Оценка равновесия в модели фон Неймана

А.В. Панюков, А.Т. Латипова
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
Электронные адреса: pav@susu.ac.ru, alfas_chel@mail.ru

Аннотация

В работе исследуется проблема нахождения равновесия в модели фон Неймана (A, B) в точечной и интервальной постановках.

Для точечной модели фон Неймана предложены устойчивые численные методы определения положения равновесия, которые могут быть реализованы на вычислительных системах, использующих вычисления с плавающей точкой. В основе предложенных методов лежит сведение проблемы определения положения равновесия к решению соответствующих матричных игр.

Для интервальной модели фон Неймана показано, что в случае мультипликативной неопределенности как прямой, так и двойственный лучи фон Неймана определяются точечной моделью фон Неймана с матрицами центров интервалов, а интервал числа Фробениуса модели - двумя точечными задачами фон Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов.

1 Введение

Многоотраслевая модель экономики Дж. фон Неймана оказала большое влияние на теорию экономического роста и накопления капитала, дала толчок интенсивному развитию современной математической экономики [1], [2]. Однако, во многих публикациях, например в [3], модель фон Неймана определяется как невычислимая чисто теоретическая модель, а выход к практическим результатам осуществляется через модель Леонтьева, являющуюся частным случаем модели фон Неймана.

Следует заметить, что общность модели фон Неймана состоит в ее применимости не только к анализу многоотраслевой экономики, но и к другим проблемам, в частности, к проблеме формирования бюджета продаж в условиях ценовой диверсификации [4]-[7]. В связи с этим актуальным является развитие численных методов анализа модели фон Неймана, реализуемых на популярных коммерческих программных системах, таких как Excel, Matlab, Project Expert и 1С Бухгалтерия. В работе предложены устойчивые численные методы определения положения равновесия, которые могут быть реализованы на вычислительных системах, использующих вычисления с плавающей точкой. В основе предложенных методов лежит сведение проблемы определения положения равновесия к решению соответствующих матричных игр.

Численные значения элементов матриц затрат и выпуска в фоннеймановских моделях получают на основе статистики и экспертных оценок, поэтому они могут иметь неопределенность, которая, скорее всего, будет интервальной. В статье рассмотрена проблема нахождения равновесия в модели фон Неймана (A, B), когда известны лишь интервалы, которым принадлежат элементы матриц модели. Показано, что в случае мультипликативной неопределенности как прямой, так и двойственный лучи фон Неймана определяются моделью фон Неймана с матрицами центров интервалов, а интервал числа Фробениуса модели – двумя задачами фон Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов.

2 Положение равновесия в модели фон Неймана при точечных матрицах затрат и выпуска

Общим положением равновесия для модели Неймана (A, B), где A и B заданные $m \times n$ числовые матрицы затрат и выпуска с неотрицательными элементами ($A \geq 0,\ B \geq 0$), называют решение (λ, x, p) системы билинейных неравенств и уравнений

$$(A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0, \tag{1}$$

$$(A - \lambda B)^T p \geq 0,\ (p, e^n) = 1,\ p \geq 0. \tag{2}$$

Невырожденным положением равновесия рассматриваемой модели называют положение равновесия (λ, x, p), удовлетворяющее дополнительному условию

$$p^T A\, x > 0. \tag{3}$$

В данной работе мы ограничимся алгоритмами нахождения общего положения равновесия, т.е. решения (λ, x, p) системы (1)-(2).

Экстремальные допустимые значения λ могут быть найдены с помощью решения задач билинейной оптимизации

$$\underline{\lambda} = \min \left\{ \lambda \ :\ (A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0 \right\}, \tag{4}$$

$$\overline{\lambda} = \max \left\{ \lambda \ :\ (A - \lambda B)^T p \geq 0,\ (p, e^n) = 1,\ p \geq 0 \right\}. \tag{5}$$

Числа $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$ называют соответственно числом фон Неймана и числом Фробениуса модели фон Неймана. При этом число фон Неймана $\underline{\lambda}$ определяет максимальный темп сбалансированного роста, а число Фробениуса $\overline{\lambda}$ - минимальный темп сбалансированного роста и продуктивность модели [1], [2]. Векторы x,p в положении равновесия (λ, x, p) называют соответственно прямым и двойственным лучами фон Неймана, соответствующими значению λ .

Исходя из равенств (1), (2) и (5), для оценки продуктивности модели, т.е. нахождения числа Фробениуса $\overline{\lambda}$, а также характеристик устойчивого равновесия можно использовать следующую задачу билинейного программирования

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A,B)} \lambda, \tag{6}$$

$$D(A,B)=\left\{(\lambda,x,w)\;\middle|\;\begin{array}{c}(A-\lambda B)x\le 0,(A-\lambda B)^T w\ge 0,\\(x,e^m)=1,(w,e^n)=1,\\x\ge 0,w\ge 0,\lambda\ge 0\end{array}\right\} \tag{7}$$

Численные методы решения задачи (6)-(7) рассмотрены в работе [9]. Они базируются на вычислении корней монотонной функции

$$u(\lambda)=\min_{x:\,(x,e^m)=1,\,x\ge 0}\quad\max_{i=1,2,\dots n}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}-\lambda b_{ij}\right)x_j$$

или

$$v(\lambda)=\max_{w:\,(w,e^n)=1,\,w\ge 0}\quad\min_{j=1,2,\dots m}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}-\lambda b_{ij}\right)w_i$$

при различных значениях λ. При фиксированном значении λ значения функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ равны значениям следующих взаимно двойственных задач линейного программирования

$$\min\left\{u\;:\;(A-\lambda B)\,x\le u,\;(x,e^m)=1,\;x\ge 0\right\}, \tag{8}$$

$$\max\left\{v\;:\;(A-\lambda B)^T w\ge v,\;(w,e^n)=1,\;w\ge 0\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, упомянутый алгоритм требует решения последовательности задач линейного программирования (8) и/или (9).

Легко заметить, что при значениях λ близких к искомым, т.е. когда $u(\lambda),\;v(\lambda)\;\to 0$, соответствующие задачи становятся вырожденными, что влечет невозможность их решения с помощью традиционных средств, использующих вычисления с плавающей точкой.

Для устойчивого нахождения корней функций $u(\lambda)$ и $u(\lambda)$ можно применить численные методы решения матричных игр. Основанием этого является

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{\Gamma}$ – матричная игра с платежной матрицей $(A-\lambda B)^T$, пусть также $x^*,\;p^*$ – оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно, u^* – цена игры $\mathbf{\Gamma}$. Тогда $(u^*,\;x^*)$ и $(u^*,\;p^*)$ – оптимальные решения задач (8) и (9) соответственно.*

Доказательство справедливости теоремы тривиально. Оно является следствием игровой интерпретации двойственности в линейном программировании.

Для решения матричных игр известны вполне устойчивые итерационные алгоритмы. Применение для решения матричных игр линейного программирования основано на том, что игра $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ с платежной матрицей $\overline{(A-\lambda B)^T}=(A-\lambda B)^T+\gamma I$, где I – $(n\times m)$-матрица, все элементы которой равны 1, $\gamma=\min\{a_{ij}-\lambda b_{ij}\;:\;\;i=1,\dots,m,\;\;j=1,\dots,n\}$, имеет значение $\overline{u^*}=u^*+\gamma$ и оптимальные решения $\overline{x^*}=x^*,\;\;\overline{p^*}=p^*$, а соответствующие задачи линейного программирования для игры с платежной матрицей $\overline{(A-\lambda B)^T}$ имеют невырожденное оптимальное решение.

3 Оценка положения равновесия при интервальных матрицах затрат и выпуска

Далее обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ матрицы затрат и выпуска, элементами которых являются числовые интервалы. Через $\mathrm{mid}\mathbf{A}$ и $\mathrm{mid}\mathbf{B}$ обозначим точечные матрицы, элементами которых являются центры интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Через $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ обозначим точечные матрицы, состоящие из нижних границ интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно; а через $\overline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ - точечные матрицы, состоящие из верхних границ интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно [8].

Теорема 2. *Пусть β_A и β_B удовлетворяют условиям*

$$\tilde{A} = \beta_A \cdot \mathrm{mid}\mathbf{A} \in \mathbf{A},\ \ \tilde{B} = \beta_B \cdot \mathrm{mid}\mathbf{B} \in \mathbf{B};$$

пусть также

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})} \lambda\ .$$

Тогда

$$\left(\frac{\lambda^* \beta_A}{\beta_B},\ x^*,\ w^*\right) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda\ .$$

Доказательство. Задача определения параметров равновесия для модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$ имеет вид

$$(\tilde{\lambda}^*, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\tilde{\lambda}, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \tilde{\lambda}, \tag{10}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\tilde{\lambda}, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})x \le 0, (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \tilde{\lambda} \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Сделав в задаче (10)-(11) замену переменной $\widetilde{\lambda} = \lambda\beta_A/\beta_B$, получим:

$$(\lambda^*, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda, \tag{12}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})x \le 0, \\ (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{13}$$

Переписав задачу (12)-(13) с учетом условия теоремы в терминах матриц $\mathrm{mid}\mathbf{A}$ и $\mathrm{mid}\mathbf{B}$, будем иметь равносильную задачу

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathrm{B})} \lambda, \tag{14}$$

$$D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathrm{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda\mathrm{mid}\mathrm{B})x \le 0, \\ (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda\mathrm{mid}\mathrm{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{15}$$

Полученная задача совпадает с задачей нахождения параметров (λ^*, x^*, w^*) для точечной модели фон Неймана $(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})$. Учитывая сделанную замену переменных, приходим к заключению, что кортеж $(\lambda^*\beta_A/\beta_B,\ x^*,\ w^*)$ является положением равновесия для модели фон Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Теорема доказана.

Таким образом, если неопределенность является мультипликативной и состоит в незнании коэффициентов пропорциональности β_A и β_B, то как прямой, так и двойственный луч фон Неймана могут быть найдены по матрицам центров интервалов.

Теорема 3. *Пусть точечные матрицы $(\tilde{A}, \tilde{B})$ удовлетворяют условию*

$$\tilde{A} \in \mathbf{A}, \tilde{B} \in \mathbf{B}; \tag{16}$$

пусть также

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda; \tag{17}$$

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})} \lambda; \tag{18}$$

$$(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathrm{B}})} \lambda. \tag{19}$$

Тогда $\underline{\lambda} \le \tilde{\lambda} \le \overline{\lambda}$.

Доказательство. Из условия (16) следует, что для любых

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

выполняется:

$$\overline{a}_{ij} \ge \tilde{a}_{ij},\ \overline{b}_{ij} \ge \tilde{b}_{ij},\ \underline{a}_{ij} \le \tilde{a}_{ij},\ \underline{b}_{ij} \le \tilde{b}_{ij}. \tag{20}$$

Откуда следует возможность представления

$$\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A' = \overline{\mathbf{A}} - A'', \quad \tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B' = \tilde{\mathbf{B}} - B'',$$

где

$$A' = \left(a'_{ij}\right) = \left(\tilde{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}\right), \quad B' = \left(b'_{ij}\right) = \left(\tilde{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}\right),$$

$$A'' = \left(a''_{ij}\right) = \left(\overline{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij}\right), \quad B'' = \left(b''_{ij}\right) = \left(\overline{b}_{ij} - \tilde{b}_{ij}\right),$$

причем все элементы матриц A', B', A'' и B'' неотрицательны.

Сделав замену матриц $\tilde{A} = \overline{\mathbf{A}} - A''$ и $\tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B'$ в задаче (17)будем иметь эквивалентную задачу

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{(\lambda, x, w) \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda, \tag{21}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))x \le 0, \\ (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\} \tag{22}$$

Из неотрицательности матриц A'' и B' второго неравенства в (22) следует справедливость неравенства
$$(\overline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\underline{\mathbf{B}})^T \tilde{w} \geq 0.$$
Откуда следует, что для любого $j = 1, 2, \ldots, m$
$$\tilde{\lambda} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}\tilde{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij}\tilde{w}_i} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}\overline{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij}\overline{w}_i} \tag{23}$$
Последнее неравенство в данной цепочке следует из условия (18) теоремы, в соответствии с которым
$$\overline{w} = \arg \max_{w:(w,e^n)=1, w\geq 0} \quad \min_{j=1,2,\ldots,m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij}w_i}.$$
Поскольку
$$\overline{\lambda} = \max_{w:(w,e^n)=1, w\geq 0} \quad \min_{j=1,2,\ldots,m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij}w_i},$$
то имеем: $\tilde{\lambda} \leq \overline{\lambda}$. Неравенство $\tilde{\lambda} \geq \underline{\lambda}$ доказывается аналогично. Действительно, после замены матриц $\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A'$ и $\tilde{B} = \overline{\mathbf{B}} - B''$ в задаче (17) получим задачу
$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{(\lambda,x,w)\in D(\tilde{A},\tilde{B})} \lambda, \tag{24}$$
$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))x \leq 0, \\ (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))^T w \geq 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \geq 0, \\ w \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right\}. \tag{25}$$
Из неотрицательности матриц A' и B'' b и первого неравенства в (25) следует $(\underline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\overline{\mathbf{B}})\tilde{x} \leq 0$, поэтому для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство:
$$\tilde{\lambda} \geq \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}\tilde{x}_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\tilde{x}_j} \geq \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}\underline{x}_{\,j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\underline{x}_{\,j}} \tag{26}$$
Последнее неравенство в данной цепочке следует из того, что
$$\underline{x} = \arg \min_{x:(x,e^m)=1, x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}x_j}.$$

Поскольку

$$\underline{\lambda} = \min_{x:(x,e^m)=1, x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij} x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \bar{b}_{ij} x_j},$$

то $\tilde{\lambda} \geq \underline{\lambda}$. Теорема доказана.

4 Заключение

В точечной модели фон Неймана поиск положения равновесия следует осуществлять с помощью устойчивых численных методов решения матричных игр.

Модель фон Неймана ($\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B}$) определяет как прямой, так и двойственный луч фон Неймана для модели фон Неймана с мультипликативной неопределенностью в элементах матриц затрат A и выпуска B.

Число Фробениуса модели фон Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с интервальными матрицами затрат и выпуска ограничено сверху числом Фробениуса для модели фон Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, снизу - числом Фробениуса для модели фон Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, где $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ – точечные матрицы верхних границ интервалов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ – точечные матрицы нижних границ интервалов этих же матриц.

Список литературы

[1] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику : Учеб. пособие для спец. «Прикл. математика». – М. : Наука, 1984. – 293 с.

[2] Альсевич В.В. Введение в математическую экономику. Конструктивная теория. – М : Едиториал УРСС, 2005. – 256 с.

[3] Цисарь И.Ф. Компьютерное моделирование экономики / И.Ф. Цисарь, В.Г. Нейман. – М.: Диалог-МИФИ, 2002. – 304 с.

[4] Латипова А.Т. Модель оптимизации бюджетирования для предприятий минерально-сырьевого комплекса // Стратегия развития минерально-сырьевого комплекса в XXI веке. Материалы международной конференции. Москва-Бишкек. М : Изд-во РУДН, 2004. – С. 206–208.

[5] Латипова А.Т. Модель оптимизации ценовой стратегии для задач бюджетирования // Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций». Материалы конференций (Новосибирск, 28 июня – 2 июля 2004). Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2004. – С. 206.

[6] Латипова А.Т. Ценовая диверсификация в бюджетировании // Экономика и менеджмент: проблемы и перспективы: Труды Международной научно-практической конференции. 6–11 июня 2005 года. СПб : Изд-во Политехн. ун-та, 2005. – С. 562–566.

[7] Латипова А.Т., Панюков А.В. Оптимизация бюджета продаж // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Рынок: Теория и практика. Челябинск : ЮУрГУ, 2006. - Вып. 4, N 15(170). – С. 116–120.

[8] Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – М. : Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.

[9] Латипова А.Т. Математическая модель бюджетирования // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й региональной молодежной конференции. Екатеринбург : УрО РАН, 2006. – С. 391–397.