

Методы интервального анализа и его приложения

ТРУДЫ СЕКЦИИ

**Международной конференции
«Современные проблемы прикладной математики и механики:
теория, эксперимент и практика», посвящённой 90-летию со
дня рождения академика Н.Н. Яненко**

Новосибирск, Россия, 30 мая – 4 июня 2011 г.

Алгоритм для определения интервального вектора параметров адаптивного регулятора

Аслонов К.З., Юлдашев З.Х., Эшонкулов Х.И.

Алгоритмы синтеза адаптивного управления многосвязными объектами управления, основанные на использовании принципа неявной эталонной модели и аппарата интервального анализа для решения задачи определения интервального вектора параметров настройки адаптивного регулятора, сводятся к решению интервального матричного алгебраического уравнения. В работе предлагается модифицированная итеративная процедура для решения интервальных линейных алгебраических уравнений.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ СИНТЕЗА ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЙ

М.Б. Базаров¹, А.Ж. Халилов², Л.О. Отакулов²

¹Навоийский государственный горный институт, Навои, Узбекистан

THE SOFTWARE PACKAGE FOR THE SYNTHESIS OF INTERVAL SYSTEMS OF CONTROL

M.B. Bazarov¹, A.J. Khalilov², L.O. Otakulov²

¹Navoi State Mining Institute, Navoi, Uzbekistan

It is resulted the description of a package of applied programs intended for research of properties of control systems for interval specified objects

Введение

В последнее время уделяется достаточно много внимания решению задач исследования и построения систем управления параметрические неопределенными объектами. Как правило, параметрическая неопределенность характеризуется принадлежностью истинных значений параметров объекта некоторым интервалам с известными границами, поэтому математические модели таких объектов могут быть представлены с использованием правил и терминологии интервального анализа [1].

При алгоритмизации методов интервального анализа существенные трудности возникают из-за неприспособленности аппаратных средств ЭВМ к учету специфических требований интервального исчисления. Эти требования обусловлены тем, что в процессе генерации конкретных интервальных алгоритмов на ЭВМ возникает потребность в подпрограммной машинной интервальной арифметике, в вычислении интервальнозначных функций и в некоторых аналитических преобразованиях. Известен ряд работ по алгоритмизации интервальных методов (см., например, [2] и краткий обзор там же), где упомянуты известные разработки и основное внимание акцентировано на пакетах, относящихся к интервально заданным системам автоматического управления.

Общее описание и назначение программного комплекса INTAN

Как правило, специалист, занимающийся проектированием автоматических систем (АС) имеет дело с математическими моделями в виде систем дифференциальных уравнений или структурных схем с передаточными функциями, причем коэффициенты дифференциальных уравнений и передаточных функций являются вектор - функциями некоторых параметров (объекта и регулятора). В программном комплексе (ПК) INTAN рассматриваются автоматические системы с интервальной неопределенностью параметров (АСИНП), у которых начальные условия и возмущения считаются точно известными, а значения параметров (коэффициентов математической модели АС) могут быть любыми в пределах заданных интервалов.

ПК INTAN позволяет решать задачи анализа динамических свойств и параметрического синтеза замкнутых систем автоматического управления многомерными интервально-заданными объектами, а также построения трубок движения интервальных систем.

Описание основных программных модулей ПК INTAN.

ПК INTAN построен на модульном принципе, а сами модули-подпрограммы написаны на основе языковых средств системы Matlab. Кроме того, пакет программ удовлетворяет требованиям открытости и расширяемости.

Структурная схема ПК INTAN приведена на рисунке. Как видно из рисунка, пакет программ состоит, в основном, из трех частей: идентификация объектов управления с интервальными параметрами, анализ автоматических систем с интервальной

неопределенностью и расчет интервальных параметров регулятора. Все остальные блоки пакета являются или вспомогательными или сервисными.

Блок «Управляющая головная программа» в начале осуществляет редактирование, т.е. проверяет правильность записи. Правильность расположения символов определяется рассмотрением данного символа в сравнении с предыдущим и последующим символами. Если появляется ошибка при записи, то выдается соответствующая диагностика. Далее, он организует поочередное выполнение действий (формирование входных и выходных данных, анализ решения и т.п.), определяет имя очередной программы, загружает её и передает на нее управление, информирует пользователя о ходе выполнения этапов решения поставленной задачи. В окне головной управляющей программы пользователь может получить инструкцию для пользователя.

Блок «Программный инструментарий» состоит из рабочих блоков, осуществляющих необходимые процедуры решения поставленных задач. Краткое описание этих блоков приводится ниже.

Блок «Библиотека сервисных программ» включает следующие вычислительные процедуры: проверка невырожденности интервальной матрицы, определение положительной определенности интервальной матрицы и её построение. Эти вычислительные процедуры необходимы для анализа автоматических систем с интервальной неопределенностью.

Блок «Библиотека обслуживающих программ». Содержание этого блока условно можно разбить на три группы. Первая из них состоит из модулей машинной интервальной (классической) и расширенной интервальной арифметики (сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в целую степень интервального числа), написанных на языке Matlab. Ко второй группе модулей можно отнести модули интервального вычисления элементарных функций, таких как, \sin , \cos и т.п. Модули специальных и логических интервальных операций составляют третью группу блока с учетом специфики интервальных вычислений: 1) модули классической машинной интервальной арифметики; 2) модули расширенной интервальной арифметики; 3) модули математических функций с интервальными аргументами.

Блок «Библиотека решения систем алгебраических уравнений» включает в себя программные реализации на языке Matlab интервальных методов Гаусса – Зейделя и субдифференциального метода Ньютона для решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений. В блок «Алгоритмы параметрической идентификации» включены два варианта программной реализации интервального метода наименьших квадратов: для параметрической идентификации объекта управления с одним входом/выходом и многосвязного объекта управления, а также программной реализации интервального аналога метода Симою. Основные операции, связанные с анализом автоматических систем с интервальной неопределенностью, реализованы в блоке «Анализ интервальных автоматических систем».

Синтез регуляторов для автоматических систем на основе интервального варианта метода модального управления осуществляется в блоке «Синтез интервальных автоматических систем». Используется способ включения интервального характеристического полинома замкнутой системы (ИХПЗС) в желаемый ИХПЗС

В блок «Модули параметрической идентификации» включены реализации алгоритмов интервального метода наименьших квадратов (ИМНК) и интервального аналога метода Симою. Пользователю предлагаются два варианта программной реализации ИМНК – модули RMNK1 и RMNK2. Модуль RMNK1 предназначен для параметрической идентификации объекта управления с одним входом/выходом, а RMNK2- для идентификации многосвязного объекта управления.

Блок «Расчет коэффициентов адаптивного регулятора» содержит три алгоритма настройки регулятора: два варианта настройки параметрически - оптимизируемого регулятора ($POR1$, $POR2$), и алгоритм настройки адаптивного регулятора (модуль AAR).

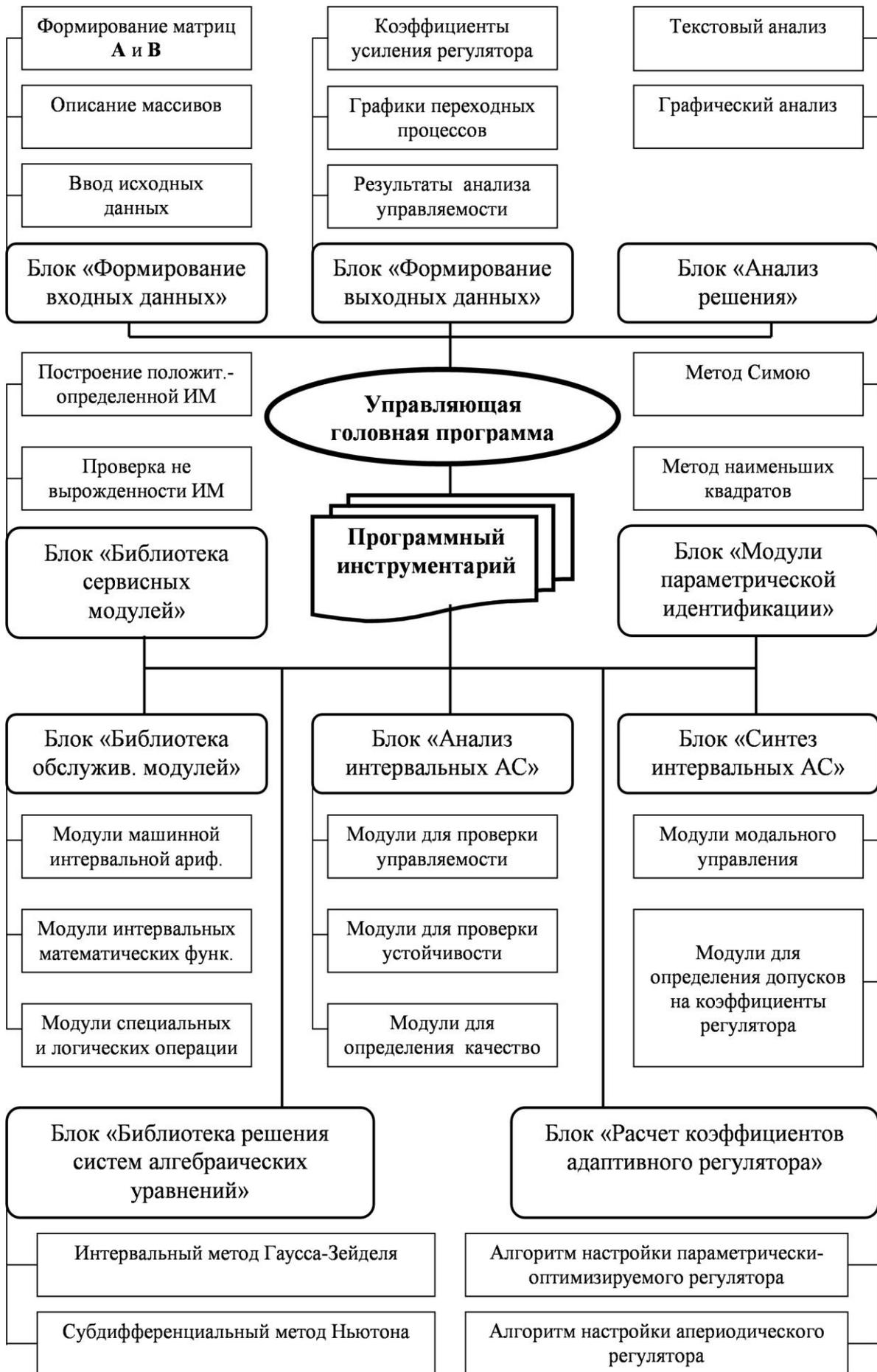


Рис. 1. Структурная схема ПК INTAN

В заключении работы отметим, что пользователь, взаимодействуя с пакетом, формирует исходную информацию о решаемой задаче, а пакет, анализирует эту информацию, строит интервальную модель задачи по признакам входной информации, проводит (если есть необходимость) аналитические преобразования, строит интервальные расширения рассматриваемых выражений, вычисляет значения интервальных функций путем возложения их на «плечи» ЭВМ и решает поставленную задачу.

Список литературы

1. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука. 1986.-221 с.
2. Хлебалин Н.А., Пярых Д.С. Моделирование систем автоматического управления с интервальной неопределенностью параметров. Труды межд. конф. вычисл. матем. МКВМ-2004. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН. с.258-266.
3. Базаров М.Б., Халилов А.Ж. Программа для решения задач исследования динамических свойств и построения интервальных систем автоматического управления. Государственное патентное ведомство. Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ. № DGU 01327, 13.07.2007.

РЕШАТЕЛЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПЛАТФОРМЫ KNIME

М.В. Данилов, К.С. Дронов, С.И. Жилин

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

e-mail: danilov.maxim@gmail.com, dronov.kirill@gmail.com, sergei@asu.ru

Разработан модуль расширения аналитической платформы KNIME, позволяющий вычислять формальные решения, внутренние и внешние оценки объединенного множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений, а также визуализировать двумерные и трехмерные объединенные множества решений. Приведен пример решения задачи распознавания изображений с использованием разработанного модуля.

1. Введение

Система KNIME [1] представляет собою модульную платформу с открытыми исходными кодами, предназначенную для анализа данных. KNIME позволяет визуально конструировать потоковые сценарии обработки и анализа данных из стандартных функциональных узлов, таких как чтение данных, предобработка данных, обучение модели, применение модели, визуализация данных и т.п. Сценарии могут быть исполнены частично или целиком, а промежуточные или окончательные результаты обработки и анализа данных могут быть изучены с использованием разнообразных инструментов интерактивной визуализации.

В виду открытости интерфейсов системы KNIME с нею легко интегрируются различные программные средства для чтения, предварительной подготовки, преобразования, анализа и визуализации данных разного рода. В частности, сценарии KNIME могут взаимодействовать с такими популярными инструментами как WEKA (среда машинного обучения), R Project (язык статистических вычислений), Python (интерпретатор языка программирования), ImageJ (система обработки и анализа изображений). Довольно богатые стандартные функциональные возможности KNIME могут быть пополнены пользовательскими модулями расширения (plugins). Сообщество пользователей и коммерческими разработчиками произведено значительное количество модулей расширения KNIME, позволяющих решать задачи распознавания образов, извлечения знаний из баз данных, обработки текстов и изображений, анализа химических данных и т.п.

При решении прикладных задач наличие в анализируемых данных неточности и неопределенности разного рода является скорее правилом, чем исключением. Трудно переоценить востребованность методов интервального анализа в подобных ситуациях. К сожалению, еще одним правилом, почти не имеющим исключений, является отсутствие в составе универсальных систем интеллектуального анализа данных интервальных инструментов, которые можно было бы гибко комбинировать с прочими, более

традиционными, средствами. Платформа KNIME предоставляет весьма богатый фундамент и при пополнении интервальными функциональными модулями вполне могла бы нарушить указанную тенденцию.

Почин по созданию расширений KNIME, реализующих методы интервального анализа, положен разработкой набора узлов, позволяющих решать задачи построения и анализа регрессионных зависимостей при интервальной ошибке в откликовой переменной [2]. Настоящая работа продолжает это начинание и направлена на разработку модуля расширения KNIME ILS Solver, предназначенного для решения интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ).

2. Модуль ILS Solver

Технологически KNIME основывается на платформе для построения интегрированных сред разработки Eclipse, поэтому наряду с прочими механизмами наследует от Eclipse и способ функционального расширения. Создание модуля расширения KNIME сводится для разработчика к реализации нескольких классов на языке Java, определяющих поведение модуля при создании, конфигурировании, исполнении и визуализации.

Модуль ILS Solver позволяет получать три вида решений ИСЛАУ вида $Ax = b$, а именно: формальное решение в полной арифметике Каухера, внутреннюю и внешнюю оценки объединенного множества решений. Поиск решений двух первых типов осуществляется с использованием формального подхода, позволяющего свести исходную задачу к решению неинтервальных СЛАУ. Внешние оценки объединенного множества решений строятся интервальным методом Гаусса-Зейделя. Реализации указанных численных методов заимствованы из Java-библиотеки для интервальных вычислений JInterval [3], а их исчерпывающее описание может быть найдено в [4].

При включении модуля ILS Solver в сценарии KNIME на вход ему необходимо подать таблицу данных, содержащую значения интервальных матрицы A и вектора b , а на выходе можно получить интервальный вектор x , интерпретация которого зависит от типа решения, выбранного в диалоге настроек узла (см. Рис. 1.).

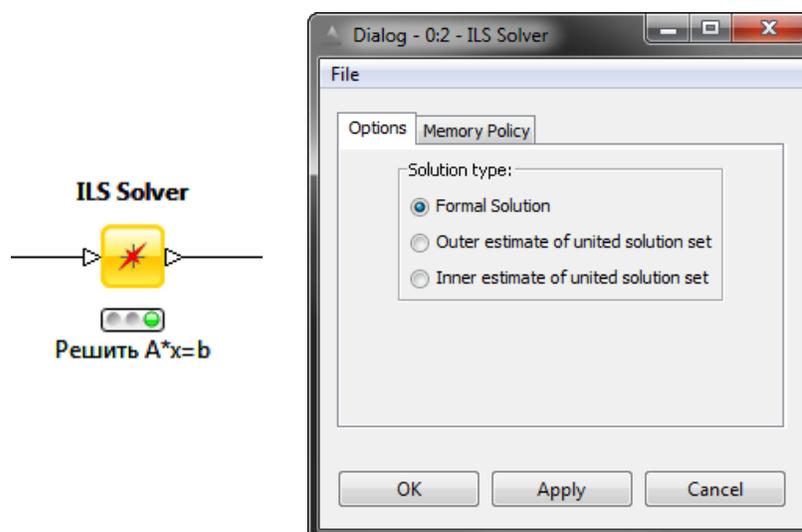


Рис. 1. Узел ILS Solver и диалоговое окно для его настройки.

ILS Solver предоставляет возможность интерактивной визуализации объединенных

множеств решений интервальных систем линейных уравнений размерности два и три (см. Рис. 2.). Исходный код, вычисляющий и визуализирующий точное представление объединенного множества решений, любезно предоставлен его разработчиками профессором В. Крамером и Г. Павом [5].

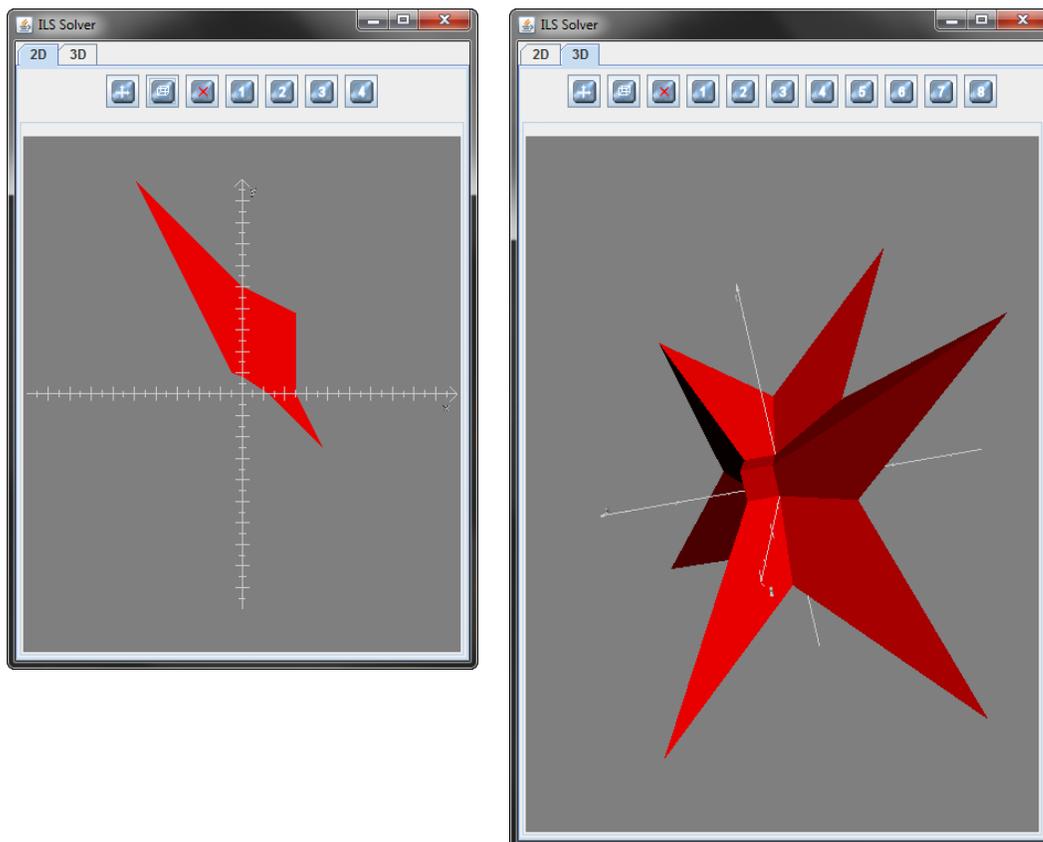


Рис. 2. Примеры визуализации объединенных множеств решений ИСЛАУ.

Несмотря на то, что задачи низкой размерности, допускающие визуализацию множества решений, редко возникают в реальных приложениях, эта возможность может оказаться хорошим подспорьем при изучении интервального анализа.

3. Пример сценария с использованием ILS Solver

В [6] предложен алгоритм распознавания изображений, вариация значений интенсивности пикселей которых по отношению к некоторым эталонным прототипам интервально ограничена. Суть алгоритма сводится к проецированию матриц, описывающих эталонные и распознаваемое изображения, в специальном образом выбранную точку и оценке близости проецирующего преобразования распознаваемого изображения к преобразованиям эталонов. В виду интервальных ограничений возмущений интенсивностей пикселей изображений параметры проецирующих преобразований также оцениваются интервалами. Таким образом, задача естественным путем сводится к построению внешних оценок объединенных множеств решений для серии интервальных систем линейных алгебраических уравнений.

На Рис. 3. показано окно KNIME со сценарием, реализующим указанный алгоритм распознавания изображений для случая двух эталонов. Сценарий производит чтение эталонных и распознаваемого изображений, формирует матрицы и векторы правых частей для пары ИСЛАУ, решает их с помощью узла ILS Solver и вычисляет значение метрики, указывающие на близость распознаваемого изображения к каждому из эталонов. Результирующие значения метрик отображаются в виде таблицы и диаграммы.

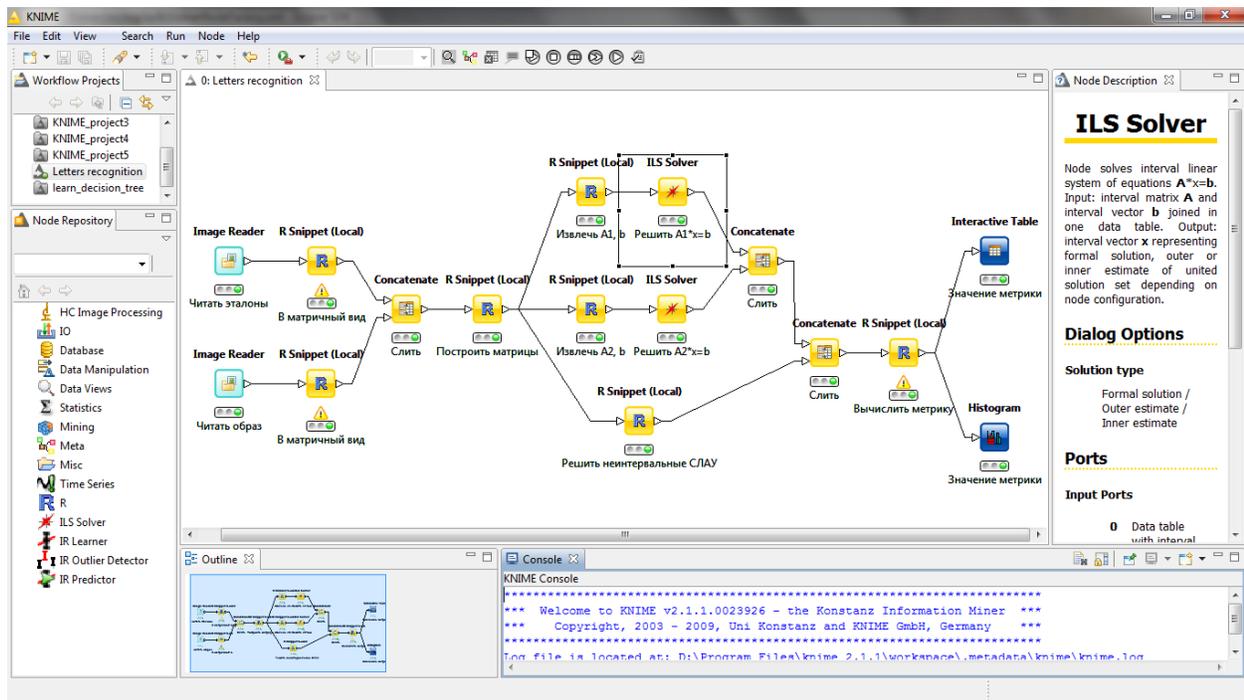


Рис. 3. KNIME-сценарий распознавания изображений с интервально ограниченным шумом.

Этот простой пример сценария призван проиллюстрировать лишь манеру употребления разработанного решателя ИСЛАУ. В реальных задачах распознавания образов сценарии могут быть существенно более сложными, поскольку аналитику, как правило, приходится выбирать оптимальный инструмент решения задачи путем сравнения нескольких различных подходов и методов.

4. Заключение

Модуль ILS Solver, расширяющий функциональные возможности аналитической платформы KNIME, позволяет вычислять формальное решение ИСЛАУ, отыскивать внутренние и внешние оценки объединенного множества решений, а также визуализировать двумерные и трехмерные объединенные множества решений. Основным предназначением модуля является его использование при построении KNIME-сценариев обработки и анализа интервальных данных в практических задачах разного рода. Однако не менее полезным он может оказаться и в дидактических целях при изучении интервального анализа.

Список литературы

- [1] BERTHOLD M.R., SEBRON N., DILL F., GABRIEL T.R., KÖTTER T., MEINL T., OHL P., THIEL K., WISWEDEL B. KNIME — the Konstanz information miner: version 2.0 and beyond // SIGKDD Explor. Newsl. 2009. Vol. 11, N 1. P. 26–31.
- [2] Жилин С.И. Расширения системы KNIME для построения и анализа регрессионных зависимостей при интервальной ошибке // Материалы тринадцатой конф. по матем. «МАК-2010», Барнаул, 2010. С. 3–4.
- [3] Данилов М.В., Дронов К.С., Жилин С.И., Тепикин Е.Н. Библиотека для интервальных вычислений JInterval: принципы организации // Материалы двенадцатой конф. по матем. «МАК-2009», Барнаул, 2010. С. 65–68.
- [4] ШАРЫЙ С.П. Конечномерный интервальный анализ [Электронный ресурс] // Интервальный анализ и его приложения [сайт]. / С.П. Шарый. – 2010. – Режим доступа: <http://www.ict.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
- [5] КРАЕМЕР W. Computing and visualizing solutions sets of interval linear systems // Serdica J. Computing. 2007. Vol. 1, N 4. P. 455–468.
- [6] Пролубников А.В., Силицкий С.П. О решении задачи распознавания числовых матриц по оценкам множеств решений интервальных линейных систем уравнений // Выч. математика. Труды XIV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Том 3., Иркутск, 2008. С. 152–157.

ЧИСЛЕННЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПЛОТНОСТЯМИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН*

Б.С. ДОБРОНЕЦ

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

e-mail: BDoBronets@sfu-kras.ru

О.А. ПОПОВА

Сибирская-автомобильно-дорожная академия,

e-mail: olgaarc@yandex.ru

В работе приведено описание и свойства основных операций над плотностями вероятности случайных величин. Представлены алгоритмы и примеры решений систем линейных алгебраических и нелинейных уравнений, примеры использования развиваемых методов в практике принятия решений и исследования операций. Показано, что данный подход позволяет существенно повысить качество принимаемых решений и сократить объем вычислений.

Введение

При решении большого числа практических задач возникает необходимость нахождения не только самих решений, но и различных оценок, таких как оценки погрешности, границы множеств решений и т. п [1].

Важное направление — вероятностное представление входных данных, например, в виде гистограммных чисел и разработка численных операций над ними [2, 3]. Одна из первых работ в этой области [4].

Наличие информации о плотности вероятности случайных величин приводит к возможности при расчетах учитывать и получать результаты в виде случайных величин с построенной плотностью вероятности.

Сравнение подходов интервальной математики и численных операций над плотностями вероятности случайных величин, показывает что практически значимые плотности вероятности занимают лишь небольшую часть полученных интервалов. Поэтому, в таких случаях, границы решений мало информативны. Часто при работе со случайными величинами ограничиваются вычислением лишь небольшого числа характеристик: математическое ожидание и дисперсия.

Численные операции над плотностями вероятности случайных величин позволяют существенно поднять точность расчетов при сравнительно небольшом объеме вычислений.

*Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, ГК № 02.740.11.0621.

1. Численные операции

Обозначим, через \mathbf{R} — множество $\{\mathbf{x}\}$ случайных величин, заданных своими плотностями вероятности p_x , соответственно \mathbf{R}^n — пространство случайных векторов.

Наряду с общими представлениями случайных величин своими плотностями в виде непрерывных функций, будем рассматривать случайные величины плотность распределения которых представляет гистограмму. Гистограмма P — кусочно-постоянная функция определяется сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ гистограмма принимает постоянное значение p_i .

Рассмотрим вопрос построения гистограммы P по некоторой p_x . Тогда значение p_i на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ определится как среднее

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_x(\xi) d\xi / (x_i - x_{i-1}).$$

Имеется непрерывная случайная величина \mathbf{x} с плотностью распределения p_x . Другая случайная величина \mathbf{y} связана с нею функциональной зависимостью:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

Плотность распределения величины \mathbf{y} в случае монотонной функции f согласно [5] определяется следующим образом:

$$p_y(y) = f(f^{-1}(y)) |(f^{-1})'(y)|,$$

где f^{-1} — функция обратная к f . Однако, пользоваться таким представлением в ряде случаев довольно затруднительно.

Рассмотрим построение гистограммы p_y по известной гистограмме p_x . Пусть p_x задается сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$. Вычислим сетку для гистограммы p_y $\{y_i | i = 0, \dots, n\}$ как $y_i = f(x_i)$. Тогда, вероятность попадания случайной величины \mathbf{x} в отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ равна вероятности попадания случайной величины \mathbf{y} в отрезок $[y_{i-1}, y_i]$. Следовательно, гистограмма p_y будет определяться сеткой $\{y_i | i = 0, \dots, n\}$ и соответствующими значениями $p_{y_i} = p_{x_i}$.

Рассмотрим общий случай, когда f не является монотонной. Пусть $\{y_i | i = 0, \dots, n\}$ — сетка для гистограммы p_y . Фиксируем отрезок $[y_{i-1}, y_i]$, найдем p_{y_i} . Пусть $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$ такие, что $[y_{i-1}, y_i] = f([a_j, b_j])$. Тогда вероятность p_{y_i} попадания случайной величины \mathbf{y} в отрезок $[y_{i-1}, y_i]$ определяется, как

$$p_{y_i} = \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} p_x(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим задачу определения закона распределения функции нескольких случайных аргументов.

Приведем метод решения этой задачи для случая функции двух аргументов. Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин (\mathbf{x}, \mathbf{y}) с плотностью распределения $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Случайная величина \mathbf{z} связана с \mathbf{x} и \mathbf{y} функциональной зависимостью:

$$\mathbf{z} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Тогда закон распределения P_z величины \mathbf{z} [5]:

$$P_z(r) = P(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r).$$

Пусть, как и выше, гистограмма p_z определяется сеткой $\{z_i | i = 0, \dots, n\}$. Определим область $\Omega_i = \{(x, y) | z_i < f(x, y) < z_{i+1}\}$. Тогда p_{zi} имеет вид

$$p_{zi} = \int \int_{\Omega_i} p(x, y) dx dy / (z_{i+1} - z_i).$$

Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ с плотностью распределения $p(x_1, x_2)$. Известны аналитические формулы для определения плотности вероятности результатов арифметических действий над случайными величинами [6]. Однако эти формулы не всегда удобны для численных расчетов.

Основные принципы разработки гистограммных операций продемонстрируем на примере операции сложения. Пусть $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, и носители $\mathbf{x}_1 = [a_1, a_2]$, $\mathbf{x}_2 = [b_1, b_2]$, $p(x_1, x_2)$ — плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Заметим, что прямоугольник $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ — носитель плотности распределения вероятностей $p(x_1, x_2)$ и плотность вероятности \mathbf{z} отлична от нуля на интервале $[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$. Обозначим $z_i, i = 0, 1, \dots, n$ — точки деления этого интервала на n отрезков. Тогда вероятность попадания величины \mathbf{z} в интервал $[z_i, z_{i+1}]$ определяется по формуле

$$P(z_i < \mathbf{z} < z_{i+1}) = \left(\int \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right),$$

где $\Omega_i = \{(x_1, x_2) | z_i \leq x_1 + x_2 \leq z_{i+1}\}$ [4]. И окончательно p_{zi} имеет вид

$$p_{zi} = \left(\int \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) / (z_{i+1} - z_i).$$

Рассмотренный выше подход обобщается на случай большего числа переменных. Пусть требуется найти гистограмму p_z суммы

$$\mathbf{z} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{x}_n$$

и пусть $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Тогда вероятность попадания \mathbf{z} в интервал (z_i, z_{i+1}) соответственно равна [6]

$$P(z_i < \mathbf{z} < z_{i+1}) = \int \dots \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где $\Omega_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | z_i < a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n < z_{i+1}\}$, p_{zi} имеет вид

$$p_{zi} = \int \dots \int_{\Omega_i} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n / (z_{i+1} - z_i).$$

Рассмотрим, в качестве примера, операцию $\max(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Вероятность того, что $\max(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < z$ — определяется через функцию распределения F

$$F(z) = \int_{-\infty}^z P_x(\xi) d\xi \int_{-\infty}^z P_y(\xi) d\xi.$$

Используя функцию распределения F , можно построить гистограмму для $\max(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на сетке $\{z_i\}$. Тогда $p_i = F(z_{i+1}) - F(z_i)$.

2. Решение уравнений

Рассмотрим системы линейных или нелинейных уравнений

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0, i = 1 \dots n,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ — случайный вектор решения, $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^m$ — случайный вектор коэффициентов, $p_k(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m)$ — функция плотности вероятности вектора коэффициентов и K — носитель p_k . Множество решений X имеет вид

$$X = \{x | f(x, k) = 0, k \in K\}.$$

Каждому $x \in X$ можно сопоставить подмножество коэффициентов $K_x \subset K$

$$K_x = \{k | f(x, k) = 0\}$$

Пусть необходимо найти вероятность $P(X_0)$ попадания решения x в некоторое подмножество $X_0 \subset X$. Сопоставим X_0 множество коэффициентов $K_0 = \{K_x | x \in X_0\}$

Тогда вероятность

$$P(X_0) = \int_{K_0} p_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m.$$

Нахождение подмножеств $K_x \subset K$ в общем случае не простая задача. Но для ряда частных случаев вполне реализуемая.

Рассмотрим решение систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b.$$

Для простоты изложения предположим, что случайный вектор \mathbf{b} состоит из независимых компонент $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, каждая из которых, случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Тогда носитель плотности вероятности вектора \mathbf{b} — квадрат $[0, 1]^2$. Пусть матрица матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

a_{11} — случайная дискретная величина равномерно распределенная на отрезке $[2, 4]$.

В левой части рис. 1 приведено кусочно-постоянное с шагом 0.1 приближение совместной плотности вероятности вектора \mathbf{x} . Сплошной линией приведена граница множества решений исходной системы.

Рассмотрим пример системы нелинейных уравнений

$$ax^2 + by^2 - 4 = 0,$$

$$xy - c = 0,$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — равномерные случайные величины, плотности вероятности которых имеют носители $[1, 1.1]$, $[2, 2.1]$, $[0.505, 0.51]$. В правой части рис. 1 приведено кусочно-постоянное приближение совместной плотности вероятности вектора (\mathbf{x}, \mathbf{y}) решения системы нелинейных уравнений.

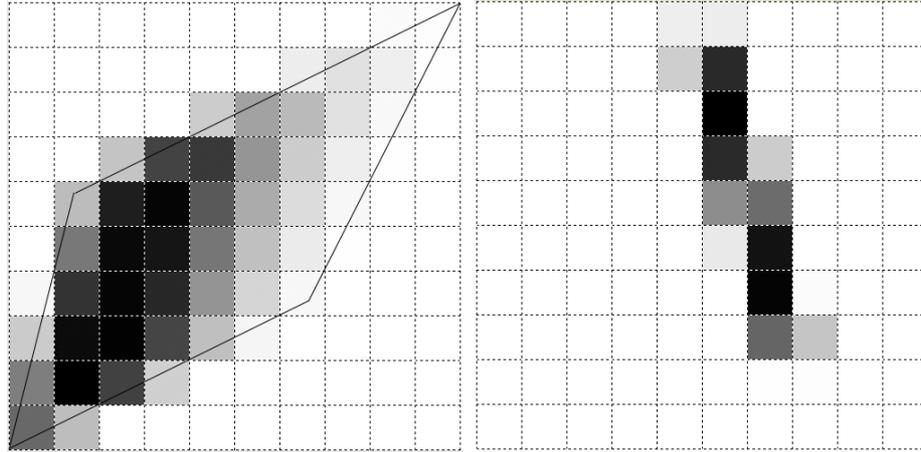


Рис. 1. Приближение плотности вероятности векторов решений

Рассмотрим задачу нахождения корня одномерного уравнения $f(x, k) = 0$. Предположим, что корень локализован на отрезке $[a, b]$. Заметим, что x будет представлять собой случайную величину и необходимо найти плотность распределения \mathbf{x} этой случайной величины. Далее, мы будем предполагать, что можно с достаточной точностью для любого $z \in [a, b]$ вычислять плотность распределения ϕ_z случайной величины $f(z, \mathbf{k})$.

Тогда, $P(z)$ есть вероятность, что корень лежит левее (правее) точки z :

$$P(z) = \int_{-\infty}^0 \phi_z(\xi) d\xi.$$

3. Прогноз временных рядов

Пусть имеется ряд наблюдений случайной величины $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$, которые произведены в моменты времени t_i

$$x(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где $f(t)$ — некоторая функция, η — случайная величина с математическим ожиданием равным нулю. Предполагаем, что плотности вероятности $P_\eta(t)$ случайной величины η может зависеть от времени.

Для оценки f и $P_\eta(t)$ будем использовать гистограммный подход. Для этих целей начиная с момента времени t_l строим специальным способом гистограммы G_i используя значения с x_{i-l} по x_{i+l} . По полученным гистограммам вычисляем математическое ожидание $m_i = M[G_i]$.

Далее по полученным величинам m_i , строится прогноз для $f(t)$ и по гистограммам G_i приближение для $P_\eta(t)$.

Таким образом, данный подход позволяет получить оценку не только $f(t)$, но и гистограммную оценку плотности $P_\eta(t)$ случайной величины η .

4. Приложения

В качестве примеров использования численных операций над гистограммными переменными были рассмотрены задачи принятия решения об инвестировании проекта выпуска

лекарственного препарата [7]. На основе вероятностных данных построены гистограммы NPV и IRR для проекта. Из анализа гистограмм NPV и IRR видно, что вероятны как крайне негативные исходы, так и возможна значительная прибыль в сравнении со стандартным анализом. Приведенный пример показывает, что применение гистограммной арифметики в рамках технологии визуально-интерактивного моделирования (ВИМ) [8] позволяет ЛПР увидеть возможные варианты негативных исходов реализации проекта, по сравнению со стандартным анализом, который дает только положительный ответ.

В заключение отметим, что проведенные авторами теоретические и практические исследования позволяют сделать два основных вывода:

- гистограммная арифметика может рассматриваться, как численный метод вероятностного анализа, позволяющий работать с неопределенными данными в рамках различных практических приложений [9, 10];
- гистограммная арифметика может использоваться, как инструмент ВИМ – технологии, что значительно повышает качество анализа возможных вариантов решений и дает в руки ЛПР удобное средство для принятия решений.

Список литературы

- [1] ДОБРОНЕЦ Б.С. Интервальная математика. Красноярск: Изд-во КГУ, 2004. 216 с.
- [2] BERLEANT D. Automatically verified reasoning with both intervals and probability density functions // Interval Computations. 1993 No. 2, P. 48–70
- [3] LI W., HYM J. Computer arithmetic for probability distribution variables // Reliability Engineering and System Safety. 2004. N 85. P. 191–209.
- [4] ГЕРАСИМОВ В.А., ДОБРОНЕЦ Б.С., ШУСТРОВ М.Ю. Численные операции гистограммной арифметики и их применения // АиТ. 1991, №2. С. 83–88.
- [5] ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
- [6] ГНЕДЕНКО Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 448 с.
- [7] ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. Применение гистограммной математики в задачах принятия экономических решений // Труды IX международной ФАМЭТ 2010 конференции. – Красноярск: КГТЭН, СФУ, 2010. С.127-130
- [8] ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. Гистограммная арифметика для визуально-интерактивного моделирования в задачах принятия экономических решений // Актуальные проблемы анализа и построения информационных систем и процессов: сб. статей Международной научно-технической конференции. Таганрог: Издательство Технологического института ЮФУ, 2010. С. 53–57.
- [9] ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. Применение гистограммной математики в экономических задачах исследования операций. – VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2010): Москва, 19–23 октября 2010 г.: Труды / Отв. ред. П.С. Краснощеков, А.А. Васин. – М.: МАКС Пресс, 2010. С. 90–92.
- [10] ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. Гистограммный подход к согласованию интересов в условиях неопределенности и задачах принятия решений // Труды XIV международной ЭМ'2010 конференции. – Красноярск: КГТЭН, СФУ, 2010. С.84–88.

Ограничения метода Гаусса-Зейделя в комплексном случае.

В.С. Дронов

Алтайский государственный университет

e-mail: <planeswalker@rambler.ru>

Необходимые определения. Одним из классических способов учета неопределенностей является использование интервального анализа, обладающего рядом преимуществ с вычислительной точки зрения. Удобство интервального подхода привело к тому, что в настоящий момент методы работы с действительными интервальными системами уравнений хорошо разработаны. Тем не менее ряд задач приводит к задачам со схожим типом неопределенности над полем комплексных чисел. Примерами могут служить задачи мезомеханики [1], оценки диэлектрической проницаемости или теплопереноса [2] и др. Для комплексного случая теория решения систем даже линейных интервальных уравнений развита в значительно меньшей степени.

Если в действительном случае понятие интервала естественно, то в комплексном подобного единства нет. Два наиболее частых базовых подхода - выделение в качестве основных объектов или прямоугольников на комплексной плоскости (интервальные значения комплексной и мнимой частей), либо кругов (интервальное значение радиуса) – но встречаются и более более сложные объекты, например, круговые сектора (см, например [3]), круговые кольца [4] и тому подобные объекты, так или иначе допускающие задание через интервальные параметры. Фактически, в зависимости от выбранной метрики, на роль комплексного интервала может попасть чуть ли не любой объект,

Основным объектом данной работы будет выступать круговой комплексный интервал $\langle c, r \rangle$ (где $c \in C$, $r \geq 0$, $r \in R$) – круговая область комплексной плоскости $\{x \in C : |x - c| \leq r\}$. (Здесь и далее интервалы и интервальные объекты всюду обозначаются жирным шрифтом). Результатом арифметической операции над интервалами будем называть наименьший по включению интервал данного типа, включающий в себя множество всех результатов этой арифметической операции над представителями данных интервалов. Под операторами *rad* и *mid* будем понимать выделение радиуса r и центра c интервала $\langle c, r \rangle$; под модулем интервала $|\langle c, r \rangle|$ – действительное число $|c| + r$ (максимальную удалённость элемента интервала от нуля). С помощью данных операторов можно выписать формулы для арифметических операций над круговыми интервалами в явном виде. В частности, для умножения:

$$\langle a, r \rangle \cdot \langle b, R \rangle = \langle ab, |a|R + |b|r + Rr \rangle$$

Отметим также прямое следствие данного определения:

$$\langle a, r \rangle \cdot \langle b, cR \rangle \supseteq \langle ab, crR \rangle.$$

Для обращения комплексного нольнесодержащего кругового интервала используется формула:

$$\frac{1}{\langle a, r \rangle} = \left\langle \frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{|a|^2 - r^2} \right\rangle.$$

(Звездочка в последней формуле означает сопряжение). Помимо этого, обратим внимание также на условие включения:

$$\langle a, r \rangle \subseteq \langle b, R \rangle \Leftrightarrow |b - a| \leq R - r.$$

Перед тем, как перейти к применению этих характеристик, отметим также весьма удобное свойство круговых интервалов, напрямую следующее из определения модуля и формулы результата умножения выше:

$$|\langle a, r \rangle \cdot \langle b, R \rangle| = |\langle a, r \rangle| |\langle b, R \rangle|$$

Под интервальными векторами и матрицами ниже подразумеваются векторы и матрицы, состоящие из круговых комплексных интервалов (возможно, вырожденных). Под результатом операций над матрицами, как и в случае с интервалами, подразумевается матрица, включающая результат действий над представителями участвующих в операции матриц. Наконец, в тексте ниже будет встречаться понятие «ширины» интервального вектора – в рамках данного подхода за этот показатель может быть принята любая норма на интервальных векторах. Удобным для представления вариантом может быть максимум радиусов компонент рассматриваемого вектора, но все рассуждения далее остаются в силе для произвольной нормы.

Далее рассматривается система уравнений вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где \mathbf{A} – интервальная матрица размерности $m \times n$, а \mathbf{b} – интервальный вектор длины m . Для систем подобного рода нет однозначного понятия «решения», так как задача может быть поставлена и в виде нахождения x , подходящего для любого значения, входящего в интервалы правой и левой частей, так и для хоть какого-то из

значений, попадающих в эти интервалы, и т.д. В данной работе рассматривается в первую очередь так называемое объединенное множество решений:

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in C \mid \exists \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \exists \mathbf{b} \in \mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

которое далее будет называться просто множеством решений. Поскольку сами по себе множества решений могут иметь весьма причудливую форму даже для задач малой размерности, обычно в интервальных методах подразумевается нахождение минимального интервала, включающего данное множество (внешнее оценивание) или максимального по включению, целиком содержащегося в нем (внутреннее оценивание).

Интервальный метод Гаусса-Зейделя Прямой перенос методов решения систем уравнений с «точечного» случая на интервальный обычно непродуктивен даже в действительном случае – так прямой аналог метода Гаусса (полученный заменой обычных операций на интервальные) «разваливается» уже на некоторых квадратных матрицах размерности 3. Тем не менее для действительного интервального случая существуют удачные обобщения, в числе которых метод Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания множеств решений. Для действительных интервалов его алгоритм можно описать следующим псевдокодом:

На входе: система $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, начальная оценка множества решений y с шириной d , требуемая точность ϵ . В качестве расстояния между интервальными векторами $dist$ может быть принята произвольная метрика на комплексных интервальных векторах – в рамках данного алгоритма это не существенно.

```

1 DO WHILE  $d > \epsilon$ 
2 FOR  $i = 1$  TO  $n$ 
3  $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i \cap (\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij}\mathbf{y}_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij}\mathbf{y}_j) / \mathbf{a}_{ii}$ 
4 IF  $x_i = \emptyset$  THEN STOP (Решений нет)
5 END IF
6 END FOR
7  $d = dist(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 
8  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 
9 END DO
```

Ключевыми результатами для действительного случая являются теорема Барта-Нудинга [5], утверждающая, что если матрица \mathbf{A} в исходной системе относится к классу так называемых М-матриц, то метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней оценке для любого начального приближения, включающего данное множество решений, и теорема Ноймайера [6], утверждающая, что если исходная матрица не относится к классу Н-матриц (обобщающих понятие М-матриц), то существует сколь угодно широкая начальная оценка, не улучшаемая методом Гаусса-Зейделя.

В работе [7] автором было показано, что метод Гаусса-Зейделя в псевдокоде выше может быть обобщён на случай комплексных круговых интервалов, причём изменения (несмотря на иной характер комплексных операций) могут быть минимальны – фактически, для сохранения работоспособности метода достаточно ввести один дополнительный шаг, страхующий от появления при пересечении интервалов объектов, не являющихся комплексными круговыми интервалами. Так как для пересечения круговых интервалов форма минимального включающего их кругового интервала может быть выписана в явном виде.

Ограничения в комплексном случае. Ограничения интервального метода Гаусса-Зейделя в действительном случае задаются теоремой Ноймайера, использующей понятие Н-матрицы, обобщающее понятие матрицы монотонного вида (М-матрицы). Понятие Н-матрицы может быть введено различными способами, но в конечном итоге сводится к преобладанию диагонали матрицы над прочей частью в спектральном смысле. Из-за иной природы комплексных интервалов прямой перенос теоремы, естественно, невозможен, однако можно построить некий аналог с использованием понятия модуля:

Определение. Будем называть К-матрицей квадратную матрицу комплексных круговых интервалов размерности n , для которой $\forall \mathbf{U}$ – ненулевого вектора комплексных круговых интервалов размерности n , $mid(\mathbf{U}_i) = 0$ – выполняется условие $|\sum_{i \neq j} \mathbf{a}_{ij}\mathbf{U}_j| < |\mathbf{a}_{ii}\mathbf{U}_i|$.

Теорема 1. Если в системе интервальных уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ матрица \mathbf{A} не является К-матрицей, то существует исходная внешняя оценка \mathbf{x} для множества решений системы, со сколь угодно широкими компонентами, не улучшаемая при помощи комплексного аналога метода Гаусса-Зейделя.

Доказательство. Пусть матрица \mathbf{A} не относится к классу \mathbf{K} -матриц. Следовательно, существует ненулевой вектор \mathbf{U} с нулевыми центрами интервалов, для которого

$$\left| \sum_{i \neq j} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{U}_j \right| \geq |\mathbf{a}_{ii} \mathbf{U}_i|.$$

Рассмотрим ненулевой вектор \mathbf{U}' , связанный с \mathbf{U} соотношением $mid(\mathbf{U}'_i) = mid(\mathbf{U}_i), rad(\mathbf{U}'_i) = c \cdot rad(\mathbf{U}_i)$, где $c > 1$.

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{U}'_j \supseteq \mathbf{a}_{ii} \mathbf{U}'_i,$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Возьмем начальной оценкой множества решений вектор \mathbf{U}' . Первой компонентой следующего приближения по методу Гаусса-Зейделя будет интервал

$$\mathbf{y}'_1 = \mathbf{U}'_1 \cap (0 - \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j) / \mathbf{a}_{11}.$$

Но из включения выше и свойств операций над комплексными интервалами следует, что:

$$(- \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j) / \mathbf{a}_{11} \supseteq \mathbf{U}'_1.$$

Покажем это. Проверим условие включения.

$$mid(\sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j - \mathbf{a}_{11} \mathbf{U}'_1) = 0,$$

по определению \mathbf{U} как центрированного на нуле.

$$rad(\sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j) - rad(\mathbf{a}_{11} \mathbf{U}'_1) = c \cdot rad(\sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}_j) - rad(\mathbf{a}_{11} \mathbf{U}_1) \geq 0,$$

откуда

$$\left| mid(\sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j - \mathbf{a}_{11} \mathbf{U}'_1) \right| \leq rad(\sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j) - rad(\mathbf{a}_{11} \mathbf{U}'_1).$$

Итого $\mathbf{y}'_1 = \mathbf{U}'_1$, т.е. улучшения оценки по первой координате не происходит. Аналогичные рассуждения показывают отсутствие улучшения оценки по каждой из прочих координат. Таким образом, $\mathbf{y}' = \mathbf{U}'$, т.е. оценка \mathbf{U}' , могущая быть сколь угодно «расширенной» за счет увеличения константы c , не поддается улучшению с помощью комплексного аналога метода Гаусса-Зейделя. Теорема доказана.

Данная теорема играет для метода Гаусса-Зейделя в комплексном случае ту же роль, что и теорема Ноймайера в действительном, ограничивая класс матриц, на котором данный метод будет эффективен. Утверждение теоремы 1 может быть обобщено на случай ненулевой правой части.

Определение. Будем называть квадратную матрицу комплексных круговых интервалов существенно отличной от \mathbf{K} -матрицы с коэффициентом отличия τ , если для нее $\exists \mathbf{U}, mid(U_i) = 0$, такой, что $|\sum_{i \neq j} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{U}_j| > \tau |\mathbf{a}_{ii} \mathbf{U}_i|$.

Теорема 2. В системе интервальных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с произвольной правой частью \mathbf{b} при матрице \mathbf{A} , существенно отличной от \mathbf{K} -матрицы с коэффициентом большим

$$\max_{i=1..n} \left\{ \frac{|mid(\mathbf{a}_{ii})| + rad^2(\mathbf{a}_{ii})}{|mid^2(\mathbf{a}_{ii})| - rad^2 \mathbf{a}_{ii}} \sum_{i \neq j} |\mathbf{a}_{ij}| \right\},$$

существуют сколь угодно широкие начальные приближения, не улучшаемые методом Гаусса-Зейделя.

Доказательство. Аналогично теореме 1 возьмем в качестве начального приближения вектор \mathbf{U}' , полученный «раздуванием» радиусов компонент \mathbf{U} в c раз. Улучшения по первой компоненте не произойдет, если

$$\mathbf{b}_1 - \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{U}'_j / \mathbf{a}_{11} \supseteq \mathbf{U}'_1.$$

Обозначив $rad(\mathbf{U}_i) = R_i$, $rad(\mathbf{a}_{ij}) = r_{ij}$ и расписав соответствующие выражения по правилам действий над круговыми интервалами, получим:

$$\langle 0, cR_1 \rangle \subseteq \langle mid(\mathbf{b}_1), rad(\mathbf{b}_1) \rangle + \frac{c(|mid(\mathbf{a}_{11})| + r_{11}^2)}{|mid^2(\mathbf{a}_{11})| - r_{11}^2} \sum_{j=2}^n |\mathbf{a}_{1j}| R_j,$$

что с учётом условий включения превращается в

$$|mid(b_i)| \leq cR_1 + rad(\mathbf{b}_1) + \frac{c(|mid(\mathbf{a}_{11})| + r_{11}^2)}{|mid^2(\mathbf{a}_{11})| - r_{11}^2} \sum_{j=2}^n |\mathbf{a}_{1j}| R_j.$$

Как легко заметить, правая часть неравенства растёт с ростом c , если

$$R_1 - \frac{|mid(\mathbf{a}_{11})| + r_{11}^2}{|mid^2(\mathbf{a}_{11})| - r_{11}^2} \sum_{j=2}^n |\mathbf{a}_{1j}| > 0,$$

то есть

$$\tau > \frac{|mid(\mathbf{a}_{11})| + r_{11}^2}{|mid^2(\mathbf{a}_{11})| - r_{11}^2}.$$

За счет увеличения c таким образом можно получить сколь угодно широкое по первой координате начальное приближение, не улучшаемое методом Гаусса-Зейделя. Прделав аналогичные действия с прочими координатами и выбрав τ , подходящее под все ограничения, получим, что для любой матрицы \mathbf{A} , существенно отличной от \mathbf{K} -матрицы с коэффициентом отличия τ и более, можно подобрать сколь угодно широкую оценку, не улучшаемую рассматриваемым методом. Теорема доказана.

Таким образом, для уверенной работы метода Гаусса-Зейделя желательна система с \mathbf{K} -матрицей или матрицей близкой к ней.

Утверждение. Класс \mathbf{K} -матриц пуст.

Доказательство. Пусть \mathbf{A} - квадратная интервальная матрица, и \mathbf{U} - центрированный на нуле вектор, для которого $\sum_{i \neq j} |\mathbf{a}_{ij} \mathbf{U}_j| < |\mathbf{a}_{ii} \mathbf{U}_i|$, $i = 1..n$. В силу свойства модулей произведения круговых интервалов, отмеченного в первой части работы и определения модуля, данное равенство может быть записано как $\sum_{i \neq j} |\mathbf{a}_{ij}| rad(\mathbf{U}_j) < |\mathbf{a}_{ii}| rad(\mathbf{U}_i)$, $i = 1..n$. Как легко заметить, увеличивая ширину любой не i -той компоненты вектора \mathbf{U} , а прочие сохраняя неизменными, мы рано или поздно получим вектор, нарушающий характеристическое условие \mathbf{K} -матрицы для \mathbf{A} . Утверждение доказано.

Таким образом для комплексного случая класс матриц, соответствующий классу \mathbf{H} -матриц оказывается пустым, а метод Гаусса-Зейделя, несмотря на свою работоспособность, не гарантирует сходимости к оптимальной (т.е. наиболее узкой) оценке.

1. Dessombz O., Thouverez F., Laine J.-P., Jezequel L. Analysis of Mechanical Systems using Interval Computations applied to Finite Elements Methods // Journal of Sound and Vibration. 2001. №5.
2. Candau Y., Raissi T., Ramdani N. and Ibos L. Complex interval arithmetic using polar form // Reliable Computing. 2006. №1.
3. Klatte P., Ullrich Ch. Complex sector arithmetic // Computing. 1980. Vol. 24.
4. Petkovic M.S., Mitrovic Z.M., Petkovic L.B. Arithmetic of circular rings // Interval Mathematics. New York, 1986.
5. Barth W., Nuding E. Optimale Leosung von Intervallgleichungssystemen // Computing. 1974. Vol. 12.
6. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge. 1990.
7. Дронов В.С. О теореме Ноймайера в комплексной круговой арифметике. // Сборник научных статей межрегиональной школы-семинара «Ломносовские чтения на Алтае», ч.1, Барнаул, 2010, стр 184-190.

К ПРОБЛЕМЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОШИБКОЙ

С.И. Жилин, А.В.Крючков, Н.М.Оскорбин
Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
e-mail: sergei@asu.ru, alvik48@mail.ru, osk46@mail.ru

В докладе излагается общий подход к построению оптимального эксперимента, основанный на прямом решении задачи, формулируемой относительно эмпирической зависимости: прогноза, оценивания параметров, или выбора управляющего воздействия на моделируемый объект. Представлена общая схема, результаты ее применения в простых случаях, а также сравнение с данными, известными из литературы.

При статистическом планировании оптимального эксперимента общая схема состоит в выборе первичного критерия минимизации ошибки прогноза (в конкретной точке или интегральной по области определения зависимости) и в переходе к конкретному частному критерию, так или иначе связанному с общим (D -оптимальному, G -оптимальному и т.п.) [1]. Задача планирования эксперимента при построении зависимостей по эмпирическим данным с интервальной ошибкой в откликовой переменной рассматривалась в работах Г. Бельфорте [2], Л. Пронцато, Э. Вальтера [3], Н.П. Дывака [4]. При этом общая схема остается аналогичной статистической с поправкой на используемые критерии оптимальности экспериментов. Наиболее известными из таких критериев являются минимизация объема или максимального диаметра множества допустимых значений параметров зависимости, а также минимизация максимальной ширины интервального прогноза (соответственно, критерии I_D -, I_E - и I_G -оптимальности в обозначениях Дывака).

Описанный выше подход обладает недостаточной гибкостью для вовлечения дополнительной априорной информации, как о поведении искомой зависимости, так и о значениях оцениваемых параметров, а также не учитывает достижения теории принятия решений.

В работе предлагается общий подход к построению оптимального эксперимента. Он основан на принципе имитационного моделирования и позволяет решать задачи прогноза, оценивания параметров или выбора управляющего воздействия на моделируемый объект, используя лишь априорную информацию об эмпирической зависимости.

В начале определимся с постановкой задачи поиска оптимального плана эксперимента. Предполагается, что на некотором интервале $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ соблюдается зависимость, которую можно выразить в форме, разделяющей детерминированную и случайную составляющие:

$$y = f(x, \beta) + \varepsilon, \quad (1)$$

где $x \in \mathbf{X}$ — входной вектор, $\beta \in \mathbb{R}^m$ — вектор параметров, f — скалярная функция, описывающая детерминированную составляющую, ε — величина, описывающая слу-

чайную составляющую исследуемого объекта (например, погрешность измерений), а y — выходная переменная.

Далее предполагается, что функция $f(x, \beta)$ известна нам с точностью до параметров, наблюдаемые значения входных переменных x_i известны точно, а соответствующие им значения выходной переменной y_i измеряются с ошибками измерений ε_i , для которых известны оценки $\underline{\varepsilon}_i \leq \varepsilon_i \leq \bar{\varepsilon}_i$. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что значения $\underline{\varepsilon}_i$ и $\bar{\varepsilon}_i$ постоянны, то есть для любого x_i $\underline{\varepsilon}_i = \underline{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}$.

На основе введенных предположений требуется составить оптимальный план эксперимента (наименьшую последовательность точек x , в которых необходимо произвести замеры значений y), позволяющий решить следующие задачи:

- оценивания параметров β ,
- прогноза значения функции y в некоторой точке x_0 (в данном случае предполагается, что эксперименты мы можем ставить на некотором множестве \mathbf{X}^* , $x_0 \notin \mathbf{X}^*$).

Специфика излагаемого в докладе метода состоит в том, что для решения данных задач не требуется проводить экспериментов фактически с целью получения дополнительной информации, а достаточно лишь априорной информации об исследуемом объекте (ведь в реальных условиях мы зачастую ограничены в возможности проводить эксперименты физически). Вся необходимая информация может быть получена средствами имитационного моделирования.

Суть метода проще всего изложить на примере задачи прогноза (все условия и обозначения, введенные выше, остаются в силе). К постановке задачи в данном случае обязательно необходимо добавить некоторые изначальные ограничения на параметры β в модели (1): $\underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \bar{\beta}_i$ для всех β_i , входящих в функцию f . Заметим, что уже этой исходной информации достаточно для того, чтобы сформировать некоторые ограничения на значение функции y в точке прогноза: $\underline{y}_0 \leq y(x_0) \leq \bar{y}_0$. Для этого необходимо решить следующие задачи оптимизации:

$$\underline{y}_0 = \min_{\beta} y(x_0), \quad \bar{y}_0 = \max_{\beta} y(x_0). \quad (2)$$

Однако ширина Δ_0 интервала $[\underline{y}_0, \bar{y}_0]$, как правило, слишком велика для практического применения, и нашей задачей будет спланировать такую серию экспериментов, которая позволит за минимальное число итераций (замеров значений y в соответствующих точках) максимально возможно сузить данный интервал.

Для этого предлагается совершить следующую последовательность действий:

1. из множества \mathbf{X}^* выберем N равномерно расположенных в нем точек x_i . Чем больше точек мы выберем, тем выше будет точность требуемого результата. Однако следует учитывать и то, что скорость алгоритма снижается при росте N , что на практике нельзя игнорировать;
2. для каждой выбранной точки $x_i \in \mathbf{X}^*$ мы можем априори оценить интервал, в который гарантированно попадет значение $y(x_i)$: $\underline{y}_i \leq y(x_i) \leq \bar{y}_i$, решив задачи оптимизации:

$$\underline{y}_i = \min_{\beta} y(x_i), \quad \bar{y}_i = \max_{\beta} y(x_i); \quad (3)$$

3. из каждого такого интервала $[y_i, \bar{y}_i]$ выбираем M равномерно расположенных в нем точек $y_j(x_i)$ (так же, как и на первом шаге, увеличение M ведет к большей точности, но меньшей скорости выполнения алгоритма);
4. для каждой такой точки $y_j(x_i)$ предполагаем, что реальное значение $y(x_i)$ попало в интервал $[y_j(x_i) - \varepsilon, y_j(x_i) + \varepsilon]$. Затем вычисляем значение y в точке прогноза x_0 с учетом данного предположения. Для этого решаем задачи оптимизации (2), добавляя к ограничениям на параметры β еще одно двойное ограничение:

$$y_j(x_i) - \varepsilon \leq y(x_i) \leq y_j(x_i) + \varepsilon;$$

5. для каждого x_i выбираем *наихудший* случай, то есть находим такое j^* , для которого ширина Δ_0^{ij} полученного интервала $[y(x_0), \bar{y}(x_0)]$ максимальна:

$$\Delta_0^i = \Delta_0^{ij^*} = \max_j \Delta_0^{ij};$$

6. среди всех Δ_0^i выбираем *наилучший* случай, то есть находим такое i^* , для которого

$$\Delta_0 = \Delta_0^{i^*} = \max_j \Delta_0^i.$$

Затем происходит переход ко второму шагу, но в задачах оптимизации (2) и (3) добавляются ограничения $y_{j^*}(x_{i^*}) - \varepsilon \leq y(x_{i^*}) \leq y_{j^*}(x_{i^*}) + \varepsilon$. Алгоритм продолжается до тех пор, пока уменьшается Δ_0 . Последовательность получаемых точек $x_{i^*}^i$, где i — номер итерации, является оптимальным планом эксперимента.

Изложенный алгоритм был апробирован на задаче прогноза, в которой в качестве функции f использовалась зависимость вида

$$f(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{n-1, n} x_{n-1} x_n + \dots + \beta_{1, \dots, n} x_1 \dots x_n. \quad (4)$$

Результаты, полученные при решении данной задачи, полностью согласуются с результатами, известными из литературы (см., например, [5, 6]). В частности, при использовании в качестве функции f функции вида (4) и выбора следующих параметров:

$$\mathbf{X} = \mathbb{R}^n,$$

$$[\underline{\beta}_i, \bar{\beta}_i] = [0.5, 1.5] \quad \forall i = \overline{0, n},$$

$$\mathbf{X}^* = [-1, 1] \in \mathbb{R}^n,$$

$$x_{0i} = 10 \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$[\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] = [-0.1, 0.1],$$

были получены следующие оптимальные планы (верхние индексы обозначают номер эксперимента):

- для $n = 1$: $x^1 = 1, x^2 = -1$,
- для $n = 2$: $x_1^1 = 1, x_2^1 = 1; x_1^2 = 1, x_2^2 = -1; x_1^3 = -1, x_2^3 = 1; x_1^4 = -1, x_2^4 = -1$.

Дальнейшее развитие алгоритма предполагает апробацию на моделях с функцией f вида (4) при $n > 2$ и на моделях с более сложными конструкциями детерминированных составляющих f .

Список литературы

- [1] ФЕДОРОВ В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). М.: Наука, 1971.
- [2] BELFORTE G., BONA B., FREDIANI S. Optimal Sampling Schedule for Parameter Estimation of Linear Models with Unknown But Bounded Measurement Errors // IEEE Trans. on Automatic Control. 1987. Vol. 32. N 2. P. 179-182.
- [3] PRONZATO L., WALTER E. Experiment Design for Bounded-Error Models // Mathematics and Computers in Simulation. 1990. Vol. 32. P. 571-584.
- [4] ДЫВАК Н.П. Теоретические основы построения моделей «вход-выход» статических систем методами анализа интервальных данных: Дис. ... док. тех. наук. Львов, 2003. (на укр. яз.)
- [5] АХНАЗАРОВА С.Л., КАФАРОВ В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1985.
- [6] АФАНАСЬЕВА Н.Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента: Учеб. пособие. М.: КНОРУС, 2010.

ЗАДАЧИ С ДВУСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Зоркальцев В.И.

Известно, чем более узкий класс задач рассматривается, тем богаче и интереснее могут быть свойства этого класса задач. В докладе рассматриваются свойства систем линейных неравенств, задач линейного и выпуклого программирования, у которых все переменные ограничены сверху и снизу. Вероятно, разработчик любой модели всегда способен оценить, пусть даже с запасом, диапазоны возможных вариаций отдельных переменных. Поэтому в содержательном плане обязательное наличие двусторонних ограничений на все переменные вряд ли можно считать сужающим возможности математического моделирования условием. Вместе с тем это условие дает ряд полезных свойств. В частности заведомо известно, что множество решений таких задач ограничено (в том числе может быть пустым). В докладе рассматриваются полезные следствия из условия двусторонней ограниченности переменных: в теории альтернативных систем линейных неравенств в теории двойственности выпуклой оптимизации; для повышения вычислительной эффективности алгоритмов решения систем уравнений и неравенств, задач оптимизации; при интерпретации решений. Рассматриваются приложения полученных теоретических результатов в моделях расчета режимов электроэнергетических систем, в электрических и гидравлических цепях.

1. Обозначения

Везде в данной статье заданными являются: A – матрица размера $m \times n$ при некоторых целых $m \geq 1$, $n \geq 1$; векторы b из R^m , а также c , d , g из R^n . Здесь R^n – множество n -мерных векторов. Считаем, что $g < d$, то есть $g_j < d_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. Для вектора $l \in R^m$ выражения $(l)_+$, $(l)_-$ обозначают векторы из R^m с компонентами

$$(l)_{+j} = \max\{0, l_j\}, \quad (l)_{-j} = \min\{0, l_j\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Переменные составляют векторы x , y , v , w из R^n , а также u из R^m .

2. Системы двусторонних линейных неравенств

К этому классу предлагается [1] относить системы линейных неравенств, для которых: 1) ограничения-неравенства задаются только применительно к отдельным переменным; 2) эти ограничения задаются с обеих сторон (снизу и сверху) на значения каждой из переменных; 3) ограничения на значения линейных комбинаций нескольких переменных представимы в виде равенств. Заметим, что ограничения-равенства можно считать частным случаем двусторонних ограничений-неравенств. Действительно, условие $Ax = b$ по вектору переменных x равносильно условию $b \leq Ax \leq b$.

Системы линейных уравнений можно рассматривать, как частный случай систем линейных неравенств. Любая система линейных уравнений представима в виде системы линейных неравенств. Поэтому факты справедливые для систем линейных неравенств имеют всегда упрощенные аналогии для систем линейных уравнений.

Фундаментальное значение для теории и многих приложений имеют теоремы об альтернативных системах линейных неравенств (первые варианты которых были получены в конце XIX века Гордоном, затем Минковским, Фаркашем [1–3]). По одной из форм представления этих теорем они состоят в следующем: любой системе линейных неравенств по формальным правилам можно поставить в соответствие другую систему линейных неравенств такую, что заранее известно, – одна и только одна из этих двух систем имеет решение. Это, в частности, может быть полезным для выявления случаев несовместности ограничений исходной системы. Аналогом в теории систем линейных уравнений служит теорема Фредгольма.

Теорема 1 (Фредгольма). *Либо разрешима система линейных уравнений*

$$Ax = b, \quad (1)$$

либо имеет решение система линейных уравнений

$$A^T u = 0, \quad b^T u = 1. \quad (2)$$

Если в процессе решения системы (1) выяснится, что при некотором $u \in R^m$ достигается решение системы (2), то поиск решения системы (1) должен быть прекращен, так как доказано, что эта систем неразрешима.

Дополним систему (1) ограничениями сверху на абсолютные значения компонент вектора переменных (полученными, например, из экспертных соображений). Имеем следующее утверждение.

Теорема 2 (Дакса). *Пусть задан вектор $d \in R^n$, $d > 0$. Тогда либо существует $x \in R^n$ такой, что*

$$Ax = b, \quad -d \leq x \leq d, \quad (3)$$

либо при некотором u

$$b^T u - d^T |A^T u| > 0, \quad (4)$$

где $|A^T u|$ – вектор из R^n состоящий из абсолютных значений компонент вектора $A^T u$.

Если теорему 2 использовать в качестве критерия для выявления случая несовместности системы линейных уравнений (1), то этот критерий явно в вычислительном плане предпочтительней, чем критерий на базе теоремы 1. Теорема 1 представляет более жесткие требования к вектору u . Если при некотором u выполняются условия (2), то для него будут выполняться и условия (4). А обратное не верно. В условии (4), в отличие от условия (2), не требуется, чтобы для вектора u выполнялось равенство $A^T u = 0$.

Конечно, критерий (4) может «срабатывать» не только в случае несовместности системы (1), но и в случае, когда эта система имеет решения, но они не удовлетворяют условию $|x| \leq d$. Чем меньше значения компонент вектора d , тем выше шанс выйти на «срабатывание» такого критерия несовместности. Поэтому чем точнее мы можем оценить диапазон возможных значений переменных, тем лучше.

В этой связи интерес представляет переход от оценок максимальных абсолютных значений переменных к оценкам диапазонов их значений. Пусть границы диапазонов задаются векторами g и d . Справедлива [1]

Теорема 3. *Либо имеет решение система неравенств*

$$Ax = b, \quad g \leq x \leq d, \quad (5)$$

либо существует вектор $u \in R^m$ такой, что

$$b^T u - d^T (A^T u)_+ + g^T (A^T u)_- > 0. \quad (6)$$

Приложения в алгоритмах расчета допустимых режимов электроэнергетических систем. В работах [4, 5] представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований вариантов алгоритмов внутренних точек для решения систем двусторонних линейных неравенств вида (5). Такие системы имеют место на каждой итерации метода приведенного градиента при расчете допустимых режимов электроэнергетических систем [6]. Поскольку модель расчета режимов предназначена для оперативного управления электроэнергетическими системами в темпе реального времени, то ценно любое ускорение расчетов на ней, как по определению рекомендуемого решения, так и, особенно, по выявлению случаев отсутствия решения в заданных условиях (5).

В табл. 1 представлены результаты расчетов четырьмя вариантами алгоритмов внутренних точек двух серий из 14 задач, полученных в результате линеаризации моделей расчета режимов электроэнергетических систем, а также двух тестовых сложных в вычислительной плане задач. Во всех алгоритмах объем вычислений на одной итерации примерно одинаковый, поэтому их сопоставление по числу итерации вполне корректно.

Алгоритмы F1 и F2 осуществляют монотонное улучшение решения исходной системы линейных неравенств (5). Алгоритмы G1 и G2 основаны на «альтернативном подходе» – они осуществляют монотонное улучшение решения задачи

$$b^T u - d^T v + g^T w \rightarrow \max, \\ A^T u - w - v = 0, \quad v \geq 0, w \leq 0.$$

Алгоритмы F1 и G1 соответствуют исходным наиболее известным вариантам метода внутренних точек, предложенным в [7] и получившим название в зарубежной литературе *affine scaling method* и *dual affine scaling method*. Алгоритмы F2, G2 являются модификациями исходных вариантов, предложенные в [8] в целях повышения устойчивости вычислительного процесса к погрешностям счета.

Таблица 1.

Число итераций, необходимое для получения решения или идентификации несовместности прямыми и двойственными алгоритмами внутренних точек

Задачи/Алгоритм	F1	F2	G1	G2
Совместные (30x80)–(41x80)	9.5(3–13)	13.4(7–17)	10.2(6–13)	5.9(3–8)
Несовместные (30x80)–(41x80)	1.6(1–5)	1.6(1–7)	1(все 1)	1(все 1)
Тестовый пример (19x19)	13	8	11	6
Тестовый пример (201x201)	19	7	16	9

На основе представленных в таблице результатов (и аналогичных результатов в сериях других экспериментов [9]) можно сделать три важных вывода. Во-первых, эти примеры демонстрируют высокую вычислительную эффективность введения критерия несовместности на базе теорем об альтернативных неравенствах. Несовместность стала выявляться на первых итерациях. Используемый ранее критерий, основанный на выявлении факта сходимости к ненулевому значению итеративно уменьшаемого по норме вектора невязок ограничений системы требовал значительно большего объема вычислений и был менее надежен.

Во-вторых, эти и другие, примеры показывают, что альтернативные (или по-другому двойственные) алгоритмы внутренних точек позволяют, как правило, быстрее получать решение исходной системы или быстрее устанавливать ее несовместность. Этот результат подтверждает давно наблюдаемый экспериментальный факт: двойственные оценки алгоритмов внутренних точек сходятся быстрее к решению двойственной задачи, чем сходятся исходные переменные к решению исходной задачи оптимизации. Недавно это удалось доказать теоретически для невырожденных задач [10]. Этот факт означает, что если мы решаем задачу двойственными алгоритмами, то быстрее сходятся к решению переменные исходной задачи.

В-третьих, эти примеры подтверждают пользу от сочетания теоретических и экспериментальных исследований алгоритмов. Они показали, что разработанные на основе теоретических соображений новые варианты алгоритмов (F2, G2) более эффективны, чем имеющиеся. Это позволяет уверенно рекомендовать эти новые варианты (особенно G2) для практического использования.

3. Задачи линейного программирования с двусторонними ограничениями на переменные

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$c^T x \rightarrow \min, Ax = b, g \leq x \leq d. \quad (7)$$

Двойственная к ней задача линейного программирования имеет вид

$$b^T u - d^T v + g^T w \rightarrow \max, A^T u - v - w = c, v \geq 0, w \leq 0. \quad (8)$$

Несложно убедиться, что в данном случае двойственная задача всегда имеет допустимые (по ограничениям задачи) решения. Поэтому из гипотетически

возможных трех вариантов несобственных (не имеющих решений) задач линейного программирования [3] в данном случае реализоваться может лишь один вариант. Справедлива

Теорема 4. *Задачи (7), (8) не имеют решения в том и только том случае, если несовместны ограничения задачи (7), что конструктивно может быть выявлено как выполнение неравенства (6) при некотором $u \in R^m$. В этом и только этом случае целевая функция задачи (8) неограниченна сверху на множестве допустимых по ограничениям этой задачи решений.*

Двойственная задача (8) очень удобна в вычислительном отношении. Например, для нее очень легко можно сформировать допустимое решение удовлетворяющее всем ограничениям-неравенствам в строгой форме. Например, можно положить $u^0 = 0$, $v = (c)_+ + e$, $w = (c)_- - e$, где e – вектор R^n , состоящий из единиц. Такой вектор может служить стартовой точкой для оптимизации в области допустимых решений алгоритмом внутренних точек.

Задача (8) может быть естественным образом представлена в виде проблемы минимизации выпуклой кусочно-линейной функции от m переменных. Она равносильна проблеме

$$b^T u - d^T (A^T u - c)_+ + g^T (A^T u - c)_- \rightarrow \max, u \in R^m.$$

В процессе итеративного улучшения решения этой задачи многими из известных методов безусловной оптимизации либо на очередной итерации получим выполнение неравенства (6), либо придем к оптимальному решению задачи (8) и, следовательно, задачи (7). В этом случае x – множители Лагранжа ограничений-равенств задачи (8),

$$v = (A^T u - c)_+, w = (A^T u - c)_-.$$

4. Выпуклая оптимизация при линейных ограничениях

Пусть F выпуклая дифференцируемая функция от векторов R^n . Рассматривается задача

$$F(x) + c^T x \rightarrow \min, Ax = b, g \leq x \leq d. \quad (9)$$

В докладе, с использованием преобразования Лежандра-Фенхеля, формулируются равносильные (9) двойственная, самосопряженная и симметричная задачи оптимизации, а также равносильная им система уравнений и неравенств. Эти равносильные формулировки могут служить для физической и экономической интерпретации решений, для выбора эффективных алгоритмов расчетов.

Особое внимание уделено случаям, когда F сепарабельная и квадратическая функция. Рассматриваются следующие области приложения задачи вида (9) и равносильных ей: 1) регуляризация в линейной оптимизации; 2) поиск нормальных решений систем линейных неравенств; 3) модели потокораспределения, включая нелинейные транспортные задачи, электрические цепи, гидравлические цепи (модели, используемые для

управления и идентификации состояния трубопроводных систем тепло-водо-газо-нефтеснабжения).

Литература

1. **Зоркальцев В.И., Киселева М.А.** Системы линейных неравенств. Иркутск: ИГУ, 2007. – 129 с.
2. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. – 488 с.
3. **Еремин И.И.** Двойственность для регуляризованных задач линейного программирования. // Материалы конференции Проблемы оптимизации и экономические приложения. – Омск: Омский филиал ИМ СО РАН, 2003. – С. 33–35.
4. **Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю.** Исследование алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути. Иркутск: препринт СЭИ СО РАН, 1997, №7. – 50с.
5. **Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю.** Новые алгоритмы оптимизации в конусе центрального пути // Дискретный анализ и исследование операций, 1999, том 6, №1, с.33-42.
6. **Крумм Л.А.** Метод приведенного градиента при управлении энергетическими системами. – Новосибирск: Наука, 1977. – 368с.
7. **Дикин И.И., Зоркальцев В.И.** Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 144 с.
8. **Зоркальцев В.И.** Метод относительно внутренних точек. Сыктывкар: Коми фил. АН СССР, 1984. – 14 с.
9. **Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю.** Исследование систем неравенств алгоритмами внутренних точек на задачах поиска допустимых режимов электроэнергетических систем. – Иркутск, 1997. – 30 с. – (Препр. СЭИ СО РАН; № 10).
10. **Зоркальцев В.И.** Об одном классе алгоритмов внутренних точек // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – Т. 49. – №12. – С. 1–18.

ОБОБЩЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зоркальцев В.И.

(Институт систем энергетики СО РАН. Иркутск)

Л.Т. Ащепковым и Д.В. Давыдовым [1] введено понятие «универсальное решение» для математических моделей с интервально заданными (вследствие объективно имеющиеся неопределенности) экзогенными показателями. Под этим термином ими предложено понимать такой набор эндогенных показателей, при котором максимальные суммарные абсолютные значения отклонения в выполнении всех условий модели (в рамках заданных диапазонов экзогенных показателей) минимальны.

Вполне естественно возникает желание ввести модификации в такое определение «универсального решения». Во-первых, представляется полезным в минимизируемой функции учитывать отдельно отклонения с положительными и отрицательными значениями для каждого ограничения, а не только максимальное из них по абсолютной величине. Это дает более точное описание интервала возможных отклонений в выполнении ограничения.

Во-вторых, представляется полезным использование в качестве минимизируемой функции от отклонений в обе стороны не только невзвешенную ортоэдрическую норму, но также и взвешенную ортоэдрическую норму. При этом веса могут отражать степень важности выполнения отдельных условий модели, используемые единицы измерений и, наконец, могут служить управляемыми параметрами. Более того, вполне разумно воспользоваться евклидовыми (также взвешенными), гельдеровскими нормами. При этом, также вполне естественно, возникает желание дать смысловую нагрузку на минимизируемую функцию. Можно рассматривать ее измеритель ущербов или потерь от нарушения тех либо иных ограничений модели.

В докладе рассматривается аксиоматически определенный широкий класс возможных штрафных функций от векторов с неотрицательными компонентами. В качестве еще одного возможного определения «универсального решения» предлагается использовать парето-оптимальные решения многокритериальной задачи минимизации отклонений в обе стороны для всех ограничений задачи.

В докладе рассматриваются свойства и взаимосвязи указанных выше обобщений универсальных решений для случая, когда модель задана в виде системы линейных уравнений. Этот случай может служить базой для других более сложных моделей, в том числе рассмотренных в [1] интервальных задач линейного программирования, интервальных матричных игр, задач оценивания состояний, оптимального управления.

1. Универсальные решения

Пусть A – интервально заданная матрица размера $m \times n$, b – интервально заданный вектор в R^n . Рассматривается проблема определения вектора $x \in R^n$, при котором достигается наиболее точное решение (в некотором, уточняемом далее смысле) системы линейных уравнений

$$Ax = b. \quad (1)$$

Усложняющим обстоятельством является то, что коэффициенты матрицы A и вектора b сами являются неизвестными (неопределенными) величинами. Известно только, что они должны удовлетворять интервальным ограничениям:

$$\underline{A} \leq A \leq \bar{A}, \quad \underline{b} \leq b \leq \bar{b}. \quad (2)$$

Здесь: \underline{A} , \bar{A} – заданные матрицы размера $m \times n$, \underline{b} , \bar{b} – заданные векторы из R^n . Причем

$$\underline{A} \leq \bar{A}, \quad \underline{b} \leq \bar{b}.$$

Под неравенствами для матриц одинакового размера понимается выполнение таких же неравенств для всех элементов этих матриц с одинаковыми номерами (аналогично неравенствам для векторов).

В [1] и др. работах этих авторов используется введенное ими понятие ε – решения проблемы (1) при $\varepsilon \in R^n$, $\varepsilon \geq 0$. Этим термином называется такой вектор $x \in R^n$, при котором выполняется неравенство

$$|Ax - b| \leq \varepsilon \quad (3)$$

для всех A и b , удовлетворяющих (2). Здесь под выражением $|y|$ для $y \in R^m$ понимается вектор R^m , составленный из абсолютных значений компонент вектора y . Отметим, если ставить проблему поиска x и ε из заданных интервалов их возможных значений, то получим базисную постановку интервальных задач С.П. Шарого [2]. Эту постановку можно развивать путем введения многоэтапных интервальных символов «существует» (требуется найти) и «для всех». Здесь ограничимся одноэтапной постановкой.

Универсальным решением проблемы (1) было предложено [1] называть такое ε – решение, при котором ε минимально по «некоторой норме». При этом авторы [1] используют только ортоэдрическую норму. В таком случае вектор ε определяется как оптимальное решение задачи

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \rightarrow \min \quad (4)$$

при ограничениях

$$-\varepsilon \leq Ax - b \leq \varepsilon, \quad (5)$$

$$\varepsilon \geq 0 \quad (6)$$

и условию (2). Отметим, что переменными в этой задаче выступают не только компоненты векторов x и ε , но и компоненты вектора b и коэффициенты матрицы A . При этом существует принципиальная разница между этими двумя типами переменных. В задаче (4) – (6), (2) требуется определить конкретные значения векторов x , ε . Эти значения должны быть таковыми,

чтобы при всех A и b из интервалов (2) выполнялись условия (5). В [1] показано как представить задачу (4) – (6) в виде задачи линейного программирования.

2. Модификации

Для получаемого в результате решения задачи (4) – (6), (2) универсальные решения максимальные отклонения для отдельных ограничений системы (1) в одну и другую сторону могут различаться. В определении ε – решения и затем универсального решения учитываются только максимальное из этих отклонений. При этом реальный интервал отклонений в выполнении ограничений системы (1) может быть уже, чем интервал $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Представляется полезным в том числе в целях уточнения и сужения интервала возможных отклонений учитывать порознь отклонения в выполнении условий (1) с разными знаками. Назовем d, g – решением системы (1) при $d, g \in R_+^m$ вектор $x \in R^n$, при котором для всех A и b , удовлетворяющих (2), выполняются неравенства

$$-g \leq Ax - b \leq d. \quad (7)$$

Ортоэдрическая норма в задаче (4) – (6), (2) выполняет роль штрафной (за нарушение ограничений (1)) функции. Кроме ортоэдрической и других норм могут использоваться и другие штрафные функции. Определим класс возможных штрафных функций F от векторов d и g из R_+^m . Будем обозначать R_+^m – множество m – мерных векторов с неотрицательными компонентами.

Потребуем, чтобы любая функция $f \in F$ была непрерывной и удовлетворяла следующему условию: если для векторов $d, g, \tilde{d}, \tilde{g}$ из R_+^m выполняются неравенства

$$\tilde{d} \leq d, \tilde{g} \leq g \quad (8)$$

и при этом

$$\sum_{j=1}^n \tilde{d}_j + \sum_{j=1}^n \tilde{g}_j < \sum_{j=1}^n d_j + \sum_{j=1}^n g_j, \quad (9)$$

то

$$f(\tilde{d}, \tilde{g}) < f(d, g). \quad (10)$$

Согласно (8), (9) пара векторов \tilde{d}, \tilde{g} характеризует ситуацию, когда все отклонения в выполнении условия (1) не меньше, чем в ситуации, характеризуемой векторами максимальных отклонений d, g . При этом хотя бы одно отклонение меньше, что в дополнении к (8) выражает условие (9). Согласно (10) в такой ситуации штрафная функция должна получать меньшее значение.

Примером функции из F может служить

$$f(d, g) = \sum_{j=1}^n h_j \left(\sum_{j=1}^n d_j \right)^p + \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{j=1}^n g_j \right)^p \quad (11)$$

при заданном степенном коэффициенте $p \geq 1$ и заданных векторах весовых коэффициентов $h \in R_{++}^n$, $g \in R_{++}^n$, где R_{++}^n – множество n -мерных векторов с положительными всеми компонентами. При $p=1$ функция (11) соответствует взвешенной ортоэдрической норме от вектора образуемого соединения векторов d и g . При $p > 1$ функция (11) является результатом возрастающего дифференцируемого преобразования (возведение в степень p) взвешенной гельдеровской нормы от соединения векторов d и g .

Другим примером функции из F может служить

$$f(d, g) = \sum_{j=1}^n h_j \left(d_j + g_j \right)^p \quad (12)$$

при заданных $p \geq 1$, $h \in R_{++}^n$.

Модифицированным универсальным решением проблемы (1), порожденным штрафной функцией $f \in F$ назовем векторы $x \in R^n$, $d \in R_+^n$, $g \in R_+^n$, являющиеся решением задачи

$$f(d, g) \rightarrow \min \quad (13)$$

при ограничении (7) и условиях

$$d \geq 0, g \geq 0. \quad (14)$$

Анонсируем следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой функции $f \in F$ существует модифицированное универсальное решение, порождаемой этой функцией.

3. Парето-оптимальные решения

В качестве конкретизации проблемы (1) можно предложить многокритериальную задачу: найти $x \in R^n$, $d \in R_+^m$, $g \in R_+^m$, при которых для всех A и b , удовлетворяющих (2), выполняются неравенства (7) и при этом

$$|d_i| \rightarrow \min, |g_i| \rightarrow \min, i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Эта задача имеет $2m$ целевых функций и сама нуждается в доопределении, для чего предлагается использовать понятие Парето-оптимальных решений многокритериальных задач оптимизации.

Парето-оптимальными решениями проблемы (15) назовем векторы $x \in R^n$, $d \in R_+^m$, $g \in R_+^m$, составляющие d , g – решения проблемы (1) такие, что не найдется других векторов $\tilde{x} \in R^n$, $\tilde{d} \in R_+^m$, $\tilde{g} \in R_+^m$, составляющих \tilde{d} , \tilde{g} – решения проблемы (1), при которых выполняются неравенства (8), (9).

Теорема 2. Множество Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи (15) совпадает с множеством модифицированных универсальных решений, порождаемых функциями из F .

4. Особые решения

Рассматриваемые в данном докладе факты являются переложением к интервально определенной системе линейных уравнений результатов осуществляемых в настоящее время автором исследований свойств наименее удаленных от начала координат точек полиэдров – множеств решений систем линейных неравенств. Эти исследования являются развитием ранее выполненных работ по изучению свойств наименее удаленных от начала координат точек линейных многообразий [3].

Основополагающую роль в описаниях множеств наименее удаленных от начала координат точек линейных многообразий играют их опорные векторы. Так названы векторы, имеющие максимальный носитель по сравнению с другими векторами многообразия. Напомним, что носителем вектора $x \in R^n$ называется набор номеров его ненулевых компонент. Носитель будем обозначать

$$J(x) = \{j : x_j \neq 0\}.$$

Как было установлено, в линейном многообразии содержится только конечное число опорных векторов. Их выпуклая оболочка содержит наименее удаленные от начала координат точки линейного многообразия для широкого класса определений этих точек. В частности, этому множеству принадлежат все векторы линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Этот факт позволяет, в частности, определять диапазоны возможных вариаций отдельных компонент вектора решений задачи поиска наименее удаленных от начала координат точек линейных многообразий. Например, диапазоны вариаций решений при варьировании весовых коэффициентов в методе наименьших квадратов.

Для полиэдров аналогичную роль играют, так называемые, особые решения систем линейных неравенств – решения с неуменьшаемым носителем и неуменьшаемым набором неактивных ограничений. Введением трех векторов дополнительных переменных представим системы (2), (7) в следующем виде

$$Cx + Ds - d + h = \underline{b}, \quad (16)$$

$$Cx - Ds + g - y = \bar{b}, \quad (17)$$

$$-s \leq x \leq s, \quad (18)$$

$$d \geq 0, \quad g \geq 0, \quad h \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (19)$$

Здесь

$$C = \frac{1}{2}(A + \bar{A}), \quad D = \frac{1}{2}(\bar{A} - A).$$

Теорема 3. Любое d, g -решение системы (1), путем введения дополнительных векторов $s \in R^n, h \in R_+^n, y \in R_+^n$, можно представить как решение системы линейных уравнений и неравенств (16) – (19). И наоборот, любое решение системы линейных неравенств (16) – (19) является d, g -решением системы (1) по векторам x, d, g .

Решение системы (16) – (19) с нерасширяемыми носителями векторов d, h, y, g будем называть особым решением проблемы (1). Иными словами, решение системы (16) – (19) x, s, d, g, h, y будет особым решением проблемы (1), если не существует другого решения системы (16) – (19) $\tilde{x}, \tilde{s}, \tilde{d}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{y}$ такого, что

$$J(d) \subseteq J(\tilde{d}), J(g) \subseteq J(\tilde{g}),$$

$$J(h) \subseteq J(\tilde{h}), J(y) \subseteq J(\tilde{y}).$$

и при этом, хотя бы одно из этих включений выполняется в строгой форме.

Теорема 4. *Не существует двух особых решений проблемы (1) x, s, d, g, h, y и $\tilde{x}, \tilde{s}, \tilde{d}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{y}$, для которых*

$$J(d) = J(\tilde{d}), J(g) = J(\tilde{g}), J(h) = J(\tilde{h}), J(y) = J(\tilde{y}).$$

Теорема 5. *Существует конечное число классов особых решений проблемы (1) с разными носителями векторов d, g, h, y .*

Теорема 6. *Парето-оптимальные решения проблемы (1) находятся в выпуклой оболочке особых решений проблемы (1).*

В качестве дополнения следует отметить, что не любая выпуклая комбинация особых решений проблемы (1) дает Парето-оптимальное решение этой проблемы. Более того, множество Парето-оптимальных при $m \geq 4$ может быть невыпуклым, но оно всегда является связным.

Литература

1. **Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.** Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006. – 151 с.
2. **Шарый С.П.** Интервальные алгебраические задачи и их численное решение. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2000. – 332 с.
3. **Зоркальцев В.И.** Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск: Наука, 1995. – 220 с.

Интервальные итерационные методы для расчета установившихся режимов электрических систем

А.А.ИБРАГИМОВ

Национальный университет Узбекистана

E-mail: alim-ibragimov@mail.ru

В данной работе рассматривается задача, которая сводится к решению системы нелинейных уравнений, связывающих токи и напряжения в узлах электрической сети при интервальной недетерминированности исходных данных. Излагаются некоторые интервальные итерационные методы расчёта параметров установившихся режимов сетей. Проводится анализ сходимости этих методов.

1. Введение

Расчеты установившихся режимов являются основными при решении задач, связанных с проектированием и эксплуатацией электрических систем. Результаты этих расчетов используются при планировании режимов и оперативном управлении, а также служат базой для выполнения оптимизации, анализа устойчивости и надежности.

Большинство разработанных и используемых в настоящее время методов для расчёта режимов и потерь электроэнергии (ЭЭ) в сетях всех ступеней напряжения основаны на детерминированном представлении исходной информации, т.е. используют те или иные допущения. Фактически, имеющаяся исходная информация для расчетов обладает неопределённостью (является неполной или ограниченно достоверной), в частности, характеризуются заданием интервальных значений параметров элементов и режимов работы, обусловленным их естественным разбросом, вариацией в процессе функционирования, погрешностями измерений режимов или другими факторами.

Применение детерминированных или вероятностно-статистических методов для расчёта режимов и потерь ЭЭ не учитывает указанные выше особенности исходной информации. Результаты расчётов, получаемые в виде детерминированных значений также не отражают возможные диапазоны изменения режимных переменных. Применение же вероятностно-статистических методов требует получения большого объёма статистических данных и построения сложных моделей, что само по себе вызывает известную неопределённость. Поэтому основным направлением совершенствования методов расчёта режимов и потерь для повышения эффективности передачи и распределения ЭЭ является максимально возможная их адаптация к существующей информационной обеспеченности расчётов в энергосистеме или в каждом электросетевом предприятии. Одним из путей такого совершенствования является использование методов интервального анализа [1, 2, 3]. Интервальный подход позволяет внести математическую строгость в построение численных алгоритмов, учитывающих интервальную неопределённость значений параметров режима ЭС.

Применение интервального аппарата в теории ЭЦ не являются абсолютно новой методологией, в настоящее время по этой теме имеются достаточное количество работ исследователей из разных стран мира, например [4, 5, 6, 7]. Но поиск более эффективных методов расчета все ещё продолжается.

2. Постановка задачи

Математически задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами [8, 9], связывающих токи и напряжения в узлах сети:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \frac{s_i}{\dot{x}_i} - a_{i0}x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь

a_{ij} — элементы комплексной матрицы собственных и взаимных проводимостей системы;
 s_i — значение мощности в i -ом узле;

x_i — вектор-столбец напряжений узлов, а \dot{x}_i — комплексно-сопряженное число для x_i ;

a_{i0} — матрица-столбец проводимостей ветвей связи балансирующего узла с остальными узлами;

x_0 — напряжения балансирующего узла.

Параметры балансирующего узла a_{i0} и x_0 считаются заданными, но могут и меняться в процессе решения более общей задачи. Система (1) является «разреженной» в том смысле, что большинство коэффициентов a_{ij} равны нулю. Они отличны от нуля в том случае, если i -й и j -й узлы сети связаны непосредственно.

В дальнейшем изложении мы пользуемся обозначениями из проекта неформального международного стандарта [10]. В частности, интервальные величины выделяются в тексте жирным шрифтом, а неинтервальные никак не выделяются.

В интервальном анализе в качестве комплексных интервалов чаще всего используются прямоугольные и круговые комплексные интервалы. Соответствующие их множества обозначается через \mathbb{IC}_{rect} и \mathbb{IC}_{circ} . Ниже мы будем рассматривать интервалы только из \mathbb{IC}_{rect} и далее, для краткости обозначим это множество просто \mathbb{IC} :

$$\mathbf{a} = \{a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C} \mid a_1 \in \mathbf{a}_1, a_2 \in \mathbf{a}_2\}$$

для вещественных интервалов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{IR}$.

Теперь запишем систему (1) в интервальном виде, который соответствует режимным параметрам с интервальной неопределенностью:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}x_j = \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{x}_i} - a_{i0}x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

или

$$\dot{x}_i \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij}x_j = \mathbf{s}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Обозначая девую часть последней системы через $F(\mathbf{a}, x)$, можем записать её в кратком виде как

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{s} \text{ для } a \in \mathbf{a}, s \in \mathbf{s}. \quad (4)$$

Для системы (3) объединенным множеством решений называют множество

$$\Xi(F, \mathbf{a}, \mathbf{s}) = \{x \in \mathbb{C} \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists s \in \mathbf{s})(F(a, x) = s)\}, \quad (5)$$

и ниже мы будем рассматривать задачу его внешнего интервального оценивания. Таким образом, нашей целью является нахождение, по-возможности, наилучшего (т.е. наименьшего по включению) интервального вектора, ограничивающего множество решений $\Xi(F, \mathbf{a}, \mathbf{s})$.

3. Основные определения

Определение 1. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 \in \mathbb{C}$. Тогда величина $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|$ называется абсолютной величиной или модулем интервала \mathbf{a} .

Определение 2. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 \in \mathbb{C}$. То шириной интервала \mathbf{a} будем называть величину $\text{wid } \mathbf{a} = \text{wid } \mathbf{a}_1 + \text{wid } \mathbf{a}_2$.

Введем Хаусдорфова метрику на пространстве \mathbb{C}^n .

Определение 3. Пусть $\mathbf{a} = [a_1, a_2], \mathbf{b} = [b_1, b_2] \in \mathbb{R}$. Тогда расстояние между элементами \mathbf{a} и \mathbf{b} вводится следующим образом:

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Определение 4. Пусть $\mathbf{x} = [x_1, x_2], \mathbf{y} = [y_1, y_2] \in \mathbb{R}^n$. Тогда метрика на многомерном интервальном пространстве для векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} определяется как:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{\|x_1 - y_1\|, \|x_2 - y_2\|\},$$

где $\|\cdot\|$ — абсолютная векторная норма на \mathbb{R}^n .

Определение 5. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2, \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2 \in \mathbb{C}^n$. Тогда метрика на пространстве \mathbb{C}^n для векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} определяется соотношением:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \text{dist}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2).$$

4. Интервальные итерационные методы расчета

При решении системы (2) возникает определенные сложности в реализации расчетов, так как приходится иметь дело с комплексными интервальными матрицами высокого порядка и с большими системами нелинейных уравнений. Для нелинейных систем уравнений естественно применять итерационные методы решения. При этом очень важна структура итерационного процесса, от нее будет зависеть удобство реализации процесса, скорость сходимости и качества интервального решения.

4.1. Метод простой итерации

Он определяется из соотношения

$$\mathbf{a}_{ii}\mathbf{x}_i^{(k+1)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)} = \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{\mathbf{x}}_i^{(k)}} - a_{i0}x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

в котором можно считать, что $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$. В противном случае, при $0 \in \mathbf{a}_{ii}$, путём перестановки уравнений системы можно добиться того, чтобы все диагональные элементы неособенной матрицы системы не содержали нуля. Далее расчёт производится по формуле

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} := \mathbf{x}_i^{(k)} \cap \mathbf{a}_{ii}^{-1} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)} + \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{\mathbf{x}}_i^{(k)}} - a_{i0}x_0 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

где $\mathbf{x}_i^{(k)}$ и $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ — значения компонент интервального вектора решения \mathbf{x} , соответственно, при k -й и $(k+1)$ -й итерациях.

4.2. Метод обратной итерации

Итерационная формула определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j^{(k)} = \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{x}_i^{(k+1)}} - a_{i0} x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

а затем расчёт производится по формуле

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} := \mathbf{x}_i^{(k)} \cap \dot{\mathbf{s}}_i \left(\sum_{j=0}^n \dot{\mathbf{a}}_{ij} \dot{\mathbf{x}}_j^{(k)} \right)^{-1}, \quad \mathbf{x}_0^{(k)} = x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

4.3. Метод обратной матрицы

Расчетная формула определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j^{(k+1)} = \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{x}_i^{(k)}} - a_{i0} x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

и, следовательно, расчёт производится по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}^{(k)}, \quad (11)$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 / \dot{\mathbf{x}}_1^{(k)} - a_{10} x_0 \\ \mathbf{s}_2 / \dot{\mathbf{x}}_2^{(k)} - a_{20} x_0 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n / \dot{\mathbf{x}}_n^{(k)} - a_{n0} x_0 \end{pmatrix}$.

Итерационный расчёт продолжается по формулам (7),(9),(11), пока не выполнится условие $\text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) < \epsilon$, где ϵ – требуемая точность.

Существует и другие итерационные методы решения рассматриваемой задачи, но мы в данной работе ограничиваемся приведенными выше.

5. Исследование на сходимость

В дальнейших рассуждениях мы опираемся на понятие нормы интервальных векторов и матриц. Векторная норма будет произвольной, причём справедливо $\|\mathbf{x}\| = \|\dot{\mathbf{x}}\|$ для любого интервального вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{I}\mathbb{C}^n$. Матричная норма определяется стандартно, как подчинённая норма

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

При условиях, наложенных на векторную норму, для любой диагональной интервальной матрицы \mathbf{D} будем иметь $\|\mathbf{D}\| = \max_i |\mathbf{d}_{ii}|$.

5.1. Метод простой итерации

Обозначим $\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$. Тогда в силу (6), имеем

$$\mathbf{z}_i^{(k+1)} = \mathbf{x}_i^{(k+1)} - \mathbf{x}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\mathbf{a}_{ij}}{\mathbf{a}_{ii}} (\mathbf{x}_j^{(k)} - \mathbf{x}_j) - \frac{\mathbf{s}_i}{\mathbf{a}_{ii} \dot{\mathbf{x}}_i \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)}} (\dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} - \dot{\mathbf{x}}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или в матричном виде

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{B} \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{D}_1^{(k)} \dot{\mathbf{z}}^{(k)}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{B} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathbf{a}_{12}}{\mathbf{a}_{11}} & \dots & \frac{\mathbf{a}_{1n}}{\mathbf{a}_{11}} \\ \frac{\mathbf{a}_{21}}{\mathbf{a}_{22}} & 0 & \dots & \frac{\mathbf{a}_{2n}}{\mathbf{a}_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathbf{a}_{n1}}{\mathbf{a}_{nn}} & \frac{\mathbf{a}_{n2}}{\mathbf{a}_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1^{(k)} = - \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{a}_{11} \dot{\mathbf{x}}_1 \dot{\mathbf{x}}_1^{(k)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{a}_{22} \dot{\mathbf{x}}_2 \dot{\mathbf{x}}_2^{(k)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{a}_{nn} \dot{\mathbf{x}}_n \dot{\mathbf{x}}_n^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

Используя (12) и учитывая $\|\mathbf{z}\| = \|\dot{\mathbf{z}}\|$, мы имеем

$$\|\mathbf{z}^{(k+1)}\| \leq (\|\mathbf{B}\| + \|\mathbf{D}_1^{(k)}\|) \|\mathbf{z}^{(k)}\|,$$

и метод будет сходиться, если $\|\mathbf{B}\| + \|\mathbf{D}_1^{(k)}\| \leq q < 1$ при всех k .

Для оценки нормы интервальной матрицы \mathbf{B} пригодны любые способы, используемые при решении интервальных систем линейных алгебраических уравнений (см.,

например, [3] стр. 88-89). Норма $\mathbf{D}_1^{(k)}$ будет равна $\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\mathbf{s}_i}{\mathbf{a}_{ii} \dot{\mathbf{x}}_i \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)}} \right|$.

В процессе счета её можно принимать приближенно равной $\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\mathbf{s}_i|}{|\mathbf{a}_{ii}| |\mathbf{x}_i^{(k)}|^2}$.

5.2. Метод обратной итерации

В обозначениях из предыдущего пункта из (8) следует

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A} \mathbf{x} = \left(\left(\frac{\mathbf{s}}{\dot{\mathbf{x}}^{(k+1)}} - a_0 x_0 \right) - \left(\frac{\mathbf{s}}{\dot{\mathbf{x}}} - a_0 x_0 \right) \right),$$

поэтому

$$\mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}) = - \frac{\mathbf{s}}{\dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}^{(k+1)}} (\dot{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \dot{\mathbf{x}}).$$

Теперь можем записать

$$\mathbf{A} \mathbf{z}^{(k)} = -\mathbf{D}_2^{(k+1)} \dot{\mathbf{z}}^{(k+1)}, \quad \text{так что} \quad \dot{\mathbf{z}}^{(k+1)} = -(\mathbf{D}_2^{(k+1)})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{z}^{(k)},$$

где $\mathbf{z}^{(k)}$ и \mathbf{A} имеют прежнее значение и $\mathbf{D}_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{s}_1}{\dot{\mathbf{x}}_1 \dot{\mathbf{x}}_1^{(k)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{s}_2}{\dot{\mathbf{x}}_2 \dot{\mathbf{x}}_2^{(k)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\mathbf{s}_n}{\dot{\mathbf{x}}_n \dot{\mathbf{x}}_n^{(k)}} \end{pmatrix}$.

Отсюда получаем, что $\|\mathbf{z}^{(k+1)}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|(\mathbf{D}_2^{(k+1)})^{-1}\| \|\mathbf{z}^{(k)}\|$.

5.3. Метод обратной матрицы

Воспользуемся теми же обозначениями, которые применялись для исследования сходимости методов простой и обратной итерации. Имеем $\mathbf{A}z^{(k+1)} = -\mathbf{D}_2^{(k)}\dot{z}^{(k)}$, или $z^{(k+1)} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^{(k)}\dot{z}^{(k)}$. Отсюда $\|z^{(k+1)}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{D}_2^{(k)}\| \|z^{(k)}\|$.

В последних двух случаях мы также имеем одну фиксированную матрицу \mathbf{A} и одну переменную матрицу $\mathbf{D}_2^{(k)}$ или $\mathbf{D}_2^{(k+1)}$. Если матрицы $\mathbf{D}_2^{(k)}$ и $\mathbf{D}_2^{(k+1)}$ близки друг к другу в последних методах, то сходимость одного из методов будет означать расходимость другого, и наоборот.

Список литературы

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦВЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] КАЛЬМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [3] ШАРЫЙ С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. – Электронная книга, см. <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks>
- [4] КИНШТ Н.В., КАЦ М.А. Интервальный анализ в задачах теории электрических цепей. // *Электричество*. 1999. №10. С. 45–57.
- [5] BARBOZA L.V., DIMURO G.P., REISER R.H.S. Interval Mathematics Applied to the Load Flow Analysis // Proc. of the 17-th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France, 2005.
- [6] WANG Z., ALVARADO F.L. Interval Arithmetic in Power Flow Analysis. // *Transactions on Power Systems* vol. 7, n3, p. 1341-1349, 1992.
- [7] МАНУСОВ В.В., МОИСЕЕВ С.М., ПЕРКОВ С.Д. Интервальный анализ режимов электрических систем. // *Изв. вузов. Электромеханика* №9, 1998.
- [8] ФАЗЫЛОВ Х.Ф., НАСЫРОВ Т.Х. *Установившиеся режимы электроэнергетических систем и их оптимизация*. – Ташкент: Молия, 1999.
- [9] ЖИДКОВ Н.П., ИЛЫШЕВА Н.П., ТИМОФЕЕВ Д.В. О некоторых численных методах расчета электрических сетей // *Жур. выч. мат. и мат. физ.* Том 14, №5, стр. 1317–1323, 1974.
- [10] KEARFOTT R.B., NAKAO M.T., NEUMAIER A., RUMP S.M., SHARY S.P., HENTENRYCK P. Standardized notation in interval analysis. // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15, №1. С. 7–13. <http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps>.

Differential Approach in Spline Theory

Boris Kvasov*

Institute of Computational Technologies, Russian Academy of Sciences
Lavrentyev Avenue 6, Novosibirsk, 630090 Russia
email: kvasov@ict.nsc.ru

A method for constructing interpolation splines by solving differential multi-point boundary value problems (DMBVP) with subsequent discretization was described in [2, 3]. In comparison with the standard algebraic approach [5, 7], this method does not involve hyperbolic/biharmonic function evaluation, but requires the solution of a five-diagonal system, which can be ill-conditioned for unequally spaced data (see [4]). It is shown below that this system can be split into a set of positive five-diagonal linear ones and admit effective parallelization.

1 1-D Problem Formulation

Suppose that we are given the data

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad (1)$$

where $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$. Define

$$f[x_i, x_{i+1}] = (f_{i+1} - f_i)/h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Data (1) are called monotonically increasing if

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

and are called convex if

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq f[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, N.$$

The *shape preserving interpolation problem* consists in constructing a sufficiently smooth function S such that $S(x_i) = f_i$ for $i = 0, \dots, N + 1$ and S is monotone/convex on the intervals of monotonicity/convexity of the input data.

Obviously, the solution to the shape preserving interpolation problem is not unique. We seek it in the form of a hyperbolic tension spline.

Definition 1. The *hyperbolic interpolation spline* S with the set of tension parameters $\{p_i \geq 0 \mid i = 0, \dots, N\}$ is defined as the solution to the DMBVP

$$\frac{d^4 S}{dx^4} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \frac{d^2 S}{dx^2} = 0 \quad \text{for all } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N, \quad (2)$$

* Supported by grant 09-01-00186 of the Russian Foundation for Basic Research.

$$S \in C^2[a, b] \quad (3)$$

with the interpolation conditions

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, N+1 \quad (4)$$

and the boundary conditions

$$S''(a) = f''_0 \quad \text{and} \quad S''(b) = f''_{N+1}. \quad (5)$$

Boundary conditions (5) are used for simplicity. They can be replaced by boundary conditions of other types [3].

The second derivative values in the endpoint conditions (5) must be adjusted to the behaviour of the data. Otherwise we can obtain an incompatibility with the shape preserving restrictions [3]. For example, we can use the restrictions

$$f''_0 f[x_0, x_1, x_2] \geq 0, \quad f''_{N+1} f[x_{N-1}, x_N, x_{N+1}] \geq 0.$$

If we set $p_i = 0$ for all i in (2), then the solution to problem (2)–(5) is a cubic spline of the class C^2 , which gives a smooth curve but does not always preserve the monotonicity/convexity of the input data. In the limit as $p_i \rightarrow \infty$, we obtain a polygonal line that is shape preserving for the input data but is not smooth. In standard algorithms for automatic selection of the shape parameters p_i (see [3]), the latter are chosen so that the resulting curve is as much similar to a cubic spline as possible and simultaneously preserves the monotonicity/convexity of the input data.

2 Finite Difference Approximation

Consider the discretization of the DMBVP formulated. For this purpose, on each subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, we introduce an additional nonuniform mesh

$$x_{i,-1} < x_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,n_i} = x_{i+1} < x_{i,n_i+1}, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

with the steps $h_{ij} = x_{i,j+1} - x_{ij}$, $j = -1, \dots, n_i$, $i = 0, \dots, N$. We search for a mesh function

$$\{ u_{ij}, \quad j = -1, \dots, n_i + 1, \quad i = 0, \dots, N \},$$

satisfying the difference equations

$$24u[x_{i,j-2}, \dots, x_{i,j+2}] - 2\left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 u[x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}] = 0, \\ j = 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, \dots, N. \quad (6)$$

The approximation of smoothness conditions (3) gives the relations

$$u_{i-1, n_{i-1}} = u_{i,0}, \\ D_{i-1, n_{i-1}}^1 u_{i-1, n_{i-1}} = D_{i,0}^1 u_{i,0}, \quad i = 1, \dots, N, \\ D_{i-1, n_{i-1}}^2 u_{i-1, n_{i-1}} = D_{i,0}^2 u_{i,0}, \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} D_{ij}^1 u_{ij} &= \lambda_{ij} u[x_{i,j-1}, x_{ij}] + (1 - \lambda_{ij}) u[x_{ij}, x_{i,j+1}], \\ D_{ij}^2 u_{ij} &= 2u[x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}], \quad \lambda_{ij} = h_{ij} / (h_{i,j-1} + h_{ij}). \end{aligned}$$

Conditions (4) and (5) are transformed into

$$u_{i,0} = f_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad u_{N,n_N} = f_{N+1} \quad (8)$$

and

$$u[x_{0,-1}, x_{0,0}, x_{0,1}] = f_0'', \quad u[x_{N,n_N-1}, x_{N,n_N}, x_{N,n_N+1}] = f_{N+1}''. \quad (9)$$

Relations (7) and boundary conditions (9) make it possible to eliminate the “extra” unknowns $u_{i,-1}$ and u_{i,n_i+1} , $i = 0, \dots, N$. To show this we use the notation

$$M_i = 2u[x_{i-1,n_{i-1}-1}, x_{i-1,n_{i-1}}, x_{i-1,n_{i-1}+1}] = 2u[x_{i,-1}, x_{i,0}, x_{i,1}].$$

Multiplying these equalities by $h_{i-1,n_{i-1}-1}/2$ and $h_{i,0}/2$, respectively, we rewrite them in the form

$$\begin{aligned} D_{i-1,n_{i-1}}^1 u_{i-1,n_{i-1}} &= u[x_{i-1,n_{i-1}-1}, x_{i-1,n_{i-1}}] + \frac{h_{i-1,n_{i-1}-1}}{2} M_i, \\ D_{i,0}^1 u_{i,0} &= u[x_{i,0}, x_{i,1}] - \frac{h_{i,0}}{2} M_i. \end{aligned}$$

Using the second equality in (7) we obtain

$$M_i = 2u[x_{i-1,n_{i-1}-1}, x_{i,0}, x_{i,1}], \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Thus the second divided differences in the equations (6) of the form

$$u[x_{i-1,n_{i-1}-1}, x_{i-1,n_{i-1}}, x_{i-1,n_{i-1}+1}] \quad \text{and} \quad u[x_{i,-1}, x_{i,0}, x_{i,1}]$$

can be replaced by $u[x_{i-1,n_{i-1}-1}, x_{i,0}, x_{i,1}]$. This permits us to eliminate the unknowns $u_{i-1,n_{i-1}+1}$ and $u_{i,-1}$, $i = 1, \dots, N$. The unknowns $u_{0,-1}$ and u_{N,n_N+1} are eliminated from boundary conditions (9). The discrete *mesh solution* is defined as

$$\{ u_{ij}, \quad j = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N \}. \quad (11)$$

The existence and uniqueness conditions of a solution to linear system (6)–(9) will be obtained below.

3 Parallel Algorithm for Five-Diagonal System

Let us consider the quasiuniform mesh which is uniform separately on each interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$, i.e. $h_{ij} = \tau_i$ for $j = -1, \dots, n_i$. In this case the

$$\begin{aligned}
 &u_{i-1,n_{i-1}-3} + a_{i-1}u_{i-1,n_{i-1}-2} + \eta_{i-1,n_{i-1}-1}u_{i-1,n_{i-1}-1} \\
 &\quad + \delta_{i-1,n_{i-1}-1}u_{i,1} = -\gamma_{i-1,n_{i-1}-1}f_i, \quad (13) \\
 &\delta_{i,1}u_{i-1,n_{i-1}-1} + \eta_{i,1}u_{i,1} + a_iu_{i,2} + u_{i,3} = -\gamma_{i,1}f_i, \quad i = 1, \dots, N, \\
 &u_{N,n_N-3} + a_Nu_{N,n_N-2} + (b_N - 1)u_{N,n_N-1} = -(a_N + 2)f_{N+1} - \tau_N^2 f''_{N+1}.
 \end{aligned}$$

Let numbers $u_{i,1}^{(0)}$, $u_{i,n_i-1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, N$, be given which correspond to the removed equations. The system (12) is split in $N + 1$ subsystems

$$\begin{aligned}
 &u_{i,0} = f_i, \quad u_{i,1} = u_{i,1}^{(0)}, \\
 &u_{i,j-2} + a_iu_{i,j-1} + b_iu_{i,j} + a_iu_{i,j+1} + u_{i,j+2} = 0, \quad j = 2, \dots, n_i - 2, \quad (14) \\
 &u_{i,n_i-1} = u_{i,n_i-1}^{(0)}, \quad u_{i,n_i} = f_{i+1}.
 \end{aligned}$$

Let us show that the obtained systems have a unique solution which can be found by usual five-diagonal Gaussian elimination.

We rewrite the system (14) as

$$\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i,$$

where

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i &= (u_{i,2}, u_{i,3}, \dots, u_{i,n_i-2})^T, \\
 \mathbf{f}_i &= (-a_iu_{i,1}^{(0)} - f_i, -u_{i,1}^{(0)}, 0, \dots, 0, -u_{i,n_i-1}^{(0)}, -a_iu_{i,n_i-1}^{(0)} - f_{i+1})^T.
 \end{aligned}$$

The matrix \mathbf{A}_i is symmetric. We observe that

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{C}_i + \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{B}_i^2 - \omega_i \mathbf{B}_i,$$

where

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Since,

$$\lambda_j(\mathbf{B}_i) = -2 \left(1 - \cos \frac{j\pi}{m_i}\right), \quad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad m_i = n_i - 2,$$

we have

$$\lambda_j(\mathbf{C}_i) = 4 \left(1 - \cos \frac{j\pi}{m_i}\right)^2 + 2\omega_i \left(1 - \cos \frac{j\pi}{m_i}\right), \quad j = 1, \dots, m_i - 1.$$

In addition, the eigenvalues of \mathbf{D}_i are 0 and 1, thus we deduce from a corollary of the Courant-Fisher theorem [1] that the eigenvalues of \mathbf{A}_i satisfy the following inequalities

$$\lambda_j(\mathbf{A}_i) \geq \lambda_j(\mathbf{C}_i) \geq 4 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m_i}\right)^2 + 2\omega_i \left(1 - \cos \frac{\pi}{m_i}\right).$$

Hence, \mathbf{A}_i is a positive matrix and we directly obtain that the five-diagonal linear system has a unique solution which can be stably found by usual five-diagonal Gaussian elimination [1].

We obtain a solution $u_{ij}^{(0)}$, $j = 0, \dots, n_i$, $i = 0, \dots, N$.

Using equations (13) let us recalculate the scalars $u_{i,1}^{(0)}$, $u_{i,n_i-1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, N$. For $i = 1, \dots, N$ we find

$$\begin{aligned} u_{i-1,n_{i-1}-1}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta_i} (\eta_{i,1} F_{i,1}^{(0)} - \delta_{i-1,n_{i-1}-1} F_{i,2}^{(0)}), \\ u_{i,1}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta_i} (-\delta_{i,1} F_{i,1}^{(0)} + \eta_{i-1,n_{i-1}-1} F_{i,2}^{(0)}), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} F_{i,1}^{(0)} &= -\gamma_{i-1,n_{i-1}-1} f_i - a_{i-1} u_{i-1,n_{i-1}-2}^{(0)} - u_{i-1,n_{i-1}-3}^{(0)}, \\ F_{i,2}^{(0)} &= -\gamma_{i,1} f_i - a_i u_{i,2}^{(0)} - u_{i,3}^{(0)}, \\ \Delta_i &= b_{i-1} b_i + (b_i - b_{i-1}) \frac{1 - \rho_i}{1 + \rho_i} - 1. \end{aligned}$$

From first and last equations of the system (13) we calculate

$$\begin{aligned} u_{0,1}^{(1)} &= \frac{1}{1 - b_0} ((a_0 + 2) f_0 + \tau_0^2 f_0'' + a_0 u_{0,2}^{(0)} + u_{0,3}^{(0)}), \\ u_{N,n_N-1}^{(1)} &= \frac{1}{1 - b_N} ((a_N + 2) f_{N+1} + \tau_N^2 f_{N+1}'' + a_N u_{N,n_N-2}^{(0)} + u_{N,n_N-3}^{(0)}). \end{aligned}$$

Solving repeatedly the system (14) we obtain a solution $u_{ij}^{(1)}$, $j = 0, \dots, n_i$, $i = 0, \dots, N$, etc. The calculations show that this algorithm is convergent.

References

1. G.H. Golub and C.F. Van Loan, Matrix Computations, John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
2. N.N. Janenko and B.I. Kvasov, An iterative method for the construction of polycubic spline functions, Soviet Math. Dokl. **11** (1970), 1643–1645.
3. B.I. Kvasov, Methods of Shape-Preserving Spline Approximation, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2000.
4. M. Rogina and S. Singer, Conditions of matrices in discrete tension spline approximations of DMBVP, Ann. Univ. Ferrara **53** (2007) 393–404.
5. H. Späth, One Dimensional Spline Interpolation Algorithms, A K Peters, Wellesley, MA, 1995.
6. N.N. Yanenko, A.N. Konovalov, A.N. Bugrov, G.V. Shustov, Organization of parallel computations and parallelization of Gaussian elimination, Numerical Methods in Continuum Mechanics, **9** (1978) 139–146 (in Russian).
7. Yu.S. Zav'yalov, B.I. Kvasov, V.L. Miroshnichenko, Methods of Spline Functions, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

ЗАДАЧА АПРИОРНОЙ ПРОКЛАДКИ МАРШРУТОВ ОБХОДА НЕВЫПУКЛЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ. ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД

С.В. Кругликов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Для решения ряда прикладных задач, в частности, связанных с навигацией и прокладкой маршрутов судов, представляет интерес разработка формализованных основ алгоритмов априорного планирования движения группы объектов в обход препятствий сложной структуры.

В работах, основанных на применении интервального анализа, предлагается представление сложных географических образований объединением непересекающихся прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Существует положительный опыт практического применения.

В работе рассмотрена задача моделирования на плоскости движения группы объектов ограниченной маневренности в обход системы невыпуклых препятствий. Формализация основана на применение априорных конструкций теории гарантированного управления и оценивания для иерархических систем, что хорошо согласуется с известным описанием береговой черты фрактальными множествами. Понятие «иерархическая система» допускает естественное наращивание в зависимости от усложнения условий и позволяет по единой методике моделировать маршрут, препятствия и проходы между ними. Соответствующие операторные постановки априорных гарантированных задач управления и оценивания, отвечающие прокладке оптимальных маршрутов и предварительной обработке географической информации могут рассматриваться как дуальные относительно структурированного семейства критериев.

Сформулирована система алгоритмов описывающих типовые ситуации и семейство возможных решений. Иерархическая система, моделирующая допустимый маршрут, представляет собой регулярную комбинацию элементарных подсистем, трубок траекторий, изменение сечения которых отражает накапливающиеся ошибки. Особенности характеристик конкретного объекта учитываются за счет выбора количества уровней иерархии и ограничений на рассматриваемые звенья по длине и радиусу. Для групп объектов, имеющих различные технические характеристиками, ограничения на маневренность формулируются через углы поворота и длины линейных участков.

Приведенные алгоритмы иллюстрируются на примере прототипа программного обеспечения, реализующего моделирование априорной прокладки маршрутов обхода системы невыпуклых препятствий, имеющих топологию звезды.

Функциональная модель непрерывных интервальных округлений.

А.Л. КРЮКОВА

Вологодский государственный педагогический университет

e-mail: kryukovanastya@yahoo.com

Мы рассматриваем интервальные округления в частично упорядоченных топологических пространствах. В данной работе строится функциональная модель непрерывных интервальных округлений.

В частично упорядоченном пространстве (X, \leq) будем рассматривать и обозначать $IE(X)$ совокупность отображений φ пространства X в себя, для которых выполнены условия: $(\forall x \in X)(x \leq \varphi(x))$ и $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2))$.

Определение. Отображение $\varphi \in IE(X)$ называется округлением (или замыканием [1]), если оно идемпотентно, т. е. удовлетворяет условию $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Определение. Множество точек $x \in X$, для которых $\varphi(x) = x$, будем называть множеством неподвижных точек округления φ и обозначать E_φ .

Теорема 1. Если в пространстве X любое его ограниченное снизу подмножество имеет точную нижнюю грань, то множество неподвижных точек полностью определяет округление.

Эта теорема позволяет сводить классификацию округлений к классификации множеств их неподвижных точек, что весьма удобно.

Процедура интервализации [2] сопоставляет любому упорядоченному пространству (X, \leq) новое пространство $Int(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$, таких что $x \leq y$. Порядок на $Int(X)$ вводится правилом $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, если $x_2 \leq x_1, y_1 \leq y_2$. Будем записывать элементы из $Int(X)$ в форме $[x, y]$, вместо (x, y) .

Определение. Округления на упорядоченном пространстве $Int(X)$ называются интервальными округлениями на (X, \leq) .

Далее мы рассматриваем только классические интервальные округления [3, 4], т. е. случай, когда X – действительная прямая R . Элементы $Int(X)$ в этом случае представляют собой замкнутые интервалы.

Естественно отождествлять интервал $[a, b]$ с точкой (a, b) координатной плоскости и в этом смысле говорить, например, о проекциях какого-то множества интервалов. Пусть φ – какое-нибудь округление на $Int(R)$, E_φ – множество его неподвижных точек. Обозначим через A и B проекции E_φ на оси X и Y . Для любого $x \in A$ положим $\alpha(x) = \sup\{y : (x, y) \in E_\varphi\}$, а для $y \in B$ – $\beta(y) = \inf\{x : (x, y) \in E_\varphi\}$. При этом функции α и β могут принимать значения $+\infty$ и, соответственно, $-\infty$.

Множества A, B и функции α, β (вместе с дополнительной информацией о достижении экстремумов) полностью определяют округление.

Теорема 2.

- (i) Множество A (множество B) является неограниченным снизу (сверху).
- (ii) Функция α (функция β) является неограниченной сверху (снизу) на любом множестве вида $\{x \in A : x < a\}$ ($\{y \in B : y > b\}$).

(iii) $\alpha(x) \geq x, \beta(y) \leq y$.

(iv) Если $(\beta(y), y) \in E_\varphi$, то $\alpha(\beta(y)) \geq y$; если $(x, \alpha(x)) \in E_\varphi$, то $\beta(\alpha(x)) \leq x$.

Обратно, всякий набор $\chi = (A, B, \alpha, \beta)$, удовлетворяющий условиям (i) – (iv), задает множество неподвижных точек некоторого интервального округления.

Определение. Набор $\chi = (A, B, \alpha, \beta)$, соответствующий округлению φ , называется его функциональной моделью.

Если округление φ непрерывно, то его функциональную модель можно существенно упростить. В этом случае образ множества интервалов (гомеоморфного полуплоскости) связан. Но для идемпотентного отображения образ совпадает с множеством неподвижных точек. Следовательно, множество E_φ связно для любого непрерывного округления φ .

Проекция A множества E_φ на ось X – образ связного множества при непрерывном отображении. Следовательно, A – связное подмножество прямой. Так как оно неограниченно снизу и замкнуто, то $A = (-\infty, a]$ для некоторого $a \in R$. Аналогично $B = [b, +\infty)$ для некоторого $b \in R$.

Лемма 3. Пусть φ – непрерывное округление, тогда пересечение E_φ с любой вертикальной, или горизонтальной прямой связно.

Доказательство. Пусть $M(x_0, y_0)$ и $N(x_0, y_1)$ принадлежат E_φ , и пусть $y_1 > y_0$. Докажем, что весь отрезок MN лежит в E_φ . Если это неверно, то множество $MN \setminus (MN \cap E)$ открытое в отрезке MN , имеет некий интервал смежности. Значит, найдутся точки $(x_0, y_3), (x_0, y_4) \in E_\varphi$ такие, что между ними ни одна точка не содержится. Выберем $\varepsilon < (y_4 - y_3)$, тогда существует такое δ , что если $y \in (y_3, y_3 + \delta)$, то $\varphi(x_0, y) = (z, t)$ отстоит от (x_0, y_3) меньше чем на ε . Это значит, что $t \in (y_3, y_4)$. Так как z меньше x_0 , то $\inf\{(z, t), (x_0, y_4)\} = (x_0, t)$. Следовательно, E_φ содержит точки между (x_0, y_3) и (x_0, y_4) , а это противоречие.

Введем функции $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in E_\varphi\}$, $\delta(y) = \sup\{x : (x, y) \in E_\varphi\}$. В силу замкнутости E_φ , имеем $(x, \gamma(x)) \in E_\varphi$, откуда $x \leq \delta(\gamma(x))$. Аналогично доказывается, что $y \geq \gamma(\delta(y))$.

Лемма 4.

(а) Функции γ и δ являются невозрастающими и непрерывными,

(б) E_φ состоит из всех точек (x, y) , удовлетворяющих неравенствам $y \geq \gamma(x), x \leq \delta(y)$.

Доказательство.

(а): Предположим, что $\gamma(x_1) < \gamma(x_2)$ для некоторых $x_1 < x_2$ из A . Так как функция γ неограничена сверху на $(-\infty, x_1]$, то найдется число $x_0 < x_1$ такое, что $\gamma(x_0) > \gamma(x_2)$. Так как $\gamma(x_2) < \gamma(x_0)$ и $\delta(\gamma(x_2)) \geq x_2 > x_0$, то точка $(x_0, \gamma(x_2))$ принадлежит E_φ . По лемме 3, пересечение множества E_φ с прямой $y = \gamma(x_2)$ связно. Так как оно содержит точки $(x_0, \gamma(x_2))$ и $(x_2, \gamma(x_2))$, то содержит и точки $(x_1, \gamma(x_2))$. Но это невозможно, поскольку $\gamma(x_2) > \gamma(x_1)$. Полученное противоречие доказывает монотонность (невозрастание) функции γ . Монотонность δ доказывается аналогично.

Предположим, что функция γ терпит разрыв в точке x_0 , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \gamma(x) = a > b = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \gamma(x)$. Точки (x_0, a) и (x_0, b) принадлежат множеству E_φ , так как оно замкнуто. Для любого $x < x_0$ точка (x, b) не содержится в E_φ ; из всех мажорирующих её точек множества E_φ наименьшей является $(x, \gamma(x))$. Поэтому $\varphi(x, b) = (x, \gamma(x))$. Следовательно при $x \rightarrow x_0$ имеем $(x, b) \rightarrow (x_0, b), \varphi(x, b) \rightarrow (x_0, a) \neq (x_0, b) = \varphi(x_0, b)$, что противоречит непрерывности φ . Значит, что функция γ – непрерывна. Аналогично

доказывается непрерывность функции δ .

(б): Пусть $y \geq \gamma(x)$, $x \leq \delta(y)$ и пусть $\varphi(x, y) = (x_1, y_1)$, тогда $x_1 \leq x$, $y_1 \geq y$. Обозначим через M горизонтальную прямую, проходящую через (x, y) . Если $\gamma(x_1) \leq y$, то пересечение E_φ с вертикальной прямой, проходящей через (x_1, y_1) , содержит точку (x_1, y) . Так как $x_1 < x < \delta(y)$, то отрезок $E_\varphi \cap M$ содержит (x, y) , что и требуется.

Если $\gamma(x_1) > y$, то поскольку $\gamma(x) \leq y$, а функция γ непрерывна, на отрезке $[x_1, x]$ найдётся точка x_2 , для $\gamma(x_2) = y$. Тогда отрезок $E \cap M$ содержит точки (x_2, y) , $(\delta(y), y)$, а потому и (x, y) . Итак, в обоих случаях $(x, y) \in M$.

Теперь мы можем построить функциональную модель непрерывного интервального округления.

Теорема 5. Непрерывное округление можно задавать равенством $E_\varphi = \{(x, y) : y \geq \gamma(x), x \leq \delta(y)\}$, выбирая произвольные числа a, b и непрерывные невозрастающие функции γ, δ на $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, удовлетворяющие условиям: а) $\delta(\gamma(x)) \geq x$; $\gamma(\delta(y)) \leq y$, б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = +\infty$.

Список литературы

- [1] БИРКГОФФ Г. Теория структур. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 408 с.
- [2] ЛИТВИНОВ Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение // arXiv: math.GM / 0507014 v1 1 July 2005.
- [3] КАМИНСКИЙ Т.Е., КРЕЙНОВИЧ В. Natural requirements for natural roundings lead to a hardware-independent characterization of standard rounding procedures // Notes on intuitionistic fuzzy sets. 1998. Vol. II, N 3. P. 57–64.
- [4] КАМИНСКИЙ Т.Э. К теории интервальных округлений // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики. / Вологда: Русь, 2000. С.23–36.

Интервальный подход к обработке зашумленных экспериментальных данных с многократными измерениями в условиях неопределённости*

С.И. Кумков

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
e-mail: 620219, Екатеринбург ГСП-384, ул.С.Ковалевской 16

Рассматривается обработка выборки зашумленных экспериментальных данных при малом числе значений основного аргумента (короткая выборка) и многократных измерениях в подвыборках для каждого его значения. Задан вид исследуемой зависимости с вектором её параметров. Замеры в подвыборках содержат как обычные приборные погрешности измерений, так и хаотические искажения неизвестного знака и величины. Вероятностные характеристики обоих типов возмущений полностью неизвестны, неопределённой является также величина ограничения на максимальное значение суммарных погрешностей. Поэтому невозможно обосновать применение стандартных (ГОСТ) статистических методов. Предлагается подход на основе методов интервального анализа: для заданного уровня ограничения на максимальную величину суммарной погрешности измерения строятся интервалы неопределённости замеров (ИНЗ); выделяются совместные в интервальном смысле последовательные ИНЗ (по одному для каждого значения аргумента); каждой совместной последовательности ИНЗ ставится в соответствие информационное множество (ИМ) допустимых значений параметров. Выходной результат представляется суммарным ИМ всех допустимых последовательностей замеров. В отличие от стандартных методов, где выбраковка отдельного замера выполняется по величине его отклонения от средней аппроксимирующей зависимости, в предлагаемом подходе выбраковка последовательности замеров выполняется по пустоте или недопустимости (по отношению к априорной области параметров) её ИМ.

В настоящее время широко применяются стандартные методы [1,2] обработки зашумленных экспериментальных данных. Заранее задаётся вид исследуемой зависимости (от некоторого аргумента) с вектором её параметров. Данные подходы (ГОСТ'ы) опираются на статистические методы и предположения: о представительности выборки (большое число замеров и значений основного аргумента), о нормальности распределения погрешностей измерения, о статистической однородности погрешности многократных измерений и о несмещённости замеров, а также на предположение, что значения аргумента известны точно.

Однако на практике [3,8,9], экспериментальные данные могут содержать малое число замеров или значений основного аргумента (короткая выборка), но выполняются повторные (многократные) измерения (рис.1, подвыборки – чёрные кружки, вертикальные группы) для каждого его значения. На рис.1в жирной прямой отмечена линия зависимости заданного вида, формально полученная по [1,2].

Значения аргумента полагаются известными точно, а замеры в подвыборках содержат как обычные приборные погрешности измерений, так и хаотические (неконтролируемые) искажения неизвестного знака и величины. Наличие хаотических искажений

*Работа поддержана Программой П(29)6-2 Президиума РАН и грантом РФФИ № 10-1-96-006.

подтверждается сравнением величины приборной ошибки измерений порядка 0.005 в и размахом разбросов замеров до ~ 0.08 в (например, рис.1, средняя подвыборка). Далее, анализ рассеяния замеров (рис.1д) показывает, что распределение суммарной погрешности не является нормальным, и, как правило, полностью неизвестно. Отметим, что стандартное правило " $\pm 3\sigma$ " исключения промахов (выбросов) не удаляет ни одного замера из выборки рис.1.

В таких условиях трудно или даже невозможно обосновать применение указанных стандартных методов. Практически неопределённой является также величина ограничения на максимальное значение суммарных погрешностей.

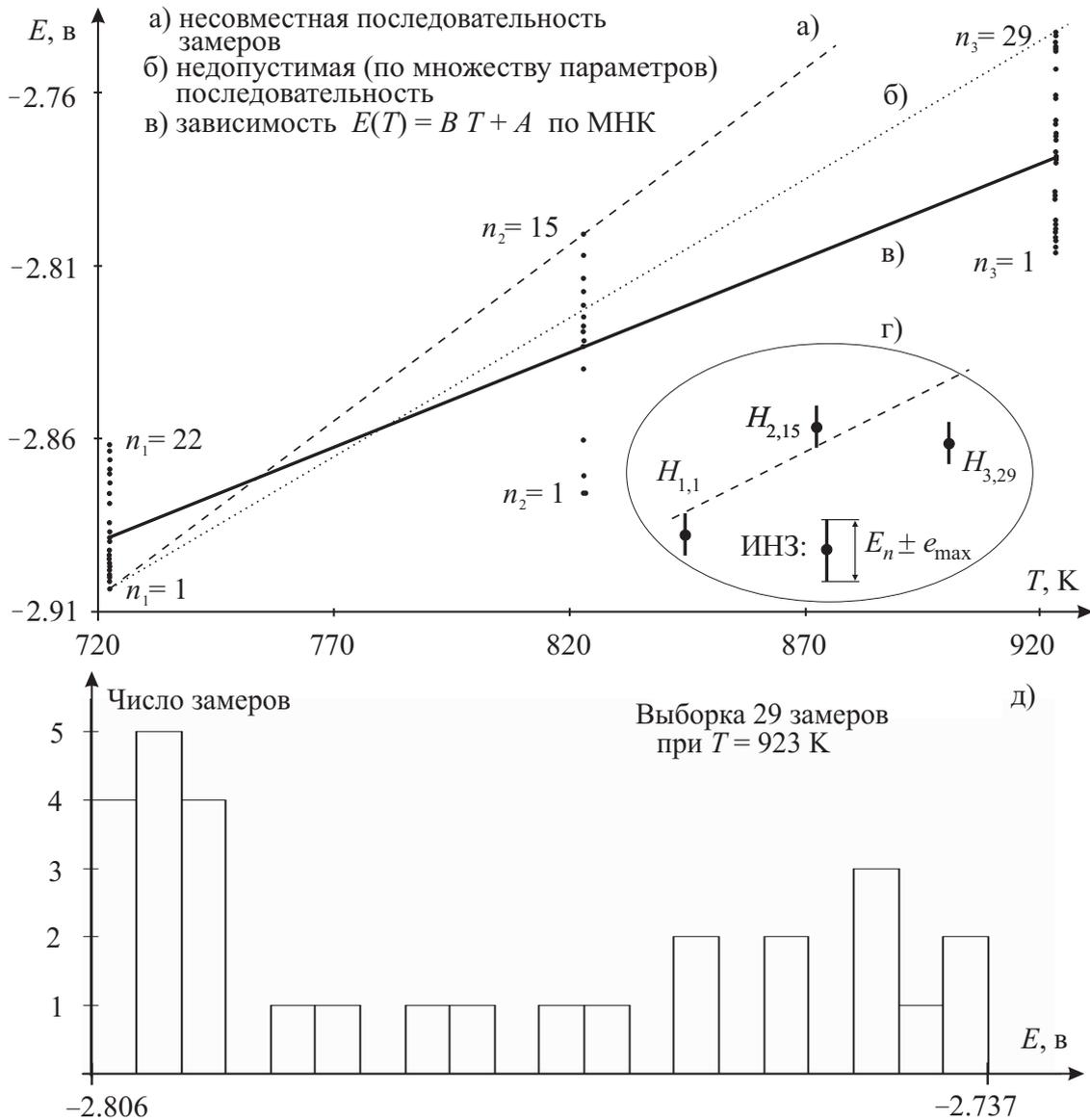


Рис. 1. Зашумленные экспериментальные данные; а) несовместная зависимость; б) совместная тройка замеров; в) линия МНК; г) несовместная тройка ИНЗ; д) типичная гистограмма рассеяния замеров

Предлагаемый подход опирается на методы интервального анализа [4–6]. В настоящей работе общие приёмы решения интервальных систем линейных уравнений конкретизируются на случай решения переопределённых интервальных систем уравнений

и неравенств. Реализуются следующие алгоритмы. Из теоретических и инженерных соображений вводится некоторый разумный приемлемый уровень ограничения на максимальную величину e_{\max} суммарной погрешности измерения. По этому уровню неопределённость измерения в каждом замере формализуется в виде его интервала неопределённости $H_{i,j}$ (ИНЗ, рис.1г, увеличенный фрагмент в овале).

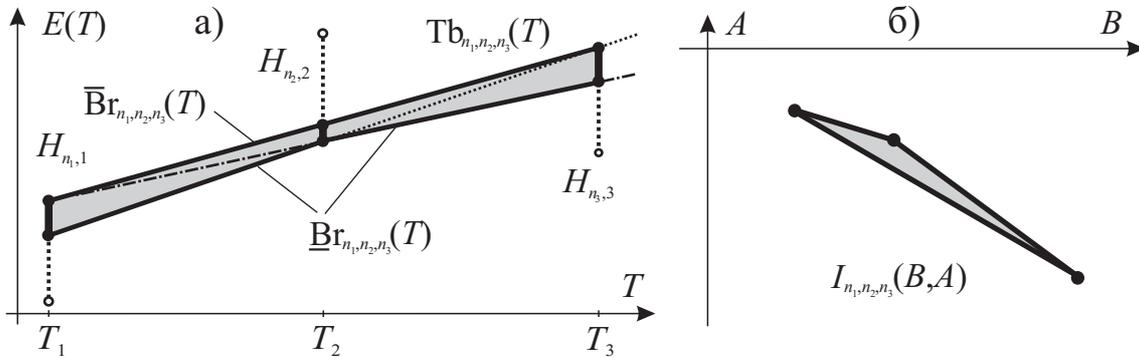


Рис. 2. Совместная тройка ИНЗ; а) трубка допустимых зависимостей; б) информационное множество параметров совместной тройки

Анализируется набор ИНЗ последовательных замеров по одному для каждого значения аргумента (рис.2а, $H_{i,j}$). Такая последовательность замеров полагается совместной в интервальном смысле, если через всех их ИНЗ можно провести хотя бы одну зависимость заданного вида. Совместная последовательность определяет пучок–трубку допустимых зависимостей (рис.2а, трубка Tb_{n_1,n_2,n_3} отмечена серой заливкой с нижней $\underline{Br}_{n_1,n_2,n_3}$ и верхней $\overline{Br}_{n_1,n_2,n_3}$ границами). Пунктиром отмечены те части интервалов неопределённости, которые оказываются несовместными в рассматриваемой последовательной тройке.

Несовместные последовательности замеров (например, рис.1г, тройка ИНЗ в овале) имеют пустое ИМ (рис.1а и г, штриховая линия).

Каждой совместной последовательности ставится в соответствие информационное множество (ИМ) I_{n_1,n_2,n_3} (рис.2б) допустимых значений параметров исследуемой зависимости. Информационное множество строится по специальной процедуре [7–9] численного решения переопределённой системы интервальных линейных неравенств тройки ИНЗ. Процедура является конструктивной, так как по ходу вычисления обнаруживает и отсеивает несовместные тройки.

Вследствие наличия хаотических возмущений в замерах набор $\{I_{n_1,n_2,n_3}\}$ непустых ИМ представляет собой совокупность (рис.3а) разбросанных и несвязных многоугольников (для выборки рис.1); величина ограничения на суммарную погрешность задавалась на уровне приборной ошибки измерений $e_{\max} = 0.005$ в. При этом уровне ограничения из возможного числа 9570 троек замеров *совместными* оказываются только 2679 троек.

Пусть имеется некоторая априорно заданная область $I^{\text{апр}}(B, A)$ значений параметров (рис.3а, прямоугольник со штриховыми границами). При этом каждое непустое ИМ может быть отброшено (как неприемлемое, рис.1б, пунктирная линия), если его пересечение с этой областью пусто, или уточнено, если его пересечение с этой областью непусто. Видно, что отбрасываться будут ИМ, соответствующие тройкам замеров с “неестественно” большими отклонениями (рис.3, многоугольники вне априорной обла-

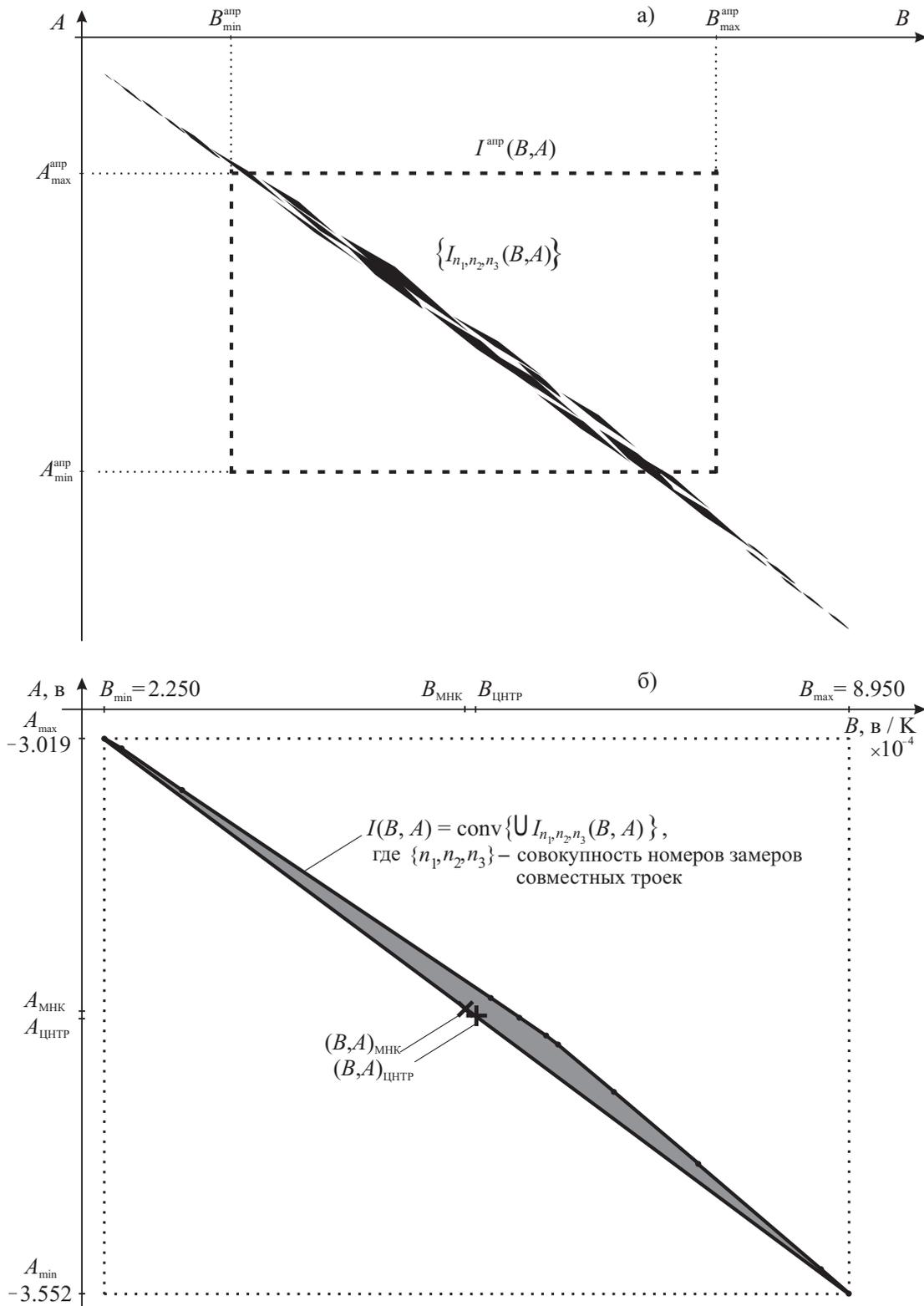


Рис. 3. Информационные множества параметров; а) набор информационных множеств совместных троек замеров и учёт априорной области параметров; б) объединённое информационное множество параметров допустимых троек (без учёта априорных данных)

сти), и в случае учета априорных данных число оставшихся *допустимых* троек уменьшается. Таким образом, предлагаемый подход позволяет *не учитывать информацию о искажённых замерах* на основе недопустимости соответствующих информационных множеств параметров.

Выходной результат оценки допустимых значений параметров представляется выпуклой оболочкой $I(B, A) = \text{conv}\{\bigcup I_{n_1, n_2, n_3}\}$ объединения всех допустимых ИМ и набором их трубок. На рис.3б показан результат обработки исходной выборки – результирующее информационное множество $I(B, A)$ (без учёта априорной информации). Это выпуклый многоугольник с 11 вершинами и линейными границами. Выходной результат получен при реальной величине ограничения $e_{\max} = 0.005$ в суммарной погрешности измерений. В качестве выходных данных потребителю выдаются следующие оценки (рис.3б):

- точное описание результирующего ИМ, набор координат его вершин $\{(B_j, A_j)\}$;
- центральная точка $(B, A)_{\text{центр}}$ результирующего ИМ (прямой крестик), для иллюстрации на рис.3б косым крестиком отмечена точка $(B, A)_{\text{МНК}}$, формально найденная стандартным методом;
- безусловные интервалы каждого параметра $\Delta B = B_{\max} - B_{\min}$ и $\Delta A = A_{\max} - A_{\min}$ (прямоугольник с пунктирными границами).

Качество обрабатываемых экспериментальных данных оценивается полуразмахом каждой из подвыборок (рис.1): ± 0.021 , ± 0.038 в и ± 0.034 в, соответственно при $T = 723$ К, $T = 823$ К $T = 923$ К. Данные оценки в $\sim 4 \div 8$ раз превышают указанный уровень приборных погрешностей 0.005 в. Эти оценки ещё раз подтверждают наличие хаотических (неконтролируемых) погрешностей измерения и говорят о плохом качестве входной обрабатываемой выборки.

Исследовалась состоятельность предлагаемого метода. На основе реальной информации, подобной приведённой на рис.1 строился модельный пример. В нем около некоторой “истинной”–модельной зависимости при заданном уровне приборной погрешности измерений e_{\max} для указанных значений аргумента T моделировались подвыборки замеров, с отклонениями не более $\pm e_{\max}$ и не содержавших хаотических искажений. По построению каждая такая подвыборка была *достоверной*, т.е. ИНЗ всех её замеров содержали соответствующее “истинное” измеряемое значение зависимости, а их пересечение было непусто. При этом результирующее информационное множество параметров, построенное по предлагаемому подходу, также было *достоверным* – содержало точку параметров “истинной”–модельной прямой.

Отметим в заключение важный момент. В стандартных методах [1,2] выбраковка отдельного замера (или нескольких замеров) выполняется по величине его отклонения от средней аппроксимирующей зависимости в случае превышения отклонением заданного порога $\pm 2\sigma$ (при доверительной вероятности 0.95) или $\pm 3\sigma$ (при доверительной вероятности 0.97). Поскольку в рассматриваемом случае из-за наличия хаотических искажений замеров статистический подход не работает, то в предлагаемом подходе:

- принципиально по-иному используется внутренняя связь между замерами в соответствии с заданным видом зависимости;
- выбраковка последовательностей замеров выполняется не по их отклонениям от некоей аппроксимирующей зависимости, а по их интервальной несовместности (пустоте их ИМ) или, для совместной последовательности, по недопустимости её информационного множества по отношению к заданной априорной области параметров.

Для линейной зависимости разработаны быстрые процедуры обработки.

Список литературы

- [1] ГОСТ 8.207-76. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.
- [2] Р 40.2.028–2003. Государственная система обеспечения единства измерений. Рекомендации по построению градуировочных характеристик. Оценивание погрешностей (неопределённости) линейных градуировочных характеристик при использовании метода наименьших квадратов.
- [3] Лукьянова М.Я., Осипенко А.Г., Маершин А.А., Кормилицин М.В., Кумков С.И., Валишин М.Ф. Задача обработки экспериментальных данных по хронопотенциометрии кюрия в расплаве $3\text{LiCl}-2\text{KCl}$ // Доклады III Международной Пирохимической Конференции, 29.11–03.12. 2009, Димитровград, Россия, Исследовательский институт атомных реакторов.
- [4] ЖОЛЕН Л., КИФЕР М., ДИДРИ О., ВАЛЬТЕР Э. Прикладной интервальный анализ. Москва–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
- [5] ШАРЫЙ С.П. Конечномерный интервальный анализ. Электронная книга: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [6] ХАНСЕН Э., УОЛСТЕР ДЖ.У. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. Москва–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
- [7] Кумков С.И. Разработка совместного Российского – ISO стандарта (методики) обработки измерительной информации в условиях неопределённости ошибок измерений и малого числа наблюдений (на основе методов интервального анализа) // Доклады Всероссийского (с международным участием) Совещания по интервальному анализу и его приложениям "ИНТЕРВАЛ-06", 1–4 июля 2006 г., Санкт–Петербург, Санкт–Петербургский Государственный Университет, 2006, стр. 63–67, и сайт <http://www.ict.nac.ru/interval/Conferences/Interval-06>
- [8] Кумков С.И. Обработка экспериментальных данных ионной проводимости расплавленного электролита методами интервального анализа // Расплавы, № 3, 2010, С. 86–96.
- [9] ПОТАПОВ А.М., КУМКОВ С.И., САТО Y. Обработка экспериментальных данных по вязкости при одностороннем смещении ошибок измерения // Расплавы, № 3, 2010, С. 55–70.

Слабое решение интервальной модели Неймана *

А.Т. ЛАТИПОВА

Южно-Уральский государственный университет

e-mail: alfas_chel@mail.ru

А.В. ПАНЮКОВ

Южно-Уральский государственный университет

e-mail: a_panyukov@mail.ru

Previously, there was considered an interval model of a developing economy of von Neumann's type and was given precise interval estimation of the number of Frobenius. There is proposed a method of constructing the primal and dual beams of von Neumann, that form the weak position of equilibrium for any point model belonging to considered interval model.

Модель многоотраслевого планирования Неймана оказало большое влияние на теорию экономического роста, и стимулировала развитие математической экономики [1]. Тем не менее, во многих публикациях модель Неймана описывается как невычислимая чисто теоретическая модель (например, [2]), а для практических результатов предлагается использовать модель Леонтьева, являющейся частным случаем модели Неймана. В то же время модель Неймана может быть применена не только для многоотраслевого планирования, но и для решения других задач (например, для оптимизации бюджета продаж при ценовой диверсификации [3]). Поэтому разработка численных методов для модели Неймана является актуальной. Авторами были разработаны эффективные численные методы нахождения положения равновесия, которые могут быть реализованы в программных средствах, использующих вычисления с плавающей точкой [4]. Данные методы основываются на теории игр и линейном программировании.

Общим положением равновесия в модели Неймана (A, B) , где A и B - это заданные $n \times m$ матрицы затрат и выпуска с неотрицательными элементами $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, является решение (λ, x, w) системы билинейных неравенств и уравнений:

$$(A - \lambda B)x \leq 0, (x, e^m) = 1, x \geq 0, \quad (1)$$

$$(A - \lambda B)^T w \geq 0, (w, e^n) = 1, w \geq 0, \quad (2)$$

где $e^l \in \mathbf{R}^l$, $l \in \{m, n\}$ такой, что $(\forall i = 1, 2, \dots, l) e_i^l = 1$.

Число λ^{-1} — это равновесный темп роста, который достигается за счет структуры интенсивностей процессов x и структуры равновесных цен на товары w .

Невырожденным положением равновесия в рассматриваемой модели является положение равновесия (λ, x, w) , удовлетворяющее дополнительному условию

$$w^T A x > 0. \quad (3)$$

Обозначим λ^* максимальное λ , удовлетворяющее (1)-(2). Число λ^* называют числом Фробениуса, а соответствующие ему векторы x^* и w^* - прямым и двойственным векторами Фробениуса. Таким образом, положение равновесия (λ^*, x^*, w^*) является решением

*Поддержано грантом РФФИ №10-07-96003-р_урал_a

следующей задачи математического программирования

$$D(A, B) = \left\{ (\lambda, x, w) \mid \begin{array}{l} (\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A, B)} \lambda, \\ (A - \lambda B)x \leq 0, (A - \lambda B)^T w \geq 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \geq 0, w \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Аналогично обозначим λ_n минимальное λ , удовлетворяющее (1)-(2). Число λ_n называют числом Неймана, а соответствующие ему векторы x_n и w_n - прямым и двойственным векторами Неймана. В дальнейшем под положением равновесия для модели Неймана подразумевается (λ^*, x^*, w^*) .

На практике численные значения элементов матриц затрат и выпуска для модели Неймана получают, используя статистические данные и экспертные оценки, поэтому может возникать неопределенность, которая зачастую является интервальной. Рассмотрим проблему нахождения положения равновесия в модели Неймана (A, B) , если значения элементов матриц заданы только в виде интервалов.

Интервальной назовем модель Неймана с интервальными матрицами затрат $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_{ij}\} = \{[a_{ij}, \bar{a}_{ij}]\}$ и выпуска $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_{ij}\} = \{[b_{ij}, \bar{b}_{ij}]\}$, $i = (\overline{1, n})$, $j = (\overline{1, m})$, $\text{mid}\mathbf{A} = (\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}})/2$, $\text{mid}\mathbf{B} = (\mathbf{B} + \overline{\mathbf{B}})/2$. Ранее авторами была доказана следующая теорема, позволяющая определить интервал для числа Фробениуса через матрицы верхних и нижних границ [5].

Теорема 1. Пусть тройка $(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w})$ является положением равновесия для модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, а $(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w})$ является положением равновесия для модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, тогда для любой точечной модели Неймана $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$: $(\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{B}} \in \mathbf{B})$ её число Фробениуса $\tilde{\lambda}$ принадлежит интервалу $[\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$.

Также было рассмотрено влияние мультипликативной неопределенности на положение равновесия [6].

Теорема 2. Если (λ^*, x^*, w^*) является положением равновесия модели Неймана $(\text{mid } \mathbf{A}, \text{mid } \mathbf{B})$, то для любой точечной модели $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$: $(\tilde{\mathbf{A}} = \beta_1 \text{mid } \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{B}} = \beta_2 \text{mid } \mathbf{B})$ тройка $(\lambda^* \beta_1 / \beta_2, x^*, w^*)$ является положением равновесия.

Таким образом, в случае мультипликативной неопределенности остаются постоянными прямой и двойственный вектора Фробениуса, изменяется только число Фробениуса. Однако устойчивость прямого и двойственного векторов Фробениуса может наблюдаться и при более общей интервальной неопределенности.

Пример. Модель (A, B) размера 2×2 , элементы матриц которой удовлетворяют ограничениям

$$a_{21} + a_{22} \leq \lambda^*(b_{21} + b_{22}); a_{11} = b_{11}; a_{12} = b_{12};$$

имеет положение равновесия $\{\lambda^*, (x^*)^T = (0, 5; 0, 5), (w^*)^T = (1; 0)\}$.

Пример показывает, что существуют диапазоны значений для элементов матриц, при которых прямой и двойственный векторы Фробениуса (x^*, w^*) не будут меняться. В связи с этим можно ввести понятия сильного и слабого решений [7].

Сильным решением для интервальной модели Неймана (\mathbf{A}, \mathbf{B}) назовем пару векторов (x_s, w_s) такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$: $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$, существует положение равновесия $(\tilde{\lambda}, x_s, w_s)$.

Наличие слабого решения обеспечивает допустимость ограничений (1)-(2) для интервальной модели (\mathbf{A}, \mathbf{B}) .

Слабым решением для интервальной модели Неймана (\mathbf{A}, \mathbf{B}) назовем пару векторов (x', w') такую, что для любой точечной модели Неймана для любой точечной модели Неймана (\tilde{A}, \tilde{B}) : $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{B}$, выполняются ограничения

$$\begin{cases} (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0; & (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0; \\ (x', e^m) = 1; & (w', e^n) = 1; \quad x', w', \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Следующее утверждение позволяет проверить, является ли пара векторов (x, w) слабым решением.

Теорема 3. Если для пары векторов (x'', w'') разрешима система ограничений:

$$\begin{cases} (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\lambda} \underline{\mathbf{B}})x'' \leq 0; & (\underline{\mathbf{A}} - \bar{\lambda} \bar{\mathbf{B}})^T w'' \geq 0; \\ (x'', e^m) = 1; & (w'', e^n) = 1; \quad x'', w'' > 0; \end{cases}$$

то (x'', w'') является слабым решением интервальной модели Неймана (\mathbf{A}, \mathbf{B}) .

Доказательство этого утверждения фактически является компиляцией доказательства теоремы 2.26, приведенной в [8].

Если для модели (\mathbf{A}, \mathbf{B}) существует слабое решение, то его можно использовать для оценки числа Фробениуса λ' .

Теорема 4. Пусть (x', w') - слабое решение интервальной модели Неймана (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . Если для точечной модели Неймана (\tilde{A}, \tilde{B}) : $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{B}$,

$$\lambda' = \max\{\lambda \mid (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0; \quad (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0\},$$

то $\lambda' \in [\underline{\lambda}_n; \bar{\lambda}]$, где $\underline{\lambda}_n$ - это число Неймана для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$.

Доказательство. Пусть $(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w})$ - положение равновесия для модели Неймана (\tilde{A}, \tilde{B}) . Если $\lambda' = \max\{\lambda \mid (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0; \quad (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0\}$, то

$$\lambda' = \min \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} w'_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{b}_{ij} w'_i}.$$

Так как тройка (λ', x', w') является допустимым, но не оптимальным решением задачи (4), то $\lambda' \leq \tilde{\lambda}$. Согласно теореме 1 имеем $\tilde{\lambda} \leq \bar{\lambda}$, откуда $\lambda' \leq \bar{\lambda}$.

Пара (x', w') является слабым решением для модели (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , поэтому (x', w') являются допустимыми векторами для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$, а значит, выполняется ограничение

$$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \bar{\mathbf{B}})w' \geq 0.$$

Пусть $\underline{\lambda}' = \max\{\lambda \mid (\underline{\mathbf{A}} - \lambda \bar{\mathbf{B}})w' \geq 0\}$, тогда

$$\underline{\lambda}' = \min \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij} w'_i}{\sum_{i=1}^n \bar{b}_{ij} w'_i}.$$

Тройка $(\underline{\lambda}', x', w')$ является допустимым решением для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$, поэтому $\underline{\lambda} \geq \underline{\lambda}' \geq \underline{\lambda}_n$. Так как (\tilde{A}, \tilde{B}) : $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{B}$, $\underline{\mathbf{A}} = \tilde{A} - \Delta A$, $\bar{\mathbf{B}} = \tilde{B} + \Delta B$, $(\Delta a_{ij} \geq 0, \Delta b_{ij} \geq 0)$.

Отсюда

$$\underline{\lambda}_n \leq \underline{\lambda}' = \min \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij} w'_i}{\sum_{i=1}^n \bar{b}_{ij} w'_i} \leq \lambda' = \min \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} w'_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{b}_{ij} w'_i}.$$

Таким образом, $\lambda' \geq \underline{\lambda}_n$. Теорема доказана.

Согласно теореме 4 оценка числа Фробениуса λ' может оказаться меньше $\underline{\lambda}$.

В следующей теореме используется другой подход к оценке числа Фробениуса.

Теорема 5. Пусть (x^*, w^*) - прямой и двойственный векторы Фробениуса для двух точечных моделей Неймана (\check{A}, \check{B}) и (\hat{A}, \hat{B}) таких, что $\hat{a}_{ij} - \check{a}_{ij} = \Delta a_{ij} \geq 0$, $\hat{b}_{ij} - \check{b}_{ij} = \Delta b_{ij} \geq 0$. Пусть число Фробениуса модели (\check{A}, \check{B}) равно $\check{\lambda}$, а для модели (\hat{A}, \hat{B}) оно равно $\hat{\lambda}$, $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \check{\lambda}$. Тогда если для модели (\check{A}, \check{B}) положение равновесия $(\check{\lambda}, x^*, w^*)$ является невырожденным, то

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T (\Delta_A - \check{\lambda}\Delta_B)x^*}{(w^*)^T (\check{B} + \Delta_B)x^*}. \quad (5)$$

Доказательство. По теореме о дополняющей нежесткости должны выполняться следующие ограничения:

$$(w^*)^T (\check{A} - \check{\lambda}\check{B})x^* = 0; \quad (6)$$

$$(w^*)^T (\hat{A} - \hat{\lambda}\hat{B})x^* = 0. \quad (7)$$

Если для модели (\check{A}, \check{B}) положение равновесия $(\check{\lambda}, x^*, w^*)$ является невырожденным, то согласно (1)-(3)

$$(w^*)^T \check{A}x^* > 0; (\check{A} - \check{\lambda}\check{B})x^* \leq 0; w^* \geq 0;$$

откуда следует, что

$$(w^*)^T \check{B}x^* > 0. \quad (8)$$

Тогда

$$\check{\lambda} = \frac{(w^*)^T \check{A}x^*}{w^{*T} \check{B}x^*} \quad (9)$$

Заменим $\hat{\lambda} = \check{\lambda} + \Delta\lambda$, $\hat{A} = \check{A} + \Delta_A$ и $\hat{B} = \check{B} + \Delta_B$ в (7); получим

$$(w^*)^T (\check{A} - \check{\lambda}\check{B} + \Delta_A - \check{\lambda}\Delta_B - \Delta\lambda(\check{B} + \Delta_B))x^* = 0,$$

откуда с учетом (6) и (8):

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T (\Delta_A - \check{\lambda}\Delta_B)x^*}{(w^*)^T (\check{B} + \Delta_B)x^*}.$$

Теорема доказана.

Если интервальная модель Неймана (\mathbf{A}, \mathbf{B}) имеет сильное решение (x_s, w_s) , то можно оценить изменение числа Фробениуса для точечной модели.

Теорема 6. Пусть (x_s, w_s) - сильное решение для интервальной модели Неймана $([\check{A}, \hat{A}], [\check{B}, \hat{B}])$, для моделей Неймана (\check{A}, \check{B}) и (\hat{A}, \hat{B}) выполняются условия теоремы 4. Пусть имеется точечная модель Неймана (\tilde{A}, \tilde{B}) : $\tilde{A} = \check{A} + k\Delta_A$, $\tilde{B} = \check{B} + k\Delta_B$, $k \in [0; 1]$; её число Фробениуса равно $\tilde{\lambda}$. Тогда

$$\tilde{\lambda} - \check{\lambda} = k\Delta\lambda \frac{w_s^T (\check{B} + \Delta_B)x_s}{w_s^T (\check{B} + k\Delta_B)x_s}. \quad (10)$$

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4.

Из (10) следует, что изменение числа Фробениуса может происходить неравномерно.

Список литературы

- [1] АШМАНОВ С.А. Введение в математическую экономику. М: Наука, 1984. 296 с.
- [2] ЦИСАРЬ И.Ф. Компьютерное моделирование экономики. М.: Диалог-МИФИ, 2002. 384 с.
- [3] ПАНЮКОВ А.В., ЛАТИПОВА А.Т. Оптимизация бюджета продаж // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: "Рынок: теория и практика". Челябинск: ЮУрГУ, 2006. Вып. 4, №15 (170). С. 116–120.
- [4] ЛАТИПОВА А.Т., ПАНЮКОВ А.В. Numerical Techniques for Finding Equilibrium in von Neumann's Model // Computational Mathematics and Mathematical Physics (Springer-MAIK: Nauka-Interperiodica). 2008. Vol. 48, N. 14. P. 1999–2006.
- [5] ПАНЮКОВ А.В., ЛАТИПОВА А.Т. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2008. Т. 10, № 2 (27). С. 150–153.
- [6] ПАНЮКОВ А.В., ЛАТИПОВА А.Т. Finding Equilibrium in Von Neumann's Model // 13 IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. Moscow: Elsevier Ltd. 2009. P. 395–399.
- [7] ПАНЮКОВ А.В., ЛАТИПОВА А.Т. Интервальная неопределенность в модели Неймана // Дискретная оптимизация и исследование операций. Новосибирск, 2010. С. 213.
- [8] ФИДЛЕР М., НЕДОМА Й. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований", 2008. 288 с.

Определение приближенного квазирешения системы линейных интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода и Фредгольма 1-го рода методом интервального осреднения.

А.Ф. ЛАТЫПОВ, О.В. ПОПИК

Институт теоретической и прикладной механики

e-mail: latypov@itam.nsc.ru

Аннотация

В основе метода лежит условие равенства нулю средних значений невязок уравнений на интервалах, на которые разбивается область определения функции правой части. Для уравнений Вольтерра решение строится в классе кусочно-постоянных функций, для уравнений Фредгольма – в классе кусочно-постоянных, классе непрерывных кусочно-линейных функций и в C_1 . Число интервалов и распределение их длин определяются из условия минимума среднеквадратичной невязки уравнений.

Для решения некорректных задач, каковыми в общем случае являются интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода и Фредгольма 1-го рода, используются методы регуляризации [1], [2]. Эти методы портят уравнения. В данной работе используется метод подбора [1], дополненный условием равенства нулю средних значений невязок уравнений на интервалах, на которые разбивается область определения квазирешения. При этом уравнения удовлетворяются также, по крайней мере, еще в одной точке внутри каждого интервала. Это условие позволяет получать квазирешение в выбранном классе функций без введения стабилизирующего функционала. Положительным фактором является также то, что операция осреднения сглаживает ошибки задания или измерения функции правой части и ядра.

А. Линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода.

1 Приближенное квазирешение в классе кусочно-постоянных функций.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода вида

$$\int_a^x \mathbf{K}(x, y) \mathbf{g}(y) dy = \mathbf{f}(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.0.1)$$

Ядро $\mathbf{K}(x, y)$ и правая часть $\mathbf{f}(x)$ – известные интегрируемые функции. Разобьем отрезок $[a, b]$ на N интервалов, x_i – точки разбиения (узлы), $i = \overline{1, N}$; $x_1 = a, x_{N+1} = b, h_i = x_{i+1} - x_i$. Обозначим квазирешение на i -ом интервале $\mathbf{g}(y) = \mathbf{g}_i = \text{const}$, и обозначим также

$$u \in [x_l, x_{l+1}], \eta = \frac{y - x_l}{h_l}, h_l = x_{l+1} - x_l, \xi = \frac{u - x_l}{h_l}; \eta, \xi \in [0, 1];$$

$$\int_{x_l}^u \mathbf{K}(x, y) dy = h_l \int_0^{\xi(u)} \mathbf{K}(x, y(\eta)) d\eta = h_l \mathbf{k}_{l0}(x, \xi(u)) \quad (1.0.2)$$

Пусть на отрезках $[x_l, x_{l+1}]$ значения $\{\mathbf{g}_l\}$, $l = \overline{1, i-1}$ определены. Тогда функция невязки $\mathbf{z}_i(x)$ для i -го интервала записывается в следующем виде

$$\mathbf{z}_i(x) = \mathbf{Q}_i(x) + h_i \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \mathbf{g}_i - \mathbf{f}_i(x),$$

$$\mathbf{Q}_i(x) = \sum_{l=1}^{i-1} h_l \mathbf{k}_{l0}(x, 1) \mathbf{g}_l, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (1.0.3)$$

Используя условие

$$\langle \mathbf{z}_i(x) \rangle = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{z}_i(x) dx = 0, \quad (1.0.4)$$

из (1.0.3) получим

$$\mathbf{g}_i = - \langle h_i \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \rangle^{-1} \cdot [\langle \mathbf{Q}_i(x) \rangle - \langle \mathbf{f}_i(x) \rangle]. \quad (1.0.5)$$

Предполагается, что существует хотя бы одно разбиение интервала построения квазирешения, при котором матрицы $\langle h_i \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \rangle$ не вырождены. В противном случае исходная физическая задача сформулирована, по-видимому, неверно. (В одномерном случае, если среднее значение функции на произвольных интервалах равно нулю, то функция тождественно равна нулю). Из условия (1.0.4) следует также, что на каждом интервале, по крайней мере, в одной точке внутри интервала $x_i^* \in (x_i, x_{i+1})$ невязка равна нулю. Квазирешение (1.0.5) зависит от количества интервалов N и распределения их длин $h_i, i = \overline{1, N}$. Введем функционал среднеквадратичной невязки (штрих сверху означает транспонирование)

$$\Phi(N, x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{z}'_i(x) \mathbf{z}_i(x) dx. \quad (1.0.6)$$

Число интервалов и распределение их длин получим из решения задачи

$$\Phi_* = \inf_{N, x_i} \Phi(N, x_i), \quad x_{i-1} < x_i < x_{i+1}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (1.0.7)$$

Число интервалов N конечно, так как исходная задача некорректна. Функционал среднеквадратичной невязки (1.0.6) – многоэкстремальная функция по переменным x_i . Для получения точного решения задачи (1.0.7) требуется выполнить громадный объем вычислений. Приближенное решение в данной работе определяется посредством алгоритма циклического покоординатного сканирования функционала в заданном числе точек с выбором лучшей точки для последовательности значений N . Данный алгоритм естественно не обеспечивает в общем случае получение точного решения задачи (1.0.6). Однако по сравнению с алгоритмами поиска локального экстремума он дает существенно меньшие значения функционала. Значение $\Phi_* = 0$ соответствует точному решению. Поэтому получаемое значение Φ_* является характеристикой качества решения.

2 Приближенное квазиращение в классе кусочно-линейных функций.

Запишем приближенное квазиращение на i -ом интервале в форме линейной функции

$$\mathbf{g}_i(y) = \mathbf{g}_{i0}(1 - \eta) + \mathbf{g}_{i1}\eta, \quad \eta = \frac{y - x_i}{h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \eta \in [0, 1], \quad (2.0.1)$$

и обозначим также в дополнение к (1.0.2)

$$\int_0^{\xi(u)} \mathbf{K}(x, y(\eta)) \eta d\eta = \mathbf{k}_{l1}(x, \xi(u)), \quad \xi \in [0, 1].$$

Пусть на отрезках $[x_l, x_{l+1}]$, $l = \overline{1, i-1}$ решения $\{\mathbf{g}_l(y)\}$ определены. Тогда функция невязки $\mathbf{z}_i(x)$ для i -го интервала записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(x) &= \mathbf{Q}_i(x) + h_i \{[\mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) - \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x))] \mathbf{g}_{i0} + \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x)) \mathbf{g}_{i1}\} - \mathbf{f}_i(x), \\ \mathbf{Q}_i(x) &= \sum_{l=1}^{i-1} h_l \{[\mathbf{k}_{l0}(x, 1) - \mathbf{k}_{l1}(x, 1)] \mathbf{g}_{l0} + \mathbf{k}_{l1}(x, 1) \mathbf{g}_{l1}\}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned} \quad (2.0.2)$$

Если значение \mathbf{g}_{i0} известно, то используя условие (1.0.4), получим

$$\mathbf{g}_{i1} = \langle \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x)) \rangle^{-1} \left\{ \frac{\langle \mathbf{f}_i(x) \rangle - \langle \mathbf{Q}_i(x) \rangle}{h_i} - [\langle \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \rangle - \langle \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x)) \rangle] \mathbf{g}_{i0} \right\} \quad (2.0.3)$$

Пусть теперь значение \mathbf{g}_{i0} неизвестно. Предположим также, что значения функций в узлах слева и справа различны $g_{i1} \neq g_{i+1,0}$. Введем функционал

$$F_i(\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}) = \frac{1}{2h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{z}'_i(x) \mathbf{z}_i(x) dx. \quad (2.0.4)$$

Значения $\{\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}\}$ определим из условия минимума (2.0.4) при равенстве нулю средней невязки на интервале $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}_i(x) \rangle &= \langle \mathbf{Q}_i(x) \rangle - \langle \mathbf{f}_i(x) \rangle + \\ &h_i \{[\langle \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \rangle - \langle \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x)) \rangle] \mathbf{g}_{i0} + \langle \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x)) \rangle \mathbf{g}_{i1}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.0.5)$$

По методу множителей Лагранжа определяем составной функционал

$$\Omega_i(\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}) = F_i(\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{z}_i(x) \rangle' \langle \mathbf{z}_i(x) \rangle. \quad (2.0.6)$$

Для сокращения записей обозначим

$$\mathbf{P}_i(x) = \mathbf{Q}_i(x) - \mathbf{f}_i(x), \quad \mathbf{A}_i(x) = h_i [\mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) - \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x))], \quad \mathbf{B}_i(x) = h_i \mathbf{k}_{i1}(x, \xi(x)).$$

Необходимые условия минимума (2.0.6) дают следующие уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mathbf{P}(x) + \mathbf{A}(x) \mathbf{g}_{i0} + \mathbf{B}(x) \mathbf{g}_{i1}]^T \mathbf{A}(x) dx + \\ &\lambda [\langle \mathbf{P}(x) \rangle + \langle \mathbf{A}(x) \rangle \mathbf{g}_{i0} + \langle \mathbf{B}(x) \rangle \mathbf{g}_{i1}]^T \langle \mathbf{A}(x) \rangle = 0, \\ &\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mathbf{P}(x) + \mathbf{A}(x) \mathbf{g}_{i0} + \mathbf{B}(x) \mathbf{g}_{i1}]^T \mathbf{B}(x) dx + \\ &\lambda [\langle \mathbf{P}(x) \rangle + \langle \mathbf{A}(x) \rangle \mathbf{g}_{i0} + \langle \mathbf{B}(x) \rangle \mathbf{g}_{i1}]^T \langle \mathbf{B}(x) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.0.7)$$

3 Линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода с разностным аргументом

$$\mathbf{F}(t) = - \int_0^t \frac{\partial \mathbf{U}(t-\tau)}{\partial \tau} \mathbf{G}(\tau) d\tau; \quad t \in [0, T]. \quad (3.0.1)$$

Вектор-функция $\mathbf{F}(t)$ [$r \times 1$] и матрица $\mathbf{U}(t)$ [$r \times r$] (в квадратных скобках указаны размеры матриц) заданы в точках $t_k = h \cdot k$, $k = \overline{0, L}$, $h = T/L$. Вектор-функция $\mathbf{G}(t)$ [$r \times 1$] подлежит определению. Уравнение (2.0.1) описывает линейную динамическую систему, имеющую r входов и r выходов. Решение будем строить в классе кусочно-постоянных функций. Пусть на интервалах $[t_l, t_{l+1}]$ решения $\{\mathbf{G}_l\}$ определены, $l = \overline{0, i-1}$, $N+1$ – число интервалов. Тогда функция невязки $\mathbf{z}(t)$ для i -го интервала записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \mathbf{Q}(t) - \mathbf{U}(t-t_i) \cdot \mathbf{G}_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{F}(t) + \sum_{l=0}^{i-1} [\mathbf{U}(t-t_{l+1}) - \mathbf{U}(t-t_l)] \cdot \mathbf{G}_l \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

На матрицу нормальных реакций $\mathbf{U}(t)$ наложены условия $\mathbf{U}(0) = \dot{\mathbf{U}}(0) = 0$, соответствующие физической системе (скорость распространения сигнала конечна). Поэтому минимальная длина интервала должна быть конечной величиной. Выполним осреднение в уравнении (3.0.2) ($H_i = t_{i+1} - t_i$)

$$\langle \mathbf{z}_i \rangle = \frac{1}{H_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{z}(t) dt, \quad \langle \mathbf{Q}_i \rangle = \frac{1}{H_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{Q}(t) dt, \quad \langle \mathbf{U}_i \rangle = \frac{1}{H_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{U}(t-t_i) dt,$$

и используя условие равенства нулю невязки в среднем на интервале $\langle \mathbf{z}_i \rangle = 0$, получим решение

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \langle \mathbf{U}_i \rangle^{-1} \cdot \langle \mathbf{Q}_i \rangle \\ \langle \mathbf{Q}_i \rangle &= \frac{1}{H_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(t) dt + \frac{1}{H_i} \sum_{l=0}^{i-1} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{U}(t-t_{l+1}) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{U}(t-t_l) dt \right] \cdot \mathbf{G}_l \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

Определенные интегралы в (3.0.3) вычисляются методом трапеций. Решение \mathbf{G}_i , $i = \overline{0, N}$ зависит от количества интервалов $N+1$ и распределения их длин H_i . Для получения этого распределения вводится функционал среднеквадратичной невязки (1.0.6) и решается задача (1.0.7). Основной технологии [3] является изложенный метод.

4 Линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода вида

$$\int_a^b K(x, y) g(y) dy = f(x), \quad x \in [c, d]. \quad (4.0.1)$$

Ядро $K(x, y)$ и правая часть $f(x)$ – известные интегрируемые функции. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n интервалов, y_j – точки разбиения, $j = \overline{1, n}$; $y_1 = a$, $y_{n+1} = b$; $h_j = y_{j+1} - y_j$ – длина j -го интервала.

4.1 Решение – кусочно-постоянная функция.

Пусть на j -ом интервале $g(y) = g_j = const$. Обозначим интегралы

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} K(x, y) dy = k_j(x),$$

и определим матрицы $\mathbf{C}(x) [1 \times n] = \{k_j(x)\}$, $\mathbf{G} [n \times 1] = \{g_j\}$. Тогда уравнение (4.0.1) запишется в следующем виде

$$z(x) = \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{G} - f(x) = 0. \quad (4.1.1)$$

Разобьем также отрезок $[c, d]$ на N интервалов, x_i – точки разбиения, $i = \overline{1, N}$, $x_1 = c$, $x_{N+1} = d$. Обозначим далее определенные интегралы

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} k_j(x) dx = k_{ij}, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = f_i, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} z(x) dx = z_i,$$

определим матрицы $\mathbf{Q} [N \times n] = \{k_{ij}\}$, $\mathbf{F} [N \times 1] = \{f_i\}$, $\mathbf{Z} [N \times 1] = \{z_i\}$. Проинтегрируем уравнение (3.1.1) на N интервалах и положим равным нулю среднее значение невязки на каждом интервале $\mathbf{Z} = 0$. Получим уравнение

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{F}. \quad (4.1.2)$$

Для определения решения \mathbf{G} введем функционал

$$\Phi(\mathbf{G}, n, N, x_i, y_j) = \frac{1}{2} \int_c^d z^2(x) dx. \quad (4.1.3)$$

При фиксированных значениях (n, N, x_i, y_j) запишем необходимые условия условного минимума функционала Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{G}} + \mathbf{\Lambda}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{G}} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F}) = 0, \quad (4.1.4)$$

где $\mathbf{\Lambda} [N \times 1]$ – множители Лагранжа. Далее, используя (4.1.1), (4.1.3) уравнение (4.1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' \mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}' \mathbf{Q} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{M} [n \times n] &= \int_c^d \mathbf{C}'(x) \mathbf{C}(x) dx, \quad \mathbf{b} = \int_c^d f(x) \mathbf{C}(x) dx \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Выражение для \mathbf{G} определяется из решения системы уравнений (4.1.2), (4.1.5)

$$G = (\mathbf{Q}' \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}' \mathbf{F}. \quad (4.1.6)$$

При $N = n$ решение (4.1.6) имеет вид

$$G = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F}. \quad (4.1.7)$$

Для определения параметров (n, N, x_i, y_j) используется алгоритм минимизации функционала Φ из 1-го раздела.

4.2 Решение – непрерывная кусочно-линейная функция.

Представим решение на каждом j -ом интервале линейной функцией

$$g_j(\xi) = g_j \cdot (1 - \xi) + g_{j+1} \cdot \xi, \quad \xi = h_j^{-1}(y - y_j), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (4.2.1)$$

Здесь $g_j = g(y_j)$. Подставляя (4.2.1) в (4.0.1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n h_j [g_j A_j(x) + g_{j+1} B_j(x)] &= f(x), \\ A_j(x) &= \int_0^1 K(x, y_j + h_j \xi) (1 - \xi) d\xi, \quad B_j(x) = \int_0^1 K(x, y_j + h_j \xi) \xi d\xi. \end{aligned}$$

Сгруппируем члены

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} [h_{j-1} B_{j-1}(x) + h_j A_j(x)] g_j &= f(x), \\ h_0 = B_0 = h_{n+1} = A_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Сохраним обозначения раздела (4.0.1) для интегралов

$$k_j(x) = h_{j-1} B_{j-1}(x) + h_j A_j(x)$$

и матриц $\mathbf{C}(x) [1 \times n + 1] = \{k_j(x)\}$, $\mathbf{G} [n + 1 \times 1] = \{g_j\}$. Тогда уравнение (4.1.1) сохраняет свой вид и для данного случая. Повторяя последующие операции, получим решение (4.1.6) при $N < n + 1$ и (4.1.7) при $N = n + 1$. Размер матрицы $\mathbf{Q} [N \times n + 1]$. Сохраняется также процедура определения параметров (n, N, x_i, y_j) .

4.3 Решение в C_1 .

Представим решение на j -ом интервале в следующей форме

$$g_j(\xi) = \sum_{k=1}^4 \alpha_k \phi_k(\xi), \quad \xi = h_j^{-1}(y - y_j), \quad \xi \in [0, 1], \quad (4.3.1)$$

и выберем функции $\phi_k(\xi)$ так, чтобы коэффициенты были равны значениям функции и ее производных на концах интервала по аналогии с построением интерполяционного полинома Эрмита

$$\alpha_1 = g_j(0), \quad \alpha_2 = g_j(1), \quad \alpha_3 = \frac{dg_j(0)}{d\xi} = p_j h_j, \quad \alpha_4 = \frac{dg_j(1)}{d\xi} = p_{j+1} h_j. \quad (4.3.2)$$

Здесь $p_j = dg(y_j)/dy$. Для этого функции $\phi_k(\xi)$ должны удовлетворять условиям, представленным в таблице. Зададим функции полиномами третьей степени $\phi_k(\xi) = \sum_{i=0}^3 a_{ki} \xi^i$. Тогда требуемым условиям соответствуют функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \varphi_2(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \\ \varphi_3(\xi) &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, \quad \varphi_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Обозначим

$$\int_0^1 K(x, y_j + h_j \xi) \phi_k(\xi) d\xi = k_{jk}(x). \quad (4.3.4)$$

Подставим (4.3.1) со значениями (4.3.2), (4.3.3) в (3.0.1). Получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} [c_j(x) g_j + d_j(x) p_j] &= f(x), \\ c_j(x) &= h_{j-1} k_{j-1,2}(x) + h_j k_{j,1}(x), \\ d_j(x) &= h_{j-1}^2 k_{j-1,4}(x) + h_j^2 k_{j,3}(x), \\ h_0 = k_{02} = k_{04} &= 0; h_{n+1} = k_{n+1,1} = k_{n+1,3} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Введем матрицы

$$\mathbf{C} [1 \times n + 1] = \{c_j(x)\}, \mathbf{D} [1 \times n + 1] = \{d_j(x)\}, \mathbf{G} [n + 1 \times 1] = \{g_j\}, \mathbf{P} [n + 1 \times 1] = \{p_j\}$$

и запишем уравнение (4.3.5) в форме

$$z(x) = \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{P} - f(x) = 0. \quad (4.3.6)$$

Разобьем отрезок $[c, d]$ на N интервалов, x_i – точки разбиения, $i = \overline{1, N}$, $x_1 = c$, $x_{N+1} = d$. Обозначим далее определенные интегралы

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} c_j(x) dx = c_{ij}, \int_{x_i}^{x_{i+1}} d_j(x) dx = d_{ij}, \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = f_i, \int_{x_i}^{x_{i+1}} z(x) dx = z_i,$$

матрицы $\mathbf{Q} [N \times 2(n + 1)] = \{c_{ij}, d_{ij}\}$, $\mathbf{R} [2(n + 1) \times 1] = \{g_j, p_j\}$, $\mathbf{F} [N \times 1] = \{f_i\}$, $\mathbf{Z} [N \times 1] = \{z_i\}$. Проинтегрируем уравнение (4.3.6) на N интервалах и положим равным нулю среднее значение невязки на каждом интервале $\mathbf{Z} = 0$. Получим уравнение

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}. \quad (4.3.7)$$

Повторяя операции раздела 3.1, получим решение при $N < 2(n + 1)$

$$R = (Q'Q)^{-1} Q'F, \quad (4.3.8)$$

и при $N = 2(n + 1)$

$$R = Q^{-1}F. \quad (4.3.9)$$

Элементы матрицы Q являются линейной комбинацией интегралов вида

$$s_i h_j \int_0^1 \int_0^1 K(x_i + s_i \eta, y_j + h_j \xi) \xi^k d\xi d\eta, s_i = x_{i+1} - x_i, \eta = s_i^{-1}(x - x_i), k = \overline{0, 3}.$$

При отсутствии аналитических выражений наиболее просто они могут быть вычислены посредством какого-либо двумерного аналога метода трапеций, например, представлением функции $K(\cdot)$ или ее части линейчатой функцией на квадратном шаблоне, или линейной функцией по обоим переменным на треугольном шаблоне. Процедура определения параметров (n, N, x_i, y_j) прежняя. Пример решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода дан в [4].

Таблица.

	$\phi(0)$	$\phi(1)$	$\frac{d\phi(0)}{d\xi}$	$\frac{d\phi(1)}{d\xi}$
ϕ_1	1	0	0	0
ϕ_2	0	1	0	0
ϕ_3	0	0	1	0
ϕ_4	0	0	0	1

Список литературы

- [1] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. // Москва. Наука, 1986.
- [2] ВЕРЛАНЬ А.Ф., СИЗИКОВ В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. // Киев, Наук. Думка, 1986.
- [3] ЛАТЫПОВ А.Ф. Динамический метод определения аэродинамических характеристик моделей по результатам экспериментов в аэродинамических трубах кратковременного действия. // ПМТФ. 2006. Т. 47. №5. с. 47–55.
- [4] LATYPOV A.F. AND NIKULICHEV YU. V. Numerical solution of the integral Fredholm equation of the first kind// Proceedings of the International conference on the methods of aero physical research. // Novosibirsk, 5–10 February, 2007. Pt. III. pp. 178–184.

Параллельные алгоритмы интервальной глобальной оптимизации

М. Е. Лозбень

Новосибирский государственный университет

Н. В. Панов

Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН

Для задачи доказательной (гарантированной) глобальной оптимизации, когда требуется не только найти оптимум функции, но и дать гарантию того, что найденное решение является действительно глобальным экстремумом, интервальный анализ предлагает мощный инструмент – интервальное расширение функции, которое позволяет находить гарантированные внешние оценки области значений функции на интервале. Это эксплуатируют интервальные методы поиска глобального оптимума, основанные на оценивании целевой функции и адаптивном дроблении области определения. Традиционно подобные методы признавались вычислительно менее эффективными, чем основанные, например, на техники распространения ограничений. Тем не менее, методы адаптивного дробления позволяют добиться эффективного распараллеливания вычислений. Это, а также применение стохастических техник, таких как интервальные генетические алгоритмы, позволяет создавать высокоэффективные параллельные интервальные алгоритмы глобальной оптимизации.

Постановка задачи и ее актуальность

Задачей оптимизации в математике называется задача о нахождении экстремума (минимума или максимума) вещественной функции в некоторой области. Как правило, рассматриваются области, принадлежащие R^n и заданные набором равенств и неравенств.

Методы оптимизации присутствуют практически на всех этапах системного анализа, а так же в системах поддержки принятия решений [1]. Оптимизация находит широкое применение в науке, технике и во многих других практических областях деятельности человека. Целевая функция может быть многоэкстремальной, разрывной, недифференцируемой, а также может быть искажена помехой.

В связи с бурным развитием вычислительной техники становятся все

более актуальными различные численные методы оптимизации, так как происходит значительное удешевление вычислительных мощностей, что позволяет использовать современные алгоритмы оптимизации для более точного решения ряда проблем, для которых ранее было возможно получение лишь грубого решения. В настоящее время параллельные и векторные суперкомпьютеры рассматриваются как один из основных инструментов для проведения исследований в различных научных и прикладных дисциплинах. Современные многопроцессорные компьютеры получили широкое распространение, и последние исследования в оптимизации принимают во внимание архитектурные особенности современных компьютеров, на которых эти алгоритмы предполагается реализовать.

Обзор алгоритмов

Задача глобальной оптимизации зачастую сводится к задаче поиска локальных экстремумов и нахождению среди них глобального оптимума. Алгоритмы поиска локального экстремума предназначены для определения одного из локальных экстремумов на множестве допустимых решений, в котором целевая функция принимает максимальное или минимальное значение [2]. При их построении могут использоваться три типа стратегий: детерминированный спуск в область экстремума, случайный поиск, комбинированные методы, содержащие элементы детерминированного и случайного поиска.

Алгоритм поиска локального экстремума обычно содержит процедуру "условия прекращения поиска экстремума", которая обеспечивает нахождение экстремума с определенной точностью. В целом алгоритмы поиска реализуют методы спуска к экстремуму, при которых значение целевой функции последовательно улучшается вплоть до достижения экстремума.

Методы спуска разделяются на 3 группы [1, 2]:

- 1) методы, использующие значения 1-й и 2-й производных целевой функции
В этом случае выполняются как необходимые, так и достаточные условия экстремума. Ярким представителем этих методов является метод Ньютона и его модификации;
- 2) методы, использующие только значения 1-й производной целевой функции, по которой можно оценить необходимое условие экстремума, а значит, выбрать верное направление спуска. К этой группе принадлежат градиентные методы, метод наискорейшего спуска, примыкают методы спуска с переменной метрикой, в которых вычисляются только 1-е производные, однако информация используется для последовательного построения матрицы 2-х производных (методы Флетчера-Ривса, Дэвидсона - Флетчера - Пауэлла и т.д.);

3) при оптимизации параметров технических систем наиболее широко применяются методы прямого поиска, не использующие вычисления производных, например, метод Гаусса-Зейделя и его модификации, метод Розенброка, метод Хука-Дживса, причем последние два гораздо эффективнее первого. Для задач со сравнительно небольшим (до 10) количеством переменных наиболее эффективен алгоритм поиска по деформируемому многограннику (метод Нелде-ра-Мита). В большинстве применяемых в настоящее время методов поиска экстремума при определении направления и размера последующего шага используется информация, полученная только на одном-двух предыдущих шагах. Это позволяет сократить время на использование информации, однако увеличивает общее количество шагов.

Интервальный анализ

Наш алгоритм поиска глобального оптимума основывается на интервальной арифметике и методе ветвей и границ.

Интервальная арифметика — математическая структура, которая для вещественных интервалов определяет операции, аналогичные обычным арифметическим. Развитие «интервальной идеи» состоялось лишь в XX веке, причём оно оказалось тесно связанным с развитием и распространением практических вычислений. А оформление интервального анализа в самостоятельную научную дисциплину вообще стало возможным лишь с появлением ЭВМ [3].

В 1931 году англичанка Розалинда Янг разработала арифметику для вычислений с множествами чисел. В 1951 году П. Двайер в США рассматривал специальный случай замкнутых интервалов (числовые диапазоны) в связи с необходимостью учёта погрешностей в численном анализе. В 1956-58-м годах появились работы Мечислава Вармуса в Польше и Тэруо Сунаги в Японии, предлагавшие классическую интервальную арифметику и намечавшие её приложения. При этом в впервые были использованы и современные термины «интервал», «интервальный». Кроме того, Т. Сунага заложил основы интервального алгебраического формализма и дал весьма нетривиальные примеры применений новой техники, к примеру, в численном решении алгебраических уравнений и задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В России и Советском Союзе «интервальную» историю можно отсчитывать с 20-х годов прошлого века, и связана она с именем замечательного русского советского математика и педагога В.М.Брадиса. С середины 20-х годов прошлого века он проповедовал так называемый метод границ — способ организации вычислений, приводящий к достоверным двусторонним границам точного значения вычисляемого результата, фактически аналогичный интервальной арифметике.

Предлагаемый нами метод глобальной оптимизации

Для решения задачи оптимизации в последние десятилетия было предложено большое количество подходов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки[4]. Тем не менее, общими чертами большинства из них являются:

— локальный характер, и, как следствие, неспособность находить гарантированно глобальный оптимум целевой функции,

— гарантированные оценки точности полученных решений либо

подобными методами с большим трудом, либо не находятся вообще.

Наш метод глобальной оптимизации, основанный на применении интервального анализа, свободен от этих недостатков, так как способен исследовать целые куски области определения целевой функции, имеющие ненулевую меру. Кроме того, он не теряет решений-оптимумов, гарантируя нахождение оптимума в указанной области.

Интервальный тип данных и интервальная арифметика реализуются на современных ЭВМ, например, представлением интервала как пары чисел – одного для левого конца интервала, а другого для правого. При этом существующее аппаратное обеспечение, в частности, арифметика чисел с плавающей точкой, используются без каких-либо изменений, так как корректность получающейся интервальной арифметики может быть обеспечена так называемыми направленными округлениями. Например, там, где в задачах внешнего интервального оценивания в процессе вычислений требуется округление результата, нижняя граница интервала должна округляться вниз, а верхняя граница интервала – вверх. Таким образом даже неизбежные ошибки округления при вычислениях с плавающей точкой будут строго и систематически учитываются в процессе выполнения интервальной программы [3].

Таким образом, интервальный подход к данному классу задач представляется нам наиболее оптимальным.

Идея метода

Метод последовательно уточняет интервальную оценку целевой функции на подозрительных интервалах, сновываясь на методе "Адаптивного интервального дробления". Основная функциональность — планомерное дробление наиболее подозрительного на данном шаге интервала, уточняя таким образом положение и значение глобального оптимума [4].

Так выглядит блокхема алгоритма:



Под брусом понимается многомерный интервал, исходный брус — область определения целевой функции, критерии остановки опциональны и зависят от конкретной задачи — это может быть, например, время работы, узость границ оценки оптимума, время работы программы.

Можно выделить следующие основные этапы интервального алгоритма уточнения глобального оптимума:

1. Выбрать перспективную область.
2. Раздробить выбранную область на подобласти.
3. Вычислить интервальное расширение функции на полученных подобластях.

Разница между алгоритмами в деталях. По каким критериям выбирать брус для дробления, как дробить, как вычислять интервальные расширения, какой выбрать критерий остановки [5].

Работа программы

Рассмотрим подробно работу программы. На вход подается исходный брус, целевая функция и в текущей реализации необходимая точность (в качестве критерия остановки). Далее начинается дробление области на части.

На каждой итерации алгоритма делению подвергаются наиболее «подозрительный» брус, то есть тот, на котором потенциально может достигаться экстремум. Один из способов его выбора — определение бруса, на котором целевая функция достигает наименьшего значения (имеется ввиду нижняя оценка интервального значения функции на брусе).

После выбора бруса он проверяется на соответствие критерию остановки.

В случае удовлетворения требованиям, он добавляется к остальным, а затем из всех рабочих брусов собирается область, в которой и лежит наш глобальный оптимум. Если же нет, то выбранный брус подвергается дроблению, на полученных подбрусах считаются интервальные значения целевой функции и они добавляются к остальным рабочим.

Есть возможность дробления на равные половины, на n частей (по одной из осей координат) равномерно или в заданной пропорции, также разрабатывается адаптивное дробление (Дробление с памятью) — дробление, на каждом шаге определяющее в каких пропорциях, на сколько частей и главное — по какой координате дробить рабочие области в зависимости от результатов предвещающих итераций. В числе прочего, для этого предполагается использовать генетические алгоритмы программирования.

Неравномерное дробление имеет большой потенциал, так как исходя из специфики целевых функций позволяет подобрать наиболее эффективный метод работы для каждого их вида. Например, большинство функций монотонны на весьма обширной области определения по сравнению с размерами интервала, да которых мы дробим (ведь интересующая нас точность $1e^{-2}$ — $1e^{-6}$). Соответственно, на таком отрезке локальный минимум (максимум) будет находиться на одном из концов интервала. В таком случае неравномерное дробление позволит получить более узкие границы оптимума за меньшее количество дроблений. Метод сложен в реализации: переключение с одного варианта дробления на другой, необходимость ведения статистики переходов и его анализа на каждой итерации алгоритма, поэтому пока ещё тестируется и дорабатывается.

В процессе работы программы периодически запускается процедура отбраковки брусов, на которых экстремум заведомо не достигается, отделяя лишние брусы и формируя множество «рабочих брусов». Отбраковываемые брусы определяются наличием или отсутствием брусов, на которых верхние границы интервальных значений целевой функции ниже. Действительно, если есть брус, на котором значения целевой функции достигают гарантированно меньшие значения, чем на текущем брусе (верхняя оценка функции на нем ниже нижней оценки функции на текущем), то на нем достижение минимума невозможно. В связи с своеобразной работой с оперативной памятью в Java, процедура запускается в тот момент, когда встроенный сборщик мусора сигнализирует о нехватке памяти, что обеспечивает ее своевременный запуск именно в нужный момент. Эта необходимость продиктована громоздкостью работы процедуры.

На данном этапе есть две параллельные реализации алгоритма. Одна из них делит исходный брус на n равномерных областей и запускает n потоков, каждый из которых обрабатывает алгоритмом соответствующую область. Затем результаты собираются вместе и, как и в линейной реализации, выделяется искомая область, в которой гарантированно находится оптимум.

Вторая более интересна. В ней реализована адаптивная параллельная

работа потоков. Есть основной процесс, контроллер, который запускает остальные и осуществляет функции координации и управления ими. На начальном этапе он формирует для каждого потока исходный брус. Также реализована возможность каждому потоку задать свой тип алгоритма, включая условия остановки, алгоритмы дробления и выбора брусков. Это позволит в дальнейшем расширить адаптивность программы с упоминавшегося выше неравномерного дробления до полной функциональной гибкости, возможности оценив статистику и проанализировав результаты предвещающих итераций на отдельных областях выбрать для конкретного потока наиболее оптимальный подход, адаптируясь к специфике целевой функции.

Потоки на каждой итерации алгоритма передают контроллеру данные о состоянии работы на текущий момент: текущий минимум целевой функции, количество рабочих брусков и состояние (достигнут или нет критерий остановки для данной конкретной области). Контроллер на основании этих данных отслеживает, какова текущая граница отбраковки и нужно ли перераспределять рабочие бруски с загруженных потоков на отработавшие. Тут возникает проблема реализации эффективного межпоточкового взаимодействия.

Во-первых, возникла проблема — каким именно образом хранить границы отбраковки, в какой момент вычислять глобальную для всех потоков границу, когда ее передавать и как синхронизировать отбраковку брусков на разных потоках? Выяснилось, что стандартное решение — запись в одну глобальную переменную первым потоком своей границы и последующее сравнение с ней значений границ остальных потоков приводит к ошибкам, так как пока один поток читает ее для сравнения, другой сразу после этого ее перезаписывает. Возникает так называемая ошибка параллельной модификации данных (data race). Если, для решения этой проблемы, ввести блокировку потоков при обращении к этой переменной на чтение или запись (синхронизированный доступ), то это приведёт к тому, что всем n потокам придётся ждать своей очереди для сравнения (так как переменная при работе с одним из них для остальных становится недоступна). Что на корню убьёт идею параллельной работы нескольких алгоритмов. Обозначенную проблему можно решить реализовав неблакирующую конкурентную запись максимального значения в общую глобальную переменную, однако на вычислительных машинах с большим количеством сокетов это привело бы к дополнительным синхронизациям кэша каждого из ядер и основной памяти. Была предложена альтернативная реализация — выделить каждому потоку свою переменную для записи в ней текущего состояния и предоставить контроллеру находить из них наименьшую и передавать её всем в качестве эталона. При таком подходе тоже есть свои проблемы — каждому потоку приходится ждать, когда все остальные запишут свои значения и контроллер выполнит свою работу, передав эталонное значение ему и всем остальным. Кроме того, контроллеру приходится отслеживать момент, когда все потоки записали свои границы. А так как это происходит на каждой итерации, то серьёзно снижает скорость работы в целом. В ближайшее время планируется подробное исследование связанных вопросов

на многопроцессорных системах для выбора оптимальной реализации.

Ссылки и литература

1. Кузнецов Алексей Владимирович. *Алгоритмы глобальной оптимизации функций в пространстве непрерывных переменных при наличии ограничений-неравенств* – диссертация на соискания степени к.ф.-м.н., Красноярск, 2006.
2. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. *Методы поиска глобального экстремума*. – М.: Наука, 1991.
3. Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. – Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/index.php?j=Library/InteBooks/index>
4. Панов Н.В. Объединение стохастических и интервальных подходов для решения задач глобальной оптимизации функций. // *Вычислительные технологии*. – 2009. – Т. 14, №5. – С. 49 – 65.
5. Панов Н.В. Адаптивный мета-алгоритм глобальной оптимизации // *Естественные и технические науки*. – 2009, № 1 (39). – М.: Спутник+, С. 315 – 318.

точечных линейных систем $Ax = b$ с матрицами $A \in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и векторами $b \in \mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$, для которых выполняются соотношения из множества C .

Объединённым множеством решений интервальной линейной системы уравнений со связями называется множество

$$\Xi_C(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b}) \\ ((Ax = b) \& (\text{справедливы условия из } C)) \},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$, причем коэффициенты матриц A удовлетворяют ограничениям (1).

На практике довольно часто встречаются линейные системы, коэффициенты матриц которых зависят от некоторых параметров p_1, p_2, \dots, p_k , принимающих значения из интервалов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ соответственно, т.е. $a_{ij} = a_{ij}(p)$, где $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$.

Такого рода система, являясь частным случаем описанной выше интервальной линейной системы со связями, представляет собой множество

$$\{ A(p)x = b \mid a_{ij} = a_{ij}(p), b_i \in \mathbf{b}_i, p \in \mathbf{p}, i, j = \overline{1, n} \}. \quad (3)$$

Интервальная матрица \mathbf{A} системы образована точечными матрицами $A(p)$, где $p \in \mathbf{p}$.

Объединённым множеством решений интервальной системы, матрица которой зависит от параметров $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, будем называть множество

$$\Xi_p(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists p \in \mathbf{p})(\exists b \in \mathbf{b})(A(p)x = b) \},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $A(p)x = b$ с $p \in \mathbf{p}$ и $b \in \mathbf{b}$.

Нас будет интересовать задача нахождения наибольшего интервального вектора $\mathbf{U} \subset \mathbb{IR}^n$, содержащегося в объединенном множестве решений интервальной системы со связями, т.е. задача внутреннего интервального оценивания этого множества решений.

2. «Центровой» подход

«Центровой» подход для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ состоит в следующем [1]. Сначала ищется некоторая точка $t \in \mathbb{R}^n$, принадлежащая множеству решений интервальной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ со связями, т.е. $t \in \Xi_C(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Затем, используя координаты найденной точки, по специальным формулам вычисляется брус $\mathbf{U} = (t + \rho \mathbf{e})$,

$\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ с центром в точке t , содержащийся во множестве решений $\Xi_C(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Размер ρ внутренней оценки \mathbf{U} можно вычислить по формуле [1]:

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}, \quad (4)$$

причем максимумы по $A \in \mathbf{A}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ находятся с учетом ограничений (1).

Таким образом, при построении внутренней интервальной оценки объединенного множества решений ИСЛАУ со связями необходимо решить для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ задачу условной оптимизации:

$$\text{максимизировать функцию} \quad \Phi(a_{i1}, \dots, a_{in}) = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$$

$$\text{при условиях} \quad \begin{aligned} f_\nu(a_{i1}, \dots, a_{in}) &= 0, & a_{ij} &\in \mathbf{a}_{ij}, \\ j &= 1, 2, \dots, n, & \nu &= 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Для интервальной линейной системы (3), элементы матрицы которой зависят от параметров $p_i \in \mathbf{p}_i$, $i = 1, \dots, k$, описанная выше оптимизационная задача примет вид:

$$\text{максимизировать функцию} \quad \Phi(p) = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}(p) t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}(p)|}$$

$$\text{при условиях} \quad p \in \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k).$$

Для решения данной задачи используем градиентный метод:

$$p^{(m+1)} := p^{(m)} + \gamma^{(m)} \nabla \Phi(p^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $\nabla\Phi(p) = \left(\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial\Phi(p)}{\partial p_k} \right)$ – градиент целевой функции, $\gamma^{(m)} \in \mathbb{R}$ – длина шага на m -ой итерации. В качестве длины шага $\gamma^{(m)}$ используем величину $\arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \Phi(p^m + \gamma^m \nabla\Phi(p^m))$, которую находим посредством одномерной оптимизации.

3. Формальный подход

Формальное решение интервальной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ – это интервальный вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$, обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики (в качестве которой может выступать либо классическая интервальная арифметика \mathbb{IR} , либо полная интервальная арифметика Каухера \mathbb{KR} , либо какая-то другая интервальная алгебраическая система).

Нахождение внутренней оценки множества решений ИСЛАУ можно свести к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений [1]. Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual}\mathbf{A})x = \mathbf{b}, \quad (6)$$

то \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. Таким образом, формальный подход позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче решения уравнения в дуализациях (6), т. е. к задаче численного анализа.

В качестве эффективного численного метода нахождения формальных решений интервальных систем уравнений можно использовать субдифференциальный метод Ньютона [1].

При нахождении формальных решений описанным выше способом не учитываются связи, наложенные на параметры системы. Поэтому полученные на их основе внутренние оценки множества решений ИСЛАУ могут содержать решения, как удовлетворяющие соотношениям (1), так и не удовлетворяющие им. Таким образом, наличие ограничений на параметры системы значительно усложняет задачу внутреннего оценивания ее множества решений.

Применим адаптивное дробление интервальных параметров системы уравнений [2]–[3]. Будем дробить интервалы параметров на подинтервалы ненулевой ширины, в объединении дающие исходные дробимые интервалы,

таким образом, чтобы получающиеся системы-потомки соответствовали связям, накладываемым на систему. После многократного дробления интервалы параметров систем-потомков будут достаточно малой ширины. Формальные решения этих систем-потомков, не будут сильно отличаться от внутренних оценок их множеств решений с учетом имеющихся ограничений на параметры. Причем это отличие будет тем меньше, чем меньше ширина интервалов параметров систем-потомков, полученных при дроблении.

Рассмотрим дробление параметров интервальной системы (3). В интервальном векторе параметров \mathbf{p} выбираем элемент \mathbf{p}_r , имеющий наибольшую ширину. Порождаем два интервальных вектора-потомка \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' . Вектор \mathbf{p}' получается из \mathbf{p} заменой элемента \mathbf{p}_r на $[\underline{\mathbf{p}}_r, \text{mid } \mathbf{p}_r]$. Вектор \mathbf{p}'' получается из \mathbf{p} заменой элемента \mathbf{p}_r на $[\text{mid } \mathbf{p}_r, \bar{\mathbf{p}}_r]$.

Находим формальные решения \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' , если они существуют, интервальных систем $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{A}''\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}' = \{A(p) \mid p \in \mathbf{p}'\}$ и $\mathbf{A}'' = \{A(p) \mid p \in \mathbf{p}''\}$.

Процедуру дробления повторяем по отношению к полученным ранее векторам-потомкам. В процессе дробления организуем список \mathcal{L} , в котором храним найденные формальные решения систем-потомков и их интервальные векторы параметров. Из списка \mathcal{L} для дробления каждый раз выбираем тот вектор параметров \mathbf{p} , который имеет наибольшую величину $\max_{1 \leq i \leq k} \text{wid } \mathbf{p}_i$. Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута необходимая малость ширины интервальных параметров всех систем-потомков, находящихся в списке \mathcal{L} .

В качестве искомой внутренней оценки множества решений интервальной системы (3) можно взять объединение правильных формальных решений, содержащихся в списке \mathcal{L} .

Автор благодарит С.П. Шарого за плодотворные обсуждения рассматриваемой задачи, которые помогли уяснить суть проблемы, устранить неточности и ошибки.

Список литературы

- [1] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Электронная книга <http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [2] Шарый С.П. Решение интервальных линейных систем со связями. // Сибирский журнал вычислительной математики. 2004. Т.7, №4. С. 363–376.

- [3] Neumaier A. The enclosure solutions of parameter-dependent systems of equations. // Reliability in Computing. 1988. Vol. 19, P. 269–286.

Решатель задач поиска глобального минимума и максимума функций

Н. В. ПАНОВ

КТИ ВТ СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа посвящена особенностям реализации эффективного решателя задач поиска глобального экстремума функций, позволяющего получать глобальный оптимум с гарантированной (доказательной) точностью, а равно и аргументы, его доставляющие. Делается обзор следующих техник, приёмов и методов: автоматическое и символьное дифференцирование, упрощение выражений, способы вычисления интервальных оценок и их точность, методы распространения ограничений, способы определения подобластей, гарантированно не содержащих оптимум, методы адаптивного дробления области определения, особенности реализации параллельных алгоритмов поиска и их взаимодействия, интервальные генетические алгоритмы.

Введение

Множество задач, возникающих в различных сферах человеческой деятельности, могут быть сведены к задаче поиска глобального оптимума. Многомерная оптимизация является неотъемлемой частью важнейших этапов моделирования различных (инженерных, экономических, и т.д.) систем. При этом в ряде задач, возникающих в практике оптимизации, требуется не просто приближённое численное решение, но ещё и гарантия того, что найденный оптимум действительно глобальный, а не один из локальных. Подобные постановки задач обычно характеризуют термином «гарантирующая или доказательная¹ глобальная оптимизация», и они являются чрезвычайно трудными. Кроме того, зачастую требуется не только указать величину глобального оптимума, но и определить значение аргументов, при котором он достигается.

Своей целью мы ставим создание решателя задач поиска глобального оптимума функций. Целевые функции при этом могут быть вещественно или интервальнозначные, невыпуклые, многоэкстремальные, недифференцируемые. Единственное условие, накладываемое на целевую функцию, это то, что она должна задаваться в явном виде: в виде математического выражения или подпрограммы, состоящей из комбинации переменных, арифметических операций и математических функций. Это необходимо для вычисления соответствующей интервальнозначной функции, подробнее см. [1].

При разработке особое внимание мы уделяем надёжности и эффективности работы создаваемого решателя. Для повышения надёжности несколько лет назад мы сознательно отказались от C++ в качестве языка разработки и постепенно перешли на Java. Благодаря постоянному развитию этой платформы, в частности, усовершенствованию технологии динамической компиляции во время выполнения программы разница в производительности по сравнению со статически компилируемыми языками уже не столь

¹По принятой терминологии. См. например К.И. Бабенко «Основы численного анализа» М.: Наука, 1986

значительна, как во времена, когда Java была создана. В то же время несколько иная парадигма программирования, а так же обилие высокоуровневых библиотек и компонент позволило существенно увеличить скорость разработки и стабильность продукта. Под эффективностью работы мы понимаем как разработку и реализацию наиболее вычислительно эффективных алгоритмов поиска, так и наиболее эффективную утилизацию доступных аппаратных ресурсов, в том числе обеспечение эффективной параллелизации вычислений. Основные инструменты разработки, используемые нами в этом проекте, это jdk7, JUnit, git, Intel VTune, Eclipse с рядом дополнительных компонентов, предназначенных для статического и динамического анализа кода, таких как FindBug.

Основные компоненты решателя

На данный момент основными инструментами поиска являются логика распространения ограничений и различные стратегии адаптивного дробления области поиска в сочетании с оцениванием целевой функции по получающимся подобластям. В дальнейшем планируется добавить ещё и явное решение нелинейных уравнений.

Алгоритмы адаптивного дробления используют тот факт, что интервальные оценки асимптотически точные. Это означает, что при уменьшении размеров области определения точность интервального расширения функции увеличивается. Отмеченный факт может быть положен в основу процедуры уточнения интервальной оценки области значений функции.

В самом деле, если разбить исходный брус \mathbf{x} на два подбруса \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' , дающие в объединении весь \mathbf{x} , то есть такие, что $\mathbf{x}' \cup \mathbf{x}'' = \mathbf{x}$, то

$$\{f(x) \mid x \in \mathbf{x}\} = \{f(x) \mid x \in \mathbf{x}'\} \cup \{f(x) \mid x \in \mathbf{x}''\}.$$

Соответственно, можно вычислить интервальные расширения на каждом подбрусе и в качестве новой оценки минимума целевой функции на \mathbf{x} взять

$$\min\{\underline{f(\mathbf{x}')} , \underline{f(\mathbf{x}'')} \}$$

и она будет, вообще говоря, более точна, чем исходная оценка $f(\mathbf{x})$, так как у брусов \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' размеры меньше, чем у исходного \mathbf{x} . Брусы-потомки \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' можно, в свою очередь, опять разбить на более мелкие части, найти для них интервальные расширения и далее уточнить оценку для минимума, потом снова повторить процедуру и так далее.

Ключевым моментом в подобном подходе является даже не то, как именно дробить каждый конкретный брус, а какой именно брус выбирать для уточнения интервальной оценки на каждой итерации алгоритма.

В решателе реализовано шесть различных алгоритмов адаптивного дробления, лишь один из них детерминистский. Остальные, такие как случайный поиск, поиски с приоритетом, интервальный метод имитации отжига, интервальные генетические алгоритмы, используют стохастические алгоритмы для выбора очередного бруса для дробления. Описание этих алгоритмов, доказательство их сходимости и результаты вычислительных экспериментов можно найти в работах [2–4]. Вкратце, общая идея этих методов в том, что бы за счёт допущения стохастических переходов при выборе очередного бруса для дробления и уточнения интервальной оценки преодолеть эффекты застоя и избыточности интервальной оценки и повысить вычислительную эффективность методов [5].

Существенное влияние на эффективность алгоритмов адаптивного дробления оказывают используемые типы интервальных расширений. Наши исследования показали, что в зависимости от характерного размера интервала и особенностей целевой функции предпочтительно использовать разные интервальные расширения. Подробнее об этом см. [6].

В настоящее время основной режим работы блока адаптивного дробления — параллельное исполнение нескольких стратегий дробления с применением разных типов интервальных расширений. Для наиболее эффективной параллельной работы методов адаптивного дробления им необходимо обмениваться текущими значениями оптимума.

Интервальное расширение функции гарантирует, что значения функции не выйдут за обозначенные границы. Следовательно, если при поиске глобального минимума на каком-либо подбрусе нижняя граница интервального расширения целевой функции больше, чем найденный на данный момент минимум, то такой брус можно исключать из рассмотрения, так как оптимум на нём гарантированно недостижим. Эта методика получила название «отбраковка по значению».

При параллельной работе нескольких алгоритмов для сохранения эффективной масштабируемости на большее количество потоков такое взаимодействие требуется организовать неблокирующим способом. При такой параллельной работе нескольких алгоритмов неизбежны ситуации, когда какой-то из алгоритмов закончил работу на своей области. Такое возможно как при завершении итераций по достижению критерия остановки, например, локализация оптимума на интервале заданного размера, так и потому, что другой алгоритм обновил критерий отбраковки по значению и это позволило отбросить из рассмотрения всю область, над которой работал данный алгоритм. В этом случае требуется, заблокировав лишь ещё один вычислительный поток, разделить его работу с закончившим.

Другими критериями отбраковки могут выступать интервальные оценки области значений первой и второй производных целевой функции. Действительно, если интервальные расширения частных производных на некой области не содержат ноль, значит, на этой области функция не достигает экстремума, следовательно, если она не содержит границы области поиска, её можно исключить из рассмотрения. Интервальная оценка второй производной позволяет определять выпуклость-вогнутость функции.

Целевая функция задаётся пользователем. Для получения производных целевой функции изначально использовался алгоритм автоматического дифференцирования. Впоследствии, когда для нужд распространения ограничений, а также для нелинейного решателя потребовалась возможность символьного манипулирования с выражениями, автоматическое дифференцирование было заменено символьным, так как последнее позволяет на своей основе реализовать символьное упрощение и преобразование выражений. Подробнее об автоматическом и символьном дифференцировании см. например [7].

Распространение ограничений (иногда также называемое удовлетворением ограничениям или программированием в ограничениях) является одной из интенсивно развивающихся областей искусственного интеллекта и применяется для решения разнообразных задач. Фактически, это один из способов уменьшения пространства поиска за счёт проверки совместности конечного набора ограничений и отсекаания недопустимых значений переменных. Подробнее о методе см. например [8].

В нашем случае ограничения берутся из условия равенства нулю производной в точке экстремума и условию выпуклости функции, а также из условия, что целевая

функция должна принимать значения не больше тех, которые к этому моменту найдены методами адаптивного дробления и точечными (неинтервальными) алгоритмами локального поиска. В случае, если целевая функция недифференцируема, то последний способ становится единственным источником наполнения множества ограничений.

Блок распространения ограничений работает в параллель с блоком адаптивного дробления. Такая организация работы способствует более эффективному поиску, так как оба блока в процессе работы обмениваются уточненными координатами области поиска и оценками оптимума.

Список литературы

- [1] ШАРЫЙ С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. – Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/index.php?j=Library/InteBooks/index>.
- [2] ПАНОВ Н.В., ШАРЫЙ С.П. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ // *Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия. Расширенные тезисы докладов*. — САНКТ-ПЕТЕРБУРГ: ВВМ, 2006. — С. 101–105.
- [3] ПАНОВ Н.В. АДАПТИВНЫЙ МЕТА-АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ // *Естественные и технические науки* (ISSN 1684-2626). — 2009. №1 (39). — Москва: СПУТНИК+, С. 315–318.
- [4] ПАНОВ Н.В. ОБЪЕДИНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОДХОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ // *Вычислительные технологии*. — 2009. — Т. 14, №5. — С. 49–65.
- [5] ШАРЫЙ С.П. РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ // *Сиб. Журнал Вычисл. Матем.* — 2008. — Т. 11, №4. — С. 457–474.
- [6] ПАНОВ Н.В. ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ МЕТОДАМИ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА // *Вопросы современной науки и практики (Тамбов, Университет им. Вернадского)*. — 2009. — №3 (17). — С. 78–86.
- [7] CHRISTODOULOS A. FLOUDAS, PANOS M. PARDALOS *Encyclopedia of Optimization* – Springer, 2009.
- [8] СЕМЕНОВ А.Л. МЕТОДЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ: ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ // *Труды Пятой международной конференции памяти академика А.П. Ершова «Перспективы систем информатики»*. — Новосибирск, ИПО ЭМАРИ, 2003. Т. «МЕЖДУНАРОДНОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ И МЕТОДАМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ». — С. 20–31.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ МАТРИЦ ПО ОЦЕНКАМ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А.В. Пролубников, С.Л. Силицкий

Омский государственный университет
e-mail: a.v.prolubnikov@mail.ru

Аннотация. Предлагается алгоритм решения задачи распознавания числовых матриц, использующий оценки множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Рассматриваются две схемы алгоритма – схема, использующая оценки, полученные с помощью интервального метода Гаусса-Зейделя, и схема, оценивающая множества решений интервальных систем линейных уравнений при помощи решений неинтервальных систем линейных уравнений. Обе предложенные схемы имеют вычислительную сложность, оцениваемую как $O(n^3)$ элементарных машинных операций. Рассматриваются результаты вычислительного эксперимента. В качестве приложения разработанного алгоритма распознавания числовых матриц рассматривается задача распознавания растровых изображений.

Ключевые слова: распознавание образов, интервальная система линейных уравнений, вычислительная эффективность.

1. Постановка задачи.

В рассматриваемой задаче распознавания образов предполагается, что некоторое изображение из числа эталонных подверглось зашумлению – некоторому изменению значений пикселей изображения. При этом известно, в каком интервале могли происходить изменения значений пикселей. По имеющемуся зашумленному изображению необходимо определить, каким эталонным изображением, подвергнутым зашумлению, оно является.

Существует множество подходов к решению данной задачи. Ниже предлагается подход, основанный на оценивании расстояний от решений систем линейных уравнений с матрицами, соответствующими эталонным изображениям, от множеств решений систем линейных уравнений с интервальными матрицами.

Матричная постановка задачи следующая. Имеется L квадратных $n \times n$ -матриц A_k с элементами a_{ij}^k , представляющими пиксели изображений. В ходе зашумления одной из матриц – матрицы A_{i_0} – получена некоторая матрица A . Известно, что значение элементов матриц могло быть изменено в пределах интервалов $[a_{ij}^k - \Delta, a_{ij}^k + \Delta]$, $\Delta > 0$. Необходимо определить i_0 .

Без ограничения общности можно считать матрицы A_1, \dots, A_L, A квадратными. В противном случае, если имеются $m \times n$ -матрицы т.ч. $m < n$, то к каждой матрице добавляются $n - m$ нулевых строк.

Для решения такой задачи распознавания обычно решается задача минимизации некоторого функционала, представляющего собой расстояние $\rho(F_1(A), F_2(A_i))$, где F_1, F_2 – некоторые отображения распознаваемого изображения и эталонных, представляемых числовыми матрицам. При удачно выбранных F_1 и F_2 и уровне зашумления, допускающем

распознавание, минимум расстояния будет достигаться на i_0 :

$$\rho(F_1(A), F_2(A_{i_0})) = \min_{1 \leq i \leq L} \{\rho(F_1(A), F_2(A_i))\}. \quad (1)$$

В качестве отображений F_1 и F_2 в этой работе предлагается использовать отображения числовых матриц в точки множеств решений интервальных линейных систем уравнений, связанных с матрицами A_1, \dots, A_L, A .

Определение. Для интервальной линейной системы уравнений вида $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, где \mathbf{A} – интервальная $n \times n$ матрица, \mathbf{b} – некоторый интервальный n -мерный вектор, множество решений – это множество $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in R^n \mid \exists A \in \mathbf{A}, \exists b \in \mathbf{b}: Ax = b\}$.

Рассматриваемые далее интервальные линейные системы уравнений – системы уравнений с правой частью $\mathbf{b} = ([b_1, b_1], \dots, [b_n, b_n])$. То есть интервальный вектор \mathbf{b} может быть рассмотрен как вектор $b \in R^n$. Его выбор производится исходя из индивидуальной задачи распознавания с заданным набором эталонных матриц A_1, \dots, A_L .

2. Алгоритм, использующий оценки множеств решений интервальных линейных систем уравнений, полученные интервальным методом Гаусса-Зейделя

В ходе работы предлагаемого алгоритма по матрицам A_1, \dots, A_L, A строятся интервальные матрицы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_L$. После чего находятся множества $\tilde{\Xi}_i$ ($i = \overline{1, L}$), представляющие собой внешние оценивания множеств $\Xi(\mathbf{A}_i, \mathbf{b})$ – множеств решений интервальных линейных систем уравнений $\mathbf{A}_i x = \mathbf{b}$ ($i = \overline{1, L}$).

В качестве расстояния ρ , исходя из значения которого производится распознавание числовой матрицы A , в (1) будем использовать значение $\rho(x_i, \tilde{\Xi}_i)$, где x_i – решение неинтервальной системы линейных уравнений с матрицей A'_i , построенной по матрицам A_i и A , и правой частью b . ρ , как расстояние от точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ до множества $\tilde{\Xi} = ([\underline{x}_1, \bar{x}_1], \dots, [\underline{x}_n, \bar{x}_n])$, определим так:

$$\rho(x, \tilde{\Xi}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\max\{|x_j - \underline{x}_j|, |x_j - \bar{x}_j|\})^2}.$$

$\tilde{\Xi}_i$ будем получать с помощью интервального метода Гаусса-Зейделя решения интервальной линейной системы уравнений.

Решением задачи распознавания числовых матриц объявляется номер i_0 т.ч.

$$\rho(x_{i_0}, \tilde{\Xi}_{i_0}) = \min_{1 \leq i \leq L} \rho(x_i, \tilde{\Xi}_i).$$

Построение матриц A'_i и \mathbf{A}_i . Пусть a_{ij}^k – элемент матрицы A_k , находящийся в ее (i, j) -й позиции, a_{ij} – элемент матрицы A , находящийся в ее (i, j) -й позиции. Найдем a_{\min} и a_{\max} т.ч.:

$$a_{\min} = \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq k \leq L}} \{a_{ij}^k, a_{ij}\},$$

$$a_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq k \leq L}} \{a_{ij}^k, a_{ij}\}.$$

Далее строим матрицы \tilde{A}_i со следующими элементами:

$$\tilde{a}_{ij}^k = \frac{a_{ij}^k - a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}}.$$

После чего получаем матрицы A'_i :

$$A'_i = \tilde{A}_i + N,$$

где N – диагональная матрица с элементами на диагонали равными n .

Для построения матриц \mathbf{A}_i ($i = \overline{1, L}$) строим сначала матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_i$ со следующими элементами

$$\tilde{\mathbf{a}}_{ij}^k = [\min\{a'_{ij}, a_{ij}\}, \max\{a'_{ij}, a_{ij}\}].$$

Матрицы \mathbf{A}_i получаем следующим образом:

$$\mathbf{A}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i + \mathbf{N},$$

где \mathbf{N} – диагональная интервальная матрица с элементами $[n, n]$.

Общая схема алгоритма распознавания следующая.

Алгоритм 1 распознавания числовых матриц

Шаг 1. Построение числовых матриц A'_i , $i = \overline{1, L}$.

Шаг 2. Построение интервальных матриц \mathbf{A}_i , $i = \overline{1, L}$.

Шаг 3. Нахождение x_i – решений систем линейных уравнений

$$A'_i x = b, \tag{2}$$

$i = \overline{1, L}$.

Шаг 4. Нахождение $\tilde{\Xi}_i$ – внешних оцениваний множеств решений интервальных линейных систем уравнений

$$\mathbf{A}_i x = \mathbf{b}, \tag{3}$$

$i = \overline{1, L}$.

Шаг 5. Нахождение i_0 т.ч.

$$\rho(x_{i_0}, \tilde{\Xi}_{i_0}) = \min_{1 \leq i \leq L} \rho(x_i, \tilde{\Xi}_i).$$

i_0 – найденное решение задачи распознавания. Работу алгоритма завершить.

Матрицы A'_i ($i = \overline{1, L}$) – числовые матрицы со строгим диагональным преобладанием, что позволяет вычислительно эффективно решать системы линейных уравнений (2) методом Гаусса-Зейделя.

Поскольку для $u = (1, \dots, 1)^T$ будет иметь место $\langle \mathbf{A}_i \rangle u > 0$, где $\langle \mathbf{A}_i \rangle$ – матрица сравнения для интервальной матрицы \mathbf{A}_i , то построенные матрицы \mathbf{A}_i являются H -матрицами, что позволяет [1] при любом достаточно широком начальном интервальном векторе-приближении получать внешние оценки множеств решений интервальных линейных систем уравнений (3) интервальным методом Гаусса-Зейделя.

3. Алгоритм, использующий оценки множеств решений интервальных линейных систем уравнений, полученные решением неинтервальных систем линейных уравнений

Пусть $\mathbf{A}_i(\delta)$ – интервальная $n \times n$ -матрица, с элементами $[a_{ij} - \delta, a_{ij} + \delta]$. Тогда $A \in \mathbf{A}_{i_0}(\delta)$ для некоторого δ . Изменяя δ ($0 < \delta \leq \Delta$), будем оценивать расстояние от x_0 до множеств

$\Xi(\mathbf{A}_i(\delta), \mathbf{b})$, где x_0 – решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$. Если для некоторого δ выполняется $x_0 \in \Xi(\mathbf{A}_j(\delta), \mathbf{b})$, то матрица A является зашумленной матрицей A_j .

Поскольку возможна ситуация, когда при некотором $\delta \leq \Delta$ имеется несколько значений j т.ч. $A \in \mathbf{A}_j(\delta)$, и в такой ситуации распознавание таким способом невозможно, в ходе итераций алгоритма будем оценивать не вхождение x_0 в $\Xi(\mathbf{A}_i(\delta), \mathbf{b})$, а близость значения x_0 к множествам $\Xi(\mathbf{A}_i(\delta), \mathbf{b})$ при изменении значения δ .

Второй предлагаемый алгоритм распознавания числовых матриц – алгоритм, работающий с обыкновенными, неинтервальными системами уравнений. При этом оценка множества решений интервальной линейной системы уравнений находится по отдельным его элементам, получаемым случайным образом в ходе варьирования δ . На итерациях алгоритма производятся возмущения матриц в пределах $[a_{ij} - \Delta, a_{ij} + \Delta]$, заданных на старте алгоритма. Находятся точки из множеств (представители множеств) $\Xi(\mathbf{A}_i(\delta), \mathbf{b})$, с помощью которых оценивается близость x_0 к множествам $\Xi(\mathbf{A}_i(\delta), \mathbf{b})$.

При нахождении представителей множеств производится решение систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, модифицированными до матриц со строгим диагональным преобладанием, что обеспечивает сходимость к точному решению с уточнением на один разряд мантииссы приближенного решения на каждой итерации метода Гаусса-Зейделя решения неинтервальных систем линейных уравнений. Модифицирование матрицы A с элементами a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) производится следующей заменой их диагональных элементов:

$$a_{ii} := a_{ii} + \sum_{i \neq j}^n a_{ij} + 1.$$

В приведенной ниже схеме алгоритма m – число итераций, p – число решений из множества $\Xi(\mathbf{A}_i(\delta_k), \mathbf{b})$, рассматриваемого на k -й итерации алгоритма. Значение δ_k определяется на каждой итерации как $\delta_k = (\Delta/m) \times k$. $\rho(x, y)$ – евклидово расстояние между x и y ($x, y \in R^n$).

Алгоритм 2 распознавания числовых матриц

Шаг 1. $\Delta := \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq k \leq L}} |a_{ij}^k - a_{ij}|$. $s_i := 0$, $s_i^j := 0$ для $i = \overline{1, L}$, $j = \overline{1, m}$.

Шаг 2. Найти x_0 – решение системы уравнений $Ax = b$.

Шаг 3. Для $k = \overline{1, m}$ сгенерировать множество матриц $\{\tilde{A}_i^j(\delta_k)\}_{j=1}^p$.

Шаг 4. Решить системы линейных уравнений $\tilde{A}_i^j(\delta_k) = b$ для $i = \overline{1, L}$, $j = \overline{1, p}$.
 $\{x_{ij}^k\}$ – полученные решения.

Шаг 5. Вычислить $\{\rho_i^k\}_{i=1}^L$:

$$\rho_i^k := \min_{1 \leq j \leq p} \{\rho(x_0, x_{ij}^k)\}.$$

Шаг 6. Для всех $k = \overline{1, m}$: если q т.ч. $\rho_q^k = \min_{1 \leq i \leq L} \{\rho_i^k\}$, то $s_q^k := s_q^k + 1$.

Шаг 7. Вычислить $\{s_i\}_{i=1}^L$:

$$s_i := \sum_{k=1}^m s_i^k.$$

Шаг 8. Найти i_0 такое, что

$$s_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq L} \{s_i\}.$$

i_0 – найденное решение задачи распознавания. Работу алгоритма завершить.

Значения s_i показывают, сколько раз был достигнут минимум расстояния от x_0 до представителей множеств $\Xi(\mathbf{A}_i(\delta_j), \mathbf{b})$. В качестве решения выдается i_0 , на котором этот минимум был достигнут наибольшее число раз на итерациях алгоритма.

4. Выбор вектора b [С.П. Шарый]

Оптимальным для распознавания вектором b будет вектор, дающий максимум:

$$\max \|((A')^{-1} - (A'')^{-1})b\|_2,$$

где A', A'' – фиксированные матрицы.

Пусть $C = (A')^{-1} - (A'')^{-1}$. Имеет смысл ограничить область изменения b . Удобно взять единичную сферу.

Всякая матрица $G \in \mathbf{R}^{m \times n}$ допускает единственное представление в виде:

$$G = U\Sigma V^T, \quad (4)$$

где U, V – ортогональны, Σ – диагональная. (4) – сингулярное разложение, U, V – матрицы левых и правых сингулярных векторов. Таким образом, задача может быть переформулирована как нахождение вектора b такого, что достигается

$$\max_{\|b\|_2=1} \|Cb\|_2.$$

Но

$$\max_{\|b\|_2=1} \|Cb\|_2 = \max_{\|b\|_2 \neq 0} \frac{\|Cb\|_2}{\|b\|_2} = \|C\|_2,$$

тогда как норма матрицы, согласованная с евклидовой нормой вектора, есть норма

$$\|C\|_2 = \max \sigma(C),$$

где $\max \sigma(C)$ – максимальное сингулярное число матрицы C .

Определим, на каком векторе b единичной сферы достигается этот максимум. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{\|b\|_2=1} \|Cb\|_2 &= \max_{\|b\|_2=1} (Cb, Cb)^{1/2} = \max_{\|b\|_2=1} \{b^T C^T C b\} = \\ &= \max_{\|b\|_2=1} (b^T (V\Sigma U^T)(U\Sigma V^T)) = \max_{\|b\|_2=1} (b^T (V\Sigma^2 V^T)) = \max_{\|x\|_2=1} (x^T \Sigma^2 x) = \max \sigma_{\max}^2, \end{aligned}$$

где $x = Vb$.

Максимум достигается на единичном векторе, все компоненты которого нулевые, за исключением компоненты, соответствующей σ_{\max} в сингулярном разложении. (Матрица Σ задана единственным образом.) Получаем:

$$Vb = x,$$

то есть b – это строка матрицы V , соответствующая σ_{\max} .

Следовательно, для нахождения вектора b , дающего наиболее эффективное распознавание, необходимо найти сингулярное разложение для матрицы

$$C = (A')^{-1} - (A'')^{-1},$$

в результате чего может быть получен вектор b .

5. Вычислительная сложность алгоритмов

Оценим вычислительную сложность алгоритма 1 распознавания числовых матриц. Трудоемкость шага 1 может быть оценена как $L \times O(n^2)$. Шага 2 – $O(n^2)$. Шага 3 – $L \times K_1 \times O(n^2)$, где K_1 – число итераций метода Гаусса-Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений. Шага 4 – $L \times K_2 \times O(n^2)$, где K_2 – число итераций интервального метода Гаусса-Зейделя. Шага 5 – $O(n)$. Таким образом, общая вычислительная сложность алгоритма, выраженная в элементарных машинных операциях, составит

$$L \times O(n^2) + O(n^2) + L \times K_1 \times O(n^2) + L \times K_2 \times O(n^2) + O(n) \leq O(n^3).$$

Оценим вычислительную сложность алгоритма 2 распознавания числовых матриц. Трудоемкость шага 1 может быть оценена как $L \times O(n^2)$. Шага 2 – $K_1 \times O(n^2)$, где K_1 – число итераций метода Гаусса-Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений. Шага 3 – $L \times p \times O(n^2)$. Шага 4 – $L \times p \times K_1 \times O(n^2)$. Шагов 5, 6, 7, 8 – как $O(\max\{L, m, p\})$. Таким образом, общая вычислительная сложность алгоритма, выраженная в элементарных машинных операциях, составит

$$L \times O(n^2) + K_1 \times O(n^2) + L \times p \times O(n^2) + L \times p \times K_1 \times O(n^2) + O(\max\{L, m, p\}) \leq O(n^3).$$

Предполагается, что $L, p, m \ll n$.

6. Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный подход показал свою эффективность в ходе проведенного эксперимента с матрицами размеров до 400×400 и значениями элементов от 0 до 255. Изменение элемента матрицы (зашумление) в ходе эксперимента представляло собой равномерно распределенную случайную величину, принимающую значения в диапазоне от 0 до Δ ($100 \leq \Delta \leq 255$). Количество изменяемых элементов составляло до 80%. Позиции изменяемых элементов выбирались как в соответствии с равномерным распределением по всем позициям элементов матрицы, так и в соответствии с выбором отдельных групп элементов матрицы, подвергаемых зашумлению. Так, при подаче на вход алгоритмов изображений букв латинского алфавита и цифр в градациях серого цвета (размер изображений составлял 200×200 пикселей) оба предложенных алгоритма устойчиво распознавали изображения при величине равномерного шума до 60% и изменении цвета до 10 круговых областей изображения радиусом до 30 пикселей.

Эффективность обоих алгоритмов становится ниже при работе с монохромными изображениями. В этом случае при зашумлении изменение значений элементов матрицы, соответствующей изображению, более дискретно – происходит инвертирование значений, тогда как алгоритмы работают исходя из непрерывности изменений границ множества $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ при непрерывном изменении элементов A . При проведении вычислительного эксперимента с монохромными изображениями были получены следующие результаты. При наличии небольшого числа случаев принципиально тяжелых для распознавания алгоритмом (3% от общего числа испытаний), распознавание производилось правильно при уровне равномерного шума до 40%, тогда как алгоритмы типа „Кора“ и алгоритмы, использующие морфологический метод, дающие наилучшее решение данной задачи среди разработанных

алгоритмов ее решения, позволяют устойчиво распознавать монохромные изображения при равномерном шуме в 42% и 45% соответственно [2].

Отметим, что при одинаковом порядке количества используемых элементарных машинных операций, в целом, схемы показали эквивалентно высокую эффективность распознавания числовых матриц при заданных в вычислительном эксперименте ограничениях на производимые возмущения их элементов (зашумление).

Список литературы

- [1] A. Neumaier *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [2] Е.В. Дюкова, Э.А. Киринос *Сравнение алгоритма распознавания типа „Кора“ и черно-белой морфологии в задаче распознавания черно-белых изображений*. - Математические методы распознавания образов. Доклады 9-й Всероссийской конференции, Москва, 1999, с. 178–179.

Субградиентные методы с преобразованием пространства для минимизации овражных выпуклых функций

П.И. СТЕЦЮК

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины

e-mail: stetsyukp@gmail.com

Приведены Octave-функция `ralgb5` (реализует r -алгоритм с адаптивной регулировкой шага и постоянным коэффициентом растяжения пространства) и алгоритм-функция `amsq2p` (реализует релаксационный метод с преобразованием пространства, которое использует два последовательных субградиента и агрегатный вектор, являющийся выпуклой комбинацией вычисленных ранее субградиентов). Даны результаты экспериментов для существенно овражной кусочно-квадратичной функции и кусочно-линейной функции, которая связана с разрешимостью интервальной линейной задачи о допусках.

Функции с разрывным градиентом часто встречаются в различных задачах интервального анализа как следствие кусочной гладкости интервальных арифметических операций. Поэтому владение численными методами минимизации негладких выпуклых функций дает разработчику действенный инструмент при построении эффективных алгоритмов для решения задач математического программирования в интервальном анализе. Подробное изложение основных источников, порождающих задачи негладкой оптимизации, и приложение к ним методов минимизации недифференцируемых функций можно найти в [1]. Очень информативны на этот счет сборники научных трудов [2, 3], в которые включены основные работы Н.З.Шора по методам негладкой оптимизации и их применению в задачах большой размерности, квадратичного, булевого, матричного и стохастического программирования. Сборники доступны в электронном варианте по адресу <http://elis.dvo.ru/?q=node/114> (режим доступа — свободный).

Негладкие выпуклые функции, как правило, характеризуются овражной или существенно овражной структурой поверхностей уровня. Качество методов минимизации негладких выпуклых функций главным образом определяется способностью избежать зигзагообразной траектории итерационного процесса в точках близких ко дну «русла оврага». Если метод с этим легко справляется то, как правило, этот метод обладает ускоренной сходимостью при минимизации негладких функций. Ниже обсудим алгоритмы из двух семейств субградиентных методов оптимизации с преобразованием пространства, имеющих ускоренную сходимость при минимизации выпуклых функций с овражной структурой поверхностей уровня.

Первый метод — $r(\alpha)$ -алгоритм (реализован функцией `ralgb5` на языке Octave [4]) относится к семейству субградиентных методов минимизации негладких функций, которое известно как r -алгоритмы Н.З.Шора. r -Алгоритмы базируются на процедуре наискорейшего спуска в преобразованном пространстве переменных и обеспечивают монотонность (или почти монотонность) по значениям минимизируемой функции. r -Алгоритмы используют операцию растяжения пространства в направлении разности

двух последовательных субградиентов, которая улучшает свойства овражной функции в преобразованном пространстве переменных.

Второй метод (реализован алгоритм-функцией `amsg2p`) относится к семейству методов минимизации негладких функций, которые используют релаксационный шаг (известен как шаг Поляка или шаг Агмона-Моцкина), и использует априорное знание минимального значения функции. Здесь применяется антиовражная техника, подобно тому, как это сделано в r -алгоритмах Шора. Но преобразование пространства реализуется с помощью линейного оператора [5], который позволяет обеспечить уменьшение расстояния до точки минимума в очередном преобразованном пространстве переменных.

1. Octave-функция `ralgb5`

Программа находит точку минимума x_r^* выпуклой функции $f(x)$ от n переменных и делает это с помощью $r(\alpha)$ -алгоритма — вариант r -алгоритмов с постоянным на каждой итерации коэффициентом растяжения пространства α ($\alpha > 1$) и адаптивной регулировкой шага в направлении нормированного антисубградиента. Программа использует Octave-функцию `function [f,g] = calcfg(x)`, которая вычисляет значение функции $f = f(x)$ и её субградиента $g = \partial f(x)$ в точке x . Программа использует следующие параметры.

```
% Входные параметры:
%   calcfg -- имя функции вида calcfg(x) для вычисления f и g
%   x     -- начальная точка x(n) (на выходе портится)
%   alpha -- коэффициент растяжения пространства
%   h0, nh, q1, q2 -- параметры адаптивной регулировки шага
%   epsx, epsg, maxitn -- параметры останова
% Выходные параметры:
%   xr -- найденная точка минимума функции xr(n)
%   fr -- значение функции в точке минимума
%   itn -- число затраченных итераций
%   ncalls -- число вызовов функции calcfg
%   istop -- код останова (2 = epsg, 3 = epsx, 4 = maxitn, 5 = error)
```

Адаптивная регулировка шага в $r(\alpha)$ -алгоритме выполняет одномерный спуск в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных и реализуется с помощью параметров h_0 , q_1 , n_h , q_2 . Здесь h_0 — величина начального шага (используется на 1-й итерации, на каждой последующей итерации эта величина уточняется); q_1 — коэффициент уменьшения шага ($q_1 \leq 1$), если условие завершения спуска по направлению выполняется за один шаг; q_2 — коэффициент увеличения шага ($q_2 \geq 1$); натуральное число n_h задает число шагов одномерного спуска ($n_h > 1$), через каждые из которых шаг будет увеличиваться в q_2 раз. Подробные рекомендации по выбору коэффициента растяжения пространства и параметров адаптивной регулировки шага даны в [6], с. 45–47. Их суть состоит в том, чтобы адаптивный способ регулировки шага позволял увеличивать точность поиска минимума функции по направлению в процессе счета и при этом число шагов по направлению не должно быть большим.

Параметры ε_x и ε_g определяют условия завершения $r(\alpha)$ -алгоритма: метод останавливается в точке x_{k+1} , если выполнено $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon_x$ (останов по аргументу); метод останавливается в точке x_{k+1} , если выполнено условие $\|g_f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_g$ (останов по норме

субградиента, используется для гладких функций). Аварийное завершение программы связано либо с тем, что функция $f(x)$ неограничена снизу, либо h_0 слишком мал и его требуется увеличить.

```
# ralgb5 -- Octave-function for Shor's r-algorithm
function [xr,fr,itn,ncalls,istop]=ralgb5(calcfg,x,alpha,h0,q1,
                                       q2,nh,epsg,epsx,maxitn);
itn=0; hs=h0; B=eye(length(x)); xr=x; # row001
ncalls = 1; [fr,g0] = calcfg(xr); # row002
printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row003
       itn, fr, fr, 0, ncalls);
if(norm(g0) < epsg) istop = 2; return; endif # row004
for (itn = 1:maxitn) # row005
    dx = B * (g1 = B' * g0)/norm(g1); # row006
    d = 1; ls = 0; ddx = 0; # row007
    while (d > 0) # row008
        x -= hs * dx; ddx += hs * norm(dx); # row009
        ncalls ++; [f, g1] = calcfg(x); # row010
        if (f < fr) fr = f; xr = x; endif # row011
        if(norm(g1) < epsg) istop = 2; return; endif # row012
        ls ++; (mod(ls,nh)==0) && (hs *= q2); # row013
        if(ls > 500) istop = 5; return; endif # row014
        d = dx' * g1; # row015
    endwhile # row016
    (ls == 1) && (hs *= q1); # row017
    printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row018
          itn, f, fr, ls, ncalls);
    if(ddx < epsx) istop = 3; return; endif # row019
    xi = (dg = B' * (g1 - g0) )/norm(dg); # row020
    B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi'; # row021
    g0 = g1; # row022
endfor # row023
istop = 4; # row024
endfunction
```

При минимизации негладких функций рекомендуется следующий выбор параметров: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1.0$, $q_1 = 1.0$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$. Если известна априорная оценка расстояния от начальной точки x_0 до точки минимума x^* , то начальный шаг h_0 целесообразно выбирать порядка $\|x_0 - x^*\|$. При минимизации гладких функций рекомендуемые параметры такие же, за исключением q_1 ($q_1 = 0.8 \div 0.95$). Это обусловлено тем, что дополнительное измельчение шага способствует увеличению точности поиска минимума функции по направлению, что при минимизации гладких функций обеспечивает более быструю скорость сходимости. При таком выборе параметров, как правило, число спусков по направлению редко превосходит два, а за n шагов точность по функции улучшается в три-пять раз. Параметры останова $\varepsilon_x, \varepsilon_g \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ при минимизации выпуклой функции даже существенно овражной структуры обеспечивает нахождение

x_r^* со значением функции, достаточно близким к оптимальному. При этом обычно

$$\frac{f(x_r^*) - f(x^*)}{|f(x^*)| + 1} \sim 10^{-6} \div 10^{-5} \text{ — для негладких}$$

и

$$\frac{f(x_r^*) - f(x^*)}{|f(x^*)| + 1} \sim 10^{-12} \div 10^{-10} \text{ — для гладких функций,}$$

что подтверждается результатами многочисленных тестовых и реальных расчетов.

2. Алгоритм-функция `amsq2p`

Алгоритм `amsq2p` находит точку минимума выпуклой функции $f(x)$ при известном её минимальном значении f^* . В его основу положен второй из субградиентных методов с преобразованием пространства и регулировкой шага Агмона-Мощкина-Шонберга (AMS-шаг) в преобразованном пространстве переменных [7]. Алгоритм использует величину максимального сдвига по выпуклости функции $f(x)$ (задается параметром γ), для которой субградиент $\partial f(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\langle x - x^*, \partial f(x) \rangle \geq \gamma(f(x) - f^*), \quad \text{где } \gamma \geq 1, \quad (1)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и произвольного x^* из множества X^* точек минимума функции $f(x)$. Неравенство (1) позволяет реализовать более сильные AMS-шаги для специальных классов функций. Так, например, для квадратичной гладкой функции рекомендуется использовать $\gamma = 2$.

$$\text{Алгоритм-функция } \text{amsq2p}: (x_\varepsilon^*, k_\varepsilon^*) = \text{amsq2p}(x_0, \varepsilon, f^*, \gamma)$$

На итерации $k = 0$ имеем начальное приближение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$. Вычислим $f(x_0)$ и $\partial f(x_0)$. Если $f(x_0) - f^* \leq \varepsilon$, то $x_\varepsilon^* = x_0$, $k_\varepsilon^* = 0$ и окончание работы алгоритма. Иначе положим

$$h_0 = \frac{\gamma(f(x_0) - f^*)}{\|\partial f(x_0)\|}, \quad \xi_0 = \frac{\partial f(x_0)}{\|\partial f(x_0)\|} \in \mathbb{R}^n, \quad p_0 = 0 \in \mathbb{R}^n,$$

$B_0 = I_n$ — единичная матрица размера $n \times n$. Перейдем к следующей итерации.

Пусть на k -й итерации получены $x_k \in \mathbb{R}^n$, $h_k, \xi_k \in \mathbb{R}^n$, $p_k \in \mathbb{R}^n$, B_k — матрица $n \times n$. Для $(k + 1)$ -й итерации выполним пп. 1–5.

1. Вычислим очередное приближение

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k.$$

2. Вычислим $f(x_{k+1})$ и $\partial f(x_{k+1})$. Если $f(x_{k+1}) - f^* \leq \varepsilon$, то $x_\varepsilon^* = x_{k+1}$, $k_\varepsilon^* = k + 1$ и окончание алгоритма. Иначе положим

$$\xi_{k+1} = \frac{B_k^T \partial f(x_{k+1})}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}, \quad h_{k+1} = \frac{\gamma(f(x_{k+1}) - f^*)}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}.$$

3. Вычислим $\lambda_1 = -p_k^T \xi_{k+1}$ и $\lambda_2 = -\xi_k^T \xi_{k+1}$. Положим

$$p_{k+1} = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} p_k + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \xi_k, & \text{если } \lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 > 0, \\ p_k, & \text{если } \lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 \leq 0, \\ \xi_k, & \text{если } \lambda_1 \leq 0 \text{ и } \lambda_2 > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1 \leq 0 \text{ и } \lambda_2 \leq 0. \end{cases}$$

4. Вычислим $\mu_k = p_{k+1}^T \xi_{k+1}$. Если $-0.98 \leq \mu_k \leq 0$, то вычислим

$$B_{k+1} = B_k + (B_k \eta) \xi_{k+1}^T, \quad \text{где } \eta = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mu_k^2}} - 1 \right) \xi_{k+1} - \frac{\mu_k}{\sqrt{1 - \mu_k^2}} p_{k+1}$$

и пересчитаем

$$h_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{\sqrt{1 - \mu_k^2}}, \quad p_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_k^2}} (p_{k+1} - \mu_k \xi_{k+1}).$$

Иначе положим $B_{k+1} = B_k$ и $p_{k+1} = 0$.

5. Перейдем к следующей итерации с x_{k+1} , h_{k+1} , ξ_{k+1} , p_{k+1} , B_{k+1} .

3. Вычислительный эксперимент

Использование Octave-функции `ralgb5` проиллюстрируем для задачи `maxquad` [8], которая связана с минимизацией существенно овражной выпуклой кусочно-квадратичной функции $\varphi(x)$ от 10 переменных. Здесь $\varphi(x) = \max_{1 \leq k \leq 5} f_k(x)$, где $f_k(x) = x^T A_k x - b_k^T x$,

A_k – симметричные 10×10 -матрицы, такие что $A_{kij} = e^{i/j} \cos(ij) \sin k$, если $i < j$, и $A_{kii} = i |\sin k| / 10 + \sum_{j \neq i} |A_{kij}|$, а компоненты векторов b_k определяются $b_{ki} = e^{i/k} \sin(ik)$.

В качестве начального приближения `maxquad` использует точку $x^0 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{10}$. Подготовку данных для задачи `maxquad` и вызов `ralgb5` реализует такой Octave-код

```
global B b m;
n = 10; m = 5; B = zeros(n, n, m); b = zeros(m, n); en = [ 1:n ];
a1 = en*ones(1,n); a2 = exp(min(a1, a1') ./ max(a1, a1')); a3 = cos(en'*en);
for k = 1:m
    A = a2 .* a3 * sin(k); A = A - diag(diag(A));
    B(:, :, k) = A + diag(sum(abs(A)) + abs(sin(k))*en/n);
    b(k, :) = exp(en/k) .* sin(en*k);
endfor
alpha = 2, h0 = 1.0, nh = 3, q1 = 1.0, q2 = 1.1
epsx = 1.e-6, epsg = 1.e-6, maxitn = 1000, x0 = ones(n,1)
[xr,fr,itn,ncalls,istop]=ralgb5(@maxquad,x0,alpha,h0,q1,q2,nh,epsg,epsx,maxitn);
xr,fr,itn,ncalls,istop
```

в котором вычисление $\varphi(x)$ и $\partial\varphi(x)$ выполняется с помощью Octave-функции `maxquad`

```

function [f,g] = maxquad(x)
global B b m;
ff = zeros(1,m);
for k = 1:m
    ff(k) = x'*B(:, :,k)*x - b(k, :)*x;
endfor
[ f indx ] = max(ff);
g = 2*x'*B(:, :,indx) - b(indx, :); g = g';
endfunction

```

Затраты $r(\alpha)$ -алгоритма и метода `amsq2p` для нахождения в задаче `maxquad` единственного решения с достаточно высокой точностью позволяет оценить приведенный ниже фрагмент численных расчетов с обеими программами.

```

Maxquad: f(x0)      5.3370664293114e+003  fmin = -8.4140833459641e-001  gamma=1
..epsx..  ..fr(itn).....  itn(ncalls)  ..epsf..  ..f(itn).....  .itn.
1.0e-001  -7.3721660556183e-001    35(40)    1.0e-001  -7.7355266120112e-001    17
1.0e-002  -8.3982079259954e-001    68(74)    1.0e-003  -8.4084776169123e-001    29
1.0e-003  -8.4138254819439e-001   107(117)   1.0e-004  -8.4132394277880e-001    35
1.0e-004  -8.4139971517765e-001   120(131)   1.0e-005  -8.4140078034524e-001    41
1.0e-005  -8.4140785230390e-001   148(164)   1.0e-006  -8.4140807664455e-001    49
1.0e-006  -8.4140830366048e-001   175(195)   1.0e-011  -8.4140833458913e-001    94
1.0e-007  -8.4140833400334e-001   211(236)   1.0e-012  -8.4140833459555e-001   101
1.0e-008  -8.4140833455704e-001   240(267)   1.0e-013  -8.4140833459633e-001   110
1.0e-009  -8.4140833459582e-001   278(309)   1.0e-014  -8.4140833459640e-001   116
1.0e-010  -8.4140833459641e-001   330(369)   1.0e-015  -8.4140833459641e-001   122

```

Как видим затраты по числу итераций на нахождение точки минимума при известном $f^* = fmin$ в несколько раз меньше, чем затраты программы `ralgb5`. Это может помочь при анализе разрешимости интервальных систем линейных уравнений [9]. Так, например, для интервальной линейной 7×7 -системы с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 10.5 & [0, 2] & \dots & [0, 2] \\ [0, 2] & 10.5 & \dots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \dots & 10.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

на нахождение максимума распознающего функционала допускового множества решений [10] программа `ralgb5` затратила 246 итераций, а алгоритм `amsq2p` всего за 30 итераций находит точку, где оптимальное значение (равно 1) реализуется с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$. Для вычисления суперградиента кусочно-линейной вогнутой функции использовалась реализованная С.П. Шарым функция `calcfg`.

Приведенные алгоритмы можно использовать при решении негладких задач из различных областей приложений. Так как гладкая функция с очень быстро изменяющимся градиентом близка по своим свойствам к негладкой функции, то наши алгоритмы обладают ускоренной сходимостью при оптимизации овражных гладких функций. Матрично-векторные вычисления для обоих семейств алгоритмов легко поддаются параллельной обработке, что может быть полезным при их реализации на параллельных ЭВМ.

Список литературы

- [1] ШОР Н.З., ЖУРБЕНКО Н.Г., ЛИХОВИД А.П., СТЕЦЮК П.И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения // Кибернетика и Системный Анализ. 2003. № 4. С. 80–94.
- [2] ШОР Н.З. Методы недифференцируемой оптимизации и сложные экстремальные задачи: Сб. избр. тр. Кишинэу: Эврика, 2008. 270 с.
- [3] ШОР Н.З. Методы минимизации негладких функций и матричные задачи оптимизации: Сб. избр. тр. Кишинэу: Эврика, 2009. 240 с.
- [4] Octave [Электронный ресурс] <http://www.octave.org>. – Режим доступа: свободный.
- [5] СТЕЦЮК П.И. Ортогонализирующие линейные операторы в выпуклом программировании // Кибернетика и Системный Анализ. 1997. № 3. С. 97–119.
- [6] ШОР Н.З., СТЕЦЕНКО С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
- [7] СТЕЦЮК П.И. Субградиентные методы переменной метрики, использующие шаг Агмона-Мощкина и одноранговый эллипсоидальный оператор // Труды АТИК - 2007–2008. Кишинэу: Эврика, 2009. Том. I (XII). С. 16–25.
- [8] LEMARECHAL C. Numerical experiments in nonsmooth optimization // Progress in nondifferentiable optimization / Ed. E.A.Nurminski. CP-82-58. International Institute for Applied System Analysis: Laxenburg, Austria, 1982. P. 61–84.
- [9] ШАРЫЙ С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло? // Вычислительные Технологии. 2007. Том 12, № 1. С. 103–115.
- [10] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. 1995. Vol. 39. P. 53–85.

К построению аналога производной интервальных величин

Л.С. ТЕРЕХОВ

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

e-mail: lev.terekhov@gmail.com

Показано, что вещественное число – инструмент математики – не всегда подходящий для отображения величин физики. На основе соотношения неопределённостей предложен алгоритм вычисления отношения разностей данных натуральных измерений с наименьшей неопределённостью.

В математическом анализе понятие первой производной как предела отношения разностей основано на постулате о непрерывности числовой оси и существовании вещественного, точечного числа. Предел отношения разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \rightarrow x_0$, если он существует, определяет производную функции $y = f(x)$ по x в точке x_0 :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \quad (1)$$

В выражении (1) все соответствующие символам числа принадлежат области вещественных чисел. Определение интервальной производной, можно говорить, имеет прототипом производную Фреше, также основанную на понятии вещественного числа [1; 2]. Отличие вещественных чисел от величин, представляющих сомножители соотношения неопределённостей (СН) классической физики или адекватные им неопределённости результатов натуральных измерений, состоит, в частности, в том, что приращение аргумента Δx и соответствующее приращение функции Δy чисел вещественных, могут иметь одновременное стремление к нулю. Иначе в физике: для пары величин, например, для частоты f и времени t , неопределённости измерений которых соответственно равны Δf и Δt и удовлетворяют СН:

$$\Delta f \cdot \Delta t \geq 1, \quad (2)$$

возможность их одновременного уменьшения исключена. Что, в свою очередь, исключает построение классической производной как предела отношения приращений функции Δf и аргумента Δt . Составляя из сомножителей СН (2) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta t} \geq \frac{1}{(\Delta t)^2}$, получаем, независимо от вида зависимости $f = f(t)$, расходимость

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Расходимость (3) указывает на качественное различие результатов предельного перехода для чисел вещественных (включая интервальные) и величин, представляющих данные натуральных измерений.

Несовместимость определений пределов в математике (1) и физике (3) приводит к проблеме построения оценки первой производной по данным натуральных измерений.

2. Понятие погрешности используется в настоящей работе в общепринятом смысле. Неопределённость же, с целью необходимого в настоящей работе чёткого разграничения

понятий ”погрешность” и ”неопределённость”, понимается уже вводимого сейчас в метрологии её расширения, то есть – только как неопределённость сомножителей СН [3].

В настоящей работе ищется аналог производной как отношение сомножителей обобщённого СН. Обобщение СН проведено на основе его радиолокационной формы [4], отличающейся от формы (2) большей общностью: учитываются отношение μ сигнала к шуму по мощности и форма сигнала α :

$$\Delta f \cdot \Delta t \geq \frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}. \quad (4)$$

Для простого сигнала, рассматриваемого в настоящей работе, $\alpha \sim 1$. Область применимости формы СН (4) – явления макроскопического масштаба.

Обобщение СН проведено на примере зависимости частоты от времени на модели гладкой кривой: $f = f(t)$, $f \neq const$, $\frac{df}{dt} \neq \infty$. Обобщённое СН рассмотрено для полной погрешности измерения частоты $\Delta f(\mu, \Delta t, f'(t))$ и представлено суммой компонентов: известного случайного $\Delta f_r = \frac{1}{2 \cdot \alpha\sqrt{\mu} \cdot \Delta t}$ и вновь введённого детерминированного компонента $\Delta f_s = \frac{f'(t) \cdot \Delta t}{2}$ [3]:

$$\Delta f(\mu, \Delta t, f'(t)) = \frac{1}{2 \cdot \alpha\sqrt{\mu} \cdot \Delta t} + \frac{f'(t) \cdot \Delta t}{2}. \quad (5)$$

В обобщённом соотношении неопределённостей (5) и далее рассматривается предельный случай СН, которому соответствует знак равенства. Минимизируя целевую функцию $\Delta f(\mu, \Delta t, f'(t))$ по переменной Δt , находим оптимальное время $\Delta t^*(\mu, f'(t))$ и соответствующую ему минимальную погрешность $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t))$. Их перемножение даёт обобщённое СН в ”свёрнутом” по сравнению с (5) виде:

$$\Delta t^*(\mu, f'(t)) \cdot \Delta f_{min}(\Delta t^*(t)) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}. \quad (6)$$

Качественное отличие обобщённого СН (6) от известных форм (2) и (4) состоит в том, что обобщённое СН выполняется только для квантованных его сомножителей $\Delta t^*(\mu, f'(t))$ и $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t))$. Измерение является лишь частной, упорядоченной человеком последовательностью физических явлений. Поэтому СН (6) остаётся верным и в общем случае, для совокупности физических явлений, к упорядочению которой человек не причастен: обобщённое СН (6) позволяет говорить о выявленном в макроскопической физике явлении – квантовании, область действия которого, в отличие от микрофизики, ограничена лишь ”собственным” квантованием параметров в ходе конкретного макроскопического физического процесса. Если в микромире квантование можно назвать фундаментальной ”разметкой” параметра физического объекта константами физики, например, уровнями энергии атома водорода, то макроскопическое квантование (6) – это ”разметка” преходящая, ограниченная пределами частного макроскопического процесса.

Одномерная сетка в общем случае неравноотстоящих узлов t_i , соответствующих отсчётам, генерируется в адаптивном процессе измерения. Шаг экстраполяции полагается равным интервалу $\Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i))$, что приводит к рекуррентному соотношению:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i)). \quad (7)$$

Начальный шаг сетки $\Delta t = t_1 - t_0$ устанавливается вручную, исходя из ожидаемых характерных времён измеряемой величины. Далее рекурсия использована в определении собственно интервала $\Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i))$:

$$\Delta t_i^*(\mu, f, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\mu_{i-1}} \cdot \left| \frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})} \right|}}. \quad (8)$$

Интервал $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i))$ определяется такими же параметрами, что и интервал (8):

$$\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)) = \sqrt{\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu_{i-1}}} \cdot \left| \frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})} \right|}. \quad (9)$$

Минимальная неопределённость измерения частоты $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i))$ достигается при выполнении измерительных и вычислительных операций в последовательности (8), (7), (9), составляющих алгоритм, управляющий процессом пошаговой адаптации измерительного интервала $\Delta t_i^*(\mu, f, t)$ к измеряемым параметрам сигнала.

Искомый аналог производной $F(\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)), \Delta t^*(t_i))$ имеет простой вид, представляющий её вычисление непосредственно через отсчёты величин f и t :

$$F(\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)), \Delta t^*(t_i)) = \frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})} = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \quad (10)$$

Однако правая часть (10) удовлетворяет определению аналога производной $F(\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)), \Delta t^*(t_i))$ лишь тогда, когда разности – суть интервалы минимальной неопределённости измерения частоты $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i))$ и оптимального времени измерения частоты $\Delta t_i^*(\mu_{i-1}, \frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})})$. При указанных условиях нахождение производной (10) защищено от получения огреха, подобного в иллюстративном примере (3). Выражения (5) и (6), содержащие первую производную в её классической форме, можно считать, таким образом, лишь нулевой итерацией. Переход к следующей итерации состоит в замене классической формы производной в (5) и (6) её формой (10).

3. Испытанием предложенного подхода к конструкции аналога производной выбрано сравнение накопленной погрешности по области численного интегрирования предложенного и известных методов. Для численного интегрирования выбран интеграл

$$I = \int_{e^{-p}}^1 \frac{dx}{x} = p. \quad (11)$$

значение которого известно точно, что позволяет использовать его величину как опорную при сравнении.

Накопленная погрешность интегрирования (Er) методом трапеций с постоянным оптимальным шагом находится как модуль разности вычисляемого значения интеграла I_n с точным его значением p : $Er(I_n) = |I_n - p|$. Оптимальный, но постоянный по всей области интегрирования шаг, находится простой дихотомией, как обеспечивающий минимум накопленной погрешности по всей области интегрирования (11).

Накопленная погрешность по предложенному алгоритму находится как модуль разности $Er(I^*) = |I^* - p|$ с шагом, адаптируемом при каждом шаге. Здесь I^* – численное значение интеграла с адаптируемым шагом. Численное интегрирование с адаптацией

выполнено также методом трапеций, что обеспечивает при одном и том же "базовом" методе трапеций чистое различие результатов обоих вычислений.

Результаты сравнения показывают уменьшение числа узлов n^* по предлагаемому методу сравнительно с числом узлов n "оптимизированного" метода трапеций более, чем в 3 раза ($n = 300 \times 10^3$; $n^* = 92 \times 10^3$); накопленная погрешность соответственно меньше более, чем на 2 порядка: $\frac{Er(I_n)}{Er(I^*)} = 148$; вычисления проведены для показателя степени $p \approx 9.19$ и разрядности вычислений 16.

Выражаю благодарность Н.В. Кузьминой за численные расчёты, проведённые ею при выполнении дипломной работы в ОмГТУ.

Список литературы

- [1] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.
- [2] SCHN' DER G. Differentiation of interval functions // Proceedings of the American Mathematical Society. 1972. Vol. 36, № 2. P. 485-490.
- [3] ТЕРЕХОВ Л.С. Оценка производной на основе обобщённого соотношения неопределённостей // Изв. вузов. Физика. 2008. № 9/2. С. 84-89.
- [4] Сколник М. Введение в технику радиолокационных систем. М.: Мир, 1965. 520 с.
- [5] ТЕРЕХОВ Л.С. О квантовании неопределённости измеряемых величин // Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям "Интервал-06". Россия, Петергоф, 1-4 июля 2006 г.: Расшир. тезисы докладов / СПбГУ. СПб, 2006. С. 123-125.

Аппроксимация градуировочных характеристик измерительных каналов в условиях малой чувствительности к измеряемым параметрам

В.В. Тулупова

Институт проблем управления сложными системами РАН, Самара
e-mail: tulupova@iccs.ru

При аппроксимации градуировочных характеристик измерительных каналов полиномиальными функциями нескольких переменных по методу наименьших квадратов в случае малой чувствительности к измеряемым параметрам и неточности экспериментальных данных возникает целый ряд реализационных трудностей, приводящих к потере состоятельности аппроксимирующей функции и невозможности достичь гарантированной точности. Рассматривается возможность использования метода интервального представления полиномиальных регрессий, в котором вводится понятие интервального образа аппроксимирующей функции, процедура оценки параметров которой сводится к приближенному вычислению чебышевского альтернанса методами линейной оптимизации. Проводятся сравнительные исследования характеристик аппроксимирующих функций обоих методов и формулируются практические рекомендации.

В работе [1] рассматривается задача аппроксимации градуировочных характеристик (ГХ) измерительных каналов полиномиальными функциями нескольких переменных по методу наименьших квадратов. Предполагается, что семейство ГХ является функцией трёх измеряемых координат (x, y, z) и температуры окружающей среды (Θ) . Тогда для его аппроксимации используется полиномиальная функция четырех переменных:

$$c = f(x, y, z, \Theta) = \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{i_3=0}^{I_3} \sum_{i_4=0}^{I_4} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} \Theta^{i_4} = A \cdot P_1(x) \times P_2(y) \times P_3(z) \times P_4(\Theta)$$

где (x, y, z, Θ) — переменные, $a_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — коэффициенты, A — матрица этих коэффициентов, I_1, I_2, I_3, I_4 — полиномиальные степени, $P_1(x), P_2(y), P_3(z), P_4(\Theta)$ — одномерные полиномы с единичными коэффициентами.

Использование этого подхода при решении ряда практических задач приводит к реализационным трудностям из-за неточных экспериментальных данных, измеряемых в процессе градуировки, существенной нелинейности аппроксимируемой функции и наличия области малой чувствительности к измеряемым параметрам в рабочем диапазоне измерения. Следует отметить, что в результате не только ухудшаются свойства аппроксимирующего полинома, но и возрастают трансформированные составляющие погрешностей при использовании ГХ в системе измерения, основанных на совокупных методах измерения [1].

Рассматривается возможность использования для решения этой задачи метода интервального представления полиномиальных регрессий, в котором вводится понятие интервального образа аппроксимирующей функции, процедура оценки параметров которой сводится к приближенному вычислению чебышевского альтернанса методами линейной оптимизации [2, 3].

В отличие от известных подходов к задаче аппроксимации экспериментальных данных с учетом их неопределенности [4, 5], погрешности экспериментальных данных учитываются в нулевом коэффициенте полинома. По аналогии с [2] вводится понятие интервального образа полинома (интервал-полинома)

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot P_1(x) \times P_2(y) \times P_3(z) \times P_4(\Theta)$$

где \mathbf{A} — матрица коэффициентов полиномов с интервальным нулевым коэффициентом (\mathbf{a}_{0000}).

Простота выбранной конструкции интервал-полинома диктуется условиями использования ГХ (для реализации совокупных методов измерения в режиме реального времени фактически решается система нелинейных уравнений, каждое из уравнений которой строится на основе ГХ измерительного канала [1]).

В представляемой работе проводятся сравнительные исследования характеристик аппроксимирующих функций обоих методов на примерах экспериментальных семейств ГХ и формулируются выводы по их возможному использованию.

Список литературы

- [1] Тулупова В.В. Системы измерения многокоординатных смещений торцов лопаток компрессора и лопастей винтовентилятора: Дисс. . . канд. техн. наук. Самара, 2005. 200 с.
- [2] Подружко А.А., Подружко А.С. Интервальное представление полиномиальных регрессий. М.: Едиториал УРСС, 2003. 48 с.
- [3] L.V. BELEN'KIY, V.V, TULUPOVA. The approximation of experimental calibration characteristics for measuring channels by means the metod of interval representation of polynomial regressions // Modern problems of applied mathematics and information technologies — AL-KHOREZMIY 2009. Ташкент, 2009 г. С. 122-123.
- [4] Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений. // Сибирский математический журнал, том 3, №5, 1962 г.
- [5] Жилин С.И. Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей. Дисс. . . канд. физ.-мат. наук. Барнаул, 2004. 119 с.

Разрывы в шкале вероятностей. Интервальный анализ

Александр Харин

Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В докладе с точки зрения интервального анализа рассмотрены разрывы на числовых отрезках и на шкале вероятностей. Доказана теорема существования разрывов. Выполнены оценки разрывов. Рассмотрены соотношения для интервалов средних значений.

1. Введение

В 2005 г. в [1] была выдвинута гипотеза о возможности существования смещений у границ шкалы вероятностей. В 2010 г. в [2] были доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей. Теоремы и их применения были представлены в [3], [4], [5], [6]. Теоремы позволяют, в т.ч., обосновать новые результаты в экономической теории и прогнозировании.

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и, действительно, проявляется в экономической реальности. Широко известен целый ряд фундаментальных парадоксов теории полезности, обусловленных возможностью существования этих разрывов. Как отмечено в [7] в 2006 г. Канеманом и Талером эти парадоксы, несмотря на многолетние усилия, до сих пор адекватно не решены современной экономической теорией.

В большинстве этих парадоксов наибольшие отклонения от предсказаний теории вероятностей наблюдались вблизи границ шкалы вероятностей. Из существования разрывов у границ шкалы вероятностей следует, что у каждой границы вероятность будет смещена на величину разрыва от границы - к середине шкалы.

Это соответствует результатам экспериментов и позволяет с единой точки зрения и без дополнительных предположений объяснить рассматриваемые парадоксы, в т.ч. парадокс Алле, "equity premium puzzle", преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, проблему неприятия риска, "парадокс четырех областей" и другие парадоксы и проблемы.

Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей позволила обосновать корректирующую формулу прогнозирования.

В настоящем докладе разрывы в шкале вероятностей рассмотрены с точки зрения интервального анализа.

2. Общие условия

Предварительное замечание. Для простоты, в теореме условия на краях интервала приняты симметричными. Эти условия могут быть и асимметричными, что приведет к некоторому непринципиальному усложнению выкладок.

Пусть дана некоторая величина $\{p_k\} : k=1, 2, \dots, K : K \leq \infty$.

Пусть известно, что распределение $\rho(p_k)$ величины $\{p_k\}$ имеет свойства

$$\sum_{k=1}^K \rho(p_k) = Const_\rho \quad \text{и} \quad 0 < Const_\rho < \infty .$$

По умолчанию будем считать

$$Const_\rho = 1 \equiv C_\rho .$$

Определим среднее значение величины $\{p_k\}$ как

$$M \equiv \sum_{k=1}^K p_k \rho(p_k) .$$

3. Теорема о существовании разрывов

Если, на отрезке $[A, B]$ величина $\{p_k\}$ известна с точностью до ненулевого интервала P , такого, что

$$\underline{P} \geq A \quad \text{и} \quad \bar{P} \leq B, \quad \bar{P} - \underline{P} \equiv \text{wid } P \geq Const_\rho > 0 ,$$

$$\sum_{p_k \leq \underline{P}} \rho(p_k) \geq \Delta Const_\rho \equiv \Delta C_\rho \geq \Delta C_{\rho \min} > 0 ,$$

$$\sum_{p_k \geq \bar{P}} \rho(p_k) \geq \Delta C_\rho \geq \Delta C_{\rho \min} > 0 ,$$

то будут существовать ненулевые разрывы между границами отрезка $[A, B]$ и областями возможных значений границ интервала M среднего значения величины $\{p_k\}$.

Доказательство:

Из уравнения

$$(\underline{M} - \underline{P})(1 - \Delta C_\rho) = (\bar{P} - \underline{M})\Delta C_\rho$$

получаем

$$\underline{M} = \underline{P} + (\bar{P} - \underline{P})\Delta C_\rho .$$

Аналогично, из уравнения

$$(\bar{M} - \underline{P})\Delta C_\rho = (\bar{P} - \bar{M})(1 - \Delta C_\rho)$$

получаем

$$\bar{M} = \bar{P} - (\bar{P} - \underline{P})\Delta C_\rho .$$

Поскольку $\underline{P} \geq A$, то $\underline{M} \geq A + (\bar{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho \min}$ и

$$\text{wid } R_{\text{Rupture}_A} \equiv \underline{M} - A \geq (\bar{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho \min} = \text{wid } P \Delta C_{\rho \min} .$$

Поскольку $\bar{P} \leq B$, то $\bar{M} \leq B - (\bar{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho \min}$ и

$$\text{wid } R_{\text{Rupture}_B} \equiv B - \bar{M} \geq \text{wid } P \Delta C_{\rho \min} .$$

Поскольку

$$\text{wid } P \geq Const_\rho > 0, \quad \text{и} \quad \Delta C_{\rho \min} > 0 ,$$

то между границами отрезка $[A, B]$ и границами интервала M среднего значения величины $\{p_k\}$ существуют ненулевые разрывы.

Теорема доказана.

Если вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на величину $\{p_k\}$, и шкала вероятностей удовлетворяет условиям, наложенным на отрезок $[A, B]$, то теорема справедлива также для вероятности и шкалы вероятностей.

Заметим, что применение интервального анализа позволило доказать теорему не только для конечных, но и для бесконечных числовых отрезков.

4. Оценки

4.1. Общие оценки

Пусть наряду с интервалом P , даны еще два интервала, прилегающие с обеих сторон к интервалу P и образующие вместе с ним общий интервал P_{total} . Пусть эти интервалы: нижний P_{bottom} , центральный P , верхний P_{top} и общий P_{total} такие, что

$$\underline{P_{total}} = \underline{P_{bottom}} \leq \overline{P_{bottom}} = \underline{P} < \overline{P} = \underline{P_{top}} \leq \overline{P_{top}} = \overline{P_{total}},$$

$$\sum_{P_{bottom}} \rho(p_k) = \Delta C_{\rho P_{bottom}} > 0, \quad \sum_{P_{top}} \rho(p_k) \geq \Delta C_{\rho P_{top}} > 0$$

и

$$\sum_{P_{total}} \rho(p_k) = \sum_{k=1}^K \rho(p_k).$$

Центральный интервал P можно назвать вписанным с допусками $\Delta C_{\rho P_{bottom}}$ и $\Delta C_{\rho P_{top}}$, а общий интервал P_{total} - описанным.

Запишем уравнения для M :

Из уравнения

$$(\underline{M} - \underline{P_{total}}) \Delta C_{\rho P_{bottom}} = (\underline{P} - \underline{M})(1 - \Delta C_{\rho P_{bottom}} - \Delta C_{\rho P_{top}}) + (\overline{P} - \underline{M}) \Delta C_{\rho P_{top}}$$

получаем

$$\sum_{P_{bottom}} \rho(p_k) = \Delta C_{\rho P_{bottom}} > 0$$

и

$$\underline{M} = \underline{P} - \text{wid } P_{bottom} \Delta C_{\rho P_{bottom}} + \text{wid } P \Delta C_{\rho P_{top}}.$$

Из уравнения

$$(\overline{M} - \underline{P}) \Delta C_{\rho P_{bottom}} + (\overline{M} - \overline{P})(1 - \Delta C_{\rho P_{bottom}} - \Delta C_{\rho P_{top}}) = (\overline{P_{total}} - \overline{M}) \Delta C_{\rho P_{top}}$$

получаем

$$\begin{aligned} \overline{M} (\Delta C_{\rho P_{bottom}} + 1 - \Delta C_{\rho P_{bottom}} - \Delta C_{\rho P_{top}} + \Delta C_{\rho P_{top}}) &= \\ = \underline{P} \Delta C_{\rho P_{bottom}} + \overline{P} (1 - \Delta C_{\rho P_{bottom}} - \Delta C_{\rho P_{top}}) + \overline{P_{total}} \Delta C_{\rho P_{top}} &= \\ = \overline{P} - (\overline{P} - \underline{P}) \Delta C_{\rho P_{bottom}} + (\overline{P_{total}} - \overline{P}) \Delta C_{\rho P_{top}} \end{aligned}$$

и

$$\overline{M} = \overline{P} - \text{wid } P \Delta C_{\rho P_{bottom}} + \text{wid } P_{top} \Delta C_{\rho P_{top}}.$$

4.2. Интервальные неравенства

Пусть нижний P_{bottom} , центральный P , и верхний P_{top} интервалы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\underline{\text{wid } P_{bottom}} \leq \text{wid } P_{bottom} \leq \overline{\text{wid } P_{bottom}},$$

$$\underline{\text{wid } P} \leq \text{wid } P \leq \overline{\text{wid } P},$$

$$\underline{\text{wid } P_{top}} \leq \text{wid } P_{top} \leq \overline{\text{wid } P_{top}}$$

и

$$\underline{\Delta C_{\rho P_{bottom}}} \leq \Delta C_{\rho P_{bottom}} \leq \overline{\Delta C_{\rho P_{bottom}}},$$

$$\underline{\Delta C_{\rho P_{top}}} \leq \Delta C_{\rho P_{top}} \leq \overline{\Delta C_{\rho P_{top}}}.$$

4.3. Оценка минимального разрыва

Рассмотрим разрыв у края B интервала $[A, B]$. Из общих оценок раздела 4.1 имеем

$$\overline{M} = \overline{P} - (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} + (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}})\Delta C_{\rho P_{Top}}.$$

Учитывая

$$\overline{P_{Top}} = B,$$

получаем для разрыва

$$\begin{aligned} B - \overline{M} &= \overline{P_{Top}} - \overline{P} + (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} - (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}})\Delta C_{\rho P_{Top}} = \\ &= (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}}) + (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} - (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}})\Delta C_{\rho P_{Top}} = \\ &= \underline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \underline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}) \end{aligned}$$

Минимальное значение разрыва достигается при

$$\underline{wid} R_{rupture_B} = \underline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \underline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}).$$

Легко видеть, что оценка, полученная в теореме в разделе 3 является абсолютным минимумом для этого выражения.

Для края A интервала $[A, B]$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному. При этом, минимальное значение разрыва достигается при

$$\underline{wid} R_{rupture_A} = \underline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Top}} + \underline{wid} P_{bottom} (1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}}).$$

4.4. Оценка максимального разрыва

Из оценки раздела 4.3 имеем

$$\underline{wid} R_{rupture_B} = \underline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \underline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}).$$

Максимальное значение разрыва достигается при

$$\overline{wid} R_{rupture_B} = \overline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \overline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}).$$

Для края A интервала $[A, B]$ результат полностью аналогичен вышеприведенному

$$\overline{wid} R_{rupture_A} = \overline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Top}} + \overline{wid} P_{bottom} (1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}}).$$

4.5. Оценка для величины медианы разрыва

Из оценок разделов 4.3 и 4.4 для величины медианы разрыва

$$\underline{wid} R_{rupture_B} = \underline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \underline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}),$$

и

$$\overline{wid} R_{rupture_B} = \overline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \overline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}})$$

получаем для B

$$\begin{aligned} \underline{mid} R_{rupture_B} &= \frac{1}{2} (\underline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \overline{wid} P \Delta C_{\rho P_{Bottom}}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\underline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}) + \overline{wid} P_{Top} (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}})) \end{aligned}$$

Аналогично получаем для A

$$mid R_{ruptureA} = \frac{1}{2} (\overline{wid P \Delta C_{\rho P_{Top}}} + \overline{wid P \Delta C_{\rho P_{Top}}}) + \\ + \frac{1}{2} (\overline{wid P_{Bottom} (1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}})} + \overline{wid P_{Bottom} (1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}})})$$

При этом, для симметричного случая, очевидно,

$$\overline{\Delta C_{\rho}} \leq 0.5$$

и в пределе,

$$\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} \xrightarrow{\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}} \rightarrow 0.5}} \overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}$$

и

$$\overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} \xrightarrow{\overline{\Delta C_{\rho P_{Top}} \rightarrow 0.5}} \overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}$$

Заключение

В рамках интервального анализа доказана теорема существования разрывов для числовых отрезков и для шкалы вероятностей. Применение интервального анализа позволило доказать теорему не только для конечных, но и для бесконечных числовых отрезков.

Получены простые, но достаточно содержательные соотношения для интервалов средних значений и для разрывов. Выполнены оценки разрывов снизу и сверху и для медиан.

Благодарности

Автор хотел бы выразить благодарности:

Профессору Соложенцеву Е.Д., и к.т.н. Карасеву В.В. - за то, что они увидели более широкую перспективу в узкоспециальной работе автора по теории полезности, что привело автора к разработке принципа неопределенного будущего;

Профессору Новоселову А.А. – за то, что он увидел в работе автора перспективу для теории вероятностей и за терпеливую критику, которая побудила автора к доказательству теоремы о существовании разрывов на конечных отрезках и шкале вероятностей, а также за то, что он привил автору интерес к абстрактной математике. Этот интерес на долгое время определил основное направление работ автора.

Литература

- [1] Harin, A. "A new approach to solve old problems" Game Theory and Information from Economics Working Paper Archive at WUSTL, 0505005, 2005.
- [2] Харин, А.А. "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей" IX Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий, Красноярск, 2010.
- [3] Харин, А.А. "О разрывах в шкале вероятностей и о некоторых проблемах моделирования" Третья Международная конференция Математическое моделирование социальной и экономической динамики, 2010.
- [4] Харин, А.А. "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей, как математический базис принципа неопределенного будущего" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 10-я Международная Научная Школа МА БР – 2010.

- [5] Харин, А.А. "Разрывы в шкале вероятностей и некоторые вопросы моделирования нестационарных экономических процессов" Труды 33-й Шаталинской международной научной школы-семинара "Системное моделирование социально-экономических процессов", 2010.
- [6] Харин, А.А. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей. Непрерывный случай 53-я научная конференция МФТИ, 2010.
- [7] Kahneman, D. and Thaler, R. "Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility" Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234, 2006.

Наибольший интервал с заданными пропорциями для интервальной линейной задачи о допусках*

И.А. ШАРЯЯ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: sharaya@ict.nsc.ru

Предложен и обоснован новый метод решения интервальной линейной задачи о допусках. Он ищет решение среди интервалов с фиксированными пропорциями.

1. Термины, обозначения, постановка задачи

1.1. Интервалы

Интервалами будем называть не только интервальные числа (отрезки вещественной оси), но также интервальные векторы и матрицы. Следуя стандарту [1] написания работ по интервальному анализу, интервалы будем обозначать жирным шрифтом, а неинтервальные числа, векторы и матрицы — обычным.

Отношения “=”, “ \leq ” и “ \subseteq ” для векторов и матриц понимаем по всем компонентам.

Интервал \mathbf{x} в конечномерном пространстве задается своими концами, т.е. (см. рис. 1) такими двумя точками \underline{x} и \bar{x} этого пространства, для которых справедливо неравен-

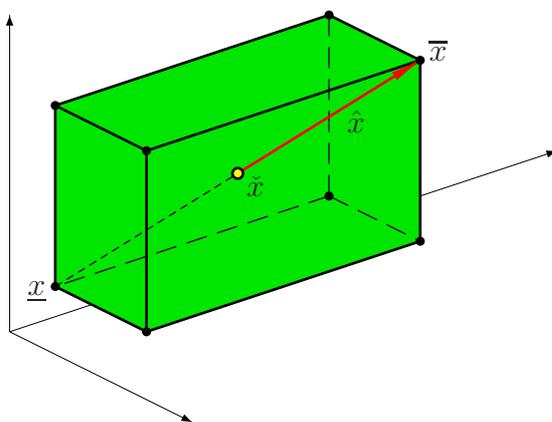


Рис. 1. Интервал \mathbf{x} в \mathbb{R}^3

ство $\underline{x} \leq \bar{x}$. При этом \underline{x} называется *нижним*, а \bar{x} — *верхним концом интервала* \mathbf{x} , а сам интервал представляет собой множество всех точек x , для которых $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$. Геометрически, интервал в конечномерном пространстве — это прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям. Вершины этого параллелепипеда называются *вершинами интервала*. На рис. 1 вершины интервала \mathbf{x} выделены черными

*Работа выполнена при поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6068.2010.9).

точками. При работе с интервалом полезны также его *середина* $\check{x} := (\underline{x} + \bar{x})/2$, *радиус* $\hat{x} = (\bar{x} - \underline{x})/2$ и *ширина* $\text{wid } \mathbf{x} := \bar{x} - \underline{x}$ (от англ. width).

Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ – вектор с неотрицательными компонентами. Интервальный вектор \mathbf{x} длины n будем называть *интервалом с пропорциями* p , если его ширина пропорциональна p , т.е.

$$\text{wid } \mathbf{x}_1 : \text{wid } \mathbf{x}_2 : \dots : \text{wid } \mathbf{x}_n = p_1 : p_2 : \dots : p_n.$$

Радиус интервала равен половине ширины, поэтому он тоже пропорционален p . Коэффициент этой пропорциональности обозначим через λ . Т.к. $\hat{x} \geq 0$ и $p \geq 0$, то $\lambda \geq 0$ и мы можем записать для радиуса

$$\hat{x} = \lambda p, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq 0.$$

Сам же интервал \mathbf{x} с пропорциями p можно представить как $\mathbf{x} = [\check{x} - \lambda p, \check{x} + \lambda p]$ или, что то же самое, в виде

$$\mathbf{x} = \check{x} + p[-1, 1]\lambda. \quad (1)$$

Интервалы с пропорциями p сравнимы по размеру. Тот интервал считается больше, у которого больше коэффициент λ . Пусть дано некоторое множество интервалов с пропорциями p . *Наибольшим* в этом множестве считается всякий интервал, который по размеру не меньше остальных.

1.2. Интервальная линейная задача о допусках

Для интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где \mathbf{A} – интервальная матрица размера m на n , а \mathbf{b} – интервальный вектор длины m , *допусковым решением* называется такой точечный вектор x длины n , что для всех точечных матриц A из \mathbf{A} значение Ax лежит в интервале \mathbf{b} .

Интерпретация допускового решения (см. рис. 2). Рассмотрим процесс, в ко-

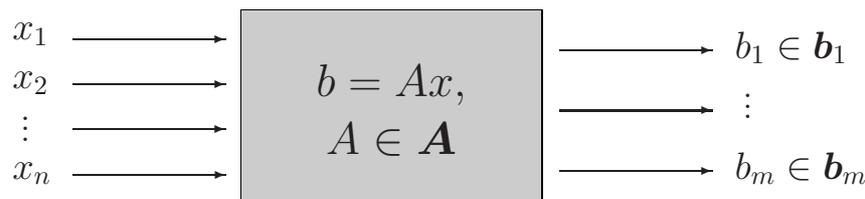


Рис. 2.

тором вектор входных переменных x преобразуется в вектор выходных переменных b по линейному закону. Компоненты A_{ij} матрицы этого преобразования известны с точностью до интервалов \mathbf{A}_{ij} . Для компонент вектора выходных переменных заданы интервалы допустимых значений (допуски): $b_i \in \mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, m$. Допусковое решение – это такой вектор входных переменных, для которого, несмотря на неточность знаний о коэффициентах линейного преобразования, можно гарантировать, что выходные переменные будут удовлетворять заданным допускам.

Множество всех допусковых решений называется *допусковым множеством решений* (ДМР). Следуя традиции, будем обозначать его Ξ_{tol} (tolerance – по англ. «допуск»).

Исходя из приведенной на рис. 2 интерпретации, ясно, что не столь полезно знать отдельное допустимое решение или всё ДМР, сколько интервал \mathbf{x} , лежащий в ДМР. Тогда значение каждого входа x_i можно выбирать в пределах интервала \mathbf{x}_i независимо от значения других входов, и при этом выход b останется в пределах \mathbf{b} . Интервал, лежащий в множестве, называется *внутренним* для этого множества. А задача об отыскании внутреннего интервала для допустимого множества решений известна как *интервальная линейная задача о допусках*. Понятно, что при прочих равных условиях лучшим решением задачи о допусках считается тот интервал, который больше. Обзор известных методов решения интервальной линейной задачи о допусках есть в [2].

Мы представляем новый метод решения задачи о допусках. Суть его в том, что решение ищется как наибольший интервал с заданными пропорциями. В прикладном аспекте (см. рис. 2), такой подход позволяет учесть желаемые соотношения допусков на входы. А с вычислительной точки зрения, он удобен тем, что преобразует исходную задачу о допусках к задаче об отыскании безусловного максимума вогнутой кусочно-линейной функции. В отличие от известных, новый метод, решая задачу о допусках, одновременно проверяет, не пусто ли допустимое множество решений. Тем самым, он позволяет сказать, имеет ли задача о допусках вообще какое-то решение (не обязательно с заданными пропорциями).

2. Новый критерий внутреннего интервала для ДМР

Договоримся множество всех вершин интервала обозначать через vert (от англ. vertices). Так, для интервального вектора \mathbf{a} длины n

$$\text{vert } \mathbf{a} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{a}_i, \bar{a}_i\}, i = 1, \dots, n\}.$$

Очевидно, что это множество содержит не более 2^n элементов, т.е. $|\text{vert } \mathbf{a}| \leq 2^n$. Строгое неравенство здесь соответствует интервальному вектору, у которого есть такие компоненты i , что $\underline{a}_i = \bar{a}_i$.

В [3] было доказано следующее утверждение о строении ДМР.

Лемма 1.

$$\Xi_{\text{tol}} = \bigcap_{i=1, \dots, m} \bigcap_{a \in \text{vert}(\mathbf{A}_i)} \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \in \mathbf{b}_i\}, \quad \text{где } \mathbf{A}_i = (\mathbf{A}_{i1}, \dots, \mathbf{A}_{in}),$$

т.е. допустимое множество решений Ξ_{tol} представимо в виде пересечения гиперполос, число которых не превосходит $\sum_{i=1}^m |\text{vert}(\mathbf{A}_i)|$ и, тем более, не превосходит $m \cdot 2^n$.

Лемму 1 можно переформулировать так: допустимое множество решений совпадает с множеством решений системы двойных линейных неравенств

$$\underline{b}_i \leq ax \leq \bar{b}_i, \quad a \in \text{vert}(\mathbf{A}_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Для дальнейших выкладок удобно представить эту систему в виде принадлежности $Cx \in \mathbf{d}$, где $C \in \mathbb{R}^{M \times n}$ — матрица системы, $M = \sum_{i=1}^m |\text{vert}(\mathbf{A}_i)|$, \mathbf{d} — интервальный вектор длины M (он составлен из компонент вектора \mathbf{b} с повторами). В этих обозначениях Лемму 1 можно переписать как

$$x \in \Xi_{\text{tol}} \iff Cx \in \mathbf{d}. \tag{2}$$

Еще один факт, который нам понадобится, — критерий внутреннего интервала для множества решений системы двойных линейных неравенств. Этот результат имеет много простых доказательств и потому его авторство установить трудно.

Лемма 2. Пусть \tilde{C} – прямоугольная вещественная матрица, $\tilde{\mathbf{d}}$ – интервальный вектор. Интервальный вектор \mathbf{x} лежит в множестве решений системы $\tilde{C}\mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{d}}$ тогда и только тогда, когда справедливо интервальное включение $\tilde{C}\mathbf{x} \subseteq \tilde{\mathbf{d}}$.

Доказательство. Нам надо доказать эквивалентность

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{x})(\tilde{C}\mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{d}}) \iff \tilde{C}\mathbf{x} \subseteq \tilde{\mathbf{d}}. \quad (3)$$

Левая часть $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{x})(\tilde{C}\mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{d}})$ означает, что множество $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \tilde{C}\mathbf{x}$ лежит в $\tilde{\mathbf{d}}$. Поскольку $\tilde{C}\mathbf{x}$ совпадает с интервальной оболочкой множества $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \tilde{C}\mathbf{x}$, правая часть $\tilde{C}\mathbf{x} \subseteq \tilde{\mathbf{d}}$ означает, что интервальная оболочка множества $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \tilde{C}\mathbf{x}$ лежит в $\tilde{\mathbf{d}}$. Но для интервала эквивалентно, содержит он само множество или его интервальную оболочку.

Для допускового множества решений из двух приведенных лемм легко получить следующий критерий внутреннего интервала.

Теорема (критерий внутреннего интервала ДМР). Пусть \mathbf{x} – интервальный вектор длины n , а матрица C и интервальный вектор \mathbf{d} – из (2). Тогда

$$\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol} \iff C\mathbf{x} \subseteq \mathbf{d}. \quad (4)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol} &\iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{x}) (x \in \Xi_{tol}) \\ &\stackrel{(2)}{\iff} (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{x}) (C\mathbf{x} \in \mathbf{d}) \\ &\stackrel{(3)}{\iff} C\mathbf{x} \subseteq \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Отметим, что (4) внешне напоминает известный критерий внутреннего интервала ДМР

$$\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} \subseteq \mathbf{b}.$$

Но в выкладках новый критерий дает больше свободы и гарантий, т.к. для вещественной матрицы произведение на сумму произвольных интервальных векторов можно раскрыть по дистрибутивному закону, а для интервальной – только по субдистрибутивному:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= C\mathbf{y} + C\mathbf{z}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) &\subseteq \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{z}. \end{aligned}$$

3. Новый метод решения задачи о допусках

Будем искать решение интервальной линейной задачи о допусках в виде наибольшего интервала с пропорциями $p > 0$. Из критерия (4) принадлежности интервала допусковому множеству решений и представления (1) получаем, что интервал \mathbf{x} с пропорциями p служит решением задачи о допусках тогда и только тогда, когда

$$C(\tilde{\mathbf{x}} + p[-1, 1]\lambda) \subseteq \mathbf{d}.$$

Для вещественной матрицы C скобки можно раскрыть по дистрибутивному закону.

$$C\check{x} + C(p[-1, 1]\lambda) \subseteq \mathbf{d}.$$

Добавим к обеим частям вектор $-C\check{x}$.

$$C(p[-1, 1]\lambda) \subseteq \mathbf{d} - C\check{x}. \quad (5)$$

Рассмотрим i -ую строку этого включения. Ее левая часть равна

$$\begin{aligned} & \sum_j C_{ij}(p[-1, 1]\lambda)_j = \sum_j C_{ij}(p_j[-1, 1]\lambda) = \\ & \stackrel{p \geq 0, \lambda \geq 0}{=} \sum_j C_{ij}[-p_j\lambda, p_j\lambda] = \sum_j [-|C_{ij}|p_j\lambda, |C_{ij}|p_j\lambda] = \\ & = \left[-\sum_j |C_{ij}|p_j\lambda, \sum_j |C_{ij}|p_j\lambda \right] = [-|C_{i:}|p\lambda, |C_{i:}|p\lambda], \end{aligned}$$

где $C_{i:}$ – i -ая строка матрицы C , а $|C_{i:}| = (|C_{i1}|, \dots, |C_{in}|)$. Отсюда i -ая строка в (5) эквивалентна системе неравенств

$$\begin{cases} -|C_{i:}|p\lambda \geq \underline{d}_i - C_{i:}\check{x}, \\ |C_{i:}|p\lambda \leq \bar{d}_i - C_{i:}\check{x}. \end{cases} \quad (6)$$

При $|C_{i:}|p > 0$, т.е. в случае $C_{i:} \neq 0$, эту систему можно представить как ограничение на λ

$$\lambda \leq \min \left\{ \frac{C_{i:}\check{x} - \underline{d}_i}{|C_{i:}|p}, \frac{\bar{d}_i - C_{i:}\check{x}}{|C_{i:}|p} \right\}.$$

А при $|C_{i:}|p = 0$, т.е. в случае $C_{i:} = 0$, система (6) означает требование $0 \in \mathbf{d}_i$.

В целом, включение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \lambda \leq \min_{l \in \text{Idx}} \min \left\{ \frac{C_{l:}\check{x} - \underline{d}_l}{|C_{l:}|p}, \frac{\bar{d}_l - C_{l:}\check{x}}{|C_{l:}|p} \right\}, \\ 0 \in \mathbf{d}_k, \quad k \in \text{Idx}_0, \end{cases} \quad (7)$$

где $\text{Idx} = \{i \mid C_{i:} \neq 0\}$, $\text{Idx}_0 = \{i \mid C_{i:} = 0\}$.

Обозначим через λ^* значение параметра λ , максимально возможное при ограничениях (7). А через x^* – какое-нибудь значение переменной \check{x} , соответствующее этому λ^* . Если $\lambda^* \geq 0$, то интервал с центром x^* и радиусом λ^*p будет наибольшим среди интервалов, которые имеют пропорции p и решают задачу о допусках.

Давайте, определим λ^* и x^* из (7). При естественном предположении $\mathbf{A} \neq 0$ (из которого следует, что $C \neq 0$ и потому $\text{Idx} \neq \emptyset$), рассмотрение сводится к двум случаям.

Случай 1: $(\exists k \in \text{Idx}_0) (0 \notin \mathbf{d}_k)$.

Вторая строка в (7) не выполняется ни для каких λ и \check{x} .

- В этом случае:
- система (7) несовместна,
 - λ^* и x^* не определены,
 - допустимое множество решений пусто
 - и задача о допусках вообще не имеет решений.

Случай 2: $\text{Idx}_0 = \emptyset$ либо $(\forall k \in \text{Idx}_0) (0 \in \mathbf{d}_k)$.

Вторая строка в (7) либо отсутствует, либо ее можно опустить из-за того, что она не влияет на множество решений.

В этом случае в обозначениях

$$f_l(\tilde{x}) := \min \left\{ \frac{C_l \tilde{x} - \underline{d}_l}{|C_l|p}, \frac{\bar{d}_l - C_l \tilde{x}}{|C_l|p} \right\}, \quad f(\tilde{x}) := \min_{l \in \text{Idx}} f_l,$$

число λ^* и вектор x^* описываются формулами

$$\lambda^* = \max_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} f(\tilde{x}), \quad x^* = \arg \max_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} f(\tilde{x}). \quad (8)$$

Поскольку

$$f_l(\tilde{x}) = \min \left\{ \frac{\hat{d} + (C_l \tilde{x} - \check{d}_l)}{|C_l|p}, \frac{\hat{d}_l - (C_l \tilde{x} - \check{d}_l)}{|C_l|p} \right\} = \frac{\hat{d}_l - |C_l \tilde{x} - \check{d}_l|}{|C_l|p},$$

каждая функция $f_l(\tilde{x})$ вогнута, кусочно-линейна (состоит из двух кусков) и ограничена сверху числом $\hat{d}_l/(|C_l|p)$. Функция $f(\tilde{x})$, как нижняя огибающая конечного числа таких функций, тоже вогнута, кусочно-линейна и ограничена сверху числом $\min_{l \in \text{Idx}} (\hat{d}_l/(|C_l|p))$.

Т.к. $f(\tilde{x})$ достигает конечного максимума на $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, λ^* в (8) всегда определено.

Подграфик функции $f(\tilde{x})$ — выпуклое многогранное множество. Множество всех точек, на которых достигается максимум функции f , определяется в пространстве переменных (\tilde{x}, λ) как проекция сечения этого подграфика гиперплоскостью $\lambda = \lambda^*$. Поэтому множество $\text{Arg} \max_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} f(\tilde{x})$ всех возможных точек x^* , при которых достигается λ^* , есть выпуклое многогранное множество.

Если $\lambda^* < 0$, допустимое множество решений пусто и задача о допусках неразрешима.

Если $\lambda^* \geq 0$, допустимое множество решений непусто и задача о допусках разрешима.

При $\lambda^* = 0$ внутренняя область ДМР пуста и радиус всякого внутреннего интервала имеет хоть одну нулевую компоненту. Каждый наибольший внутренний интервал с пропорциями p вырождается в точку (его радиус λ^*p равен нулю).

При $\lambda^* > 0$ все соответствующие ему точки x^* служат внутренними точками допустимого множества решений как центры внутренних интервалов с радиусом $\lambda^*p > 0$.

Список литературы

- [1] KEARFOTT A., NAKAO M., NEUMAIER A., RUMP S., SHARY S., VAN HENTENRYCK P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 7–13. (<http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int>)
- [2] ШАРЫЙ С.П. Конечномерный интервальный анализ. Электронная книга. <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [3] ШАРАЯ И.А. Структура допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 103–119. (<http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/ct05.pdf>)

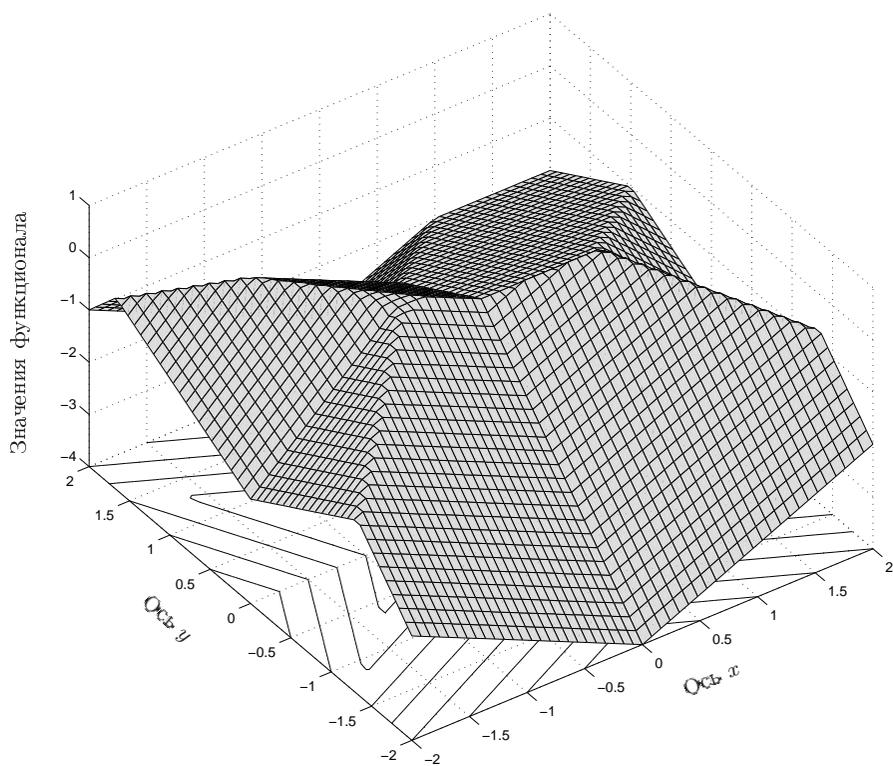
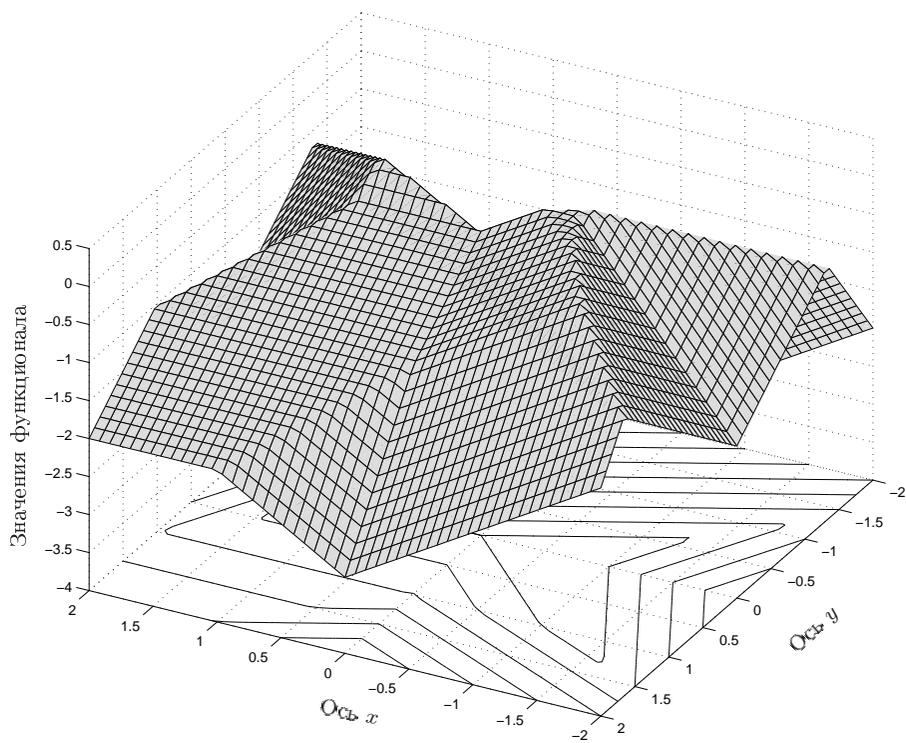


Рис. 1. График распознающего функционала с разных точек зрения.

Тогда выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \quad (4)$$

задается функционал $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni :

$$x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \iff \quad \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0.$$

То есть, множество решений системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ — это лебегово множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$ функционала Uni .

Функционал Uni , который мы называем *распознающим функционалом* множества решений, является вогнутым в каждом ортанте пространства \mathbb{R}^n , а если в интервальной матрице \mathbf{A} некоторые столбцы целиком точечные, то $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ достигает конечного максимума на всем пространстве \mathbb{R}^n . Если же $\text{Uni}(\tilde{x}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, то \tilde{x} — точка внутренней множества решений, а при некоторых дополнительных ограничениях на \mathbf{A} и \mathbf{b} верно и обратное.

На Рис. 1, к примеру, изображён с разных точек зрения график распознающего функционала для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 3] \\ [0, 1] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [0, 1] \\ [-1, 0] \end{pmatrix}.$$

Последние два свойства распознающего функционала позволяют использовать его для исследования принадлежности точек внутренней множества решений. Это может иметь особую важность при нахождении телесной внутренней оценки множества решений вокруг точки-центра по методике, которая описана, например, в [8].

Как следствие сформулированных результатов, естественно приходим к следующей методике исследования разрешимости интервальных линейных систем уравнений. Для системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$. Пусть $U = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ и достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $U \geq 0$, то $\tau \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т.е. интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ разрешима и τ лежит во множестве решений;
- если $U > 0$, то $\tau \in \text{int } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность точки τ множеству решений устойчива к малым возмущениям \mathbf{A} и \mathbf{b} ;
- если $U < 0$, то $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т.е. интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ неразрешима.

Полезным свойством нашей методики является возможность коррекции с её помощью интервальной системы уравнений с целью достижения разрешимости либо, наоборот, неразрешимости. Действительно, в распознающем функционале (4) величины $\text{rad } \mathbf{b}_i$ входят аддитивно во все выражения, по которым затем берётся минимум. Поэтому если $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$, то для интервальной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b} + C\mathbf{e}$

с правой частью, все компоненты которой расширены на интервал $C[-1, 1]$ с радиусом $C > 0$, будем иметь $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + C\mathbf{e}) = C + \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, и потому

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + C\mathbf{e}) = C + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}). \quad (5)$$

Как следствие, если система (1)–(2) была неразрешима, то при $C \geq \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальная система с расширенной правой частью делается уже разрешимой.

Приложением разработанной техники может служить задача восстановления линейной зависимости по неточно измеренным эмпирическим данным. Пусть

$$b = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

с неизвестными коэффициентами x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, причём заданы m наборов экспериментально измеренных значений

$$\begin{array}{cccccc} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \dots, & a_n^{(1)}, & b^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \dots, & a_n^{(2)}, & b^{(2)}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(m)}, & a_2^{(m)}, & \dots, & a_n^{(m)}, & b^{(m)}, \end{array} \quad (6)$$

с которыми должны «согласовываться» x_i (верхний индекс в скобках — номер измерения). Переобозначая $a_{ij} := a_j^{(i)}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

или, кратко, $Ax = b$ с $m \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$ и m -вектором $b = (b_i)$. Её решение — обычное или в обобщённом смысле — принимается за искомую оценку параметров.

В случае, когда данные (6) имеют интервальные неопределённости, говорят [5], что набор параметров x_1, \dots, x_n объекта *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}, \mathbf{b}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, если для каждого наблюдения i в пределах измеренных интервалов найдутся такие представители $a_{i1} \in \mathbf{a}_{i1}$, $a_{i2} \in \mathbf{a}_{i2}$, \dots , $a_{in} \in \mathbf{a}_{in}$ и $b_i \in \mathbf{b}_i$, что $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$. Множество параметров, согласующихся с данными, которое называется *информационным множеством*, *множеством возможных значений параметров* и т. п., есть

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists(a_{ij}) \in (\mathbf{a}_{ij})) (\exists(b_i) \in (\mathbf{b}_i)) (Ax = b) \}$$

где $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, т. е. является ни чем иным, как множеством решений соответствующей интервальной линейной системы. Оценкой параметров при этом естественно взять точку из этого множества решений [1, 5, 6].

В общем случае прямое применение этого подхода приводит к парадоксу, смысл которого может быть образно выражен фразой «Чем лучше, тем хуже». Именно, чем

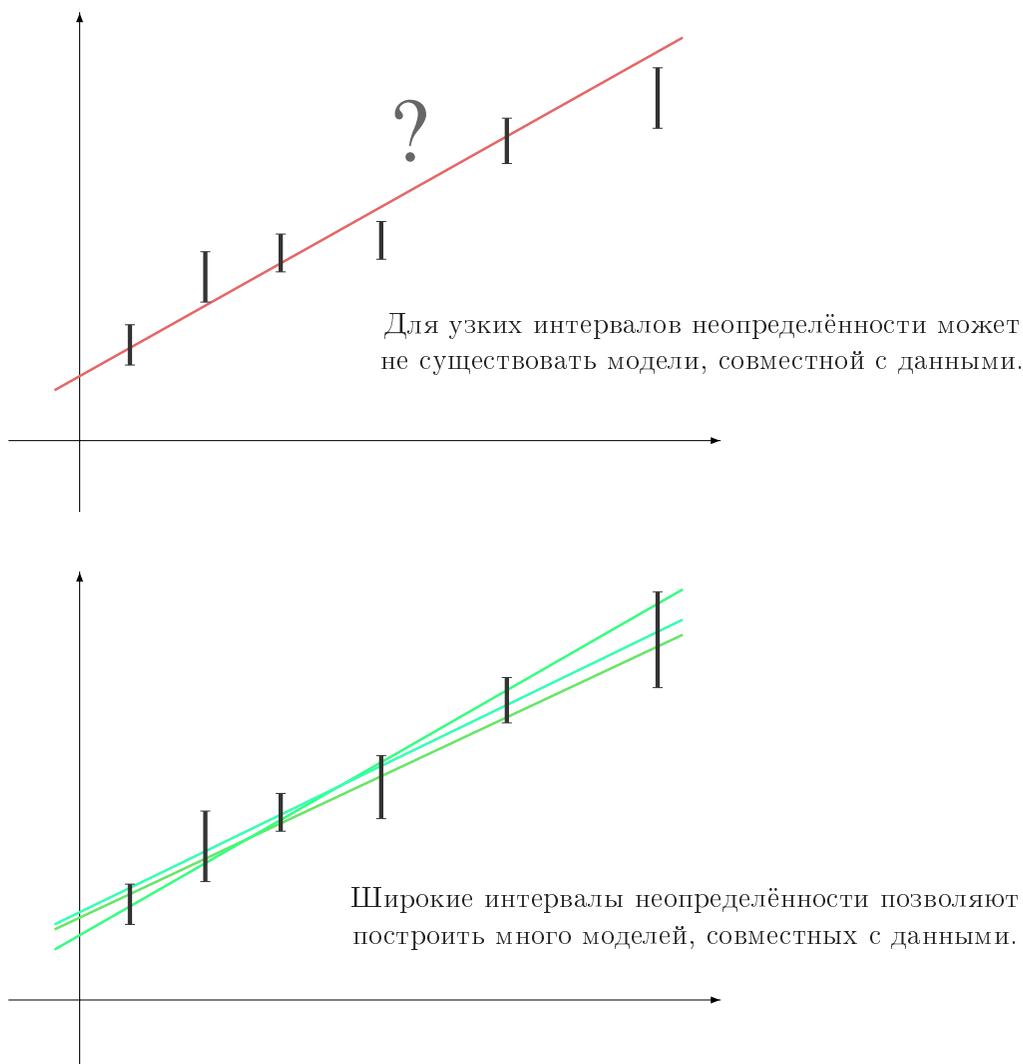


Рис. 2. Иллюстрация парадокса интервального оценивания.

меньше интервалы неопределённости, тем хуже проводить через них регрессионную линию! Эта ситуация иллюстрируется Рис. 2, где на верхнем чертеже интервалы неопределённости данных получаются «сжатием» интервалов нижнего рисунка (т.е. улучшением точности данных), но возможность проведения прямой линии через них утрачивается.

Для преодоления парадокса интервального оценивания в принципе существуют следующие пути:

- Если интервалы данных адекватно отражают неопределённости, то неадекватна применяемая модель и её нужно сменить.
- Если необходимо сохранить модель (вид зависимости) или данные не являются абсолютно гарантированными, то нужно допустить несогласованность параметров и данных.

Исследование первого пути является прерогативой науки моделирования, а здесь мы рассмотрим вторую возможность, связанную с допущением некоторого несогласования

между данными и получаемыми на их основе параметрами модели. Основным вопросом при этом является выбор меры для этого «согласования / несогласования».

Ясно, что при непустом информационном множестве избранная нами мера должна быть положительной для точек из этого множества, на которых «согласование» в самом деле достигается. В частности, для наших целей очень подходит распознающий функционал U_{ni} .

Подытоживая высказанные идеи, можно предложить следующий подход к выбору искомых параметров, который мы называем *методом максимума согласования*. Именно, оценкой параметров берётся точка, в которой достигается наибольшее значение распознающего функционала U_{ni} :

- ▶ Если $\max U_{ni} \geq 0$, то эта точка лежит в непустом множестве параметров, согласующихся с данными.
- ▶ Если $\max U_{ni} < 0$, то множество параметров, согласующихся с данными, пусто, но эта точка минимизирует «несогласованность» с экспериментальными данными.

В случае отсутствия параметров, согласующихся с данными, ещё одна содержательная интерпретация метода максимума согласования состоит в том, что $\arg \max U_{ni}$ — первая точка, которая появится в информационном множестве при равномерном уширении вектора правой части относительно его середины в силу свойства (5). Иными словами, мы предлагаем при пустом информационном множестве в качестве значений искомых параметров брать точку, на которой минимизируется увеличение неопределённости в выходных данных, делающее это информационное множество непустым. Подобный принцип согласования противоречивых данных был положен в основу метода восстановления зависимостей, развиваемого Н.М. Оскорбиным, С.И. Жилиным и др. [2, 6] В нашем подходе он автоматически получается как следствие из общего правила выбора оцениваемых параметров.

Для численной реализации метода максимума согласования могут быть применены процедуры негладкой оптимизации, и на их сложность решающее влияние оказывает число независимых параметров n . В важнейшем практическом случае, когда неопределённости во входных данных a_{ij} отсутствуют, а интервальность в данных сосредоточена лишь в b_i , распознающий функционал становится глобально вогнутым. При этом его максимизация очень эффективно осуществляется развитыми методами негладкой выпуклой оптимизации (см., к примеру [9]). В целом для этого случая получаем эффективную методику обработки данных с интервальными неопределённостями, которая является хорошей альтернативой методу наименьших квадратов (свободно распространяемую версию соответствующей программы для Scialb'a можно найти на <http://www.nsc.ru/interval/Programming/SciCodes/lintreg.sci>). Она очевидным образом обобщается на нелинейный случай, но требует привлечения существенно более сложных оптимизационных методов.

Список литературы

- [1] Вощнин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // *Заводская Лаборатория*. 2002. Т. 68, №1. С. 118–126.
- [2] Жилин С.И. Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей. Диссертация ... канд. физ.-мат. наук по спец. 05.13.01.

-
- Барнаул: АлтГУ, 2004. 119 с. Электронная версия доступна по адресу <http://www.nsc.ru/interval/Library/ApplDiss/Zhilin.pdf>
- [3] КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [4] КАНТОРОВИЧ Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал*. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
- [5] КУРЖАНСКИЙ А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика*. – 1991. – №4. – С. 3–26.
- [6] ОСКОРБИН Н.М., МАКСИМОВ А.В., ЖИЛИН С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённостей // *Известия Алтайского государственного университета*. – 1998. – №1. – С. 35–38.
- [7] ФИДЛЕР М., НЕДОМА Й., РАМИК Я., РОН И., ЦИММЕРМАНН К. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными*. – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2008.
- [8] ШАРЫЙ С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. – Электронная книга, см. <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks>
- [9] ШОР Н.З., ЖУРБЕНКО Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // *Кибернетика*. 1971. №3. С. 51–59.
- [10] KREINOVICH V., LAKEYEV A., RONN J., KANL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [11] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Исследование вариационных задач для квадратичных функционалов: доказательный вычислительный эксперимент

В. А. Шишкин

Пермский государственный университет

e-mail: vsh1791@mail.ru

Конструктивный подход к исследованию вариационных задач для квадратичных функционалов основан на замене исходной задачи некоторой близкой к ней более простой, позволяющей использовать как фундаментальные положения общей теории, так и возможности современных вычислительных систем. Сначала делается попытка достоверно установить существование решения и только после этого (если доказана разрешимость исходной задачи) строится приближённое решение с гарантированной оценкой точности, для чего применяются методы доказательных вычислений, основанные на использовании арифметики рациональных и интервальных чисел.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала

$$\mathcal{I}(x) = \sum_{i=1}^N \langle T_{1i}x, T_{2i}x \rangle_{\mathbf{H}} + \langle F_0, x \rangle_{\mathbf{X}} \quad (1a)$$

при ограничениях

$$p_i(x) = \langle \pi_i, x \rangle_{\mathbf{X}} - \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad (1b)$$

$$q_i(x) = \langle \varkappa_i, x \rangle_{\mathbf{X}} - \beta_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_2. \quad (1c)$$

Здесь T_{1i}, T_{2i} , $i = 1, \dots, N$, — линейные ограниченные операторы, действующие из заданного банахова пространства \mathbf{X} в вещественное сепарабельное гильбертово пространство \mathbf{H} ; $\langle f, x \rangle_{\mathbf{X}}$ — значение линейного ограниченного функционала $f \in \mathbf{X}^*$. Предполагаем, что система ограничений совместна и невырождена.

В качестве операторов T_{1i}, T_{2i} , $i = 1, \dots, N$, могут использоваться тождественные операторы, дифференциальные операторы любого порядка, интегральные операторы, а также операторы сосредоточенного и распределённого отклонения аргумента.

Предположим, что на основе некоторой однозначно разрешимой краевой задачи

$$\delta x = z, \quad \langle \pi_i, x \rangle_{\mathbf{X}} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \leq n_1, \quad (2)$$

можно построить изоморфизм $\mathbf{X} \simeq \mathbf{H} \times \mathbb{R}^m$. Тогда с помощью метода редукции [1, стр. 182] задача (1a)–(1c) сводится к задаче минимизации в гильбертовом пространстве

Н:

$$\mathcal{I}_1(z) = \frac{1}{2} \langle Qz, z \rangle_{\mathbf{H}} + \langle f_0, z \rangle_{\mathbf{H}} + \psi_0, \quad (3a)$$

$$g_i(z) = \langle \gamma_i, z \rangle_{\mathbf{H}} - a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n_1 - m, \quad (3b)$$

$$h_i(z) = \langle \eta_i, z \rangle_{\mathbf{H}} - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_2. \quad (3c)$$

$x = \Lambda z + Y\alpha'$ — решение задачи (2) ($\alpha' = \text{col} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$). Заметим, что оператор Q является самосопряжённым по построению:

$$Q = \sum_{i=1}^N \Lambda^* (T_{1i}^* T_{2i} + T_{2i}^* T_{1i}) \Lambda$$

При решении гладких оптимизационных задач с ограничениями в виде равенств и неравенств можно использовать метод множителей Лагранжа [2, стр. 252]. Функция Лагранжа задачи (3a)–(3c) имеет вид

$$\mathcal{L}(z, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{I}_1(z) + \langle \lambda_1, g(z) \rangle_{\mathbb{R}^{n_1-m}} + \langle \lambda_2, h(z) \rangle_{\mathbb{R}^{n_2}} = \frac{1}{2} \langle Qz, z \rangle_{\mathbf{H}} - \langle f(\lambda), z \rangle_{\mathbf{H}} + \psi(\lambda). \quad (4)$$

Известно [2, стр. 252–253], что если \hat{z} доставляет (локальный) минимум в задаче (3a)–(3c), то найдутся такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, что будут выполнены

1. условие стационарности функции Лагранжа по z : решение задачи \hat{z} должно быть корнем уравнения

$$Qz = f(\hat{\lambda}); \quad (5)$$

2. условие согласования знаков: $\hat{\lambda}_2 \geq 0$;
3. условие дополняющей нежёсткости

$$\hat{\lambda}_{2i} h_i(\hat{z}) = 0, \quad i = 1, \dots, n_2. \quad (6)$$

Предположим, что оператор Q можно записать в виде разности двух самосопряжённых операторов $A_1 - A_2$, где оператор A_1 имеет ограниченный обратный, а A_2 является компактным оператором. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$z - Kz = y(\lambda), \quad (7)$$

где оператор $K = A_1^{-1}A_2$ — компактный и самосопряжённый; $y(\lambda) = A_1^{-1}f(\lambda)$.

Пусть \hat{z} и $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$ удовлетворяют необходимым условиям существования решения. Тогда достаточным условием разрешимости задачи (3a)–(3c) будет положительная определённость оператора Q [2, стр. 293–294]. Известно, что самосопряжённый оператор Q положительно определён тогда и только тогда, когда его спектр содержит только положительные числа: $\sigma(Q) \subset (0, \infty)$. Так как, по предположению, $Q = I - K$, то для проверки положительной определённости требуется оценить верхнюю границу спектра оператора K :

$$\max \sigma(K) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad Q > 0. \quad (8)$$

Таким образом, если разрешимо параметрическое уравнение (7) и верхняя граница спектра оператора K меньше единицы, то задача (1a)–(1c) имеет решение

$$x = \Lambda z + Y\alpha'.$$

2. Конструктивное исследование условий разрешимости

Даже в простых задачах вид оператора K обычно является слишком сложным, чтобы можно было получить точное решение. Применение *конструктивной математики* [6, стр. 561] позволяет привести исходную задачу к виду, подходящему для использования доказательных вычислений.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2[a, b]$ — пространство суммируемых на $[a, b]$ с квадратом функций, K — интегральный оператор Гильберта–Шмидта, и, следовательно, (7) — интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром и правой частью, зависящей от параметра.

Заменим уравнение

$$z(t) - \int_a^b K(t, s)z(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (9)$$

близким к нему интегральным уравнением с вырожденным ядром

$$z(t) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{K}(t, s)z(s) ds = \tilde{f}(t), \quad t \in [\tilde{a}, \tilde{b}], \quad (10)$$

где $a \leq \tilde{a}$, $\tilde{b} \leq b$ и $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Q}$ — рациональные числа; $\tilde{K}: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ и $\tilde{f}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Для повышения точности приближения можно разбить $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ сеткой, узлы которой тоже являются рациональными числами, и строить приближения в виде сумм финитных функций — аппроксимаций на заданных подобластях.

Заменим $K(t, s)$ и $f(t)$ отрезками ряда Фурье по заданной системе ортогональных функций. В качестве базиса аппроксимации удобно использовать ортогональные многочлены Лежандра или систему ортогональных функций Радемахера–Уолша, так как элементы этих систем попарно ортогональны с единичным весом, а также коэффициенты многочленов Лежандра и узлы перемены знака функций Радемахера–Уолша являются рациональными числами, что пригодится при программной реализации метода. Коэффициенты рядов Фурье для функций $K(t, s)$ и $f(t)$, вообще говоря, могут быть иррациональными числами, поэтому в ходе аппроксимации они заменяются приближёнными рациональными значениями.

Для каждой из областей, на которых вычисляются приближения для ядра и правой части, также оцениваются сверху абсолютные погрешности $|K(t, s) - \tilde{K}(t, s)|$ и $|f(t) - \tilde{f}(t)|$. Определение точных верхних граней является, вообще говоря, достаточно сложной задачей. Однако для наших целей достаточно использовать относительно грубые оценки. Главное, чтобы эти оценки были *гарантированы*.

Для решения интегрального уравнения с вырожденным ядром можно использовать стандартные методы, сводящиеся к решению системы линейных алгебраических уравнений $AZ = B$. Заметим, что всегда можно построить такой приближённый оператор \tilde{K} , чтобы уравнение (10) имело решение, но существование обратного оператора для $I - \tilde{K}$ ещё не гарантирует обратимости $I - K$. Для проверки существования будем использовать теорему об обратном операторе [3, стр. 212]: если оператор $I - \tilde{K}$ имеет обратный, то обратимы и все операторы, для которых выполняется неравенство

$$\|K - \tilde{K}\| < \frac{1}{\|(I - \tilde{K})^{-1}\|}.$$

Норма оператора $(I - \tilde{K})^{-1}$ может быть вычислена точно, а норму в левой части неравенства можно гарантированно оценить сверху. Если оператор $I - K$ обратим, то (теоретически) всегда можно построить настолько точное приближение, чтобы неравенство было выполнено.

Для оценки верхней границы спектра оператора K можно использовать теорему Вейля [5, стр. 257]: соответствующие собственные числа двух компактных самосопряжённых операторов K и \tilde{K} отстоят друг от друга не более чем на $\|K - \tilde{K}\|$. Спектральное множество оператора \tilde{K} совпадает с множеством собственных чисел матрицы $\tilde{A} = E - A$ (E — единичная матрица). По построению элементы матрицы A являются рациональными числами, следовательно, коэффициенты характеристического многочлена $\det(\tilde{A} - \nu E)$ также будут рациональными числами. Для оценки значения наибольшего корня можно использовать решение уравнения методом Ньютона, при котором последовательность приближений монотонно сходится к решению сверху.

3. Компьютерная реализация

3.1. Доказательные вычисления

Для того, чтобы результаты исследования были *доказательны*, требуется гарантировать точность результатов компьютерных вычислений. Стандартные средства не позволяют контролировать точность вычислений, поэтому для расчётов используются пакеты программ, реализующие интервальную арифметику, а также арифметику рациональных чисел.

Так как программная реализация рассмотренного подхода писалась для выполнения под управлением операционной системы GNU/Linux, то для проведения рациональных вычислений была выбрана библиотека программ GNU MP¹. Существенно упростила написание кода на C++ возможность использования классов-обёрток из `<gmpxx.h>`.

Интервальные вычисления, в отличие от арифметики рациональных чисел, могут быть реализованы как чисто программно, так и с использованием арифметических операций с аппаратно реализованным направленным округлением. Такие возможности предоставляют, в частности, современные процессоры фирм Intel и AMD (при отключенной поддержке потоковых вычислений SSE2). Для выполнения интервальных вычислений можно применять шаблонный класс `interval<T>` из библиотеки `boost`². Простую реализацию интервальной арифметики можно написать и самостоятельно, используя `<fenv.h>`.

Известно, что выполнение последовательности рациональных вычислений приводит к быстрому росту длин числителя и знаменателя результата. Пусть, например, требуется оценить сверху наибольшее собственное число симметричной $N \times N$ -матрицы, элементы которой представлены рациональными числами. Сначала с помощью подходящего численного метода вычисляются (точно!) коэффициенты характеристического многочлена

$$p(\sigma) = (-1)^N (\sigma^N - q_1 \sigma^{N-1} - \dots - q_N).$$

Выбрав в качестве начального значения $\sigma^{(0)} = 1 + \max_i |q_i|$ [4, стр. 10, теорема 1.2],

¹<http://gmplib.org>

²<http://www.boost.org>

будем использовать для решения метод Ньютона

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - \frac{p(\sigma^{(k)})}{p'(\sigma^{(k)})}. \quad (11)$$

Проверка показывает, что даже при относительно небольших (десятки) размерностях матрицы вычисления вследствие «разрастания» числителя и знаменателя $\sigma^{(k)}$ выполняются *очень* медленно.

Возможным решением является комбинирование рациональных и интервальных вычислений: на каждой итерации значение (11) вычисляется с помощью рациональной арифметики, затем результат приближается интервальным числом с границами в виде чисел с плавающей точкой (пакет `mpfr`³ — вычисления с плавающей точкой, с многократной точностью и корректным округлением), после чего верхняя граница интервала снова преобразуется в рациональное число. При этом уменьшение точности результата на каждой итерации компенсируется высокой скоростью работы с рациональными числами, числитель и знаменатель которых имеют небольшую длину.

3.2. Параллельные вычисления

Параллельные вычисления могут существенно снизить время решения задачи. В рассматриваемом подходе очевидными кандидатами на распараллеливание являются

- аппроксимация функций на подобластях;
- операции линейной алгебры;
- оценка нормы резольвентного оператора.

Для программной реализации алгоритмов, использующих параллельные вычисления, применялась библиотека `Open MPI`⁴. При программировании адаптивных алгоритмов численного интегрирования также использовалась библиотека `pthread` (стандарт `POSIX Threads`). В процессе вычислений количество потоков соответствует числу процессорных ядер (настраивается автоматически в начале работы).

После выпуска фирмой `nVidia` видеокарт с архитектурой `Fermi`, аппаратно поддерживающих вычисления с числами с плавающей запятой двойной точности, появилась возможность использовать для расчётов технологию `CUDA`. К сожалению, похоже, что в процессорах видеокарт `GeForce 4xx` и `5xx` нет аппаратной реализации вычислений с направленным округлением. Однако массивное распараллеливание, возможно, компенсирует затраты на программно реализованную интервальную арифметику.

Список литературы

- [1] АЗБЕЛЕВ Н. В., МАКСИМОВ В. П., РАХМАТУЛЛИНА Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
- [2] АЛЕКСЕЕВ В. М., ТИХОМИРОВ В. М., ФОМИН С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 432 с.

³<http://www.mpfr.org>

⁴<http://www.open-mpi.org>

- [3] КАНТОРОВИЧ Л. В., АКИЛОВ Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 744 с.
- [4] ПРАСОЛОВ В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2001. 336 с.
- [5] РИСС Ф., СЁКЕФАЛЬВИ-НАДЬ Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 569 с.
- [6] KUSHNER V. A. The constructive mathematics of A. A. Markov // The Mathematical Association of America. Monthly. Vol. 113, no. 6. Pp. 559–566.

Применение интервальных методов в математическом моделировании

Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х., Базаров М.Б.

В докладе сделан обзор наиболее важных результатов по применению интервальных методов в математическом моделировании, полученных авторами и их коллегами в последние полтора десятка лет. При этом под применением интервальных методов понимается определённая технология синтеза интервальных моделей, когда ограниченные по амплитуде недетерминированные данные учитываются как интервальные объекты, а также разработка и обоснование соответствующих интервальных алгоритмов.

НОВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ФИЗИЧЕСКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ С УЧЕТОМ ИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Н.Н. Щелканов

Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Томск

NEW MATHEMATICAL MODEL OF LINEAR REGRESSION BETWEEN TWO PHYSICAL PARAMETERS IN VIEW OF THEIR RANDOM ERRORS

N.N. Shchelkanov

V.E.Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk

A generalized equation is presented for determination of the regression coefficients of the linear equation $Y = K_0 + K_1 X$ in the general case, when the point spread in the correlation between X and Y is caused both by random measurement errors and by uncontrollable physical factors. All the known equations for the regression coefficients appeared to be particular cases of the equation obtained.

Введение

При работе с разными массивами данных часто возникает необходимость нахождения коэффициентов линейной регрессии между двумя случайными физическими величинами. В большинстве случаев коэффициенты регрессии имеют конкретный физический смысл и для корректной интерпретации полученных результатов очень важно найти их значения наилучшим образом. Существует несколько формул для нахождения коэффициентов регрессии [1-3], но не для всех есть общее понимание, в каких случаях их следует использовать. В настоящее время отсутствует единый подход к нахождению коэффициентов линейной регрессии для общего случая, т.е. когда разброс точек в корреляционной связи между двумя величинами обусловлен как их случайными погрешностями измерений, так и неконтролируемыми физическими факторами.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы представить обобщенную формулу для вычисления коэффициентов линейной регрессии.

Постановка задачи

Рассмотрим две случайные физические величины X_0 и Y_0 , между которыми существует статистическая корреляционная связь. Предположим, что эта связь может быть описана линейной зависимостью

$$Y_0 = K_0 + K_1 X_0, \quad (1)$$

а требуется найти коэффициенты регрессии K_0 и K_1 , которые наилучшим образом отражают физическую взаимосвязь между ними.

Так как X_0 и Y_0 измеряются со случайными погрешностями, то на практике мы имеем дело с величинами X и Y , для которых уравнение регрессии запишется в виде

$$Y = K_0 + K_1 X. \quad (2)$$

Запись уравнений (1) и (2) с одинаковыми коэффициентами регрессии говорит о том, что последние не должны зависеть от случайных погрешностей измеренных величин X и Y . В дальнейшем будем говорить о нахождении только коэффициента регрессии K_1 , так как K_0 вычисляется после нахождения K_1 по известной формуле

$$K_0 = \bar{Y} - K_1 \cdot \bar{X}, \quad (3)$$

где \bar{X} и \bar{Y} – средние значения X и Y .

Новый подход

Новый подход к нахождению коэффициента регрессии K_1 заключается в следующих двух моментах:

1. Предлагается случайные величины X и Y нормировать соответственно на значения $\sqrt{\delta_X^2 + \delta_{X_0}^2}$ и $\sqrt{\delta_Y^2 + \delta_{Y_0}^2}$. Здесь δ_X и δ_Y – случайные среднеквадратические погрешности измерения X и Y для рассматриваемого массива данных; δ_{X_0} и δ_{Y_0} – некоторые величины, характеризующие разброс точек в корреляционной связи физических величин X_0 и Y_0 за счет неконтролируемых физических параметров.

2. При нахождении коэффициента регрессии K_1 используется ортогональная среднеквадратическая регрессия, т.е. минимизируется сумма квадратов отклонений перпендикулярных искомой прямой.

Тогда уравнение линейной регрессии запишется в виде

$$\frac{Y}{\sqrt{\delta_Y^2 + \delta_{Y_0}^2}} = K_0' + K_1' \cdot \frac{X}{\sqrt{\delta_X^2 + \delta_{X_0}^2}} \quad (4)$$

Здесь величины δ_{X_0} и δ_{Y_0} находятся из решения системы двух уравнений.

Первое уравнение имеет вид

$$|\rho_{X_0 Y_0}| \cdot \sigma_{X_0} \cdot \sigma_{Y_0} = \sqrt{\sigma_{X_0}^2 - \delta_{X_0}^2} \cdot \sqrt{\sigma_{Y_0}^2 - \delta_{Y_0}^2}, \quad (5)$$

где $\sigma_{X_0} = \sqrt{\sigma_X^2 - \delta_X^2}$ и $\sigma_{Y_0} = \sqrt{\sigma_Y^2 - \delta_Y^2}$ – среднеквадратические отклонения величин X_0 и Y_0 ; σ_X и σ_Y – среднеквадратические отклонения величин X и Y ; $\rho_{X_0 Y_0}$ – коэффициент корреляции между X_0 и Y_0 . Коэффициент корреляции $\rho_{X_0 Y_0}$ находится из известного уравнения [1]:

$$\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y = \rho_{X_0 Y_0} \sigma_{X_0} \sigma_{Y_0}, \quad (6)$$

где ρ_{XY} – коэффициент корреляции между X и Y . Заметим, что из уравнения (6) следует уравнение (5).

Второе уравнение запишем в виде

$$\frac{\delta_{X_0}}{\sigma_{X_0}} = \frac{\delta_{Y_0}}{\sigma_{Y_0}} \quad (7)$$

и назовем условием пропорциональности величин δ_{X_0} , δ_{Y_0} и σ_{X_0} , σ_{Y_0} . Введение величин δ_{X_0} , δ_{Y_0} и запись условия (7) являются ключевыми моментами в данной работе, так как это позволило получить обобщенное решение для коэффициентов линейной регрессии уравнения (2).

Результаты

После решения системы уравнений (5) и (7) получим

$$\delta_{X_0} = \sigma_X \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\delta_X^2}{\sigma_X^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\rho_{XY}|}{\sqrt{\left(\sigma_X^2 - \delta_X^2\right) \cdot \left(\sigma_Y^2 - \delta_Y^2\right)}}\right)}, \quad (8)$$

$$\delta_{Y_0} = \sigma_Y \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\delta_Y^2}{\sigma_Y^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\rho_{XY}|}{\sqrt{\left(\sigma_X^2 - \delta_X^2\right) \cdot \left(\sigma_Y^2 - \delta_Y^2\right)}}\right)}. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) найдем значения $\sqrt{\delta_X^2 + \delta_{X_0}^2}$ и $\sqrt{\delta_Y^2 + \delta_{Y_0}^2}$ в следующем виде:

$$\sqrt{\delta_X^2 + \delta_{X_0}^2} = \sigma_X \cdot A, \quad (10)$$

$$\sqrt{\delta_Y^2 + \delta_{Y_0}^2} = \sigma_Y \cdot B, \quad (11)$$

где

$$A = \sqrt{1 - |\rho_{X_0 Y_0}| \cdot \left(1 - \frac{\delta_X^2}{\sigma_X^2}\right)} = \sqrt{1 - |\rho_{XY}| \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}}}, \quad (12)$$

$$B = \sqrt{1 - |\rho_{X_0 Y_0}| \cdot \left(1 - \frac{\delta_Y^2}{\sigma_Y^2}\right)} = \sqrt{1 - |\rho_{XY}| \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}}}. \quad (13)$$

С учетом (10) и (11) уравнение линейной регрессии (4) запишется в виде

$$\frac{Y}{\sigma_Y \cdot B} = K_0' + K_1' \cdot \frac{X}{\sigma_X \cdot A}. \quad (14)$$

Уравнение (14) легко привести к виду (2):

$$Y = K_0' \cdot \sigma_Y \cdot B + K_1' \cdot \frac{\sigma_Y \cdot B}{\sigma_X \cdot A} \cdot X = K_0 + K_1 \cdot X, \quad (15)$$

где

$$K_0 = K_0' \cdot A \cdot \sigma_Y \cdot B, \quad (16)$$

$$K_1 = K_1' \cdot \frac{\sigma_Y \cdot B}{\sigma_X \cdot A}. \quad (17)$$

Применяя ортогональную среднеквадратическую регрессию к уравнению (14) и используя соотношение (17), получим выражение для искомого коэффициента регрессии:

$$K_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \sqrt{\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{XY}^2} \right\}, \quad (18)$$

где A и B определяются выражениями (12) и (13). Впервые формула (18) была представлена в [4], а подробно описана в [5].

Анализ

Выражение (18) позволяет устанавливать однозначную связь между величинами X и Y и определять условия использования известных типов линейной регрессии.

Покажем, что все известные аналитические выражения для коэффициента регрессии K_1 уравнения (2) являются частными случаями формулы (18).

4.1. Так, для случая, когда разброс точек в корреляционной связи X и Y обусловлен только их случайными погрешностями, т.е. $\rho_{X_0 Y_0} = 1$, получим известное выражение для коэффициента регрессии K_1 , приведенное в [1]:

$$K_1 = \frac{\delta_Y}{\delta_X} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta_X}{\delta_Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta_Y}{\delta_X} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta_X}{\delta_Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta_Y}{\delta_X} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{XY}^2} \right\}. \quad (19)$$

4.1.1. При $\rho_{X_0 Y_0} = 1$, $\delta_X = 0$ и $\delta_Y \neq 0$, имеем

$$K_1 = \lim_{\delta_X \rightarrow 0} \frac{\delta_Y}{\delta_X} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta_X}{\delta_Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta_Y}{\delta_X} \right) + \left(-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta_X}{\delta_Y} + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta_Y}{\delta_X} \right) \sqrt{1 + 4 \cdot \rho_{XY}^2 \cdot \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta_X}{\delta_Y} \right)^2} \right\}.$$

Разлагая выражение под квадратным корнем в ряд Маклорена [6] и оставляя первые два члена, получим

$$K_1 = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta Y}{\delta X} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right) + \left(-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right) \cdot \left[1 + 2 \cdot \rho_{XY}^2 \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} \right)^2 \right] \right\} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \rho_{XY}. \quad (20)$$

Это известная формула для коэффициента K_1 уравнения прямой регрессии $Y = K_0 + K_1 X$, которая находится путем минимизации суммы квадратов отклонений вдоль оси Y от искомой прямой [2].

4.1.2. При $\rho_{X_0Y_0} = 1$, $\delta_Y = 0$ и $\delta_X \neq 0$, имеем

$$K_1 = \lim_{\delta Y \rightarrow 0} \frac{\delta Y}{\delta X} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right) + \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right) \sqrt{1 + 4 \cdot \rho_{XY}^2 \cdot \left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right)^2} \right\}.$$

Проведя процедуру разложения выражения под квадратным корнем в ряд Маклорена [6] и оставляя первые два члена, получим

$$K_1 = \lim_{\delta Y \rightarrow 0} \frac{\delta Y}{\delta X} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right) + \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{\delta X}{\delta Y} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right) \cdot \left[1 + 2 \cdot \rho_{XY}^2 \left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta X} \right)^2 \right] \right\} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{\rho_{XY}}. \quad (21)$$

Формула (21) – также известная формула для коэффициента $1/K_1^*$ уравнения обратной регрессии $X = K_0^* + K_1^* \cdot Y$, которая получается путем минимизации суммы квадратов отклонений вдоль оси X от искомой прямой [2].

4.1.3. При $\rho_{X_0Y_0} = 1$ и $\delta_X = \delta_Y \neq 0$ получим известную формулу

$$K_1 = \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{XY}^2} \right\} \quad (22)$$

для коэффициента K_1 уравнения ортогональной регрессии $Y = K_0 + K_1 X$, которая находится путем минимизации суммы квадратов отклонений, перпендикулярных искомой прямой [3].

4.2. Если для массива данных выполняется соотношение $\frac{\delta X}{\sigma_X} = \frac{\delta Y}{\sigma_Y}$, то из выражения (18) вытекает простая формула для коэффициента регрессии

$$K_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}. \quad (23)$$

Так как соотношение $\frac{\delta X}{\sigma_X} = \frac{\delta Y}{\sigma_Y}$ выполняется для большинства экспериментальных данных, то формулу (23) можно рекомендовать к использованию при отсутствии информации о величинах случайных погрешностей X и Y . Заметим, что формула (23) представляет собой среднее геометрическое формул (20) и (21).

Диапазон изменчивости коэффициента регрессии

Для случая, когда разброс точек в корреляционной связи величин X и Y обусловлен только их случайными погрешностями, т.е. $\rho_{X_0Y_0} = 1$, коэффициент регрессии будет изменяться в следующих пределах:

$$\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot |\rho_{XY}| \leq |K_1| \leq \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{|\rho_{XY}|}, \quad (24)$$

а при $\rho_{X_0Y_0} < 1$

$$\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot |\rho_{XY}| < |K_1| < \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{|\rho_{XY}|}. \quad (25)$$

Как видно из выражений (24), (25), коэффициенты для прямой и обратной регрессий принимают соответственно минимальное и максимальное значения.

Заключение

Кратко сформулируем основные результаты.

1. Получена обобщенная формула, позволяющая находить коэффициенты регрессии линейного уравнения $Y = K_0 + K_1 X$ для общего случая, когда разброс точек в корреляционной связи случайных величин X и Y обусловлен как их случайными погрешностями измерений, так и неконтролируемыми физическими факторами.

2. Все известные выражения для коэффициентов регрессии являются частными случаями полученной формулы. Определены условия использования известных выражений.

Обобщенная формула позволяет получать устойчивые, достоверные и физически-корректные коэффициенты регрессии. Формула представляет интерес для специалистов, занимающихся обработкой разных массивов данных, и может быть использовано для их корректной физической интерпретации, независимо от области знания.

Список литературы

1. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука. Т.2. 1973. 900 с.
2. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука. 1985. 112 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир. 1975. 648 с.
4. Щелканов Н.Н. Построение регрессионной зависимости между аэрозольными оптическими толщами атмосферы с учетом их случайных погрешностей // II Заседание Рабочей группы проекта «Аэрозоли Сибири». Тезисы докладов. Томск. Изд. ИОА СО РАН. 1995. С.16.
5. Щелканов Н.Н. Обобщенный метод построения линейной регрессии и его применение для построения однопараметрических моделей аэрозольного ослабления // Оптика атмосферы и океана. 2005. Т.18. №1-2. С.86-90.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука. 1975. 624с.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Н.Н. Щелканов

Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Томск

METHODS FOR CALCULATION OF RANDOM ERRORS OF PHYSICAL PARAMETERS FROM EXPERIMENTAL DATA

N.N. Shchelkanov

V.E.Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk

Methods are proposed and equations are presented for estimation of the rms random errors of measured parameters, entering into the equation for calculation of the regression coefficients, from experimental data.

Введение

В [1] предложена обобщенная формула для нахождения коэффициента регрессии K_1 линейного уравнения

$$Y = K_0 + K_1 X. \quad (1)$$

Эта формула получена с учетом случайных погрешностей измеряемых характеристик X и Y и имеет вид

$$K_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \sqrt{\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{XY}^2} \right\}, \quad (2)$$

$$\text{где } A = \sqrt{1 - |\rho_{XY}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}}, \quad B = \sqrt{1 - |\rho_{XY}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}}, \quad (3)$$

σ_X и σ_Y – среднеквадратические отклонения величин X и Y , ρ_{XY} – коэффициент корреляции между X и Y , δ_X и δ_Y – случайные среднеквадратические погрешности измерения X и Y для рассматриваемого массива данных. В [1] показано, что все известные формулы для коэффициентов регрессии являются частными случаями полученного аналитического выражения (2) и определены условия их использования.

Из анализа, проведенного в [1] следует, что наиболее распространенная формула для вычисления коэффициента регрессии $K_1 = \sigma_Y / \sigma_X \cdot \rho_{XY}$ может быть использована только для случая, когда разброс точек в корреляционной связи величин X и Y обусловлен только случайными погрешностями Y , а погрешность $\delta_X = 0$. Для подавляющего большинства данных это условие не выполняется, поэтому, с теоретической точки зрения, этой формулой пользоваться нельзя. При отсутствии информации о величинах случайных погрешностей δ_X и δ_Y имеется неопределенность в вычислении коэффициентов регрессии уравнения (1). При этом разность между крайними оценками коэффициента регрессии K_1 будет равна $\sigma_Y / \sigma_X (1 / \rho_{XY} - \rho_{XY})$.

На рис.1 представлена зависимость величины $(1 / \rho_{XY} - \rho_{XY}) \cdot 100$, которая в процентах характеризует неопределенность в коэффициенте регрессии K_1 , от коэффициента корреляции ρ_{XY} . Из рисунка видно, что при $\rho_{XY} > 0,99$ неопределенность в коэффициенте регрессии не превышает 1%, при $\rho_{XY} > 0,9$ - 22%, при $\rho_{XY} < 0,6$ неопределенность превышает 100%, а при $\rho_{XY} < 0,1$ - 1000%. Если задать максимально допустимую погрешность определению K_1 равной 22%, то практически формулой $K_1 = \sigma_Y / \sigma_X \cdot \rho_{XY}$ можно пользоваться только при $\rho_{XY} > 0,9$. Фактически же этой формулой пользуются при любых значениях коэффициента корреляции.

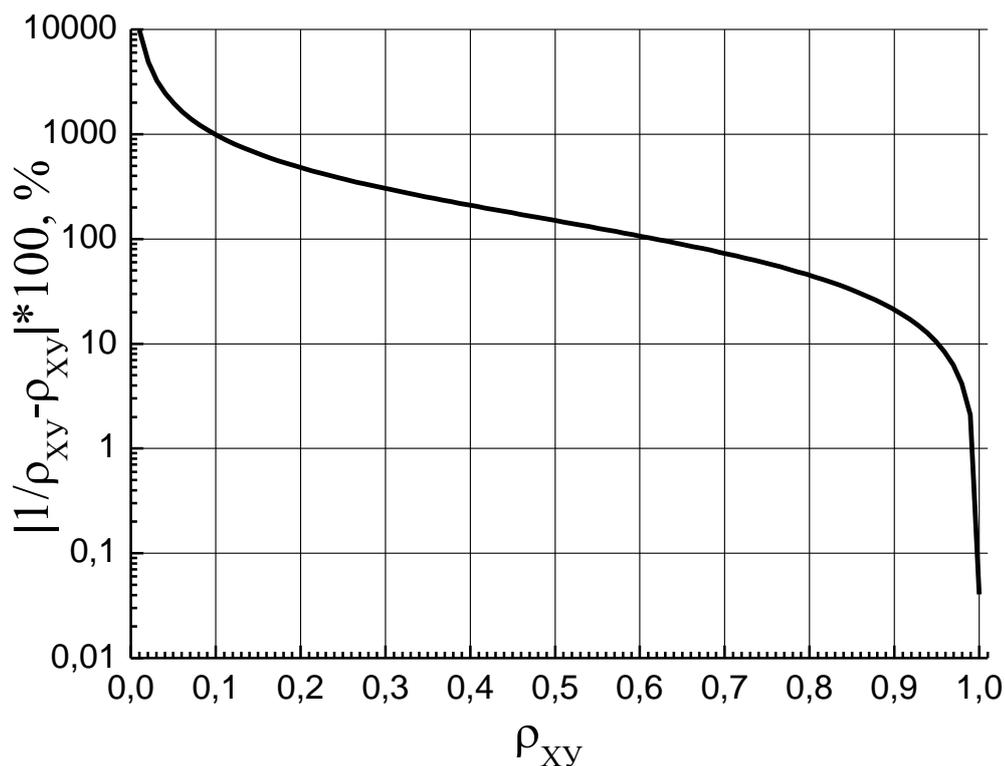


Рис. 1. Зависимость величины $(1/\rho_{XY} - \rho_{XY}) * 100$ от коэффициента корреляции ρ_{XY} .

Для получения математически корректных коэффициентов регрессии уравнения (1) следует пользоваться обобщенной формулой линейной регрессии (2), а для этого необходимо развивать методы вычисления величин случайных погрешностей.

Методы вычисления случайных погрешностей

Предложено три метода вычисления случайных погрешностей величин X и Y непосредственно из экспериментальных данных. В методах используется известная формула из [2]

$$\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y = \rho_{X_0 Y_0} \sigma_{X_0} \sigma_{Y_0}, \quad (4)$$

где X_0 и Y_0 представляют собой физические величины X и Y при $\delta_X = \delta_Y = 0$; $\rho_{X_0 Y_0}$ – коэффициент корреляции между X_0 и Y_0 ; σ_{X_0} и σ_{Y_0} – среднеквадратические отклонения величин X_0 и Y_0 .

Метод №1

Первый метод позволяет находить верхние оценки случайных погрешностей. Если известна одна из погрешностей, например δ_Y , а разброс точек в искомой зависимости обусловлен только случайными погрешностями ($\rho_{X_0 Y_0} = 0$), то согласно (4) значение другой погрешности будут вычисляться по формуле

$$\delta_X = \sigma_X \cdot \sqrt{1 - \rho_{XY}^2 \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 - \delta_Y^2}}. \quad (5)$$

Если при этом одна из погрешностей (δ_Y) равна нулю, то, как следует из (5), значение другой погрешности будут вычисляться по формуле

$$\delta_X = \sigma_X \cdot \sqrt{1 - \rho_{XY}^2}. \quad (6)$$

Метод №2

Второй метод позволяет приближенно вычислять случайные погрешности, например δ_X . Для этого выберем величины X и X' , незначительно отличающиеся друг от друга. Полагая, что в формуле (4) разброс точек в корреляционной связи величин X и X' обусловлен только случайными погрешностями и $\delta_X = \delta_{X'}$ получим приближенные оценки для δ_X

$$\delta_X = \sqrt{\frac{\sigma_X^2 + \sigma_{X'}^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_X^2 - \sigma_{X'}^2}{2}\right)^2 + \rho_{XX'}^2 \cdot \sigma_X^2 \cdot \sigma_{X'}^2}}. \quad (7)$$

Если в (7) будут выполнено условие $\sigma_X = \sigma_{X'}$, то получается простая формула для вычисления случайной погрешности

$$\delta_X = \sigma_X \cdot \sqrt{1 - |\rho_{XX}|}, \quad (8)$$

где ρ_{XX} – нормированный коэффициент автокорреляции для X .

Метод №3

Одновременно случайные среднеквадратические погрешности двух физических величин можно найти, предполагая, что теоретический коэффициент наклона K_1 между ними известен, а разброс точек в их корреляционной связи обусловлен только случайными погрешностями. Для этого необходимо иметь два массива физических величин (X и Y), полученных одновременно в одинаковых условиях одним или двумя приборами.

Для расчета случайных погрешностей двух физических величин находятся их среднеквадратические отклонения (σ_X и σ_Y) и коэффициент корреляции (ρ_{XY}) между ними. Затем последовательно задаются разные величины одной случайной среднеквадратической погрешности, например, δ_Y в интервале от 0 до максимального значения $\sigma_Y \cdot \sqrt{1 - \rho_{XY}^2}$, и находятся величины погрешности δ_X по формуле (5). Полученные значения среднеквадратических отклонений (σ_X и σ_Y), коэффициента корреляции (ρ_{XY}) и набора случайных погрешностей (δ_X и δ_Y) подставляются в формулу (2) и вычисляется коэффициент регрессии K_1 . Когда коэффициент регрессии K_1 получится равным его теоретическому значению, находятся величины обеих случайных среднеквадратических погрешностей. Когда величины X и Y представляют собой одну и ту же физическую величину, то теоретический коэффициент регрессии K_1 будет равен 1.

Заключение

Предложены методы, которые позволяют вычислять величины случайных среднеквадратических погрешностей физических величин непосредственно из экспериментальных данных.

Список литературы

1. Щелканов Н.Н. Обобщенный метод построения линейной регрессии и его применение для построения однопараметрических моделей аэрозольного ослабления // Оптика атмосферы и океана. 2005. Т.18. №1-2. С.86-90.
2. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука. Т.2. 1973. 900 с.

Пакет интервальных алгоритмов для широкого пользователя

Юлдашев З.Х., Ибрагимов А.А., Калханов П.Ж.

В работе приводится описание одного варианта пакета интервальных алгоритмов, основанного на принципе дружелюбности. В данном случае под принципом дружелюбности понимается не только простота и удобство интерфейса, но и разработка достаточного количества программных средств, расширяющих, по замыслу авторов, круг пользователей интервальными методами. В частности, в рамках пакета пользователю, не знакомому с методами интервального анализа, представляется возможность проведения определённого ряда вычислительных экспериментов. При этом достаточно записать задания, используя обычные математические выражения. В данном варианте пакета, реализованного средствами С++ на основе принципов объектно-ориентированного программирования, пользователь имеет возможность решать интервальными методами ряд задач вычислительной математики и настраивать пакет на применение новых алгоритмов, оставаясь в рамках привычных языковых конструкций.