Математическая модель бюджетирования

$$(\overline{x},\overline{r}) = \underset{x,r}{\arg\max}\, r$$

$$\begin{cases} (P \circ Q)x \geq (M \circ Q)x + (L \circ Q)x + (S \circ Q)x + r(P \circ Q)x + c, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots m. \end{cases}$$

Условия применения модели

- Отсутствие нулевых строк и столбцов в матрицах
- Условие безубыточности $p_{ij} \geq m_{ij} + l_{ij} + s_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots n;\ j = 1,2,\ldots m)$
- Наличие переменных затрат

Анализ модели

Связь с моделью Неймана

$$(M + L + S) \circ Q \sim A$$

$$P \circ Q \sim B$$

$$\overline{r} \sim (1 - \overline{\lambda})$$

Понятие продуктивности

$$\forall c > 0 : \exists x \geq 0 : \left(Bx - Ax \geq c \right)$$

Нахождение параметров равновесия

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A,B)} \lambda,$$

$$D(A,B) = \left\{ (\lambda, x, w) \,\middle|\, \begin{array}{c} (A - \lambda B)x \le 0, (A - \lambda B)^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, x \ge 0,\ w \ge 0,\ \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Экстремальные допустимые значения *λ*

$$\underline{\lambda} = \min \left\{ \lambda : \left(A - \lambda B \right) x \le 0, \left(x, e^m \right) = 1, x \ge 0 \right\}$$

$$\overline{\lambda} = \max \left\{ \lambda : \left(A - \lambda B \right)^T w \ge 0, \left(w, e^n \right) = 1, w \ge 0 \right\}$$

Экономическая интерпретация

$$\pi_i = -\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \lambda^* b_{ij}) \cdot x_j^* \quad \kappa_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lambda^* b_{ij}) \cdot w_i^* \quad \rho_{ij} = (b_{ij} - a_{ij} - \lambda^* b_{ij})$$

Численные методы

Функции *u(λ)* и *v(λ)*

$$u(\lambda) = \min_{x:\left(x,e^m\right)=1,\, x\geq 0} \max_{i=1,2,\ldots n} \sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij} - \lambda b_{ij}\right)x_j$$

$$v(\lambda) = \max_{w:\left(w,e^n\right)=1,\, w\geq 0} \min_{j=1,2,\ldots m} \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij} - \lambda b_{ij}\right)w_i$$

$$\min\left\{u : \left(A - \lambda B\right)x \leq u, \left(x, e^m\right) = 1,\ x \geq 0\right\} \tag{1}$$

$$\max\left\{v : \left(A - \lambda B\right)^T w \geq v, \left(w, e^n\right) = 1,\ w \geq 0\right\} \tag{2}$$

***Теорема 1**. Пусть* (A,B) *- модель Неймана, в которой:*

1) $(\forall i):(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} > 0)$ и $(\forall j):(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} > 0)$;

2) $\underline{\lambda}^{>} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \dfrac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}}$ и $\overline{\lambda}^{<} = \min\limits_{j=1,2,\ldots,m} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}}$;

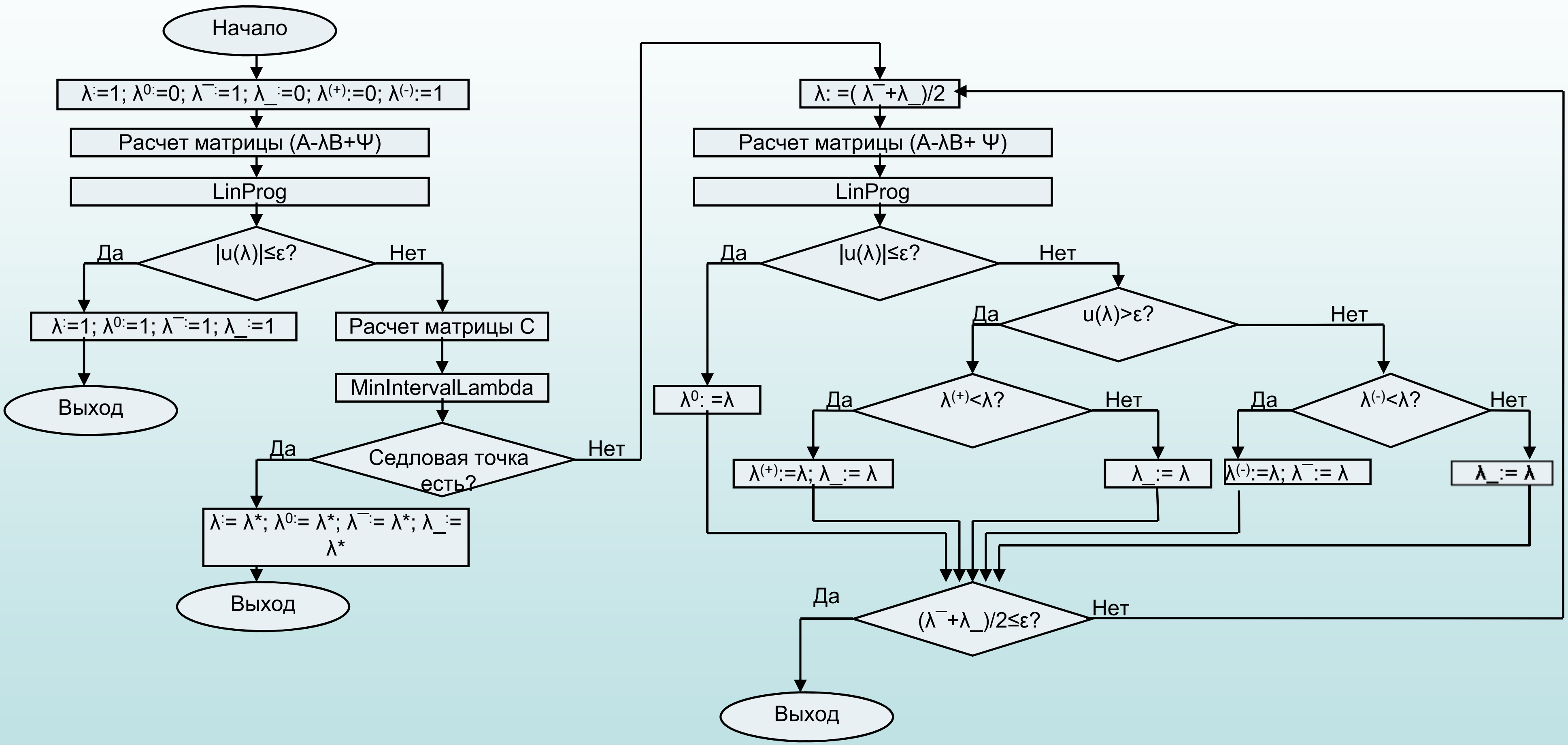
3) $\underline{\lambda}^{>} \geq \overline{\lambda}^{<}$.

Тогда в модели Неймана (A,B) *существуют положения равновесия* (λ, x, w)*, в которых* $\lambda \in [\underline{\lambda}^{>}, \overline{\lambda}^{<}]$*.*

Теорема 2. *Пусть* (A, B) − *модель Неймана; все элементы матрицы* B *являются ненулевыми;* G_C − *матричная игра с матрицей выигрышей* $C = [a_{ij}/b_{ij}]$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$; λ^* − *цена игры* G_C. *Тогда в модели Неймана* (A,B) *существует положение равновесия* (λ,x,w), *в котором* $\lambda = \lambda^*$.

Теорема 3. *Пусть* Г – *матричная игра с платежной матрицей* $(A\text{-}\lambda B)^{T}$, *пусть также* x^{*}, w^{*} – *оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно,* u^{*} – *цена игры* Г. *Тогда* (u^{*}, x^{*}) *и* (u^{*}, w^{*}) – *оптимальные решения задач* (1) *и* (2) *соответственно.*

Алгоритм нахождения параметров модели



Анализ интервальной неопределенности

$$\mathbf{A} = \left\{ \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right] \right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}} \qquad \mathbf{B} = \left\{ \left[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij} \right] \right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}}$$

$$\underline{\mathbf{A}} \triangleq \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \cdots & \underline{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{a}_{m1} & \cdots & \underline{a}_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} \triangleq \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mid}([\mathbf{A}]) = \mathrm{mid}([a_{ij}])_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

$$\mathrm{mid}([x]) \triangleq \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$

Теорема 4. *Пусть*

$$\tilde{A}=\beta_1\cdot\operatorname{mid}\mathbf{A}\in\mathbf{A},\;\; \tilde{B}=\beta_2\cdot\operatorname{mid}\mathbf{B}\in\mathbf{B};$$

$$\left(\lambda^*,x^*,w^*\right)=\arg\max_{\lambda,x,w\in D(\operatorname{mid}\mathbf{A},\operatorname{mid}\mathbf{B})}\lambda\;.$$

Тогда

$$\left(\frac{\lambda^*\beta_1}{\beta_2},x^*,w^*\right)=\arg\max_{\lambda,x,w\in D(\tilde{A},\tilde{B})}\lambda\;,$$

$$\tilde{r}=\frac{\beta_1}{\beta_2}(1-r^*)+1.$$

Теорема 5. *Пусть точечные матрицы* $(\tilde{A},\tilde{B})$ *удовлетворяют условиям*

1) $\tilde{A}\in\mathbf{A}$ *и* $\tilde{B}\in\mathbf{B}$*;*

2) $(\tilde{\lambda},\tilde{x},\tilde{w})=\arg\max\limits_{\lambda,x,w\in D(\tilde{A},\tilde{B})}\lambda$;

3) $(\bar{\lambda},\bar{x},\bar{w})=\arg\max\limits_{\lambda,x,w\in D(\bar{\mathbf{A}},\underline{\mathrm{B}})}\lambda$;

4) $(\underline{\lambda},\underline{x},\underline{w})=\arg\max\limits_{\lambda,x,w\in D(\underline{\mathbf{A}},\bar{\mathrm{B}})}\lambda$.

Тогда $\underline{\lambda}\le\tilde{\lambda}\le\bar{\lambda}$.

Спасибо за внимание