

Дифференциальный подход в теории сплайнов

Б.И.Квасов

Институт вычислительных технологий СО РАН
пр. Лаврентьева 6, 630090, Новосибирск, РОССИЯ

С о д е р ж а н и е

1. Постановка задачи	3
2. Конечно-разностная аппроксимация	4
3. Расщепление системы и вычисление сеточного решения . . .	7
4. Основные шаги алгоритма	13
5. Параллельный алгоритм для 3-диагональной системы . . .	15
6. Случай дискретного кубического сплайна	25
7. Случай квазиравномерной сетки	28
8. Параллельный алгоритм для 5-диагональной системы . . .	33
9. Выбор параметров формы	40
10. Графические примеры	41
Литература	50

1. **Постановка задачи.** Пусть имеются данные

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad (1)$$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$. Положим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N$.

Определение 1. Интерполяционным гиперболическим сплайном S с параметрами натяжения $\{p_i \geq 0 \mid i = 0, \dots, N\}$ назовем решение дифференциальной многоточечной краевой задачи (ДМКЗ)

$$\frac{d^4 S}{dx^4} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \frac{d^2 S}{dx^2} = 0 \quad \text{для всех } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N, \quad (2)$$

$$S \in C^2[a, b] \quad (3)$$

с условиями интерполяции

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, N + 1 \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$S''(a) = f''_0 \quad \text{и} \quad S''(b) = f''_{N+1}. \quad (5)$$

2. Конечно-разностная аппроксимация.

Рассмотрим дискретную версию ДМКЗ. Введем сетку

$$x_{i,-1} < x_i = x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{i,n_i} = x_{i+1} < x_{i,n_i+1}, \quad n_i \in \mathbf{N} \text{ и} \\ h_{ij} = x_{i,j+1} - x_{ij}, \quad j = -1, 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Будем искать сеточную функцию

$$\{u_{ij}, \quad j = -1, \dots, n_i + 1, \quad i = 0, \dots, N\},$$

удовлетворяющую разностным уравнениям:

$$24u[x_{i,j-2}, \dots, x_{i,j+2}] - 2\left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 u[x_{i,j-1}, x_{i,j}, x_{i,j+1}] = 0, \\ j = 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, \dots, N. \quad (6)$$

Аппроксимация условий гладкости (3) дает

$$\begin{aligned}
 u_{i-1, n_{i-1}} &= u_{i0} , \\
 D_{i-1, n_{i-1}}^1 u_{i-1, n_{i-1}} &= D_{i0}^1 u_{i0}, \quad i = 1, \dots, N, \\
 D_{i-1, n_{i-1}}^2 u_{i-1, n_{i-1}} &= D_{i0}^2 u_{i0},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{ij}^1 u_{ij} &= \lambda_{ij} u[x_{i, j-1}, x_{ij}] + (1 - \lambda_{ij}) u[x_{ij}, x_{i, j+1}], \\
 D_{ij}^2 u_{ij} &= 2u[x_{i, j-1}, x_{ij}, x_{i, j+1}], \quad \lambda_{ij} = h_{ij} / (h_{i, j-1} + h_{ij}).
 \end{aligned}$$

Условия (4) и (5) принимают вид

$$u_{i,0} = f_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad u_{N, n_N} = f_{N+1}, \tag{8}$$

$$D_{00}^2 u_{00} = f_0'', \quad D_{N, n_N}^2 u_{N, n_N} = f_{N+1}''. \tag{9}$$

Используем обозначения

$$M_i = D_{i-1, n_{i-1}}^2 u_{i-1, n_{i-1}} = D_{i, 0}^2 u_{i0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Из второго и третьего равенств (7) получаем

$$M_i = 2u[x_{i-1, n_{i-1}-1}, x_{i0}, x_{i1}], \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Это позволяет исключить в (6) "лишние" неизвестные $u_{i-1, n_{i-1}+1}$ и $u_{i, -1}$, $i = 1, \dots, N$. Неизвестные $u_{0, -1}$ и u_{N, n_N+1} исключаются посредством краевых условий (8).

Наше дискретное *сеточное решение* будет тогда определено как

$$\{u_{ij}, \quad j = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N\}. \quad (11)$$

3. Расщепление системы и вычисление сеточного решения.

Для решения системы (6)–(9) введем обозначения

$$M_{ij} = 2u[x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}], \quad j = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N. \quad (12)$$

Тогда на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, равенства (6) принимают вид

$$\begin{aligned} M_{i0} &= M_i, \\ \frac{12}{x_{i,j+2} - x_{i,j-2}} &\left(\frac{M_{i,j+1} - M_{ij}}{x_{i,j+2} - x_{i,j-1}} - \frac{M_{i,j} - M_{i,j-1}}{x_{i,j+1} - x_{i,j-2}} \right) - \\ &- \left(\frac{p_i}{h_i} \right) M_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n_i - 1, \\ M_{i,n_i} &= M_{i+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условий интерполяции (8) и (12) имеем

$$\begin{aligned} u_{i0} &= f_i, \\ \frac{2}{h_{i,j-1} + h_{ij}} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_{ij}} - \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h_{i,j-1}} \right) &= M_{ij}, \\ u_{i,n_i} &= f_{i+1}, \quad j = 0, \dots, n_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы решить системы (13) и (14), нужно предварительно определить значения M_i , $i = 0, \dots, N + 1$, причем таким образом, чтобы были выполнены условия гладкости (7) и краевые условия (9).

Принцип суперпозиции: общее решение линейной системы есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Пусть α_{ij} и β_{ij} , $j = 0, \dots, n_i$ – решения системы (13) с краевыми условиями $M_{i0} = 1$, $M_{i,n_i} = 0$ и $M_{i0} = 0$, $M_{i,n_i} = 1$. Тогда решение системы (13) имеет вид

$$M_{ij} = M_i \alpha_{ij} + M_{i+1} \beta_{ij}, \quad j = 0, \dots, n_i. \quad (15)$$

Пусть γ_{ij} и δ_{ij} , $j = 0, \dots, n_i$ – решения системы (14) с $u_{i0} = u_{i,n_i} = 0$ и правыми частями α_{ij} и β_{ij} . Пусть ε_{ij} – решение однородной системы (14) с $\varepsilon_{i0} = f_i$ и $\varepsilon_{i,n_i} = f_{i+1}$. Так как

$$\varepsilon_{ij} = f_i(1 - t_{ij}) + f_{i+1}t_{ij}, \quad t_{ij} = (x_{ij} - x_i)/h_i, \quad j = 0, \dots, n_i,$$

то

$$u_{ij} = f_i(1 - t_{ij}) + f_{i+1}t_{ij} + M_i \gamma_{ij} + M_{i+1} \delta_{ij}, \quad j = 0, \dots, n_i. \quad (16)$$

Матрицы систем (13) и (14) имеют диаг. преобладание.

Применяя принцип максимума и теорему сравнения, получаем

$$0 \leq \alpha_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq \beta_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 1, \\ -h_i^2/4 \leq \gamma_{ij}, \delta_{ij} \leq 0, \quad j = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Используя формулы (9), (10) и (16), находим

$$M_0 = f_0'', \\ a_i M_{i-1} + b_i M_i + c_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ M_{N+1} = f_{N+1}'', \quad (17)$$

где

$$b_i = \frac{h_{i-1, n_{i-1}-1} + h_{i0}}{2} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{h_{i-1, n_{i-1}-1}} - \frac{\gamma_{i1}}{h_{i0}}, \quad c_i = -\frac{\delta_{i1}}{h_{i0}}, \\ a_i = -\frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{h_{i-1, n_{i-1}-1}}, \quad d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

Коэффициенты системы (17) неотрицательны. Система (17) имеет диагональное преобладание, если сетка выбрана таким образом, что

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1, n_{i-1}-1}}{2} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{h_{i-1, n_{i-1}-1}} &\geq -\frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{h_{i-1, n_{i-1}-1}}, \\ \frac{h_{i0}}{2} - \frac{\gamma_{i1}}{h_{i0}} &\geq -\frac{\delta_{i1}}{h_{i0}}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (18)$$

Система (18) может быть решена методом 3-точечной прогонки или одним из итерационных методов. Например, методом последовательной верхней релаксации

$$\begin{aligned} M_i^{(k+1)} &= (1 - \omega)M_i^{(k)} + \frac{\omega}{b_i} \left(d_i - a_i M_{i-1}^{(k+1)} - c_i M_{i+1}^{(k)} \right), \\ \omega &\in (1, 2), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Используя второе равенство в (7), положим

$$m_i = D_{i-1, n_{i-1}-1}^1 u_{i-1, n_{i-1}} = D_{i0}^1 u_{i0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда из третьего равенства в (7) получаем

$$m_i = \frac{h_{i0}}{h_{i-1, n_{i-1}-1} + h_{i0}} u[x_{i-1, n_{i-1}-1}, x_{i-1, n_{i-1}}] + \\ + \frac{h_{i-1, n_{i-1}-1}}{h_{i-1, n_{i-1}-1} + h_{i0}} u[x_{i0}, x_{i1}], \quad i = 1, \dots, N.$$

Приведенные равенства позволяют легко вычислить величины m_i , используя сеточное решение. В частности, для краевых условий $S'(a) = f'_0$ и $S'(b) = f'_{N+1}$ получаем

$$\left(\frac{h_{00}}{2} - \frac{\gamma_{01}}{h_{00}} \right) M_0 - \frac{\delta_{01}}{h_{00}} M_1 = f[x_0, x_1] - f'_0, \\ - \frac{\gamma_{N, n_{N-1}}}{h_{N, n_{N-1}}} M_N + \left(\frac{h_{N, n_{N-1}}}{2} - \frac{\delta_{N, n_{N-1}}}{h_{N, n_{N-1}}} \right) M_{N+1} = \\ = f'_{N+1} - f[x_N, x_{N+1}].$$

4. Основные шаги алгоритма

Шаг 1. Решить $2(N + 1)$ систем (13) с краевыми условиями $M_{i,0} = 1, M_{i,n_i} = 0$ и $M_{i,0} = 0, M_{i,n_i} = 1$ для определения α_{ij} и β_{ij} ($j = 0, 1, \dots, n_i; i = 0, 1, \dots, N$).

Шаг 2. Решить $2(N + 1)$ систем (14) с краевыми условиями $u_{i,0} = u_{i,n_i} = 0$ и правыми частями α_{ij} и β_{ij} для нахождения γ_{ij} и δ_{ij} ($j = 0, 1, \dots, n_i; i = 0, 1, \dots, N$).

Шаг 3. Вычислить параметры M_i из системы (17).

Шаг 4. Найти значения u_{ij} ($j = 0, 1, \dots, n_i; i = 0, 1, \dots, N$) по формуле (16).

Шаги 1 и 2 в этом алгоритме можно объединить. Вместо $2(N + 1)$ 3-диаг. систем (13) и (14) рассмотрим $N + 1$ 5-диаг. систем

$$\begin{aligned}
 u_{i,0} &= f_i, & D_{i0}^2 u_{i,0} &= M_i, \\
 24u[x_{i,j-2}, \dots, & x_{i,j+2}] - 2\left(\frac{p_i}{h_i}\right)u[x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}] &= 0, \\
 j &= 1, \dots, n_i - 1, & i &= 0, \dots, N. \quad (19) \\
 u_{i,n_i} &= f_{i+1}, & D_{i,n_i}^2 u_{i,n_i} &= M_{i+1},
 \end{aligned}$$

Вначале находим решения γ_{ij} и δ_{ij} этих систем с краевыми условиями $u_{i,0} = u_{i,n_i} = 0$ и $D_{i0}^2 u_{i,0} = 1$, $D_{i,n_i}^2 u_{i,n_i} = 0$ и $D_{i,0}^2 u_{i,0} = 0$, $D_{i,n_i}^2 u_{i,n_i} = 1$; т.е. решаем $2(N + 1)$ 5-диаг. систем вида (19). Затем выполняются шаги 3 и 4 и находится сеточное решение u_{ij} ($j = 0, 1, \dots, n_i; i = 0, 1, \dots, N$).

5. Параллельный алгоритм для 3-диагональных систем

Для простоты описания рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}x_1 &= d_1, \\Ax_i &\equiv a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\x_n &= d_n.\end{aligned}\tag{20}$$

Лемма 1. Пусть коэффициенты системы (20) удовлетворяют УСЛОВИЯМ

$$a_i > 0, \quad c_i > 0, \quad b_i > a_i + c_i + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.\tag{21}$$

Тогда эта система имеет единственное решение и

$$|x_i| \leq \max \left(|d_1|, |d_n|, \frac{1}{\varepsilon} \max_i |d_i| \right).\tag{22}$$

Рассмотрим три линейные системы:

$$\begin{aligned} Au_i &= 0, & i = 2, \dots, n-1, & & u_1 = 1, & & u_n = 0, \\ Av_i &= 0, & i = 2, \dots, n-1, & & v_1 = 0, & & v_n = 1, \\ Aw_i &= 1, & i = 2, \dots, n-1, & & w_1 = w_n = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Лемма 2. *Решение системы (20) может быть представлено в виде*

$$x_i = d_1 u_i + d_n v_i + w_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где u_i , v_i и w_i определены в (23). При выполнении неравенств (21) имеют место оценки

$$|u_i| \leq 1, \quad |v_i| \leq 1, \quad |u_i + v_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Пусть задано число $x_j^{(0)}$, $2 < j < n - 1$. Систему (20) разобьем на две части

$$\begin{aligned} Ax_i &= d_i, & i = 2, \dots, j-1, & \quad x_1 = d_1, \quad x_j = x_j^{(0)}, \\ Ax_i &= d_i, & i = j+1, \dots, n-1, & \quad x_j = x_j^{(0)}, \quad x_n = d_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Эти системы решим отдельно и обозначим полученное решение через $x_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$.

Используя j -е уравнение системы (20), положим

$$x_j^{(1)} = (d_j - a_j x_{j-1}^{(0)} - c_j x_{j+1}^{(0)}) / b_j. \quad (26)$$

Из (25) находим новое решение $x_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, n$ и т. д.

Имеем числовую последовательность $x_j^{(0)}, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(k)}$.

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = x_j.$$

На первой итерации решения системы (25) можно записать в виде

$$\begin{aligned}x_i^{(0)} &= d_1 u_i + x_j^{(0)} v_i + w_i, & i = 1, \dots, j, \\x_i^{(0)} &= x_j^{(0)} u_i + d_n v_i + w_i, & i = j, \dots, n,\end{aligned}$$

где u_i , v_i и w_i определяются аналогично (23).

Тогда

$$\begin{aligned}x_{j-1}^{(0)} &= d_1 u_{j-1} + x_j^{(0)} v_{j-1} + w_{j-1}, \\x_{j+1}^{(0)} &= x_j^{(0)} u_{j+1} + d_n v_{j+1} + w_{j+1}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (26), получаем

$$x_j^{(1)} = p x_j^{(0)} + q,$$

где

$$\begin{aligned} p &= -(a_j v_{j-1} + c_j u_{j+1})/b_j, \\ q &= \frac{1}{b_j} \left[d_j - a_j (d_1 u_{j-1} + w_{j-1}) - c_j (d_n v_{j+1} + w_{j+1}) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично имеем

$$x_j^{(2)} = p x_j^{(1)} + q = p^2 x_j^{(0)} + q(1 + p)$$

и в общем случае

$$x_j^{(k)} = p x_j^{(k-1)} + q = p^k x_j^{(0)} + q \sum_{r=0}^{k-1} p^r.$$

Используя лемму 2 и неравенства (21), получаем

$$|p| \leq \frac{a_j |v_{j-1}| + c_j |u_{j+1}|}{b_j} \leq \frac{a_j + c_j}{b_j} < 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = \frac{q}{1-p} = x_j. \quad (28)$$

Отметим, что в действительности для нахождения x_j достаточно провести только две итерации. Так как

$$x_j^{(1)} = px_j^{(0)} + q \quad \text{и} \quad x_j^{(2)} = px_j^{(1)} + q,$$

то получаем

$$p = \frac{x_j^{(2)} - x_j^{(1)}}{x_j^{(1)} - x_j^{(0)}}, \quad q = \frac{(x_j^{(1)})^2 - x_j^{(0)}x_j^{(2)}}{x_j^{(1)} - x_j^{(0)}}.$$

Параметры p и q можно также найти по формулам (27) а x_j из (28). Тогда для решения системы (20) имеем

$$\begin{aligned} x_i &= d_1 u_j + x_j v_j + w_j, & 2 \leq i \leq j-1, \\ x_i &= x_j u_j + d_n v_j + w_j, & j+1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Описанный алгоритм может быть обобщен на случай расщепления системы (20) на несколько подсистем. Пусть даны индексы i_m , $m = 1, \dots, p$, где $1 < i_1 < \dots < i_p < n$. Положим $x_j = x_j^{(0)}$, $j = i_1, \dots, i_p$ и расщепим систему (20) на p частей

$$\begin{aligned}
 Ax_i &= d_i, & 1 < i < i_1, & & x_1 = d_1, & & x_{i_1} = x_{i_1}^{(0)}, \\
 & \dots & & & & & \\
 Ax_i &= d_i, & i_m < i < i_{m+1}, & & x_{i_m} = x_{i_m}^{(0)}, & & x_{i_{m+1}} = x_{i_{m+1}}^{(0)}, \quad (29) \\
 & \dots & & & & & \\
 Ax_i &= d_i, & i_p < i < n, & & x_{i_p} = x_{i_p}^{(0)}, & & x_n = d_n.
 \end{aligned}$$

Решим эти уравнения прогонкой и найдем $x_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$. Затем повторно вычислим выбранные неизвестные

$$x_j^{(1)} = (d_j - a_j x_{j-1}^{(0)} - c_j x_{j+1}^{(0)}) / b_j, \quad j = i_1, \dots, i_p.$$

Из системы (29) находим новое решение $x_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, n$ и т. д..

Рассмотрим теперь параллельный алгоритм для системы (20), используя прямое применение принципа суперпозиции.

Пусть $x_{i_m} = y_{i_m}$, $m = 1, 2, \dots, p$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x_i &= d_1 u_i + y_1 v_i + w_i, & 1 < i < i_1, \\
 &\dots \\
 x_i &= y_m u_i + y_{m+1} v_i + w_i, & i_m < i < i_{m+1}, \\
 &\dots \\
 x_i &= y_p u_i + d_n v_i + w_i, & i_p < i < n,
 \end{aligned} \tag{30}$$

Запишем исходное уравнение из (20) для $i = i_m$

$$a_{i_m} x_{i_m-1} + b_{i_m} y_m + c_{i_m} x_{i_m+1} = d_{i_m}. \tag{31}$$

Согласно (30) имеем

$$\begin{aligned}
 x_{i_m-1} &= y_{m-1} u_{i_m-1} + y_m v_{i_m-1} + w_{i_m-1}, \\
 x_{i_m+1} &= y_m u_{i_m+1} + y_{m+1} v_{i_m+1} + w_{i_m+1},
 \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (31), получаем

$$\begin{aligned}\bar{a}_{i_m} y_{m-1} + \bar{b}_{i_m} y_m + \bar{c}_{i_m} y_{m+1} &= d_{i_m}, \quad m = 1, 2, \dots, p, \\ y_0 = d_1, \quad y_{p+1} &= d_n,\end{aligned}\tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{a}_{i_m} &= a_{i_m} u_{i_m-1}, \quad \bar{b}_{i_m} = b_{i_m} + a_{i_m} u_{i_m-1} + c_{i_m} u_{i_m+1}, \\ \bar{c}_{i_m} &= c_{i_m} v_{i_m+1}, \quad \bar{d}_{i_m} = d_{i_m} - a_{i_m} w_{i_m-1} - c_{i_m} w_{i_m+1}.\end{aligned}$$

Покажем, что если условия (21) для исходной системы (20) выполнены, то система (20) имеет единственное решение. Из (21) и определения величин u_i и v_i имеем

$$0 \leq u_i \leq 1, \quad 0 \leq v_i \leq 1, \quad 0 \leq u_i + v_i \leq 1.$$

Следовательно, $\bar{a}_{i_m} > 0$, $\bar{c}_{i_m} > 0$ и

$$\bar{b}_{i_m} = b_{i_m} - a_{i_m} - c_{i_m} + a_{i_m}(1 - v_{i_m-1}) + c_{i_m}(1 - u_{i_m+1}) > \varepsilon.$$

Матрица системы (32) имеет диагональное преобладание

$$\bar{b}_{i_m} - \bar{a}_{i_m} - \bar{c}_{i_m} = b_{i_m} - a_{i_m} - c_{i_m} + a_{i_m}(1 - u_{i_m-1} - v_{i_m-1}) + c_{i_m}(1 - u_{i_m+1} - v_{i_m+1}) > \varepsilon.$$

Следовательно, система (32) имеет единственное решение.

Чтобы найти решение системы (20), нужно выполнить следующие шаги:

- а) найти $u_i, v_i, w_i, i = 0, 1, \dots, n$;
- б) решить систему (32) и найти $y_m, m = 1, 2, \dots, p$;
- с) вычислить x_i по формулам (30).

На шагах а) и с) можно применить $p + 1$ процессоров. Система (32) наследует свойства системы (20). На шаге б) используем обычную 3-точечную прогонку.

6. Случай дискретного кубического сплайна

Положим $p_i = 0$ для всех i . Тогда решение системы (6) является кубическим многочленом на $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} u_i(x) = & u_i(x_i)(1-t) + u_i(x_{i+1})t + \\ & + M_i[\Phi_i(x) - \Phi_i(x_i)(1-t)] + \\ & + M_{i+1}[\Psi_i(x) - \Psi_i(x_{i+1})t], \quad i = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (33)$$

где $M_j = D_{j0}^2 u_i(x_j)$, $j = i, i+1$, $t = (x - x_i)/h_i$.

Здесь функции Φ_i и Ψ_i удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_{i+1} - h_{i,n_i-1}) = \Phi_i(x_{i+1}) = \Phi_i(x_{i+1} + h_{i,n_i}) = 0, \\ \Psi_i(x_i - h_{i,-1}) = \Psi_i(x_i) = \Psi_i(x_i + h_{i0}) = 0, \\ D_{i0}^2 \Phi_i(x_i) = 1, \quad D_{i,n_i}^2 \Psi_i(x_{i+1}) = 1 \end{aligned}$$

и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \Phi_i(x) &= \frac{(x_{i+1} - x - h_{i,n_i-1})(x_{i+1} - x)(x_{i+1} - x + h_{i,n_i})}{2(3h_i + e_{i,n_i} - e_{i0})}, \\
 \Psi_i(x) &= \frac{(x - x_i + h_{i,-1})(x - x_i)(x - x_i - h_{i0})}{2(3h_i + e_{i,n_i} - e_{i0})}, \\
 e_{ij} &= h_{ij} - h_{i,j-1}, \quad j = 0, n_i.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Согласно (33) и (34) полагаем

$$\begin{aligned}
 \gamma_i(x) &= \Phi_i(x) - \Phi_i(x_i)(1 - t), \\
 \delta_i(x) &= \Psi_i(x) - \Psi_i(x_{i+1})t.
 \end{aligned}$$

Тогда в (16) имеем $\gamma_{ij} = \gamma_i(x_{ij})$ и $\delta_{ij} = \delta_i(x_{ij})$ для $j = 0, \dots, n_i$.

По формулам (31) получаем

$$\begin{aligned}
 r_{i1} &= \frac{h_i}{2} + \frac{2\delta_{i1}}{h_{i0}} = \frac{h_i}{2} - \frac{2}{h_i} \Psi_i(x_{i+1}) = \\
 &= \frac{h_i(h_i + e_{i0} + e_{i,n_i}) + 2h_{i0}h_{i,-1}}{2(3h_i + e_{i,n_i} - e_{i0})}, \\
 r_{i,n_i-1} &= \frac{h_i}{2} + \frac{2\gamma_{i,n_i-1}}{h_{i,n_i-0}} = \frac{h_i}{2} - \frac{2}{h_i} \Phi_i(x_i) = \\
 &= \frac{h_i(h_i - e_{i0} - e_{i,n_i}) + 2h_{i,n_i-1}h_{i,n_i}}{2(3h_i + e_{i,n_i} - e_{i0})}.
 \end{aligned}$$

Если теперь $\max(|e_{i0}|, |e_{i,n_i}|) \leq h_i/2$ для всех i , то $r_{i1} > 0$ и $r_{i,n_i-1} > 0$ и система (17) имеет диагональное преобладание. Следовательно, дискретный кубический сплайн существует и единственен.

7. Случай квазиравномерной сетки

Рассмотрим сетку, равномерную отдельно на $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N$, т. е. в. $h_{ij} = \tau_i$ для $j = -1, 0, \dots, n_i$.

Здесь уравнения (6) принимают вид

$$\left[\Lambda_i^2 - \left(\frac{p_i}{h_i} \right) \Lambda_i \right] u_{ij} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (35)$$

где

$$\Lambda_i u_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{\tau_i^2}.$$

Аппроксимация условий гладкости (7) дает соотношения

$$\begin{aligned} u_{i-1, n_{i-1}} &= u_{i0}, \\ \frac{u_{i-1, n_{i-1}+1} - u_{i-1, n_{i-1}-1}}{2\tau_{i-1}} &= \frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2\tau_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (36) \\ \Lambda_{i-1} u_{i-1, n_{i-1}} &= \Lambda_i u_{i0}. \end{aligned}$$

Условия (8) и (9) преобразуются к виду

$$u_{i0} = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad u_{i,n_i} = f_{N+1}, \quad (37)$$

$$\Lambda_0 u_{00} = f_0'', \quad \Lambda_N u_{N,n_N} = f_{N+1}''. \quad (38)$$

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разностные уравнения (13) принимают вид

$$\begin{aligned} M_{i0} &= M_i, \\ \frac{M_{i,j-1} - 2M_{ij} + M_{i,j+1}}{\tau_i^2} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 M_{ij} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_i - 1, \\ M_{i,n_i} &= M_{i+1}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $M_{ij} = \Lambda_i u_{ij}$.

Система (39) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} M_{ij} &= M_i(x_{ij}), \quad x_{ij} = x_i + j\tau_i, \quad j = 0, 1, \dots, n_i, \\ M_i(x) &= M_i \frac{\sinh k_i(1-t)}{\sinh(k_i)} + M_{i+1} \frac{\sinh(k_i t)}{\sinh(k_i)}, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}. \end{aligned} \quad (40)$$

Параметры k_i являются решениями трансцендентных уравнений

$$2n_i \sinh \frac{k_i}{2n_i} = p_i, \quad p_i \geq 0,$$

т. е.

$$k_i = 2n_i \ln \left(\frac{p_i}{2n_i} + \sqrt{\left(\frac{p_i}{2n_i}\right)^2 + 1} \right) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Система (14) принимает вид

$$\begin{aligned} u_{i0} &= f_i, \\ \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{\tau_i^2} &= M_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i, \\ u_{i,n_i} &= f_{i+1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для всякой последовательности M_{ij} , $j = 0, 1, \dots, n_i$ система (41) имеет единственное решение

$$u_{ij} = U_i(x_{ij}), \quad j = -1, 0, \dots, n_i + 1,$$

где

$$U_i(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t + \varphi_i(1-t)h_i^2 M_i + \varphi_i(t)h_i^2 M_{i+1}, \quad (42)$$

$$\varphi_i(t) = \frac{\sinh(k_i t) - t \sinh(k_i)}{p_i^2 \sinh(k_i)}.$$

Заметим, что (40) и (42) связаны формулой

$$M_i(x) = \Lambda_i U_i(x) = \Lambda_i \varphi_i(1-t)h_i^2 M_i + \Lambda_i \varphi_i(t)h_i^2 M_{i+1}.$$

Система (17) может быть записана в виде

$$M_0 = f_0'',$$

$$-\frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} M_{i-1} + \left(\frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} - \frac{\gamma_{i,1}}{\tau_i} \right) M_i -$$

$$-\frac{\delta_{i,1}}{\tau_i} M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (43)$$

$$M_{N+1} = f_{N+1}''.$$

Согласно (42) имеем

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= -\frac{\delta_{i,1}}{\tau_i} = -\frac{1}{\tau_i} \varphi_i(t_{i1}) h_i^2 = -n_i h_i \varphi_i\left(\frac{1}{n_i}\right) = \\
 &= -h_i \frac{n_i \sinh(k_i/n_i) - \sinh(k_i)}{p_i^2 \sinh(k_i)} = -\frac{\gamma_{i,n_i-1}}{\tau_i}, \\
 \beta_i &= \frac{\tau_i}{2} - \frac{\gamma_{i,1}}{\tau_i} = \frac{\tau_i}{2} - \frac{1}{\tau_i} \varphi_i(1 - t_{i1}) h_i^2 = \\
 &= h_i \left[\frac{1}{2n_i} - n_i \varphi_i\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \right] = \frac{\tau_i}{2} - \frac{\delta_{i,n_i-1}}{\tau_i}.
 \end{aligned}$$

Функция φ_i удовлетворяет условиям

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \Lambda_i \varphi_i(0) = 0, \quad \Lambda_i \varphi_i(1) = h_i^{-2}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_i\left(-\frac{1}{n_i}\right) + \varphi_i\left(\frac{1}{n_i}\right) = 0, \quad \varphi_i\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \varphi_i\left(1 + \frac{1}{n_i}\right) = \frac{1}{n_i^2}. \quad (44)$$

Используя второе из этих соотношений, имеем

$$\beta_i = h_i \frac{n_i \cosh(k_i) \sinh(k_i/n_i) - \sinh(k_i)}{p_i^2 \sinh(k_i)}.$$

Применяя степенное разложение гиперболических функций в выражениях для α_i и β_i , получаем

$$\beta_i \geq 2\alpha_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{для всех} \quad n_i > 1, \quad p_i \geq 0.$$

8. Параллельный алгоритм для 5-диагональной системы

Для квазиравномерной сетки система (35)–(38) после исключения неизвестных $u_{i,-1}$, u_{i,n_i+1} , $i = 0, \dots, N$ принимает вид

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \tag{45}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_{01}, \dots, u_{0, n_0-1}, u_{11}, \dots, u_{21}, \dots, u_{N1}, \dots, u_{N, n_N-1})^T, \\ \mathbf{b} &= (-(a_0 + 2)f_0 - \tau_0^2 f_0'', -f_0, 0, \dots, 0, -f_1, -\gamma_{0, n_0-1} f_1, \\ &\quad - \gamma_{1,1} f_1, -f_1, 0, \dots, 0, -f_{N+1}, -(a_N + 2)f_{N+1} - \tau_N^2 f_{N+1}'')^T\end{aligned}$$

при

$$\begin{aligned}\gamma_{i-1, n_{i-1}-1} &= a_{i-1} + 2(\rho_i - 1)\rho_i^{-1}, \\ \gamma_{i,1} &= a_i + 2(1 - \rho_i), \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Из системы (47) удалим уравнения, ближайšie к точкам задания данных x_i . Зададим величины $u_{i1}^{(0)}$, $u_{i, n_i-1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, N$, соответствующие удаленным уравнениям.

Система (47) расщепляется на $N + 1$ подсистем

$$\begin{aligned}
 u_{i0} &= f_i, & u_{i1} &= u_{i1}^{(0)}, \\
 u_{i,j-2} + a_i u_{i,j-1} + b_i u_{ij} + a_i u_{i,j+1} + u_{i,j+2} &= 0, \\
 j &= 2, \dots, n_i - 2, \\
 u_{i,n_i-1} &= u_{i,n_i-1}^{(0)}, & u_{i,n_i} &= f_{i+1} \quad .
 \end{aligned} \tag{46}$$

Перепишем систему (48) в виде

$$\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i,$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i &= (u_{i2}, u_{i3}, \dots, u_{i,n_i-2})^T, \\
 \mathbf{f}_i &= (-a_i u_{i1}^{(0)} - f_i, -u_{i1}^{(0)}, 0, \dots, 0, -u_{i,n_i-1}, -a_i u_{i,n_i-1} - f_{i+1})^T.
 \end{aligned}$$

Матрица \mathbf{A}_i является симметрической. Заметим, что

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{C}_i + \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{B}_i^2 - \omega_i \mathbf{B}_i,$$

где

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\lambda_j(\mathbf{B}_i) = -2 \left(1 - \cos \frac{j\pi}{m_i} \right), \quad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad m_i = n_i - 2,$$

то имеем

$$\lambda_j(\mathbf{C}_i) = 4 \left(1 - \cos \frac{j\pi}{m_i} \right)^2 + 2\omega_i \left(1 - \cos \frac{j\pi}{m_i} \right), \quad j = 1, \dots, m_i - 1,$$

Собственные числа матрицы \mathbf{D}_i суть 0 и 1.

Согласно следствию из теоремы Куранта-Фишера

$$\lambda_j(A_i) \geq \lambda_j(C_i) \geq 4 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m_i}\right)^2 + 2\omega_i \left(1 - \cos \frac{\pi}{m_i}\right).$$

Следовательно, A_i – положительно определенная матрица и 5-диагональная система имеет единственное решение.

Кроме того по теореме Гершгорина $\lambda_j(A_i) \leq 16 + 4\omega_i$. Имеем оценку сверху для числа обусловленности A_i , типичную для конечно-разностных методов:

$$\begin{aligned} \|A_i\|_2 \|A_i^{-1}\|_2 &\leq \frac{16 + 4\left(\frac{p_i}{m_i}\right)^2}{4\left(1 - \cos \frac{\pi}{m_i}\right)^2 + 2\left(\frac{p_i}{m_i}\right)^2\left(1 - \cos \frac{\pi}{m_i}\right)} \approx \\ &\approx \frac{16 + 4\left(\frac{p_i}{m_i}\right)^2}{\left(\frac{1}{m_i}\right)^4 [\pi^4 + (\pi p_i)^2]}. \end{aligned}$$

Получаем решение $u_{ij}^{(0)}$, $j = 0, \dots, n_i$, $i = 0, \dots, N$.

Используя вычеркнутые уравнения, пересчитываем величины $u_{i1}^{(0)}$, $u_{i,n_i-1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, N$. Для $i = 1, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned} u_{i-1,n_{i-1}-1}^{(1)} &= \Delta_i^{-1} \left(\eta_{i1} F_{i1}^{(0)} - \delta_{i-1,n_{i-1}-1} F_{i2}^{(0)} \right), \\ u_{i1}^{(1)} &= \Delta_i^{-1} \left(-\delta_{i1} F_{i1}^{(0)} + \eta_{i-1,n_{i-1}-1} F_{i2}^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} F_{i1}^{(0)} &= -\gamma_{i-1,n_{i-1}-1} f_i - a_{i-1} u_{i-1,n_{i-1}-2}^{(0)} - u_{i-1,n_{i-1}-3}^{(0)}, \\ F_{i2}^{(0)} &= -\gamma_{i1} f_i - a_i u_{i2}^{(0)} - u_{i3}^{(0)}, \\ \Delta_i &= b_{i-1} b_i + (b_i - b_{i-1})(1 - \rho_i)(1 + \rho_i)^{-1} - 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Повторно решая систему (48), находим решение $u_{ij}^{(1)}$ для $j = 0, \dots, n_i$, $i = 0, \dots, N$, и т. д.

9. Выбор параметров формы

При выборе параметров формы была использована формула

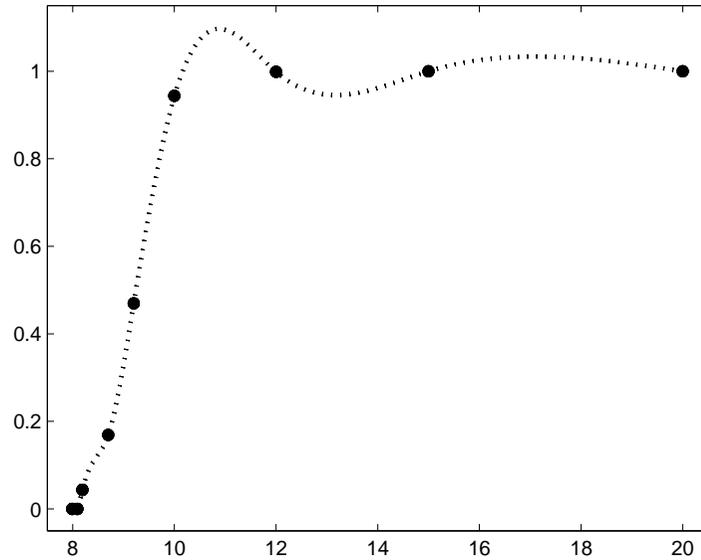
$$p_i = \left[1 + c_i \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right)^2 \right]^{\alpha_i} - 1, \quad c_i \geq 0, \quad \alpha_i \geq 0,$$

т.е. параметры выбирались пропорциональными дискретному градиенту от интерполируемых данных.

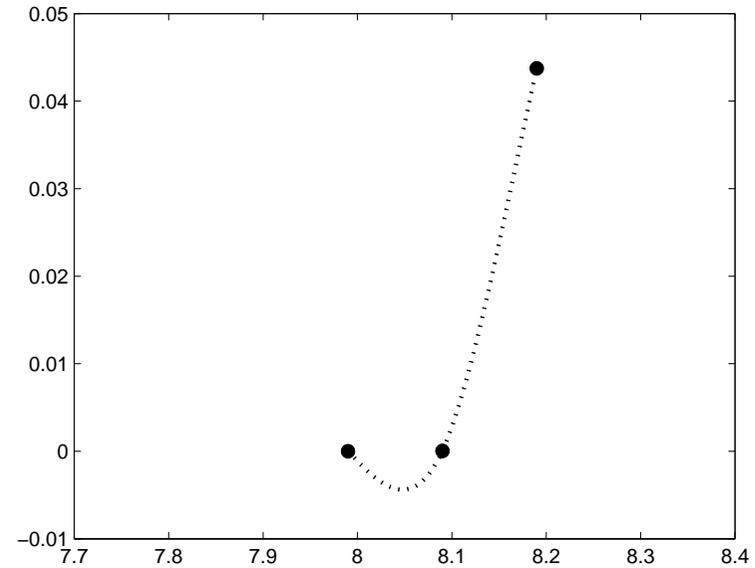
Использовались также 3-точечные формулы аппроксимации 1-й производной:

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_i &= \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \tilde{y}'_0 &= (1 + \mu_1) \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \mu_1 \frac{y_2 - y_1}{h_1}, \\ \tilde{y}'_{N+1} &= -\lambda_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}} + (1 + \lambda_N) \frac{y_{N+1} - y_N}{h_N}. \end{aligned}$$

10. Графические примеры

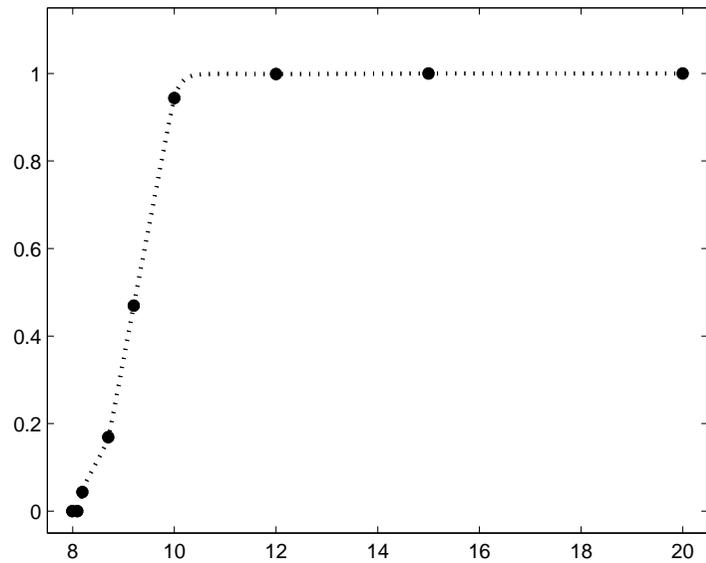


(a)

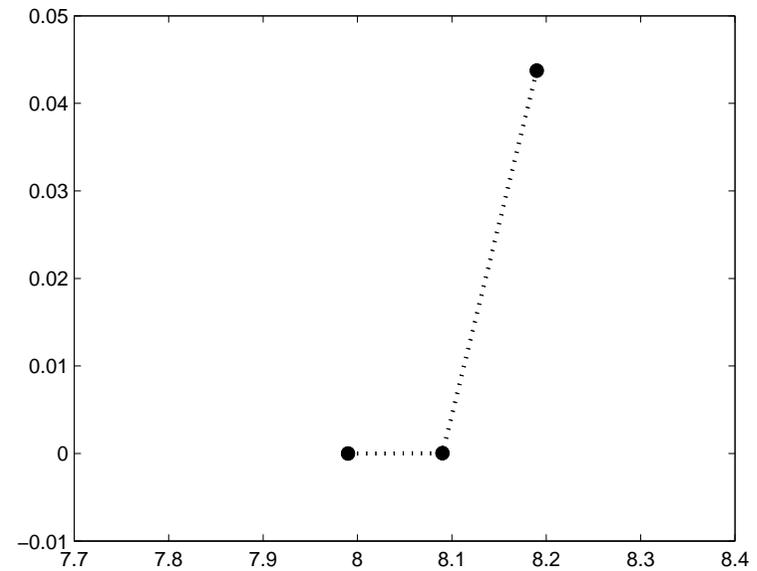


(b)

Рис. 1. Радиохимические данные. (a) Интерполяция дискретным кубическим сплайном ($c_i = 0$). (b) Увелич. левого нижнего угла.

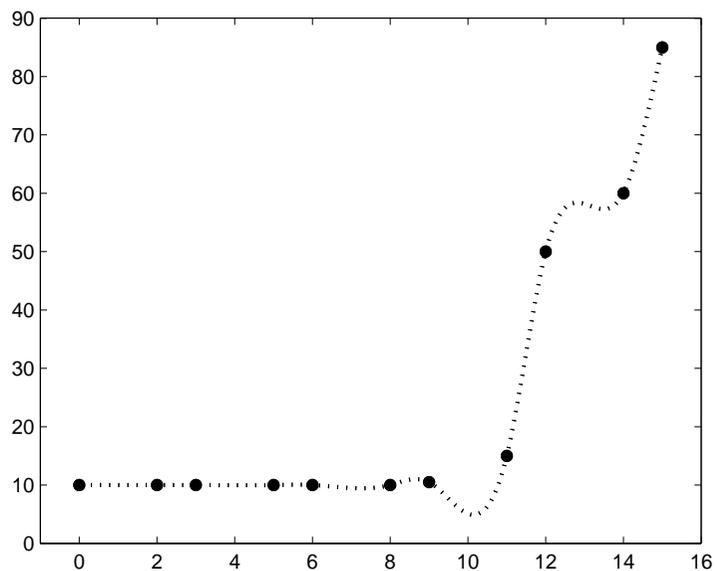


(a)

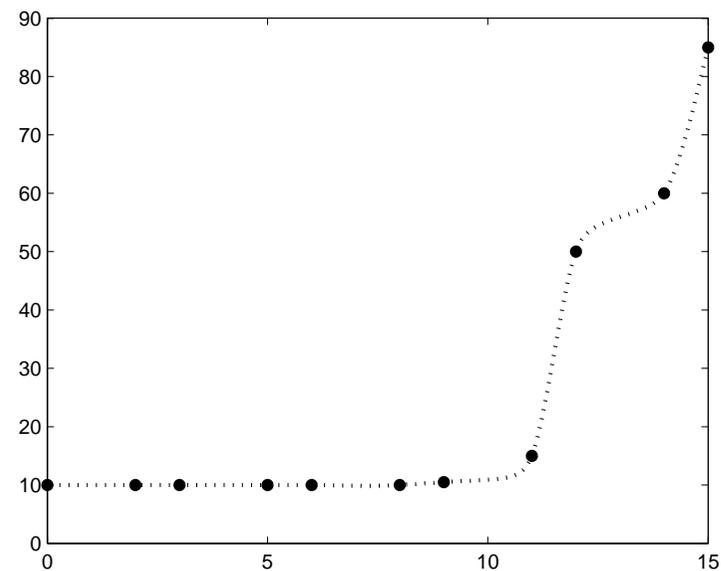


(b)

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, при $c_i = 300$, $\alpha_i = 4$.

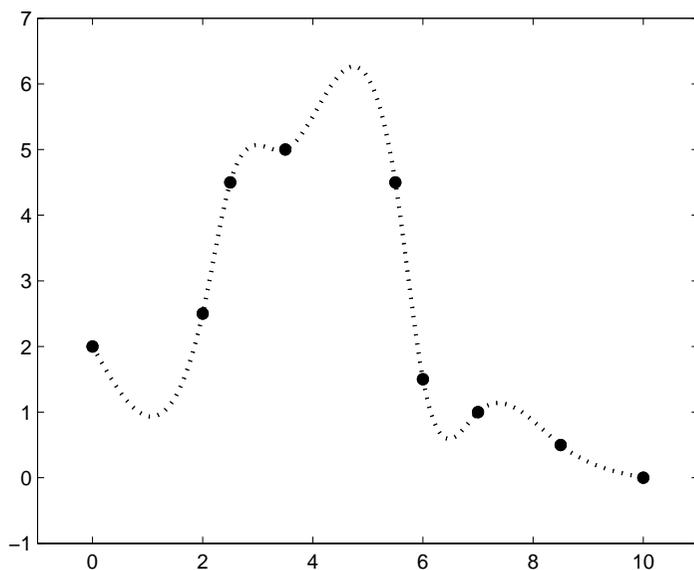


(a)

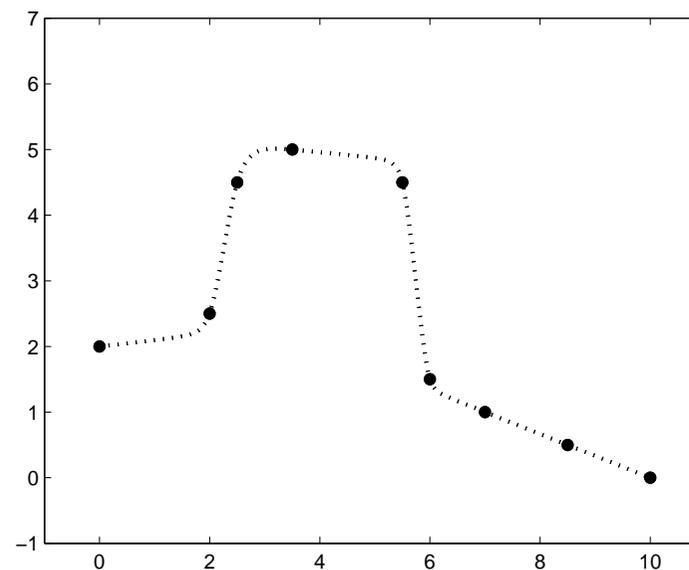


(b)

Рис. 3. Данные Акимы. (a) Интерполяционный дискретный кубический сплайн ($c_i = 0$). (b) Дискретный гиперболический сплайн ($c_i = 1, \alpha_i = 0,03$).

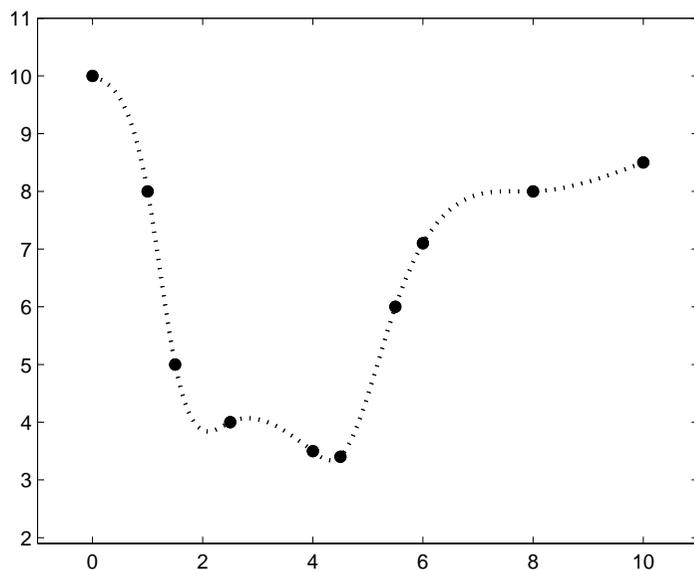


(a)

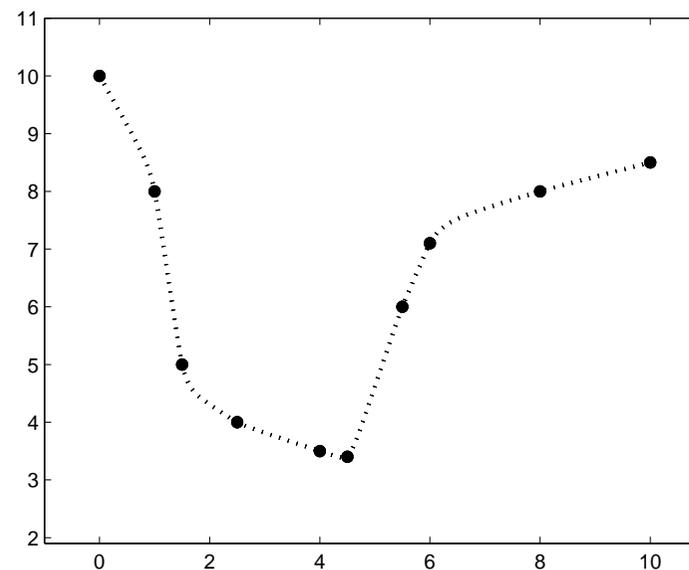


(b)

Рис. 4. Данные Шпета. (a) Интерполяционный дискретный кубический сплайн ($c_i = 0$). (b) Дискретный гиперболический сплайн ($\alpha_5 = 2,5$ и $\alpha_i = 0,3$ для других i).

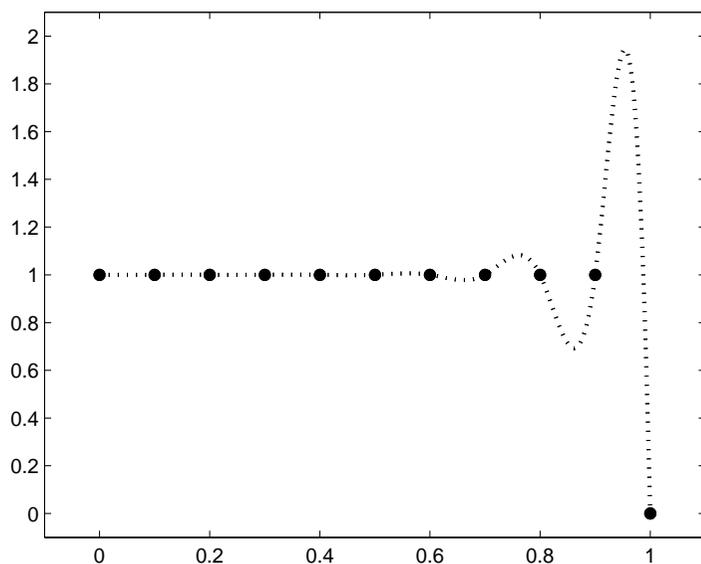


(a)

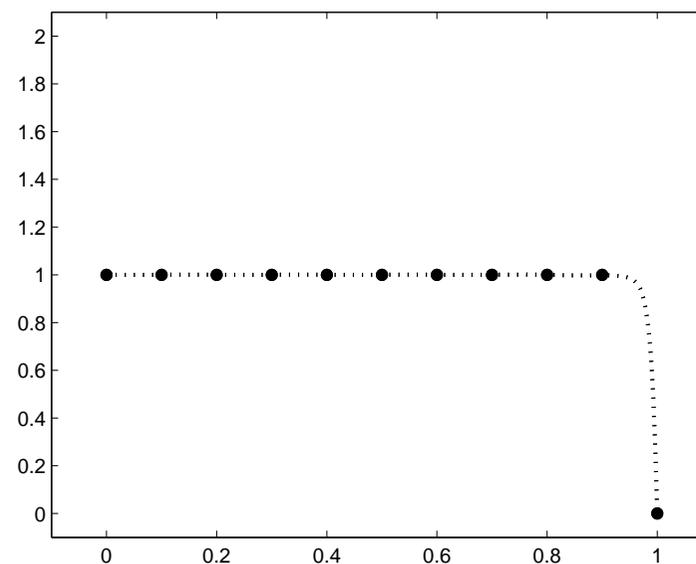


(b)

Рис. 5. Интерполяция данных Шпета. (a) График дискретного кубического сплайна ($c_i = 0$). (b) График дискретного гиперболического сплайна ($c_i = 1$, $\alpha_8 = 0, 1$ и $\alpha_i = 0, 1$ для других i).



(a)

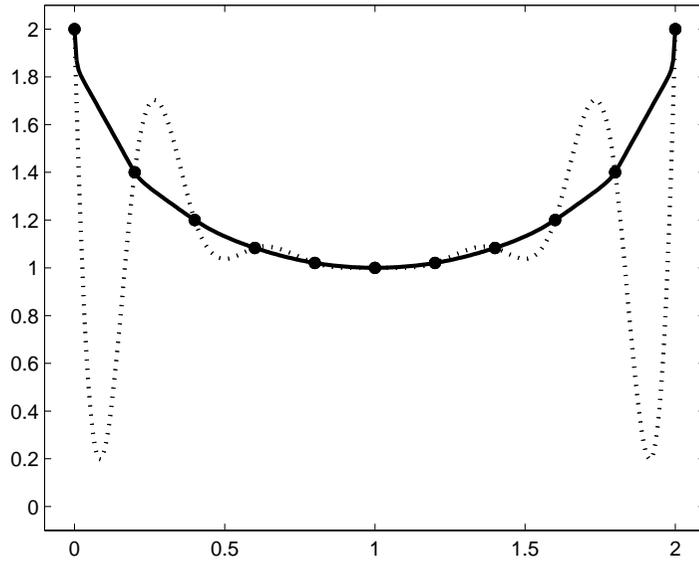


(b)

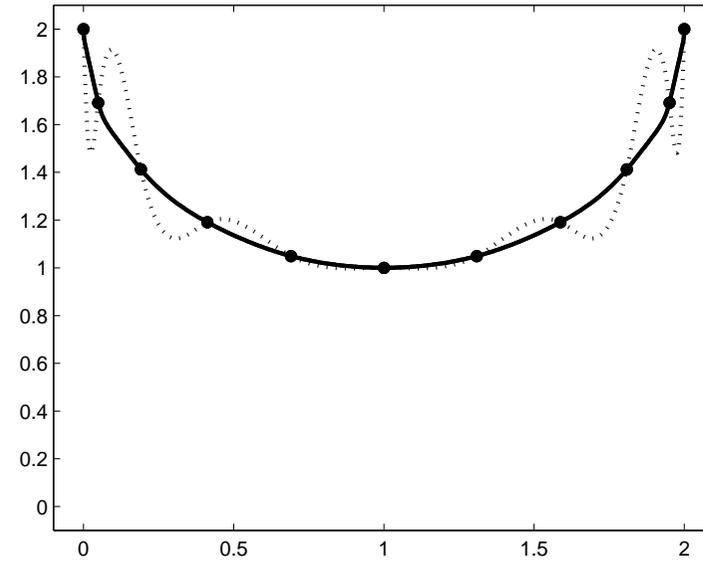
Рис. 6. Данные типа экспоненциального пограничного слоя.

(a) График дискретного кубического сплайна ($c_i = 0$).

(b) Дискретный гиперболический сплайн ($c_i = 1$, $\alpha_i = 0,023$).



(a)

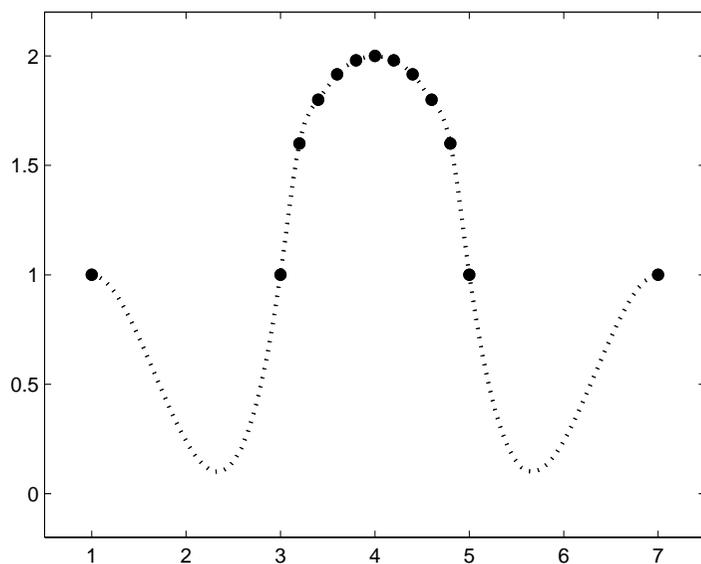


(b)

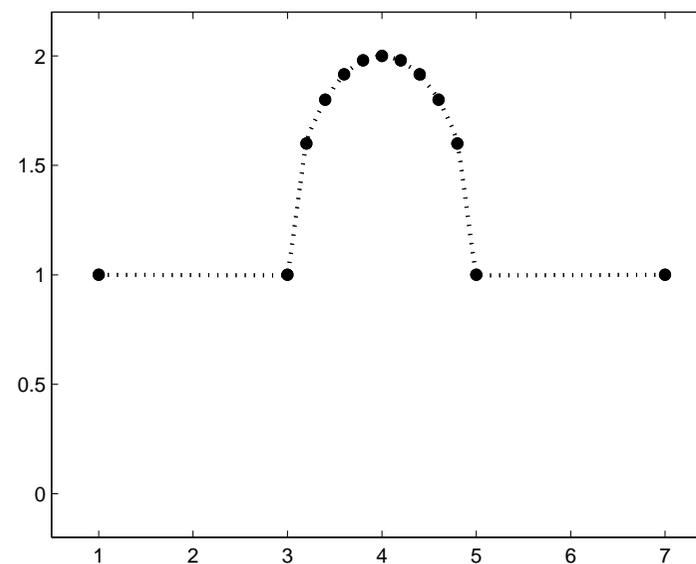
Рис. 7. Интерполяция данных на полуокружности:

(a) по x -координате ($c_i = 1, \alpha_i = 0,5$),

(b) по длине хорд ($c_i = 1, \alpha_i = 0,5$).

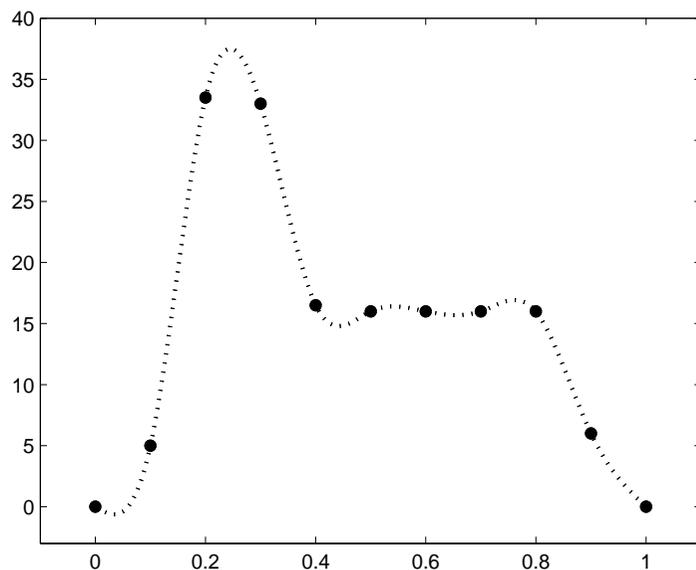


(a)

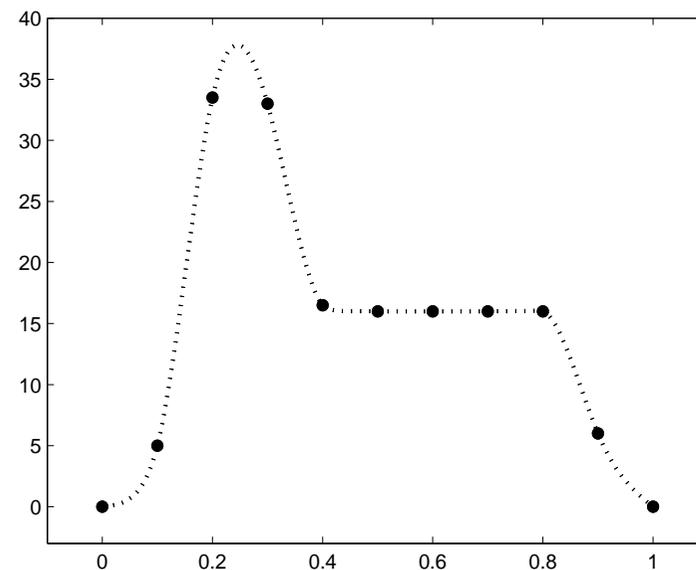


(b)

- Рис. 8. Сопряжение полуокружности и отрезков прямой.
- (a) Интерполяция дискрет. кубическим сплайном ($c_i = 0$).
- (b) То же при $c_i = 1$, $\alpha_0 = \alpha_{11} = 4$ и $\alpha_i = 1,5$ для других i .



(a)



(b)

Рис. 9. Модельные ракетные данные.

(a) Интерполяция дискретным кубическим сплайном ($c_i = 0$).

(b) То же при $c_i = 1$, $\alpha_5 = \alpha_9 = 1$ и $\alpha_i = 0,02$ для других i .

Избранные работы автора по теме доклада

1. *Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами*, М.: Физматлит. 2006.
2. О построении интерполяционных гиперболических сплайнов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Том 48. № 4. С. 570–579.
3. Алгоритмы интерполяции гиперболическими сплайнами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Том 51. № 5. С. 771–790.
4. Parallel mesh methods for tension splines. J. Comput. Appl. Math. 2011. In press.

Исследование было поддержано Российским
Фондом Фундаментальных Исследований
по проекту № 09-01-00186

Благодарю за внимание