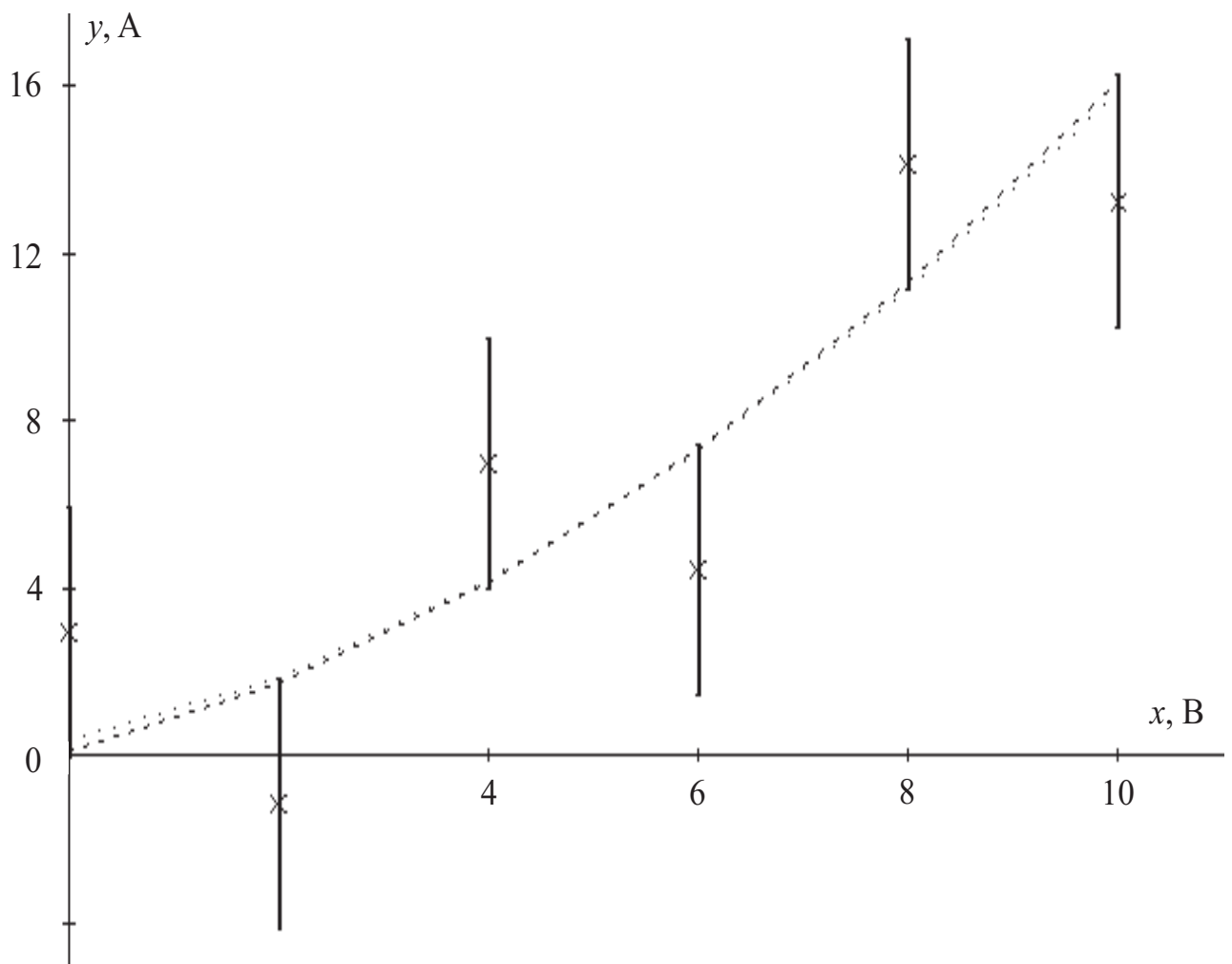


Рис. ПЗ.1. Исходные данные; наблюдения - крестики, множества неопределенности - вертикальные отрезки, истинная (штрихи) и центральная (пуктир) зависимости

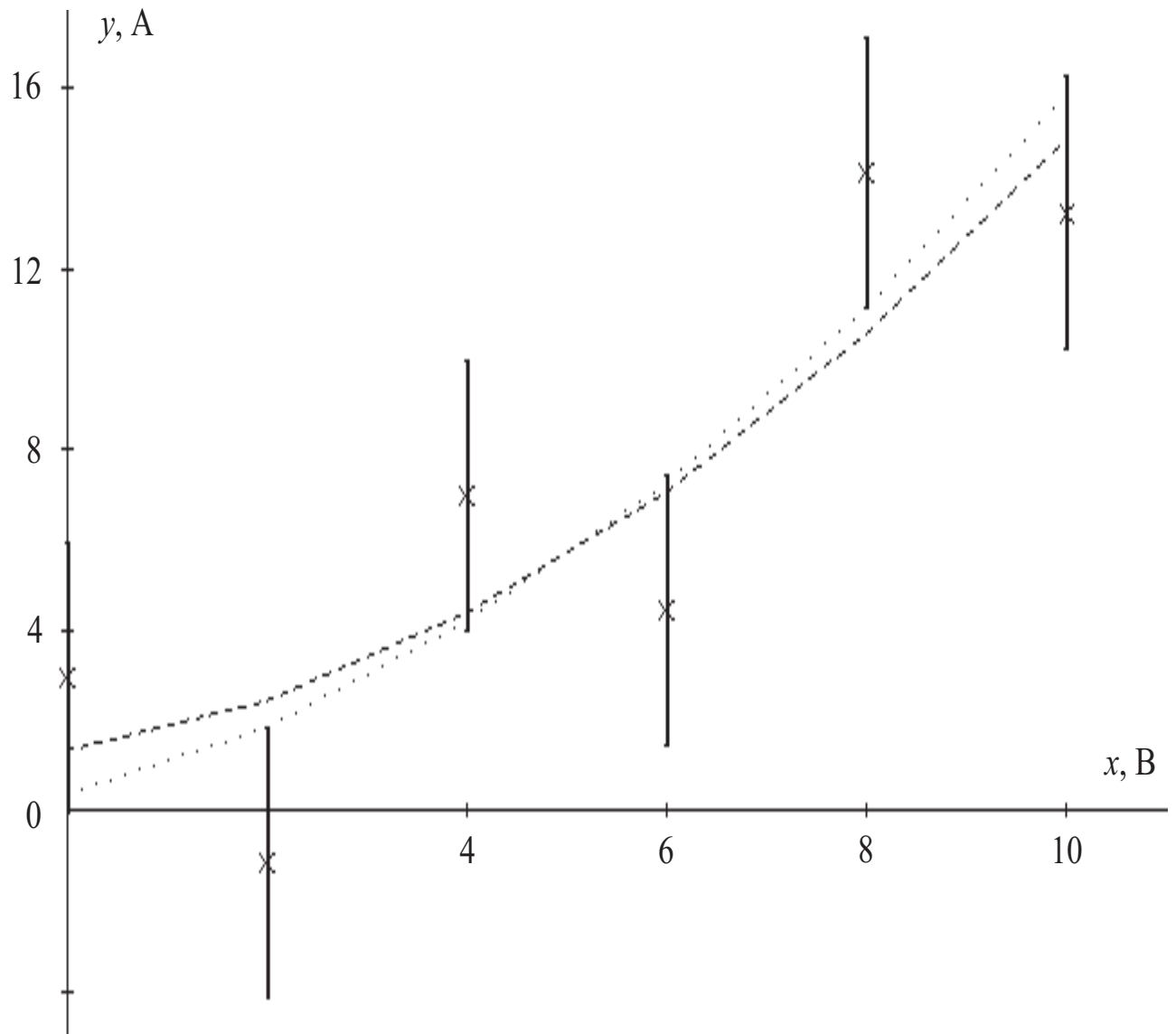


Рис. ПЗ.2. Центральная зависимость (пунктир) и кривая по МНК (штрих)

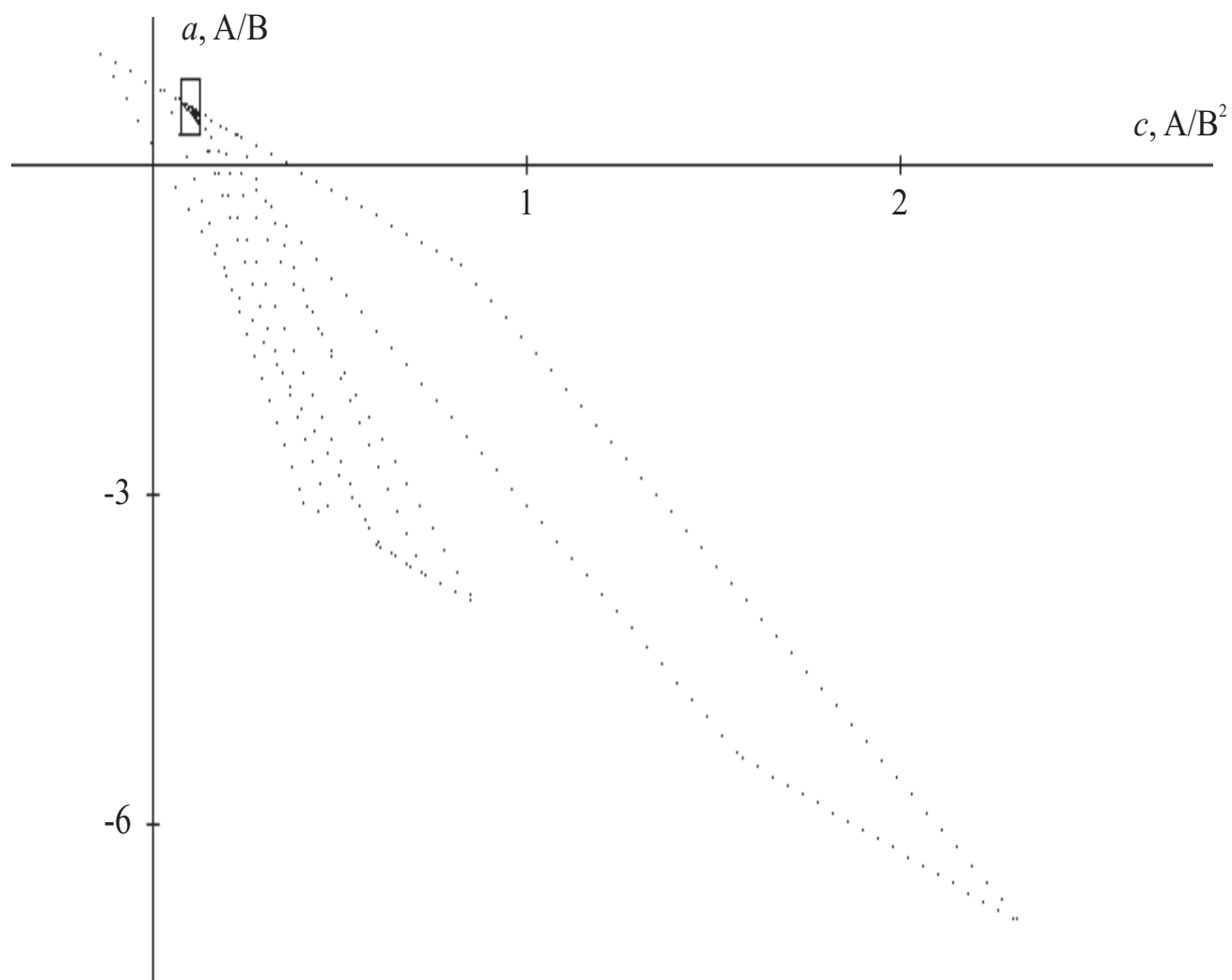


Рис. ПЗ.3. Картина пересечения парциальных информационных множеств (пунктир) между собой и с безусловным множеством параметров (прямоугольник)

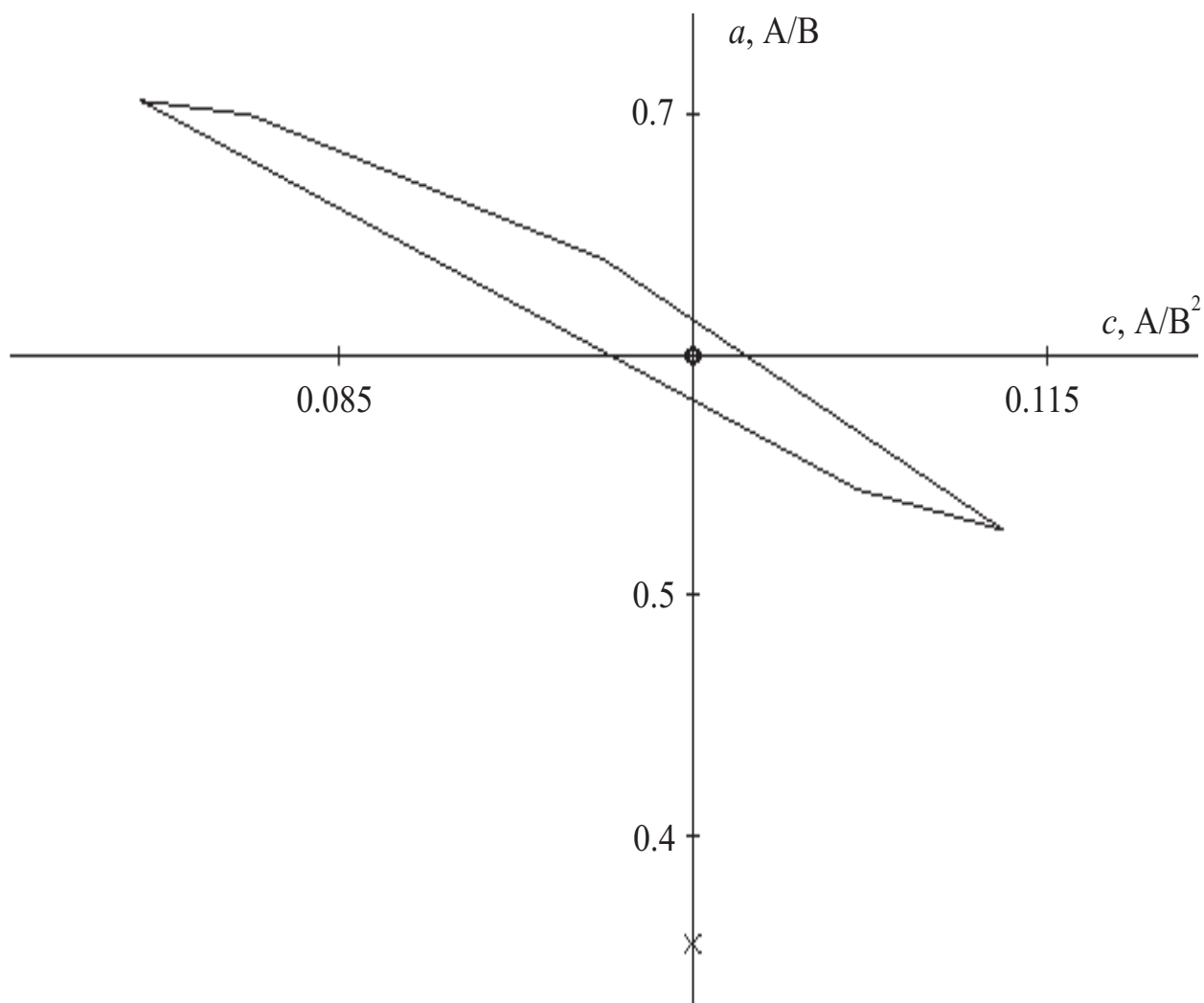


Рис. ПЗ.4. Сечение информационного множества для узла $b_{ист} = 0.1$ А; истинная точка - кружок, точка по МНК - крестик.

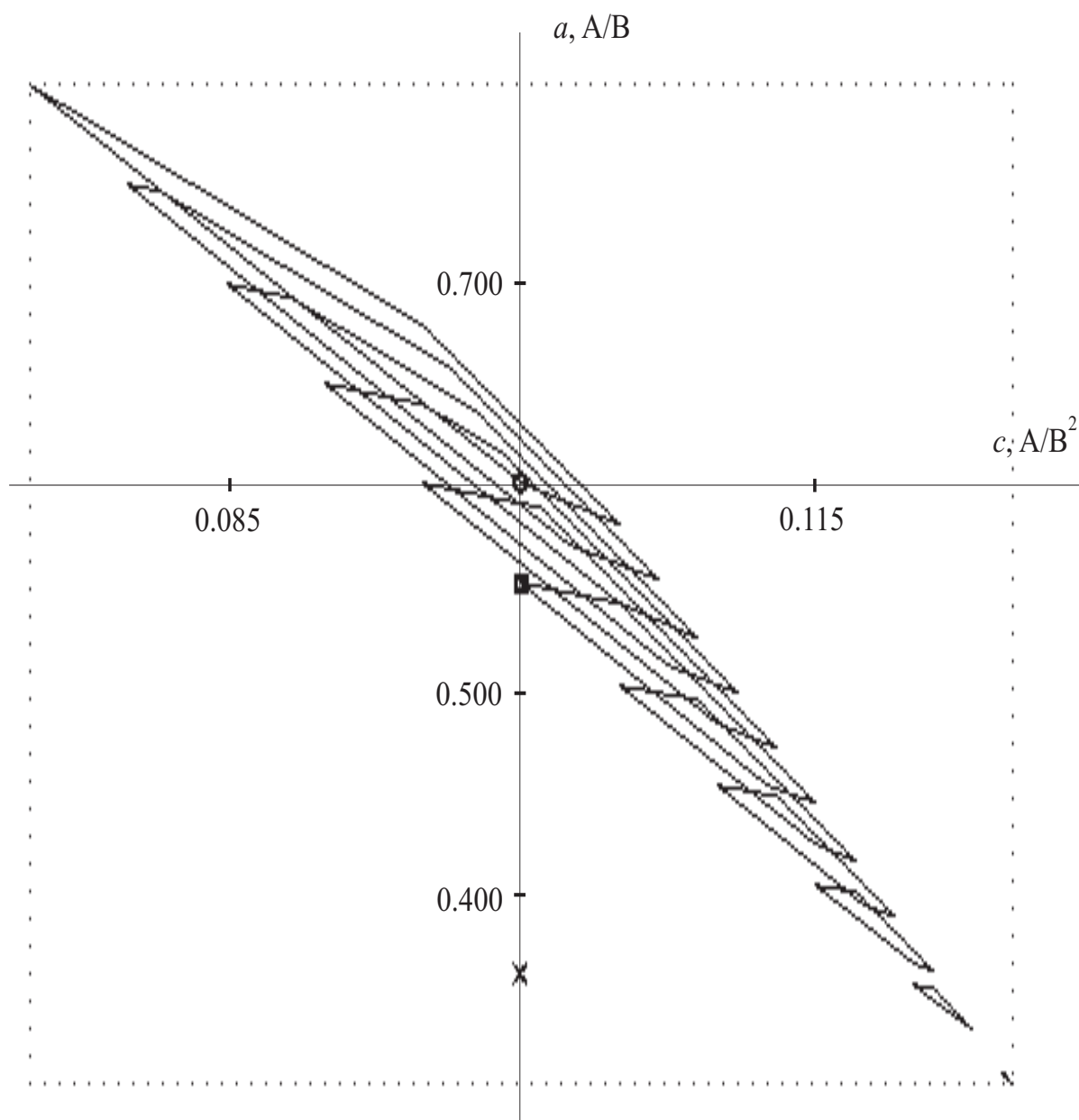


Рис. ПЗ.5. Трехмерное информационное множество; сечения (сплошные линии), истинная точка (кружок), центральное значение (квадратик) по безусловным интервалам (пунктир), точка по МНК (крестик).

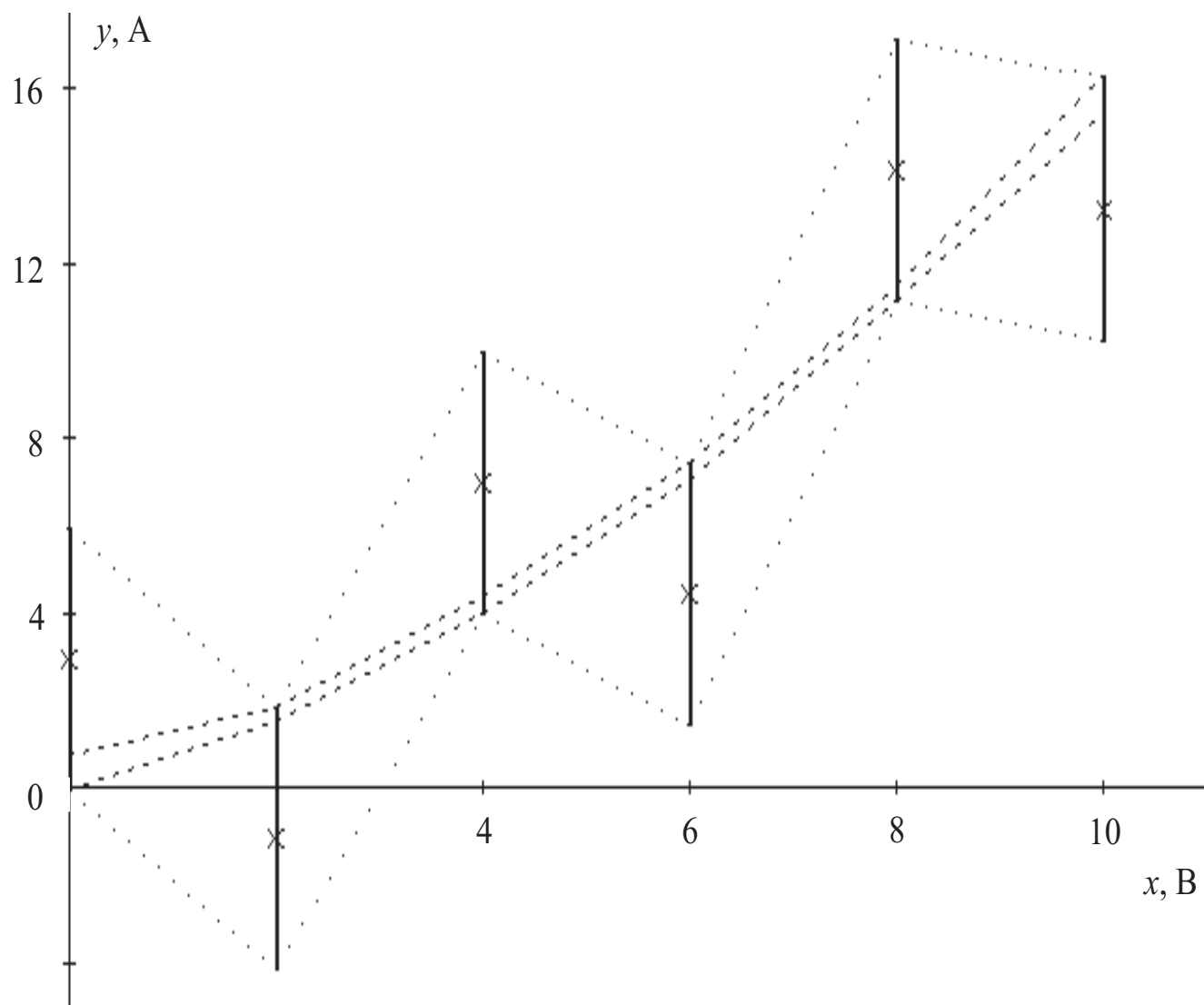


Рис. ПЗ.6. Исходная (пунктир) и уточненная (штрихи) трубка действительных значений зависимости

СОДЕРЖАНИЕ

Информационные данные	2
1. Область применения	3
2. Нормативные ссылки и использованные источники	3
3. Основные понятия и определения	5
4. Методика анализа выборки наблюдений единичной физической величины, определения действительного значения и расчета показателей неопределенности	8
4.1. Расчет множеств неопределенности выборки наблюдений	8
4.2. Анализ совместности выборки	8
4.3. Расчет оценки центрального действительного значения	8
4.4. Расчет максимального действительного отклонения	9
4.5. Расчет смещения каждого наблюдения	9
4.6. Выявление одиночных промахов	9
4.7. Выделение подвыборок совместных наблюдений	9
4.8. Минимальный предельный уровень погрешности	10
5. Расчет параметров неопределенности линейной зависимости	12
5.1. Модель оцениваемой зависимости	12
5.2. Расчет множеств неопределенности наблюдений	12
5.3. Расчет совокупности парциальных информационных множеств	12
5.4. Анализ совместности выборки	13
5.5. Расчет области действительных значений параметров	13
5.6. Расчет безусловных интервалов действительных значений параметров	13
5.7. Расчет условных интервалов действительных значений параметров	14
5.8. Расчет области действительных значений зависимости (трубка)	14
5.9. Расчет центральной действительной зависимости, её максимального действительного отклонения и центрального действительного вектора параметров	14
5.10. Расчет смещения каждого наблюдения	15
5.11. Выявление одиночных промахов	15
5.12. Прямой анализ совместности подвыборок наблюдений	15
5.13. Минимальный предельный уровень погрешности наблюдений	16
6. Расчет параметров неопределенности квадратической зависимости	17
6.1. Модель оцениваемой зависимости	17
6.2. Расчет областей неопределенности наблюдений	17
Раздел А. Первичный анализ совместности выборки и внешняя оценка области значений параметров	17
6.3. Расчет безусловного интервала действительных значений параметра c	18
6.3.1. Преобразование выборки и расчет парциальных интервалов неопределенности параметра c	18
6.3.2. Анализ совместности выборки и расчет безусловного интервала действительных значений параметра c	18
6.4. Расчет безусловного интервала действительных значений параметра a	19
6.4.1. Преобразование выборки и расчет парциальных интервалов неопределенности параметра a	19
6.4.2. Анализ совместности выборки и расчет безусловного интервала действительных значений параметра c	19

6.5. Расчет безусловного интервала действительных значений параметра b	20
6.5.1. Преобразование выборки и расчет парциальных интервалов неопределенности параметра b	20
6.5.2. Анализ совместности выборки и расчет безусловного интервала действительных значений параметра b	20
6.6. Расчет центральной действительной зависимости по результатам первичного анализа	21
6.7. Расчет смещения каждого наблюдения	21
6.8. Выделение промахов и построение подвыборок совместных наблюдений	21
6.7. Расчет смещения каждого наблюдения	21
Раздел Б. Точный анализ совместности выборки и точная область действительных значений параметров	22
6.9. Сетка параметра b	22
6.10. Порядок построений	22
6.11. Построение сечения	23
6.12. Построение точной трубки действительных значений зависимости	23
6.13. Расчет уточненной центральной действительной зависимости и уточненного центрального действительного вектора параметров	23
6.14. Расчет смещения каждого наблюдения	24
6.15. Расчет максимального действительного отклонения зависимости	24
6.16. Минимальный предельный уровень погрешности наблюдения	24
7. Средства проведения обработки	26
8. Пояснительная записка	27
8.1. Основание для разработки	27
8.2. Характеристика объекта стандартизации	27
8.3. Соответствие проекта МИ законодательным аспектам и международным стандартам	27
8.4. Сведения о патентной чистоте	27
8.5. Сведения о взаимосвязи с другими НД	27
8.6. Сведения о согласовании	28
8.7. Источники информации	28
Приложение 1. Оценивание области действительных значений и расчет показателей неопределенности единичной физической величины	29
Пример П1.1. Совместная однородная выборка наблюдений Единичной физической величины	29
Пример П1.2. Несовместная однородная выборка наблюдений физической величины	31
Приложение 2. Оценивание параметров линейной зависимости	35
Приложение 3. Оценивание области действительных значений параметров и области действительных значений квадратической зависимости	40