# Слабое решение интервальной модели Неймана

Латипова А.Т., к.ф.м.н., alfas_chel@mail.ru,
Панюков А.В. , д.ф.м.н, a_panyukov@mail.ru,
Южно-Уральский госуниверситет

# Точечная модель Неймана

$$(A, B) \quad n \times m$$

## Нахождение параметров равновесия

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A,B)} \lambda,$$

$$D(A,B) = \left\{ (\lambda, x, w) \left| \begin{array}{c} (A - \lambda B)x \le 0, (A - \lambda B)^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, x \ge 0,\ w \ge 0,\ \lambda \ge 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (1)$$

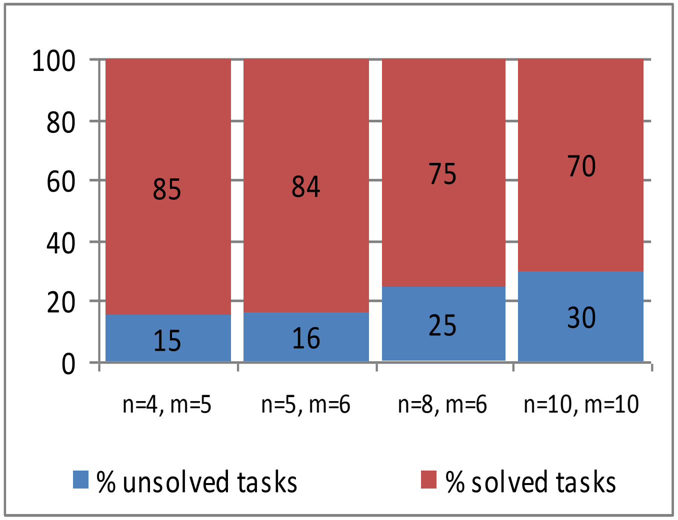
Latipova, A.T. Numerical techniques for finding equilibrium in von Neumann's model /A.T. Latipova, A.V. Panyukov // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2008, Vol. 48, No. 11, pp. 1999–2006.

Свидетельство Роспатента о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2007613463 / Программа оптимизации бюджета продаж при ценовой диверсификации / А.Т. Латипова, А.В. Панюков. – №2007612433, поступила 19.06.2007, зарегистр. 15.08.2007. Бюл. №4(61) (I ч).

# Нахождение параметров равновесия

$$u(\lambda) = \min_{x:(x,e^m)=1,\, x\ge 0} \max_{i=1,2,\dots n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \lambda b_{ij}) x_j$$

$$v(\lambda) = \max_{p:(p,e^n)=1,\, p\ge 0} \min_{j=1,2,\dots m} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lambda b_{ij}) p_i$$




$$\min\left\{u : (A - \lambda B)x \le u, \left(x, e^m\right) = 1,\ x \ge 0\right\} \quad (2)$$

$$\max\left\{v : (A - \lambda B)^T p \ge v, \left(p, e^n\right) = 1,\ p \ge 0\right\} \quad (3)$$

# Нахождение параметров равновесия

**Теорема 1.** *Пусть* $(A, B)$ - *модель Неймана, и пусть все элементы матрицы положительны. Пусть* $\Gamma_C$ - *матричная игра с платежной матрицей* $C = [a_{ij} / b_{ij}]$ $(i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m)$ *и пусть* $\lambda^*$ *значение игры* $\Gamma_C$. *Тогда число Неймана* $\underline{\lambda}$ *и число Фробениуса* $\overline{\lambda}$ *данной модели Неймана равны* $\lambda^*$.

# Нахождение параметров равновесия

**Теорема 2.** *Пусть* $(A, B)$ *- модель Неймана, и пусть все элементы матрицы положительны. Пусть* $\Gamma_C$ *- матричная игра с платежной матрицей* $C = [b_{ij} / a_{ij}]$ $(i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m)$ *и пусть* $\mu^*$ *значение игры* $\Gamma_C$. *Тогда число Неймана* $\underline{\lambda}$ *и число Фробениуса* $\overline{\lambda}$ *данной модели Неймана равны* $1/\mu^*$.

# Нахождение параметров равновесия

***Теорема 3.*** *Пусть* $\Gamma$ - *матричная игра с платежной матрицей* $(A-\lambda B)^T$, *и* $x^*$, $p^*$ - *оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно. Пусть* $u^*$ - *значение игры* $\Gamma$. *Тогда* $(u^*, x^*)$ *и* $(u^*, p^*)$ *являются оптимальными решениями задач (2) и (3) соответственно.*

# Интервальная модель Неймана

$$\mathbf{A}=\left\{\left[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}\right]\right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,m}} \qquad \mathbf{B}=\left\{\left[\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}\right]\right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,m}}$$

***Теорема 4.*** *Если* $\left(\lambda^*,x^*,w^*\right)$ - *положение равновесия для модели Неймана* $(\operatorname{mid}\mathbf{A},\operatorname{mid}\mathbf{B})$, *то для любой точечной модели Неймана* $(\tilde{A},\tilde{B})$: $\left(\tilde{A}=\boldsymbol{\beta}_1\operatorname{mid}\mathbf{A},\ \tilde{B}=\boldsymbol{\beta}_2\operatorname{mid}\mathbf{B}\right)$, *тройка* $(\lambda^*\beta_1/\beta_2,\ x^*,\ w^*)$ *является положением равновесия.*


Панюков, А.В. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных / А.В. Панюков, А.Т. Латипова // Вестник УГАТУ. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2008. – Вып. 10. – №2 (27). – С.150 – 154.

Panyukov, A.V. Finding Equilibrium in Von Neuamnn’s Model / A.V. Panyukov, A.T. Latipova // Proceedings of the 13 IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (June 3-5, 2009, Moscow) – Moscow: Elsevier Ltd. - p.p. 395-399.

# Интервальная неопределенность

***Теорема 5.*** *Если* $(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w})$ *является положением равновесия модели Неймана* $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, *а* $(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w})$ *является положением равновесия модели Неймана* $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, *то число Фробениуса* $\tilde{\lambda}$ *для любой точечной модели Неймана* $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{B}$, *принадлежит интервалу* $[\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$.

Пример с неустойчивыми данными

## Пример интервальной модели с устойчивыми параметрами

$$(A, B): \left[ \begin{array}{c} n = m = 2; \\ a_{21} + a_{22} \le \lambda^* (b_{21} + b_{22}); \\ a_{11} = b_{11};\ a_{12} = b_{12}; \\ \{\lambda^*,\ (x^*)^T = (0,5; 0,5),\ (w^*)^T = (1; 0)\} \end{array} \right]$$

## Пример интервальной модели с неустойчивыми параметрами

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Назад

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda} = 0,4 \quad \underline{x}^T = (0,2857; 0,7143) \quad \underline{w}^T = (0;1)$$

$$\overline{\lambda} = 0,75 \quad \overline{x}^T = (0;1) \quad \overline{w}^T = (0;1)$$

$$\tilde{\lambda} = 0,5 \quad \tilde{x}^T = (0;1) \quad \tilde{w}^T = (1;0)$$

# Сильное и слабое решение интервальной модели

***Сильным положением равновесия*** для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ назовем пару векторов $(x_s, w_s)$ такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A},\tilde{B}):(\tilde{A}\in\mathbf{A},\ \tilde{B}\in\mathbf{B})$, существует положение равновесия $(\tilde{\lambda}, x_S, w_S)$.

***Слабым положением равновесия*** для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ назовем пару векторов $(x', w')$ такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A},\tilde{B}):(\tilde{A}\in\mathbf{A},\ \tilde{B}\in\mathbf{B})$, выполняются ограничения

$$\begin{cases}(\tilde{A}-\lambda\tilde{B})x'\le 0;\ (\tilde{A}-\lambda\tilde{B})^T w'\ge 0;\\ (x',e^m)=1;\ (w',e^n)=1;\ x',w',\lambda\ge 0.\end{cases}$$

# Слабое решение интервальной модели

***Теорема 6.*** *Если для пары векторов* $(x'', w'')$ *разрешима система ограничений:*

$$\begin{cases} (\overline{\mathbf{A}} - \underline{\boldsymbol{\lambda}}\underline{\mathbf{B}})x'' \le 0; \; (\underline{\mathbf{A}} - \overline{\boldsymbol{\lambda}}\overline{\mathbf{B}})^T w'' \ge 0; \\ (x'', e^m) = 1; \; (w'', e^n) = 1; \; x'', w'' > 0; \end{cases}$$

*то* $(x'', w'')$ *является слабым решением интервальной модели Неймана* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

***Теорема 7.*** *Пусть* $(x', w')$ - *слабое решение интервальной модели Неймана* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. *Если для точечной модели Неймана* $(\tilde{A}, \tilde{B}) : (\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{B})$; $\boldsymbol{\lambda}' = \max\{\boldsymbol{\lambda} \,|\, (\tilde{A} - \boldsymbol{\lambda}\tilde{B})x' \le 0; \; (\tilde{A} - \boldsymbol{\lambda}\tilde{B})^T w' \ge 0\}$ *, то* $\boldsymbol{\lambda}' \in [\underline{\boldsymbol{\lambda}}_H; \overline{\boldsymbol{\lambda}}]$, *где* $\underline{\boldsymbol{\lambda}}_H$ - *это число Неймана для модели* $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$.

# Изменение числа Фробениуса

***Теорема 8.*** *Пусть* $(x^*, w^*)$ - *прямой и двойственный векторы Фробениуса для двух точечных моделей Неймана* $(\breve{A}, \breve{B})$ *и* $(\hat{A}, \hat{B})$ *таких, что* $\hat{a}_{ij} - \breve{a}_{ij} = \Delta a_{ij} \geq 0$, $\hat{b}_{ij} - \breve{b}_{ij} = \Delta b_{ij} \geq 0$, $i = (\overline{1, n})$, $j = (\overline{1, m})$ . *Пусть число Фробениуса модели* $(\breve{A}, \breve{B})$ *равно* $\breve{\lambda}$, *а для модели* $(\hat{A}, \hat{B})$ *оно равно* $\hat{\lambda}$, $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \breve{\lambda}$. *Тогда если для модели* $(\breve{A}, \breve{B})$ *положение равновесия* $(\breve{\lambda}, x^*, w^*)$ *является невырожденным, то*

$$\Delta\lambda = \frac{\left(w^*\right)^T (\Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B) x^*}{\left(w^*\right)^T (\breve{B} + \Delta_B) x^*}.$$

# Изменение числа Фробениуса 2

***Теорема 9.*** *Пусть* $(x_s, w_s)$ - *сильное решение для интервальной модели Неймана* $\left([\breve{A},\hat{A}],[\breve{B},\hat{B}]\right)$, $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \breve{\lambda}$.

*Пусть имеется точечная модель Неймана* $(\tilde{A},\tilde{B})$: $\tilde{A} = \breve{A} + k\Delta_A$, $\tilde{B} = \breve{B} + k\Delta_B$, $k \in [0;1]$; *её число Фробениуса равно* $\tilde{\lambda}$. *Тогда если для модели* $(\breve{A},\breve{B})$ *положение равновесия* $(\breve{\lambda}, x_S, w_S)$ *является невырожденным, то*

$$\tilde{\lambda} - \breve{\lambda} = k\Delta\lambda \frac{{w_S}^T(\breve{B} + \Delta_B)x_S}{{w_S}^T(\breve{B} + k\Delta_B)x_S}.$$

# Спасибо за внимание!