

УТОЧНЕНИЕ ГРАНИЦ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Рощина Е.Л.

Хакасский Технический Институт (г. Абакан)
– филиал Сибирского Федерального Университета

Основные понятия

- Интервальной системой линейных уравнений, зависящих от параметров, называется система вида

$$A(k) \cdot x = b(k) , \quad (1)$$

где $A(k)$ - матрица размера $n \times n$, элементы матрицы и правой части зависят от m интервальных параметров, $k \in k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, то есть $k_i = [\underline{k}_i, \overline{k}_i]$.

- Решением системы (1) называется множество

$$\mathcal{X} = \left\{ x \mid A(k) \cdot x = b(k), \quad k_i \in [\underline{k}_i, \overline{k}_i], \quad i = 1, \dots, m \right\}$$

Уточнение границ решения

Рассмотрим общий случай интервальной задачи.

- Пусть дано некоторое операторное уравнение

$$L(u, k) = 0, \quad (2)$$

где u – неизвестное решение,

$k \in K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ - вектор параметров.

- Предположим, существует оператор решения

$$u = T(k) \quad . \quad (3)$$

Уточнение границ решения

- Алгоритм уточнения границ интервального решения состоит в следующем: ищем вектор $k^* \in k$ такой, что k^* , ширина вектора $k^* \subset k$ должна быть минимальной.

Алгоритм уточнения

Начальный шаг:

Задаем $k^* := \tilde{k}$. Здесь

$$\tilde{k}_j = \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если } u'_j \geq 0, \\ k_j, & \text{если } u'_j \leq 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если } 0 \in u'_j \end{cases} ,$$

где

$$u'_j = \frac{\partial u}{\partial k_j} = \frac{\partial T}{\partial k_j}(k), j = 1, \dots, m .$$

Алгоритм уточнения

Последующие шаги -

DO WHILE ($\exists j : \text{wid } \tilde{k}_j \neq 0 \text{ and } 0 \notin u_j$)

1. $u'_j = \frac{\partial T}{\partial k_j}(k^*), j = 1, \dots, m$

2. $\tilde{k}_j = \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если } u'_j \geq 0, \\ k_j, & \text{если } u'_j \leq 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если } 0 \in u'_j \end{cases}$

3. $k^* := \tilde{k}$

END DO

Применение анализа чувствительности для уточнения границ решения систем линейных уравнений

Сначала строим интервальные матрицы

\mathbf{A}_r^1 и \mathbf{A}_r^2 и векторы \mathbf{b}_r^1 и \mathbf{b}_r^2

согласно правилам:

$$\mathbf{A}_{rij}^1 = \begin{cases} a_{ij}(\underline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \geq 0 \\ a_{ij}(\overline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \leq 0 \\ \mathbf{a}_{ij} \quad \text{в противном случае} \end{cases} \quad \mathbf{A}_{rij}^2 = \begin{cases} a_{ij}(\overline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \geq 0 \\ a_{ij}(\underline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \leq 0 \\ \mathbf{a}_{ij} \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_{rij}^1 = \begin{cases} b_{ij}(\underline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \geq 0 \\ b_{ij}(\overline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \leq 0 \\ \mathbf{b}_{ij} \quad \text{в противном случае} \end{cases} \quad \mathbf{b}_{rij}^2 = \begin{cases} b_{ij}(\overline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \geq 0 \\ b_{ij}(\underline{k}_s), \text{ если } \frac{\partial x}{\partial k_s} \leq 0 \\ \mathbf{b}_{ij} \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Применение анализа чувствительности для уточнения границ решения систем линейных уравнений

- Теперь нужно решить две системы:

$$A_r^1 y_r = b_r^1 \quad (4)$$

и

$$A_r^2 z_r = b_r^2 \quad (5)$$

Используя интервальные методы, решим уравнения (4) и (5) для $r=1, \dots, n$, находим верхнюю и нижнюю границы каждой компоненты \underline{x}_r и \bar{x}_r .

Численный пример

Рассмотрим краевую задачу

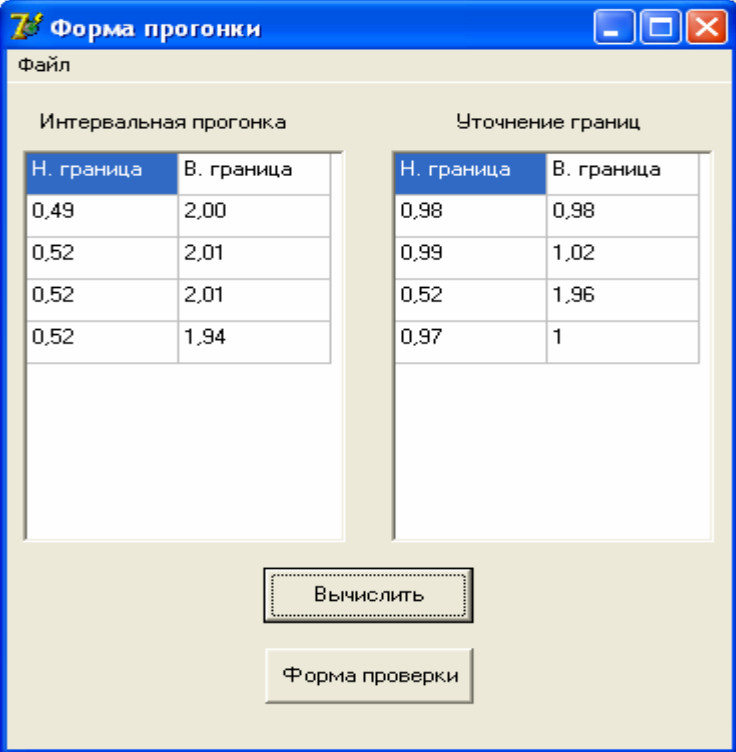
$$\begin{aligned}Lu &= (-pu') + qu = f, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0,\end{aligned}$$

в которой параметры имеют неопределённость

$$p \in [2,4], \quad q \in [1,2], \quad f \in [1,2]$$

Численный пример

- Вычислим внешнюю оценку множества решений интервальным методом прогонки и с помощью предложенного алгоритма уточнения. Полученные результаты представлены на рисунке



Файл

Интервальная прогонка

Н. граница	В. граница
0,49	2,00
0,52	2,01
0,52	2,01
0,52	1,94

Уточнение границ

Н. граница	В. граница
0,98	0,98
0,99	1,02
0,52	1,96
0,97	1

Вычислить

Форма проверки

Спасибо за внимание!