Об «испанской версии» формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем*

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск
Электронный адрес: `shary@ict.nsc.ru`

Аннотация

В работе исследуется версия формального (алгебраического) подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем уравнений, в основу которой положена известная из математического анализа теорема Миранды. Исследуются способы её численной реализации, условия применимости и качество оценивания.

Ключевые слова: интервальные линейные уравнения, множество решений, внешняя оценка, теорема Миранды, формальный (алгебраический) подход.

1 Постановка задачи

Предметом рассмотрения в нашей работе являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{n2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{nn}x_n & = & \boldsymbol{b}_n \end{array}\right. \tag{1}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и интервальными правыми частями $\boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $n\times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный n-вектор. Системы (1)–(2) мы понимаем как семейства точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с матрицами $A \in \boldsymbol{A}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b}$.

Множеством решений интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\,\bigr\}, \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы России» (грант №НШ-931.2008.9)

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ (см., к примеру, [1, 3, 16]). Часто его называют также *объединённым множеством решений*, поскольку для интервальных уравнений существуют другие множества решений [5, 19], более адекватные тем или иным конкретным практическим ситуациям. Мы не рассматриваем их в нашей работе, и потому называем (3) сокращённым термином «множество решений».

Известно, что множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является многогранным (полиэдральным) множеством, в общем случае невыпуклым, но его пересечение с каждым из ортантов пространства $\mathbb{R}^n$ выпукло. Точное и полное описание множества решений практически невозможно в силу его огромной трудоёмкости, а с другой стороны и не нужно в большинстве реальных постановок задач. Чаще достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами, имеющими меньшую конструктивную сложность.

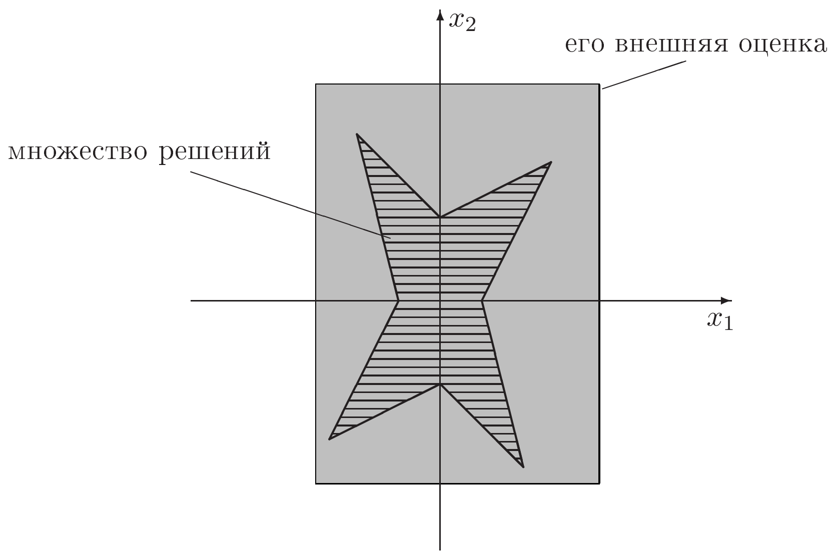

Рис. 1: Внешнее оценивание множества решений интервальным вектором-брусом.

Всюду далее интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ предполагается неособенной, т. е. содержащей только неособенные (невырожденные) точечные матрицы. Тогда множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ системы (1)–(2) ограничено, и в этой работе мы будем решать задачу его внешнего интервального оценивания:

> Найти (по-возможности, меньший) брус $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Наша система обозначений следует неформальному международному стандарту на обозначения в интервальном анализе [13]. В частности, интервалы и интервальные объекты выделяются жирным шрифтом, а подчёркивание и надчёркивание означают взятие нижнего и верхнего концов интервалов.

2 Практическая иллюстрация

В качестве практического примера возникновения рассматриваемой нами постановки упомянем задачу расчёта режимов электроэнергетических сетей. Одной из основных рабочих моделей подобных сетей являются системы линейных уравнений «узловых напряжений»

$$YU = J,$$

где Y — квадратная матрица узловых проводимостей,
J — вектор задающих токов,
U — вектор искомых узловых напряжений.
В результате изменения токов нагрузки и коммутационных переключений в электрической схеме сети коэффициенты этой системы и элементы вектора правой части изменяются, так что мы не можем больше считать их имеющими определённые вещественные значения. Сложившаяся ситуация адекватно описывается интервальной системой линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{Y}U = \boldsymbol{J},$$

где $\boldsymbol{Y}$ — интервальная матрица узловых проводимостей, $\boldsymbol{J}$ — интервальный вектор [4]. При этом нам нужно найти или оценить извне границы изменения решения U в условиях, когда матрица системы и правая часть изменяются в пределах предписанных им интервалов.

3 Теорема Миранды и основы интервальной техники

В математическом анализе хорошо известна

Теорема Больцано-Коши. *Если функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на интервале $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри интервала существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.*

Далее в работе мы будем существенно опираться на многомерный аналог этого результата, опубликованный более чем столетием позже в заметке [14] —

Теорема Миранды. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \bigl(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)\bigr)^\top$ — функция, непрерывная на брусе $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, и для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место*

$$F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \underline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \cdot F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \overline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \le 0,$$

т. е. области значений компонент функции $F(x)$ на любых противоположных гранях бруса $\boldsymbol{X}$ имеют разные знаки. Тогда на брусе $\boldsymbol{X}$ существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.

Характерной особенностью теоремы Миранды является специальная форма множества, на котором утверждается существование нуля функции: оно должно быть брусом со сторонами, параллельными координатным осям, т.е. интервальным вектором. Кроме того, для полноценного применения теоремы Миранды нужно уметь находить области значений функций на подобных множествах.

Удобное средство для решения этой задачи предоставляют методы интервального анализа. Задача об определении области значений функции на том или ином подмножестве области её определения (эквивалентная задаче оптимизации) в интервальном анализе принимает специфическую форму задачи о вычислении так называемого *интервального расширения функции*.

Определение *Пусть D — непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Интервальная функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}D \to \mathbb{IR}^m$ называется интервальным продолжением вещественной функции $f : D \to \mathbb{R}^m$, если $\boldsymbol{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in D$.*

Определение [3, 15, 16]. *Пусть D непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Интервальная функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}D \to \mathbb{IR}^m$ называется интервальным расширением вещественной функции $f : D \to \mathbb{R}^m$, если*

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *— интервальное продолжение $f(x)$,*
2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *монотонна по включению, т.е.* $\boldsymbol{x}' \subseteq \boldsymbol{x}'' \;\Rightarrow\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')$ *на $\mathbb{I}D$.*

Таким образом, если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ — интервальное расширение функции $f(x)$, то для области значений f на брусе $\boldsymbol{X} \subset D$ мы получаем следующую внешнюю (с помощью объемлющего множества) оценку: $\{\, f(x) \mid x \in \boldsymbol{X} \,\} \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$. Эффективное построение интервальных расширений функций — это важнейшая задача интервального анализа, поиски различных решений которой продолжаются и в настоящее время. Самым первым результатом в этом направлении является утверждение, которое часто называют «основной теоремой интервальной арифметики»:

Теорема [1, 3, 15, 16]. *Если для рациональной функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на брусе $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{IR}^n$ определён результат $\boldsymbol{f}^\natural(\boldsymbol{x})$ подстановки вместо её аргументов интервалов их изменения $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики, то*

$$\{\, f(x) \mid x \in \boldsymbol{x} \,\} \;\subseteq\; \boldsymbol{f}^\natural(\boldsymbol{x}),$$

т.е. $\boldsymbol{f}^\natural(\boldsymbol{x})$ содержит множество значений функции $f(x)$ на $\boldsymbol{x}$.

Нетрудно понять, что по отношению к рациональной функции $f(x)$ интервальная функция $\boldsymbol{f}^\natural(\boldsymbol{x})$, о которой идёт речь в Теореме, является интервальным расширением. Оно называется *естественным интервальным расширением* и вычисляется совершенно элементарно.

Использование естественного интервального расширения подчас даёт весьма грубые оценки областей значений функций, но если в выражении для рациональной функции f каждая переменная входит не более одного раза в первой степени, то естественное интервальное расширение даёт точную область значений функции. Это условие выполнено, в частности, для линейных функций.

Если $F(x) = Ax - b$ для $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ и n-вектора $b = (b_i)$, то в качестве немедленного следствия теоремы Миранды и основной теоремы интервальной арифметики получаем следующее условие существования решения системы линейных уравнений в интервальном брусе $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$: если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \tag{4}$$

или

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0, \tag{5}$$

где арифметические операции понимаются в $\mathbb{IR}$, то брус $\boldsymbol{X}$ содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$.

Заметим, что выписанные пары соотношений (4) и (5) являются взаимнодополнительными, т.е. если выполняется одна пара неравенств, то другая ложна. Неравенства (4) имеют место при $a_{ii} \geq 0$, а неравенства (5) — при $a_{ii} \leq 0$.

Для дальнейшего преобразования выписанных соотношений (4)–(5) имеет смысл выйти из классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ в полную интервальную арифметику Каухера $\mathbb{KR}$, обладающую более удобными алгебраическим свойствами (см. оригинальную статью [12] или изложение основ этой арифметики в [5, 6, 19]).

4 Полная интервальная арифметика Каухера

Напомним, что элементами полной интервальной арифметики Каухера являются пары действительных чисел $[\alpha, \beta]$, не обязательно связанные соотношением $\alpha \leq \beta$, так что $\mathbb{IR} \subset \mathbb{KR}$. Обычные интервалы из $\mathbb{IR}$ называются при этом *правильными*, а интервалы $[\alpha, \beta]$, для которых $\alpha > \beta$, — *неправильными*, тогда как α и β называют нижним (или левым) и верхним (или правым) концами интервала $[\alpha, \beta]$ соответственно.

Важнейшее место в наших построениях занимает операция дуализации интервала —

$$\operatorname{dual}[\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,] \;:=\; [\,\overline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,],$$

которая меняет местами концы интервала, «переворачивая» его.

Теоретико-множественное упорядочение «по включению» на $\mathbb{IR}$ естественно распространяется и на $\mathbb{KR}$. Именно, для интервалов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{KR}$ полагают

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{x}} \geq \underline{\boldsymbol{y}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}.$$

Например, $[3, 1] \subseteq [2, 2] = 2$.

Сложение и умножение на число определяются в $\mathbb{KR}$ следующим образом

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \;:=\; \left[\,\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}\,\right],$$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} \;:=\; \begin{cases} [\,\lambda\,\underline{\boldsymbol{x}}, \lambda\,\overline{\boldsymbol{x}}\,], & \text{если } \lambda \geq 0, \\ [\,\lambda\,\overline{\boldsymbol{x}}, \lambda\,\underline{\boldsymbol{x}}\,], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Всякий элемент $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$ имеет, следовательно, единственный противоположный, обозначаемый $\operatorname{opp}\boldsymbol{x}$, причём из соотношения $\boldsymbol{x} + \operatorname{opp}\boldsymbol{x} = 0$ следует, что

$$\operatorname{opp}\boldsymbol{x} = [\,-\underline{\boldsymbol{x}}, -\overline{\boldsymbol{x}}\,].$$

Для краткости мы будем обозначать сложение с противоположным элементом

$$\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{y} \;:=\; \boldsymbol{x} + \operatorname{opp}\boldsymbol{y}.$$

Кроме того, любой интервал $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$, не содержащий нуля и не содержащийся в нём (т.е. такой, что $\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}} > 0$), имеет единственный алгебраически обратный, который мы обозначаем $\operatorname{inv}\boldsymbol{x}$. При этом из соотношения $\boldsymbol{x} \cdot \operatorname{inv}\boldsymbol{x} = 1$ следует

$$\operatorname{inv}\boldsymbol{x} = \left[1/\underline{\boldsymbol{x}}, 1/\overline{\boldsymbol{x}}\right].$$

Топология на многомерных интервальных пространствах $\mathbb{IR}^n$ и $\mathbb{KR}^n$ может быть определена двумя способами. Стандартный способ — введение обычной метрики

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;:=\; \max\{\|\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}\|, \|\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}\|\}, \qquad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{KR}^n, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая векторная норма на $\mathbb{R}^n$. Для пространства $\mathbb{IR}^n$ эта метрика совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как брусами в $\mathbb{R}^n$. Но иногда бывает полезно работать с векторнозначным расстоянием — *мультиметрикой*, — которая вводится на $\mathbb{KR}^n$ как

$$\operatorname{Dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;:=\; \begin{pmatrix} \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) \\ \vdots \\ \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+. \tag{7}$$

5 Оценки решений линейных систем

Итак, пусть $a_{ii} \geq 0$, так что имеет место первая пара соотношений (4). Нетрудно понять, что она эквивалентна

$$\overline{\Big(a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \leq 0 \qquad \text{и} \qquad \underline{\Big(a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \geq 0,$$

или

$$\overline{\Big(a_{ii}\cdot\overline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \leq 0 \qquad \text{и} \qquad \underline{\Big(a_{ii}\cdot\underline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \geq 0. \tag{8}$$

С учётом знака a_{ii} справедливы равенства

$$a_{ii}\cdot\underline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i = \underline{a_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i} \qquad \text{и} \qquad a_{ii}\cdot\overline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i = \overline{a_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i,$$

так что (8) равносильно

$$\overline{\Big(a_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \leq 0 \qquad \text{и} \qquad \underline{\Big(a_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \geq 0.$$

Рассмотрим теперь случай $a_{ii} \leq 0$, при котором имеет место вторая пара соотношений (5). Её можно переписать в виде

$$\underline{\Big(a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \overline{\Big(a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \leq 0,$$

или

$$\underline{\Big(a_{ii}\cdot\overline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \overline{\Big(a_{ii}\cdot\underline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\Big)} - b_i \leq 0. \tag{9}$$

Поскольку $a_{ii} \le 0$, то справедливы равенства

$$a_{ii} \cdot \overline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i} = \underline{a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i} \qquad \text{и} \qquad a_{ii} \cdot \underline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i} = \overline{a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i},$$

так что (9) равносильно

$$\underline{\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j \ne i} a_{ij} \boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \overline{\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j \ne i} a_{ij} \boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \le 0.$$

Как, можно видеть, эти соотношения совпадают с теми, что были получены для $a_{ii} \ge 0$. Поэтому в целом, вне зависимости от знака a_{ii}, имеем в полной интервальной арифметике

Предложение 1. *Если брус* $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n)^\top$ *удовлетворяет условиям*

$$\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j \ne i} a_{ij} \boldsymbol{X}_j \right) - b_i \ \subseteq\ 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{10}$$

то он содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$ *с* $n \times n$*-матрицей* $A = (a_{ij})$ *и* n*-вектором правой части* $b = (b_i)$.

6 Оценки для интервальных линейных систем

Рассмтрим теперь интервальную линейную систему уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Коль скоро она является семейством точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, то, основываясь на соотношении (10) и монотонности интервальных арифметических операций по включению, нетрудно выписать достаточный признак того, что брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$:

Предложение 2. *Пусть* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ *— интервальная матрица,* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ *и* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ *— интервальные векторы. Если для каждого* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *имеет место включение*

$$\left(\boldsymbol{a}_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j \ne i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{X}_j \right) - \boldsymbol{b}_i \ \subseteq\ 0,$$

то брус $\boldsymbol{X}$ *содержит множество решений* $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Доказательство. По определению интервальных арифметических операций в $\mathbb{KR}$

Напомним теперь следующее

Определение *Формальное решение интервальной системы уравнений*

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{b}_1, \\ F_2(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{b}_2, \\ \ \vdots \quad \vdots \qquad \ddots\ \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ F_m(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{b}_m, \end{array} \right.$$

с интервальными параметрами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ *— это интервальный вектор* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$, *обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики и прочих операций, входящих в выражения для* F_i.

Таким образом, формальное решение интервальных систем — это объект, соответствующий обычному математическому понятию решения уравнения, но рассматриваемому в экзотической алгебраической системе — интервальной арифметике, в качестве которой могут выступать в зависимости от рассматриваемой задачи либо классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$, либо полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, либо какая-то другая интервальная алгебраическая система.

Заменяя включение в Предложении 2 на равенство и ривлекая понятие формального решения, мы можем придать этому результату следующий менее общий, но более удобный в вычислительном отношении вид:

Предложение 3. *Пусть интервальный оператор* $\mathcal{S} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$, *зависящий от параметров* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ *и* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$, *задаётся покомпонентно как*

$$\mathcal{S}_i(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Правильное формальное решение интервальной системы уравнений

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0 \tag{12}$$

содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Например, для интервальной линейной системы Хансена [11]

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}, \tag{13}$$

множество решений которой изображено на Рис. 2, формальное решение соответствующего уравнения (11)–(12) есть интервальный вектор $([-120, 90], [-60, 240])^\top$, являющийся оптимальной (наилучшей) внешней оценкой множества решений.

В общем случае рассматриваемый подход даёт, конечно, не столь точные оценки, и мы подробно рассмотрим вопрос о качестве оценивания в §7 нашей работы.

Итак, нахождение внешней оценки множества решений исходной ИСЛАУ свелось к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений. Задача нахождения формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача решения некоторого уравнения, хотя и рассматриваемая в непривычной алгебраической системе $\mathbb{KR}$. Соответствующий общий подход к задачам оценивания множеств решений, сводящий исходную постановку к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений, называется, как известно, *формальным подходом* [6, 7] (иногда его называют также формально-алгебраическим подходом). Это весьма общая методика, которая может реализовываться различными конкретными способами в зависимости от выбора вспомогательной системы уравнений и численного метода поиска её формального решения. Отличительной особенностью формального подхода является его универсальность:

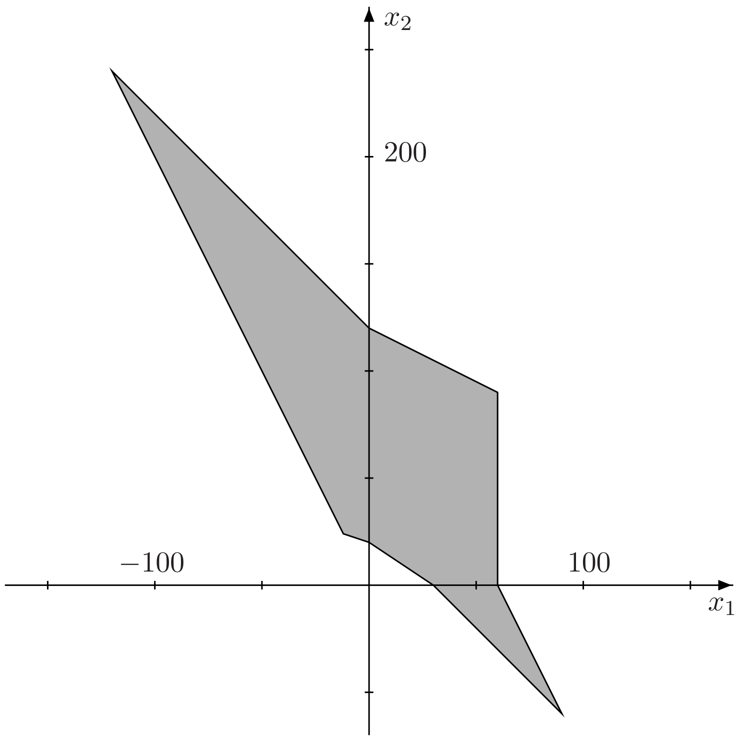

Рис. 2: Множество решений интервальной системы Хансена.

как общая теоретическая схема подхода, так и соответствующие численные методы с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания даже более общих, чем объединённое, множеств решений (см. [5, 19]).

Традиционной основой формального подхода к задаче внешнего оценивания множества решений (3) служит следующий результат, который мы приводим в современной и несколько расширенной формулировке.

Теорема Апостолатоса-Кулиша [8]. *Если матрица* $\boldsymbol{G} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *такова, что спектральный радиус матрицы, составленной из модулей её элементов, меньше единицы, т. е.* $\rho(|\boldsymbol{G}|) < 1$, *то интервальная линейная система уравнений* $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$ *имеет единственное формальное решение в* $\mathbb{IR}^n$. *Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса*

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{h}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

при любом начальном векторе $\boldsymbol{x}^{(0)}$ *и является внешней интервальной оценкой множества решений* $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists G \in \boldsymbol{G})(\exists h \in \boldsymbol{h})(\, x = Gx + h \,) \,\}$ *рассматриваемой интервальной системы.*

Приведение исходной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ к рекуррентному виду $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$ выполняется обычно различными преобразованиями, которые часто расширяют множество решений.

Что касается результата Предложения 3, то он не является абсолютно новым и ранее уже был получен в работе [18], но в несколько другой форме и с помощью длинных и малоочевидных рассуждений, использующих технику так называемого «модального интервального анализа». Выше мы привели другой, прозрачный вывод этого факта. Будем называть впредь результат Предложения 3 «испанской версией» формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений ИСЛАУ.

7 Вычисление формальных решений

Для нахождения формального решения интервальной системы уравнений (11)–(12) в работе в [17] предлагаются стационарные итерационные методы типа Якоби, основанные на выделении из матрицы ИСЛАУ диагональной компоненты

Кроме того, в [17] рассматривается возможность сведения задачи нахождения формального решения интервальных систем к оптимизационной задаче минимизации невязки.

Мы пойдём другим путём и воспользуемся техникой погружения в евклидово пространство двойной размерности [6, 19]. Его идея состоит в том, чтобы перейти из «нелинейного» интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство, только в котором и применимы многие математические концепции, составляющие основу современных вычислительных методов (в частности, дифференцирование и выпуклость). Этот переход может быть осуществлён с помощью любого взаимнооднозначного отображения $\mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ (так называемого *погружения*), и его конкретный выбор обычно диктуется соображениями удобства и наиболее аккуратного сохранения свойств рассматриваемых объектов.

Напомним, что отображение $\mathrm{sti} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, задаваемое правилом

$$\mathrm{sti}\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = (-\underline{\boldsymbol{x}}_1, -\underline{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, -\underline{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n),$$

называется *стандартным погружением* интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Стандартное погружение индуцирует на $\mathbb{R}^{2n}$ отображение $\mathfrak{S}$, такое что

$$\mathfrak{S} \;=\; \mathrm{sti} \circ \mathcal{S} \circ \mathrm{sti}^{-1}, \tag{14}$$

и нахождение формального решения уравнений в $\mathbb{KR}^n$ может быть заменено на решение в $\mathbb{R}^{2n}$ уравнения $\mathfrak{S}(x) = 0$ с индуцированным отображением $\mathfrak{S}$.

Индуцированное отображение $\mathfrak{S}$, очевидно, непрерывно по x и по параметрам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ в силу непрерывности операции дуализации и интервальных арифметических операций сложения, вычитания и умножения в $\mathbb{KR}^n$. Наиболее важное свойство отображения $\mathfrak{S}$ даёт

Предложение 3. *Если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, то индуцированное отображение $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, определённое посредством* (14), *является порядково выпуклым в $\mathbb{R}^{2n}$ относительно покомпонентного упорядочения векторов «$\leq$».*

Доказательство: Пусть $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}'' \in \mathbb{KR}^n$. Тогда для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_i\big(\lambda\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''_i\big) \;&=\; \boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\big(\lambda\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''_i\big) + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\big(\lambda\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''_i\big) - \boldsymbol{b}_i \\
&\subseteq\; \lambda\,\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\,\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}''_i \;+ \\
&\qquad\qquad \sum_{j\neq i}\big(\lambda\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}''_i\big) - \boldsymbol{b}_i \\
&=\; \lambda\Big(\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}'_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{b}_i\Big) \;+ \\
&\qquad\qquad (1-\lambda)\Big(\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}''_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}''_i - \boldsymbol{b}_i\Big)
\end{aligned}$$

Порядковая выпуклость отображения $\mathfrak{S}$ влечёт существование его субдифференциала $\partial\mathfrak{S}$ всюду в $\mathbb{R}^{2n}$. Можно показать и большее: $\mathfrak{S}$ является полиэдральным отображением. Следовательно, имеет смысл применить для нахождения решений индуцированного уравнения $\mathfrak{S}(x) = 0$ в $\mathbb{R}^{2n}$ субдифференциальный метод Ньютона, развитый автором для задач подобного сорта и успешно зарекомендовавший себя (см., в частности, [6]).

Реализация и численные эксперименты показывают, что и в рассматриваемом случае субдифференциальный метод Ньютона работает хорошо и позволяет находить формальные решения уравнения (11)–(12) за небольшое конечное число итераций. В частности, он качественно превосходит по своей эффективности стационарные итерационные методы типа Якоби, предложенные для решения аналогичной задачи в [17]. К примеру, для системы Хансена (13) точное формальное решение уравнения (11)–(12) вычисляется субдифференциальным методом Ньютона всего за 3 (три) итерации.

8 Условия существования правильного формального решения

К сожалению, даже когда множество решений ИСЛАУ непусто, формальное решение уравнения (11)–(12) часто не существует или не является правильным. В последнем случае оно не может быть проинтерпретировано согласно Предложению 3. Например, для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [2,3] & [0,1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}, \tag{15}$$

матрица которой получена перестановкой местами строк в матрице системы Хансена (13), а правая часть такая же, как и в (13), формальным решением системы (11)–(12) является неправильный интервальный вектор $([240,0],[60,-240])^\top$ (субдифференциальный метод Ньютона успешно находит его за 3 итерации). Исследуем это затруднение более тщательно.

Представим матрицу интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ в виде суммы диагональной и внедиагональной частей, т. е. как

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D},$$

где $\boldsymbol{C}$ — матрица, в которой диагональ нулевая, а внедиагональные элементы совпадают с соответствующими элементами $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{D}$ — диагональная интервальная матрица, элементы которой равны соответствующим диагональным элементам $\boldsymbol{A}$.

Тогда введённый в Предложении 3 интервальный оператор $\mathcal{S}$ может быть записан как

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b},$$

а уравнение (11)–(12) примет вид

$$\boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x - \boldsymbol{b} = 0.$$

Добавим к обеим его частям по величине $\operatorname{opp}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x)$, алгебраически противоположной к $\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x$, что равносильно переносу этого члена «с противоположным знаком» в другую часть уравнения. Получаем

$$\operatorname{opp}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x) = \boldsymbol{C}x - \boldsymbol{b},$$

или, умножая обе части на -1 и учитывая, что $-\mathrm{opp}\,(\cdot) = \mathrm{dual}\,(\cdot)$,

$$(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{D})\,x = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}x.$$

Предположим, что диагональные элементы в матрице $\boldsymbol{A}$ не содержат нулей. Из этого следует существование алгебраически обратной матрицы для $(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{D})$. Коль скоро $\mathrm{inv}\,\mathrm{dual}\,(\cdot) = (\cdot)^{-1}$, то эта алгебраически обратная $\mathrm{inv}\,(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{D})$ совпадает с обычной обратной интервальной матрицей $\boldsymbol{D}^{-1}$, и потому приходим к следующей равносильной форме записи уравнения (11)–(12):

$$x = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}x). \tag{16}$$

Системы уравнений подобного вида, в которых неизвестная переменная выделена в одной из частей «в чистом виде», называются системами уравнений в *рекуррентном виде* (аналогичную форму имеют операторные уравнения второго рода).

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — правильное формальное решение интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (16). Беря радиус от обеих частей равенства

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr),$$

получим

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^* = \mathrm{rad}\,\Bigl(\boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr)\Bigr).$$

Но $\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}) \geq |\boldsymbol{G}|\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{H}$ для любых интервальных матриц $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$ согласованных размеров (см. [1, 16]), и поэтому

$$\mathrm{rad}\,\Bigl(\boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr)\Bigr) \geq |\boldsymbol{D}^{-1}|\cdot\mathrm{rad}\,\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr) = |\boldsymbol{D}^{-1}|\cdot\bigl(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} + \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*)\bigr).$$

Если все компоненты вектора свободных членов $\boldsymbol{b}$ имеют ненулевую ширину — $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} > 0$, — то справедливо неравенство

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^* \;>\; |\boldsymbol{D}^{-1}|\cdot\mathrm{rad}\,\bigl(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr) \;\geq\; |\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|\cdot\mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^*.$$

Оно означает, в частности, что $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^* > 0$, т. е. что правильное формальное решение в этом случае является телесным брусом, все компоненты которого имеют ненулевую ширину.

Кроме того, мы можем отметить, что для положительного вектора $y = \mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^*$ и для неотрицательной матрицы $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$ имеет место $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|\,y < y$. Отсюда в силу свойств неотрицательных матриц следует [9, 16], что спектральный радиус матрицы $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$ должен быть строго меньше 1. В свою очередь, это равносильно тому, что матрица $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}$ является так называемой H-матрицей. Это необходимое условие существования правильного формального решения системы (16) при $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} > 0$.

Напомним, что точечная $n \times n$-матрица A называется *M-матрицей*, если она представима в виде $sI - P$, где $P \geq 0$ и $s > \rho(P)$. *Компарантом* матрицы $A = (\,a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ будем называть матрицу того же размера, обозначаемую $\langle A\rangle$, такую что

$$ij\text{-й элемент } \langle A\rangle := \begin{cases} |\,a_{ij}|, & \text{если } \; i = j, \\ -|\,a_{ij}|, & \text{если } \; i \neq j. \end{cases}$$

Операция взятия компаранта матрицы — это принудительное назначение «нужных» знаков для элементов матрицы, положительных для диагональных элементов и отрицательных для внедиагональных. В частности, если $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — вещественная M-матрица, то $\langle A\rangle = A$. Матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ назовём *H-матрицей*, если её компарант является M-матрицей. Матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется *интервальной H-матрицей*, если каждая вещественная матрица $A \in \boldsymbol{A}$ является H-матрицей.

Для любого интервала $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}$ справедливо

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{a}}\right| = \langle \boldsymbol{a}\rangle^{-1}, \quad \text{если} \;\; 0 \notin \boldsymbol{a}.$$

По этой причине для диагональной матрицы $\boldsymbol{D}$ имеет место соотношение

$$\left|\boldsymbol{D}^{-1}\right| = \langle \boldsymbol{D}\rangle^{-1},$$

позволяющее сделать вывод о том, что $\langle \boldsymbol{D}\rangle^{-1}\,|\boldsymbol{C}|\,y < y$ для некоторого положительного вектора $y \in \mathbb{R}^n$. В силу неотрицательности $\langle \boldsymbol{D}\rangle^{-1}$ можем домножить на эту матрицу обе части полученного неравенства, прийдя к $\langle \boldsymbol{D}\rangle y > |\boldsymbol{C}|\,y$. Ну а это равносильно $\langle \boldsymbol{A}\rangle y > 0$, что является одним из признаков H-матриц

Отметим, что H-матрицы — это специальный класс матриц, у которых диагональ преобладает над остальной, внедиагональной, частью матрицы в спектральном смысле [9, 16]. Класс H-матриц включает в себя в качестве собственного подмножества все матрицы с диагональным преобладанием, но не исчерпывается ими. Другой пример H-матриц — это неособенные треугольные матрицы, верхние или нижние [16].

Таким образом, парадокс начала этого параграфа получает следующее исчерпывающее объяснение: матрица системы Хансена является интервальной H-матрицей, тогда как в ИСЛАУ (15) матрица таковой уже не является.

9 Качество оценивания

Полученное нами представление уравнения (11)–(12) в рекуррентном виде (16) позволяет ответить на вопросы о соотношении результата Предложения 3 с другими версиями формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений, а также о качестве этого оценивания. Сравнивая этот результат с уравнением (16), можем видеть, что новая версия формального подхода, представленная в Предложении 2, является, по существу, очень удачно скомпонованной вариацией известного подхода, в которую неявно встроена процедура приведения системы к рекуррентному виду.

Оценки близости формального решения системы

$$x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h},$$

к оптимальной (точной) оценке её множества решений были исследованы многими авторами, из которых следует отметить Д. Гея [10] и А. Ноймайера [16]. Наиболее сильный результат в этом направлении принадлежит А. Ноймайеру [16] и заключается в следующем. Если $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ — формальное решение системы уравнений

$$x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h},$$

$\Xi = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists G \in \boldsymbol{G})(\exists h \in \boldsymbol{h})(\, x = Gx + h\,)\,\}$ — её множество решений, и для некоторой матричной нормы величина $\eta := \|\boldsymbol{G}\|$ такова, что $\eta < 1$, то для согласованной векторной нормы справедливо неравенство

$$\|\mathrm{Dist}\left(\square\Xi,\, \boldsymbol{x}^*\right)\| \;\leq\; \frac{2\eta}{1-\eta}\cdot \|\mathrm{rad}\,(\square\Xi)\|. \tag{17}$$

Пользуясь методикой Ноймайера из [16], можно показать, что для формального решения интервальной системы (11)–(12) или равносильной ей (16) имеет место оценка, аналогичная (17), которая означает, что оценка точности «испанской версии» формального подхода не хуже, чем у традиционной, т.е. имеет первый порядок точности в зависимости от размеров множества решений.

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* – Москва: Мир, 1987.

[2] *Интервальный анализ и его приложения.* – Веб-сайт `http://www.nsc.ru/interval`

[3] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.

[4] Манусов В.З., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ в линейных задачах электротехники // Информационно-оперативный материал (интервальный анализ) / Препринт №6 ВЦ СО АН СССР. – Красноярск, 1988. – С. 29–31.

[5] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // *Известия Академии Наук. Теория и системы управления.* – 1997. – №3. – С. 51–61.

[6] Шарый С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии.* – 1998. – Т. 3, №2. – С. 67–114.

[7] Шарый С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 2002. – Т. 8, №2. – С. 567–610.

[8] Apostolatos N., Kulisch U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // *Electron. Rechenanl.* – 1968. – Bd. 10. – S. 73–83.

[9] Berman A., Plemmons R.J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* – New York: Academic Press, 1979.

[10] Gay D.M. Solving interval linear equations // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 858–870.

[11] Hansen E. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / E. Hansen, ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.

[12] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // *Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis) / G. Alefeld, R.D. Grigorieff, eds. Computing Supplement 2.* – Wien: Springer, 1980. – P. 33–49.

[13] Kearfott R.B., Nakao V., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // *Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск-Северобайкальск, 2–8 июля 2005 г. Том 4 «Интервальный анализ».* – Иркутск: ИСЭМ, 2005. – С. 107–113.

[14] Miranda C. Un' osservatione su un teorema di Brouwer // *Bollet. Unione Mat. Ital. Serie II.* – 1940. – T. 3. – C. 5–7.

[15] Moore R.E. *Methods and applications of interval analysis.* – Philadelphia: SIAM, 1979.

[16] Neumaier A. *Interval methods for systems of equations.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[17] Sainz M.A., Gardeñes E., Jorba L. Formal solution to systems of interval linear or non-linear equations // *Reliable Computing.* – 2002. – Vol. 8. – P. 189–211.

[18] Sainz M.A., Gardeñes E., Jorba L. Interval estimations of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // *Reliable Computing.* – 2002. – Vol. 8. – P. 283–305.

[19] Shary S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // *Reliable Computing.* – 2002. – Vol. 8, No. 5. – P. 321–418. (Электронная версия статьи доступна на `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf`)