ДОПУСКОВОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СО СВЯЗАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шарая Ирина Александровна

Институт вычислительных технологий СО РАН

Новосибирск

Цель – представить метод нахождения допускового множества решений для интервальной системы линейных алгебраических уравнений.

План

1. Постановка задачи.
2. Более общая задача — $\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$.
3. Мн-ва $\mathcal{A}$ с простым решением общей задачи.
4. Особенности интервальной постановки.
5. Примеры решения задач.

Обозначения

Жирный прямой шрифт — для интервалов.

Каллиграфический шрифт — для множеств.

Нижний индекс — для обозначения проекции множества на координатное подпространство.

Пример. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, $\qquad \mathcal{A}_{ij} = \{A_{ij} \mid A \in \mathcal{A}\}$,

$$\mathcal{A}_{i:} = \{(A_{i1}, \ldots, A_{in}) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

$$\mathcal{S} + \mathcal{Q} = \{s + q \mid s \in \mathcal{S},\ q \in \mathcal{Q}\},$$

$$\mathcal{S} \odot \mathcal{Q} = \{sq \mid s \in \mathcal{S},\ q \in \mathcal{Q}\},$$

$$(\boldsymbol{A} \odot X)_{ij} \neq (\boldsymbol{A}X)_{ij} = \sum_k \boldsymbol{A}_{ik}X_{kj}.$$

ДМР ИСЛАУ

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}, \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m}$$

ИСЛАУ	это	семейство СЛАУ
$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$		$Ax = b,\ A \in \boldsymbol{A},\ b \in \boldsymbol{b}$

Допусковое множество решений (ДМР) ИСЛАУ

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (\forall A \in \boldsymbol{A})\,(\exists b \in \boldsymbol{b})\,(Ax = b) \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \right\}.$$

ДМР ИСЛАУ со связанными коэффициентами

ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связанными коэффициентами

$$Ax = b, \quad b \in \boldsymbol{b}, \ A \in \mathcal{A}, \ \text{где } \mathcal{A} \subset \boldsymbol{A}.$$

Связь на коэффициенты

$$\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{m\times n} \ \text{ такое, что } \mathcal{A} = \boldsymbol{A} \cup \mathcal{G}.$$

ДМР ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связью $\mathcal{G}$ на коэффициенты

$$\begin{aligned}\Xi_{tol}(\boldsymbol{A} \cup \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) \ := \ & \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \big(\forall A \in (\boldsymbol{A} \cup \mathcal{G})\big)\,(\exists b \in \boldsymbol{b})\,(Ax = b) \right\} \\ = \ & \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (\boldsymbol{A} \cup \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \right\}.\end{aligned}$$

Поиск ДМР ИСЛАУ
и ДМР ИСЛАУ со связанными коэффициентами
— частные случаи задачи

$$\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b},$$

где $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ – ограниченное,
$\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$.

Свойства включения $\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$

1) замена множества $\mathcal{A}$ на замыкание его выпуклой оболочки не изменяет множество решений:

$$\mathcal{A} \odot x \;\subseteq\; \boldsymbol{b} \quad\Longleftrightarrow\quad (\mathrm{cl\,conv}\,\mathcal{A}) \odot x \;\subseteq\; \boldsymbol{b}$$

2) множество решений равно пересечению множеств решений строк

$$\mathcal{A} \odot x \;\subseteq\; \boldsymbol{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathop{\&}_{i} \; (\mathcal{A}_{i:} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i)$$

Свойства включения $\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$

3) Если $\mathcal{A}$ выпуклый многогранник, и $\widetilde{\mathrm{vert}}\,\mathcal{A}$ – конечное множество точек, для которого $\mathcal{A} = \mathrm{conv}(\widetilde{\mathrm{vert}}\,\mathcal{V})$, тогда

$$\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \iff (\widetilde{\mathrm{vert}}\,\mathcal{A}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Алгоритм решения включения $\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$

```
System := ∅;

DO  i := 1 TO m
    A_{i:} := cl conv(A_{i:});
    IF (A_{i:} выпуклый многогранник)
    THEN  Найти vert~(A_{i:});
          добавить соотв. блок в System;
    ELSE  «Метод не позволяет точно решить задачу»;
          STOP;
    ENDIF
END DO

Решить System
```

Характеристика алгоритма

Общая схема простая, но сложные операции:

- взятие $\operatorname{cl}\operatorname{conv}(\mathcal{A}_{i:})$,
- проверка, является ли множество выпуклым многогранником,
- поиск $\widetilde{\mathrm{vert}}$.

Решение системы двойных линейных неравенств условимся считать простой процедурой.

Простые случаи общей задачи

Если $\mathcal{A}$ задано в **параметрической** форме

и для каждого i выполнено одно из условий:

- $\mathcal{A}_{i:}$ — выпуклое многогранное множество,
- $\mathcal{A}_{i:}$ — зонотоп,
- $\mathcal{A}_{i:} = \bigotimes\limits_{j} \mathcal{A}_{ij}$ и ограниченное,

тогда операции алгоритма реализуются просто.

Простые случаи общей задачи

Параметрическая форма:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} A(s), \qquad \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^p,$$

$A_{ij}(s)$ – выражения от параметров s.

Преимущества:

- проекция $\mathcal{A}_{i:}$ ищется тривиально —

$$\mathcal{A}_{i:} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} A_{i:}(s).$$

Простые случаи общей задачи

▼ $\mathcal{A}_{i:}$ — выпуклый многогранник:

$$\sum_{V \in \operatorname{vert} \mathcal{A}} \lambda_V V, \quad \text{где} \quad \lambda_V \geq 0, \quad \sum_{V \in \operatorname{vert} \mathcal{A}} \lambda_V = 1.$$

Преимущества:

- взятие $\operatorname{cl} \operatorname{conv}(\mathcal{A}_{i:})$,
- проверка, является ли множество выпуклым многогранником,
- поиск $\widetilde{\mathrm{vert}}$.

Простые случаи общей задачи

▼ $\mathcal{A}_i$ — зонотоп (образ интервала $\boldsymbol{s} \in \mathbb{IR}^p$ при линейном отображении и сдвиге):

$$A_{ij}(s) = \sum_{l=1}^{p} C_{ijl} s_l + D_{ij}, \qquad s \in \boldsymbol{s}.$$

Преимущества:

- $\mathcal{A}_{i:}$ – выпуклый многогранник,
- $\operatorname{cl}\operatorname{conv}(\mathcal{A}_{i:}) = \mathcal{A}_{i:}$,
- $\widetilde{\operatorname{vert}}(\mathcal{A}_{i:}) := \bigcup_{s \in \operatorname{vert} \boldsymbol{s}} A_{i:}(s)$.

Простые случаи общей задачи

▼ $\mathcal{A}_{i:} = \bigotimes_j \mathcal{A}_{ij}$ и огран. (выражения A_{ij} при разных j зависят от нересекающихся наборов параметров)

Преимущества:

Обозначим $s^{(j)}$ – вектор параметров выражения A_{ij},

$\mathcal{S}^{(j)}$ – множество значений $s^{(j)}$.

- $\mathrm{cl}\,\mathrm{conv}(\mathcal{A}_{i:}) = \bigotimes_j \left[\inf_{\mathcal{S}^{(j)}} A_{ij}\big(s^{(j)}\big),\ \sup_{\mathcal{S}^{(j)}} A_{ij}\big(s^{(j)}\big) \right]$,
- выпуклый многогранник (т.к. $\mathcal{A}_{i:}$ – ограничено),
- $\widetilde{\mathrm{vert}}\big(\square(\mathcal{A}_{i:})\big)$ найти просто, если просто найти экстремумы $A_{ij}\big(s^{(j)}\big)$.

Примеры решения задач

$$\boldsymbol{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Параметрический вид:

$\boldsymbol{A}_{i:}$ — выпуклый многогранник
с множеством вершин $\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})$.

Решение:

$$\mathop{\&}_{i} \Big(\big(\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i \Big).$$

Примеры решения задач

$$(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall B \in \boldsymbol{B})\ (AX + XB \in \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times m},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{IR}^{n\times n},\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{m\times n},\ X \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\boldsymbol{A} \odot X + X \odot \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$$

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}} a_{ik}X_{kj} + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}} b_{lj}X_{il} + (a_{ii}+b_{jj})X_{ij} \in \boldsymbol{C}_{ij}$$

Решение: $$\mathop{\&}_{i,j} \left(\begin{array}{l} \Bigl(\mathrm{vert}(\boldsymbol{A}_{i,\neq i})\Bigr) \odot X_{\neq i,j} + \\ X_{i,\neq j} \odot \Bigl(\mathrm{vert}(\boldsymbol{B}_{\neq j,j})\Bigr) + \ \subseteq \boldsymbol{C}_{ij} \\ \Bigl(\mathrm{vert}(\boldsymbol{A}_{ii}+\boldsymbol{B}_{jj})\Bigr) \odot X_{ij} \end{array} \right).$$

Особенности интервальной постановки

Общая задача	Интервальная задача
$\mathcal{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$	$(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$

Как решать интервальную задачу?

1) Перейти от интервальной задачи к общей:

одно мн-во — в параметрическом виде,
другое мн-во — условие на параметры

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ — в том же параметрическом виде,
но с новой областью значений параметров.

2) Решить общую задачу.

Примеры решения задач

$$(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$\mathcal{G}$ – симметричные матрицы в $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Параметрический вид $\mathcal{G}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$: $a_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij} \cap \boldsymbol{A}_{ji}$

$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij} := \boldsymbol{A}_{ij} \cap \boldsymbol{A}_{ji}, \;\; (\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{i:}$

Решение: $\underset{i}{\&} \Big(\big(\mathrm{vert}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{i:}) \big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i \Big).$

Примеры решения задач

$$(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

матрицы мн-ва $\mathcal{G}$:

симметричные кососимметричные циклические Тёплица Ганкеля Гурвица	$\Bigg\}$ • все коэффициенты разбиты на группы, • коэф-ты группы пропорциональны, • в группе нет двух коэф-в из одной стоки.

$(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{i:}$, где $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{i:}$ – макс. по вкл. матрица в $\boldsymbol{A}$, с условием пропорциональности компонент $\mathcal{G}$.

Решение: $$\mathop{\&}_{i} \Big(\big(\mathrm{vert}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i \Big).$$

Примеры решения задач

Интервальная модель межотраслевого баланса
с условием рентабельности отраслей:

$$(E - \boldsymbol{A}) \odot x \subseteq \boldsymbol{y},$$

где x – объем производства,
$\boldsymbol{y}$ – объем конечного продукта,
$\boldsymbol{A}$ – матрица коэффициентов прямых затрат.

Параметрический вид $(E - \boldsymbol{A})$: параметры $a_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}$.
$\mathcal{G}$ в виде условий: $\sum_k a_{kj} \leq 1$ – рентабельность отрасли j.

$$\mathop{\&}_{j} \begin{cases} \sum_k a_{kj} \leq 1, \\ a_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad \tilde{\boldsymbol{A}}_{ij} := \boldsymbol{A}_{ij} \cap \left[0, 1 - \sum_{k \neq i} \underline{A}_{kj}\right].$$

Решение: $$(E - \tilde{\boldsymbol{A}}) \odot x \subseteq \boldsymbol{y}.$$