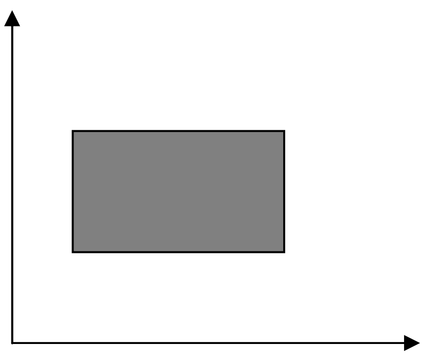
Метод Гаусса-Зейделя в комплексной круговой арифметике

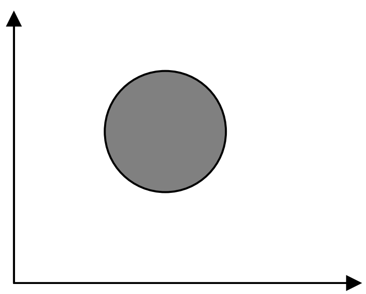
Дронов В.С.

Алтайский Государственный Университет

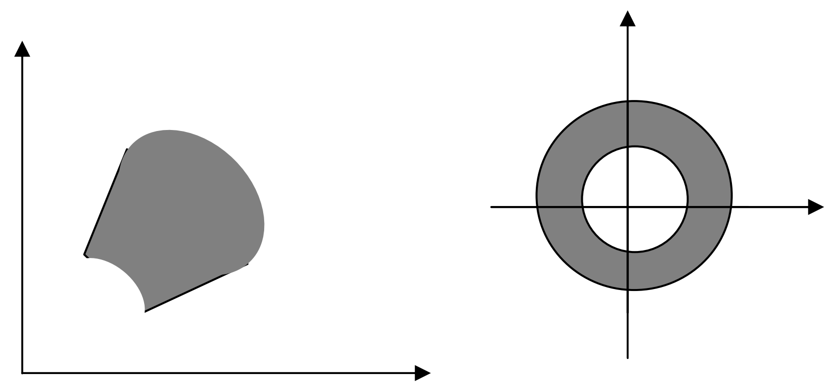
Основным отличием комплексного случая от действительного является «двухмерность» пространства. Из-за этого само понятие «комплексного интервала» применяется к различным объектам:



Прямоугольникам комплексной плоскости



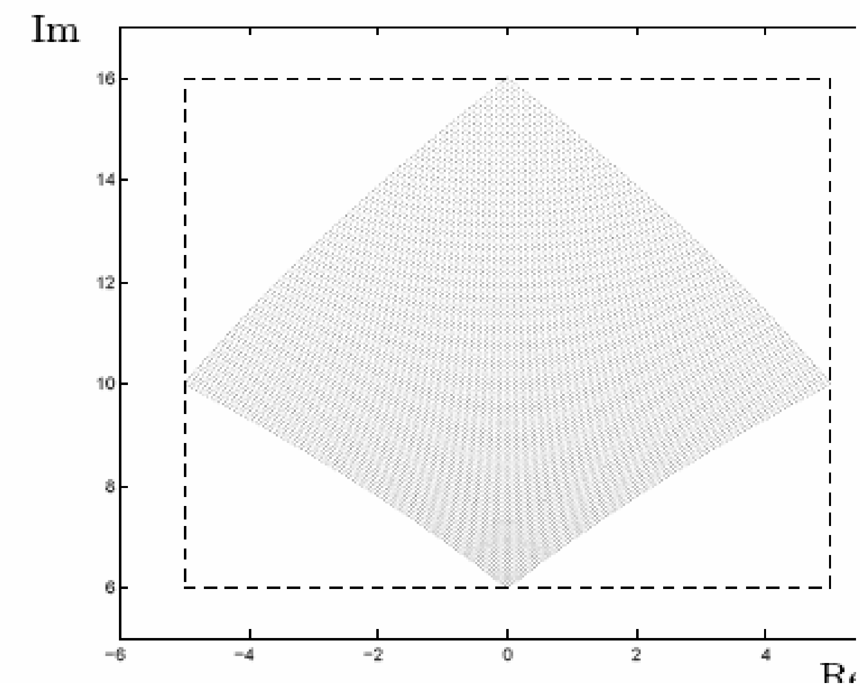
Кругам на ней же

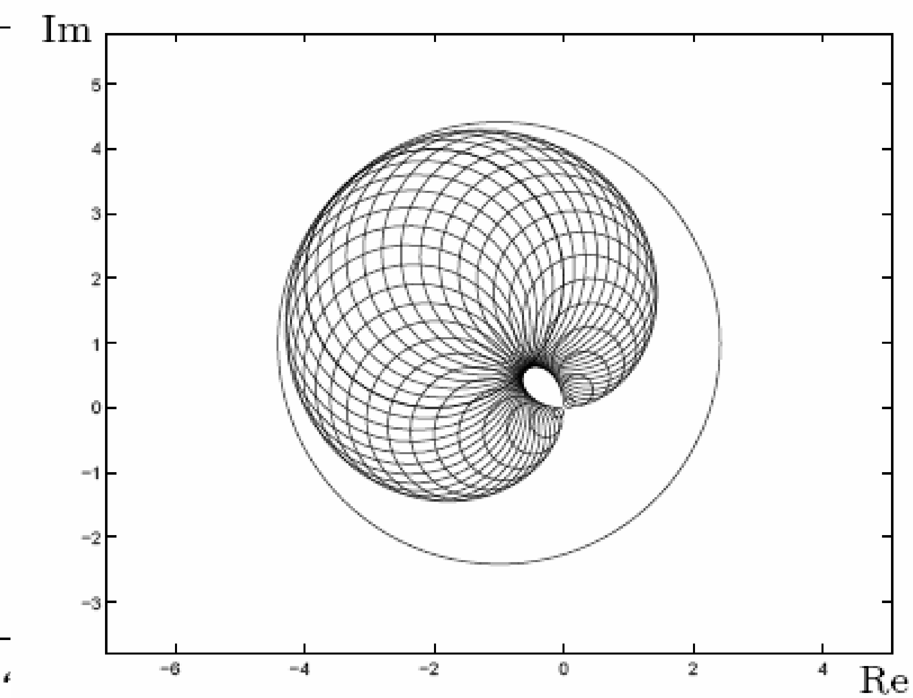


Круговым кольцам и их фрагментам

Между тем, свойства интервалов при различных подходах существенно различны – например, в прямоугольном случае умножение интервалов не ассоциативно.

Ни одно из определений интервала для комплексных чисел не является удобным для чисто механического переноса методов, разработанных для вещественного случая. Ниже приводятся иллюстрации несовпадения представителей с интервалом-результатом уже в случае арифметических операций.





Умножение [1,2]+[1,2]i и [3,4]+[3,4]i

(1,1) и (-1+i, 1)

Для полярного интервала те же трудности возникают, например, уже в случае сложения.

Круговые интервалы:

- Наличие одного интервального параметра
- Меньшее удобство при проведении геометрических аналогий с действительным случаем
- Наличие аналогии с представлением

$$\mathbf{x} = mid(\mathbf{x}) + [-1,1]\; rad(\mathbf{x})$$

Прямоугольные интервалы:

- Наличие двух интервальных параметров (фактически, удвоение размерности задачи)
- Большая легкость при аналогиях с действительным случаем

Интервальный метод Гаусса-Зейделя является одной из классических итерационных процедур для оценивания множеств решений ИСЛАУ в действительном случае. Существуют хорошо известные результаты, говорящие о его применимости и точности итогового результата.

Ниже рассматривается интервальная система линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где:

A – интервальная матрица размерности n*n

b – интервальный вектор правых частей

метод Гаусса-Зейделя

- На входе: система уравнений ***A***x=***b,*** оценка ***χ*** на объединенное множество решений, точность έ.
- DO WHILE (d>έ)

FOR i=1 TO n

$$\chi_i := x_i \cap (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j) / a_{ij}$$

IF $\chi_i = \varnothing$ THEN STOP (Решений нет)

END IF

END FOR

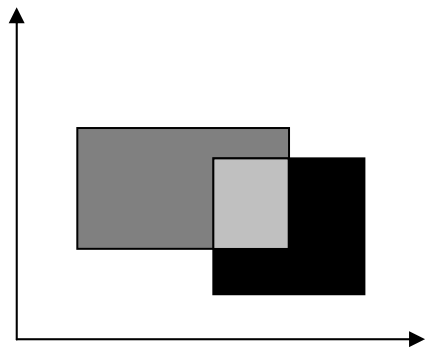
d:= dist (x, ***x***)

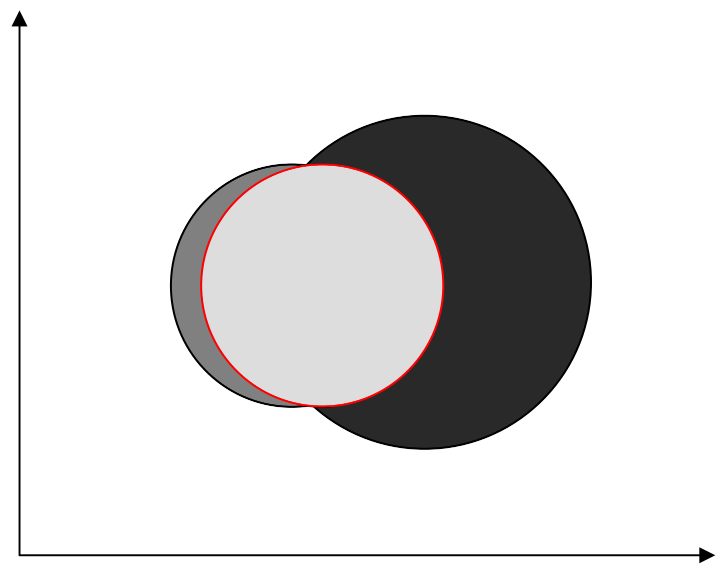
x:= ***x***

END DO

Далее рассматривается интервальная линейная система уравнений в комплексном случае, а под интервалом подразумевается круговой интервал: $(a, r) = \{z \in C : |z - a| < r\}$

Невозможность прямого переноса обеспечивается тем фактом, что пересечение двух круговых интервалов, в отличие от действительного случая (а также полярных или прямоугольных интервалов) не есть круговой интервал:





Тем не менее, утверждается следующий факт: взятие оболочки на шаге пересечения не ухудшает свойств метода в случае круговых интервалов. (Несмотря на то, что некоторые свойства не переносятся напрямую)

метод Гаусса-Зейделя для комплексных круговых интервалов

- На входе: система уравнений ***A***x=***b,*** оценка ***x*** на объединенное множество решений, точность έ.
- DO WHILE (d>έ)

  FOR i=1 TO n

$$\text{Пусть } b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j = (a,R),\ x_i = (b,r);$$

$$IF\ \sqrt{\left|R^2 - r^2\right|} \le \left|a-b\right| THEN\ \chi_i := \max{}_r\{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j)/a_{ij}, x_i\}$$

$$END\ IF$$

$$IF\ \sqrt{\left|R^2 - r^2\right|} > \left|a-b\right| THEN$$

$$\chi_i := hull(x_i \cap (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j)/a_{ij})^*$$

$$END\ IF$$

$$IF\ \left|a-b\right| < R + r\ THEN\ STOP \quad END\ IF$$

d:= dist (x, ***x***)

x:= ***x***

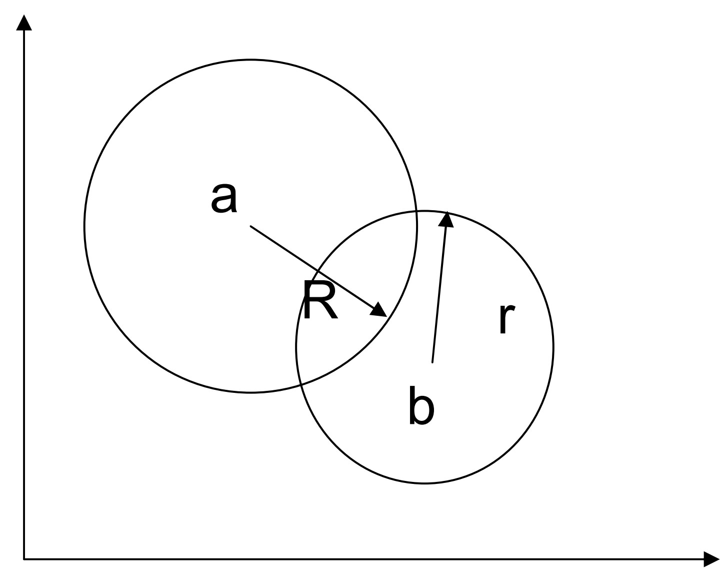
END DO

* - оболочка может быть выписана в явном виде (см. далее)

$$hull(x_i \cap (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j) / a_{ij}) = (z, p), \text{где}$$

$$p = \frac{\sqrt{(R + r + |a - b|)(R + r - |a - b|)(R - r + |a - b|)(r + |a - b| - R)}}{2|a - b|}$$

$$z = \frac{a\sqrt{r^2 - p^2} + b\sqrt{R^2 - p^2}}{\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{R^2 - p^2}}$$



В действительном случае для метода Гаусса-Зейделя :

Если z – предельное значение оценки множества решений системы ***A***x=***b***, то

$$\langle A \rangle |z| \le |b|$$

Если же ***A*** относится к классу интервальных Н-матриц, то

$$|z| \le \langle A \rangle^{-1} |b|$$

Здесь <A> - компарант интервальной матрицы А, т.е.

$$ij\text{-й элемент } \langle \mathbf{A} \rangle := \begin{cases} \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\mathbf{a}_{ij}|, & \text{если } i \ne j. \end{cases}$$

За пределами же класса Н-матриц метод не гарантирует сужения изначальной оценки.

Понятие Н-матрицы в действительном случае связано с понятием М-матрицы, механический перенос которого на комплексный случай затруднен:

Вещественная М-матрица – матрица, представимая в виде

$$cE - A,$$

Где E – единичная матрица, A – неотрицательная матрица, константа *c* превосходит спектральный радиус A

- Компарант вещественной матрицы – матрица с равными по модулю элементами, положительными на главной диагонали и отрицательными иначе.

Вещественная Н-матрица – матрица, компарант которой есть М-матрица

- Буквальный перенос затруднен не только проблемами со знаками, но и свойствами матричных операций в комплексном случае (активно эксплуатируемыми при оценке ширины результата в действительном случае)

- A – M-матрица тогда и только тогда, когда диаг. эл-ты неположительны, и существует $z>0$: $Az>0$

В комплексном случае отслеживание подобного затруднено за счет свойств умножения (появление лишних представителей).

- Ограничения по применимости метода в комплексном случае однако снижаются возможностью переноса на круговой случай признака неособенности интервальной матрицы **A**

- Существует ненулевой x при котором:

$$|\mathrm{mid}(\mathbf{A})x| \le (\mathrm{rad}(\mathbf{A}))|x|$$

(Связано с характеризацией Оеттли-Прагера, переносимой на круговой случай).

Утверждение: понятие Н-матрицы можно распространить на случай комплексных круговых интервалов с сохранением существенных для метода Гаусса-Зейделя свойств:

Матрица модулей mid(**A**) – Н-матрица и

$$\rho(\langle mid(A)\rangle^{-1} rad(A)) < 1$$

При этом сохраняется оценка на ширину предельного результата итераций, то есть свойства метода Гаусса-Зейделя в случае комплексных круговых интервалов не уступают свойствам в действительном случае.

Благодарю за внимание!