ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

современное состояние и перспективы

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН

Определение

Интервальный анализ —
раздел вычислительной математики, посвящённый
учёту ошибок округления при проведении расчётов
на цифровых ЭВМ . . .

«Математический Энциклопедический Словарь»
(Москва: Советская Энциклопедия, 1988)

Интервалы

Интервалы

$$[1,2], \qquad [1000,1003], \qquad \ldots$$

Интервалы

$$[1, 2], \qquad [1000, 1003], \qquad \ldots$$

$$\big(\,[1, 2],\ [1000, 1003]\,\big)$$

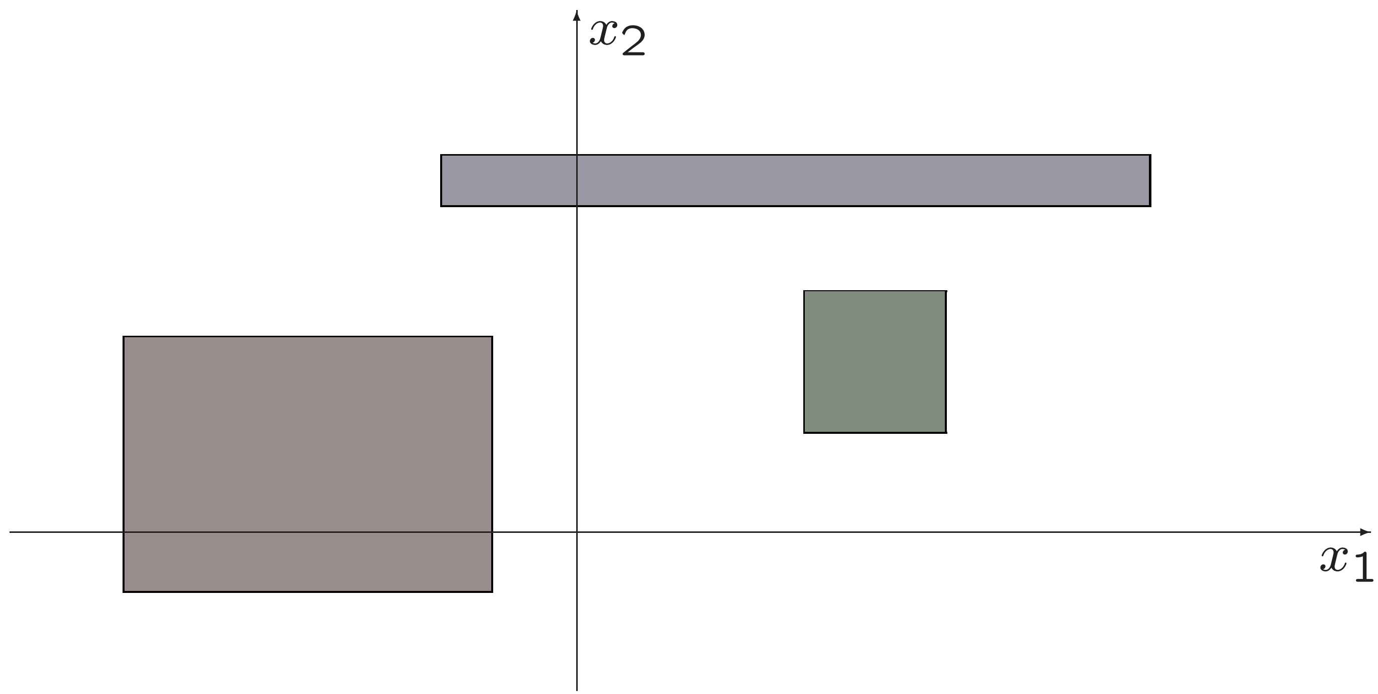
$$\begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1000, 1003] \end{pmatrix}$$

Интервалы

$$[1,2], \qquad [1000,1003], \qquad \ldots$$

$$\big([1,2],\ [1000,1003] \big)$$

$$\begin{pmatrix} [1,2] \\ [1000,1003] \end{pmatrix}$$



Интервалы
как средство учёта погрешностей вычислений

$x \in [1.1, 1.2]$ $\qquad$ $y \in [5.3, 5.4]$

$$x + y \in \ ?$$

Интервалы
как средство учёта погрешностей вычислений

$$x \in [1.1, 1.2] \qquad\qquad y \in [5.3, 5.4]$$

$$x + y \in [6.4, 6.6] = [1.1 + 5.3, 1.2 + 5.4]$$

Интервалы
как средство учёта погрешностей вычислений

$$x \in [1.1, 1.2] \qquad\qquad y \in [5.3, 5.4]$$

$$x + y \in [6.4, 6.6] = [1.1 + 5.3, 1.2 + 5.4]$$

Аналогично и с другими арифметическими операциями ...

Интервалы
как средство учёта погрешностей вычислений

$$x \in [1.1, 1.2] \qquad\qquad y \in [5.3, 5.4]$$

$$x + y \in [6.4, 6.6] = [1.1 + 5.3, 1.2 + 5.4]$$

Аналогично и с другими арифметическими операциями ...

Результаты такого вычисления погрешностей
можно использовать далее
в цепочке вычислений!

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

— образована интервалами $\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \subset \mathbb{R}$ так, что

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} = \Big\{ x \star y \mid x \in \boldsymbol{x},\ y \in \boldsymbol{y} \Big\} \qquad \text{для} \qquad \star \in \{ +, -, \cdot, / \}$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \Big[\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}} \Big]$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \Big[\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}} \Big]$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \Big[\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\} \Big]$$

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \Big[1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}} \Big] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0$$

Характеристики интервалов

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{x}}) \qquad \text{— середина}$$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}) \qquad \text{— радиус}$$

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}} \qquad \text{— ширина}$$

$$|\boldsymbol{x}| = \max\{\, |\underline{\boldsymbol{x}}|, |\overline{\boldsymbol{x}}| \,\} \qquad \text{— абсолютное значение}$$

Расстояние

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\Big\{\, |\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}|,\ |\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}| \,\Big\}$$

Естественное интервальное расширение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — рациональная функция от аргументов $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$.

Если для некоторого бруса $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ определён результат $\boldsymbol{f}_{nat}(\boldsymbol{x})$ подстановки вместо аргументов функции $f(x)$ интервалов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики, то

$$\{ f(x) \mid x \in \boldsymbol{x} \} \ \subseteq \ \boldsymbol{f}_{nat}(\boldsymbol{x}),$$

т.е. $\boldsymbol{f}_{nat}(\boldsymbol{x})$ содержит множество значений функции $f(x)$ на $\boldsymbol{x}$.

Интервальные матрично-векторные операции

Сумма (разность) двух интервальных матриц одного размера образована суммами (разностями) элементов операндов.

Произведение $\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{Z} = (\,\boldsymbol{z}_{ij})$ матриц $\boldsymbol{X} = (\,\boldsymbol{x}_{ij})$ и $\boldsymbol{Y} = (\,\boldsymbol{y}_{ij})$ таково, что

$$\boldsymbol{z}_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{x}_{ik}\boldsymbol{y}_{kj}.$$

Топология на интервальном пространстве $\mathbb{IR}^n$ определяется метрикой

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;:=\; \max\{\|\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\|, \|\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}\|\},$$

где $\|\cdot\|$ — векторная норма на $\mathbb{R}^n$.

Истоки интервального анализа

R.C. Young
Algebra of many-valued quantities // *Mathematische Annalen.* – 1931. – Bd. 104. – S. 260–290.

M. Warmus
Calculus of approximations // *Bull. Acad. Polon. Sci.* – 1956. – Vol. 4, №5. – P. 253–259.

T. Sunaga
Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // *RAAG Memoirs.* – 1958. – Vol. 2. – P. 547–564.

R.E. Moore
Interval Analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

Истоки интервального анализа

В.М. Брадис
Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближёнными числами // *Известия Тверского педагогического института.* – 1927. – Вып. 3.

В.М. Брадис
Средства и способы элементарных вычислений. – Москва: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1948.

Л.В. Канторович
О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал.* – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701-709.

Н.Н. Яненко

. . . .

Интервалы
как средство решения задач оптимизации

С помощью интервальной техники можем оценивать области значений функций

$$\mathrm{range}_{\boldsymbol{X}} f := \{\, f(x) \mid x \in \boldsymbol{X} \,\}$$

Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \supseteq \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^1$

$$\mathrm{range}_{\boldsymbol{X}} f \;=\; \Bigl[\, \min_{x\in\boldsymbol{X}} f(x),\ \max_{x\in\boldsymbol{X}} f(x) \,\Bigr].$$

. . . другая переформулировка задач оптимизации

и математического программирования

Интервальное расширение функций

Определение

Интервальная функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ называется *интервальным расширением* вещественной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, если

1) $\boldsymbol{f}(x) = f(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n$,

2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ монотонна по включению.

$\Longrightarrow$ внешняя оценка области значений

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \;\supseteq\; \{\, f(x) \mid x \in \boldsymbol{x} \,\}$$

Центрированная форма интервального расширения

$$\boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x}, \tilde{x}) \;=\; f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}, \tilde{x})(\,\boldsymbol{x}_i - \tilde{x}_i),$$

где $\tilde{x} = (\,\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ — фиксированный «центр»,

$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}, \tilde{x})$ — интервалы, зависящие от $\tilde{x}$ и $\boldsymbol{x}$.

$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}, \tilde{x})$ могут быть интервальными оценками $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ на $\boldsymbol{x}$,

но возможны и другие способы их определения

Точность интервального оценивания

— критическим образом зависит от ширины бруса оценивания

Для естественного интервального расширения

$$\mathrm{dist}\left(\ \boldsymbol{f}_{nat}(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})\ \right) \ \leq\ C\,\|\mathrm{wid}\ \boldsymbol{x}\|$$

Для центрированной формы

$$\mathrm{dist}\left(\ \boldsymbol{f}_{c}(\boldsymbol{x}, \tilde{x}), f(\boldsymbol{x})\ \right) \ \leq\ 2\,(\mathrm{wid}\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \tilde{x}))^{\top} \cdot |\,\boldsymbol{x} - \tilde{x}\,|$$

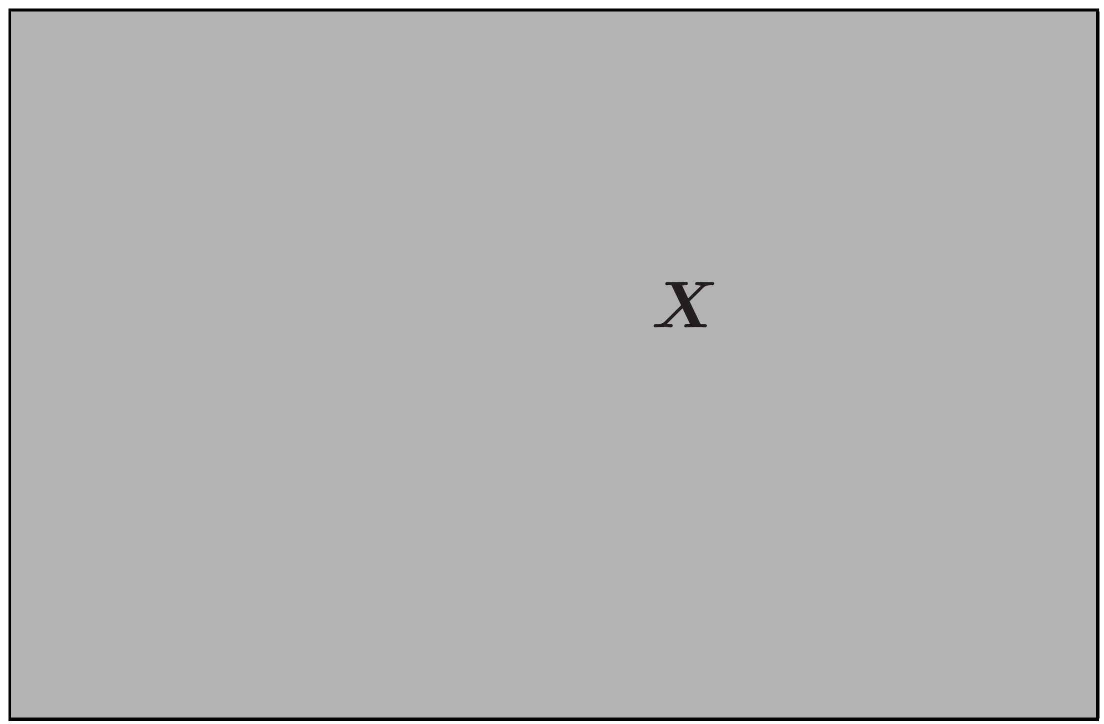
Задача глобальной оптимизации

— найти глобальный минимум вещественнозначной функции $F : \mathbb{R}^n \supset \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ на прямоугольном брусе $\boldsymbol{X}$ со сторонами, параллельными координатным осям:

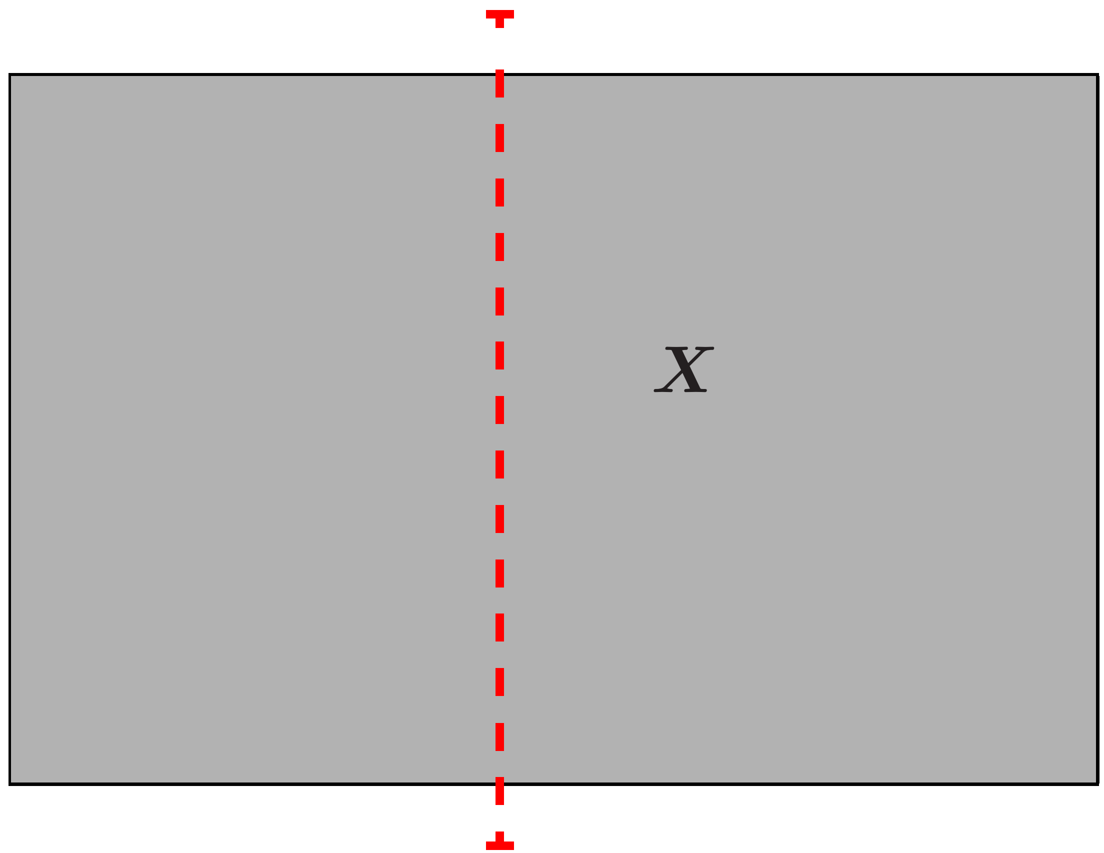
$$\boxed{\text{найти} \quad \min_{x\in\boldsymbol{X}} F(x)}$$

$\underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}$ — оценка искомого минимума снизу

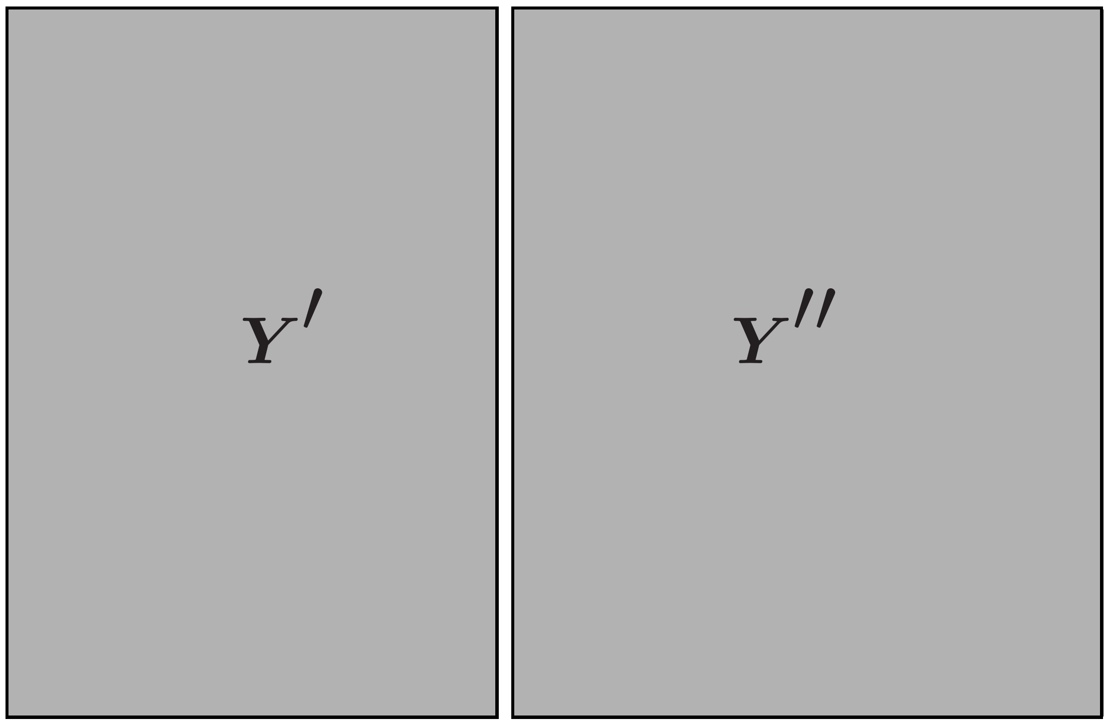
Принудительное дробление



Принудительное дробление

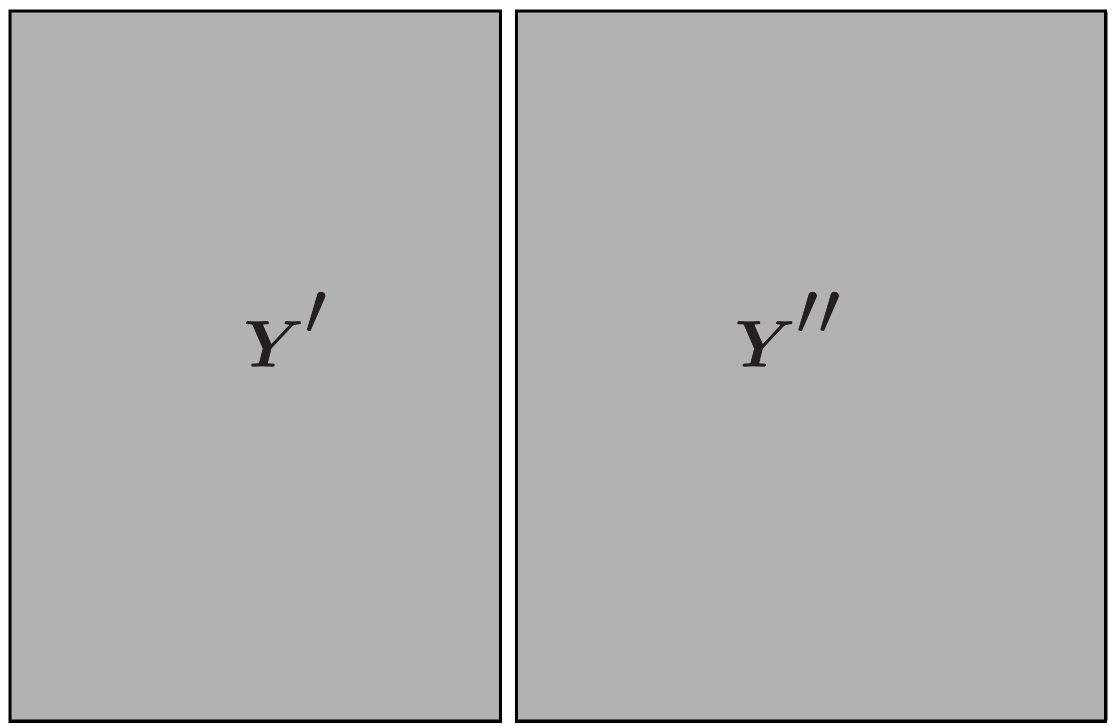


Принудительное дробление



Принудительное дробление

новая и более точная оценка минимума — $\min\{\, \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}')}, \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}'')}\, \}$



«Метод ветвей и границ»:

- ◇ организуем список из брусов $\boldsymbol{Y}$, возникающих в процессе дробления исходного бруса $\boldsymbol{X}$, вместе с их оценками $\underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}$;

- ◇ дробить будем лишь тот брус $\boldsymbol{Y}$, который обеспечивает наименьшую оценку $\underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}$ для $\min_{x \in \boldsymbol{X}} F(x)$;

- ◇ в подвергаемом дроблению брусе будем рассекать лишь самую широкую из интервальных компонент.

В процессе выполнения алгоритма будет поддерживаться *рабочий список* $\mathcal{L}$, состоящий из записей-пар

$$\Bigl(\ \boldsymbol{Y}\ ,\ \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}\ \Bigr),$$

где $\boldsymbol{Y}$ — интервальный n-брус, $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$.

Записи в $\mathcal{L}$ упорядочены по возрастанию оценок $\underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}$.

Первую запись списка, соответствующий брус $\boldsymbol{Y}$ и оценку $\underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}$, будем называть *ведущими* на данном шаге.

Простейший интервальный алгоритм глобальной оптимизации функций

Вход

Интервальное расширение $\boldsymbol{F} : \mathbb{I}\boldsymbol{X} \to \mathbb{IR}$ целевой функции F.
Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка снизу глобального минимума F^* функции F на $\boldsymbol{X}$.

Алгоритм

$\boldsymbol{Y} \leftarrow \boldsymbol{X}$;
вычисляем $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$ и инициализируем список $\mathcal{L} := \Big\{ (\boldsymbol{Y}, \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}) \Big\}$;

DO WHILE $\Big($ wid $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})) \geq \epsilon$ $\Big)$

выбираем компоненту l, по которой брус $\boldsymbol{Y}$ имеет наибольшую длину, т.е. wid $\boldsymbol{Y}_l = \max_i$ wid $\boldsymbol{Y}_i$;

рассекаем $\boldsymbol{Y}$ по l-ой координате пополам на брусы $\boldsymbol{Y}'$ и $\boldsymbol{Y}''$;

вычисляем $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}')$ и $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}'')$;

удаляем запись $(\boldsymbol{Y}, \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})})$ из списка $\mathcal{L}$;

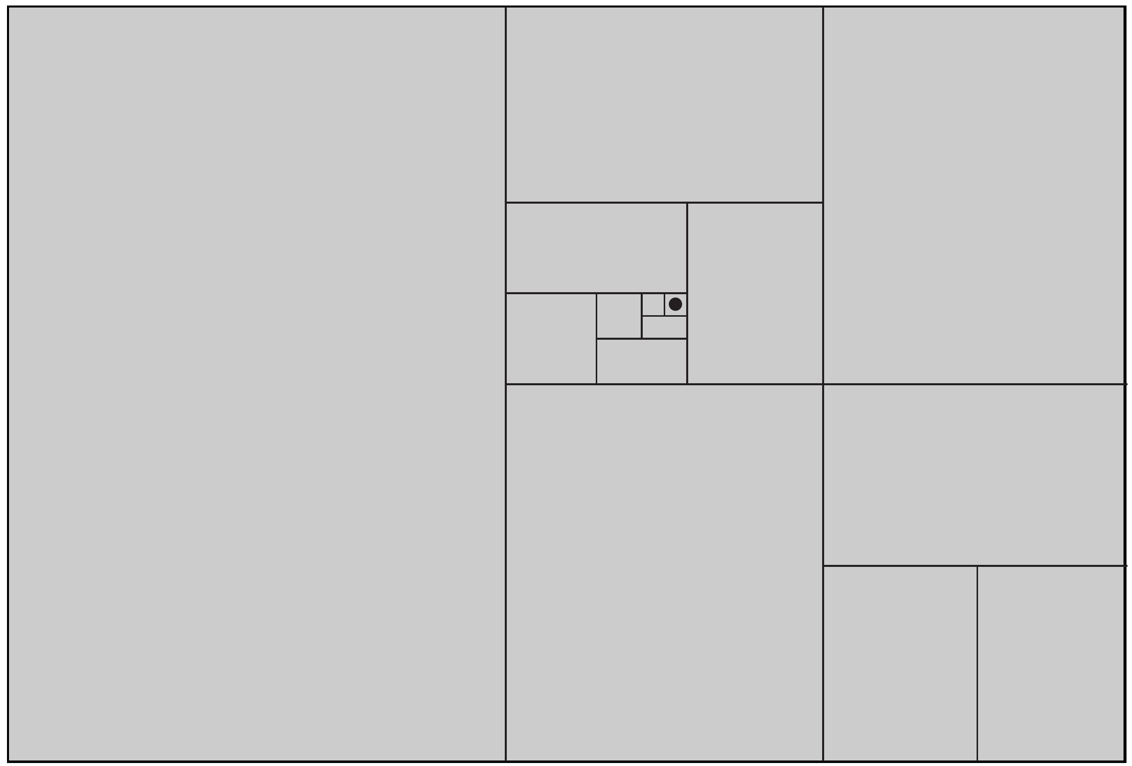
помещаем записи $(\boldsymbol{Y}', \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}')})$ и $(\boldsymbol{Y}'', \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}'')})$ в список $\mathcal{L}$ в порядке возрастания второго поля ;

обозначаем ведущую запись списка $\mathcal{L}$ через $(\boldsymbol{Y}, \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})})$;

END DO

$F^* \leftarrow \underline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})}$;

Интервальный алгоритм глобальной оптимизации



— конфигурация области определения функции
в результате работы алгоритма

Модификации

- Монотонность целевой функции.
- Более качественное интервальное расширение целевой функции.
- Локальные процедуры минимизации.
- Верхняя граница искомого глобального минимума.

Интервалы
как средство для работы с неопределённостями

«Неопределённость» — состояние частичного знания
о рассматриваемой величине

Модели неопределённости

- вероятностная (стохастическая)
- интервальная (ограниченная по величине)
- нечёткая (размытая)

Интервальное описание неопределённости — наиболее «скупое»,
но математический аппарат для его обработки наиболее развит.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n}x_n = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n}x_n = \boldsymbol{b}_2, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 + \boldsymbol{a}_{n2}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{nn}x_n = \boldsymbol{b}_n, \end{cases}$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальными матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ и вектором $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

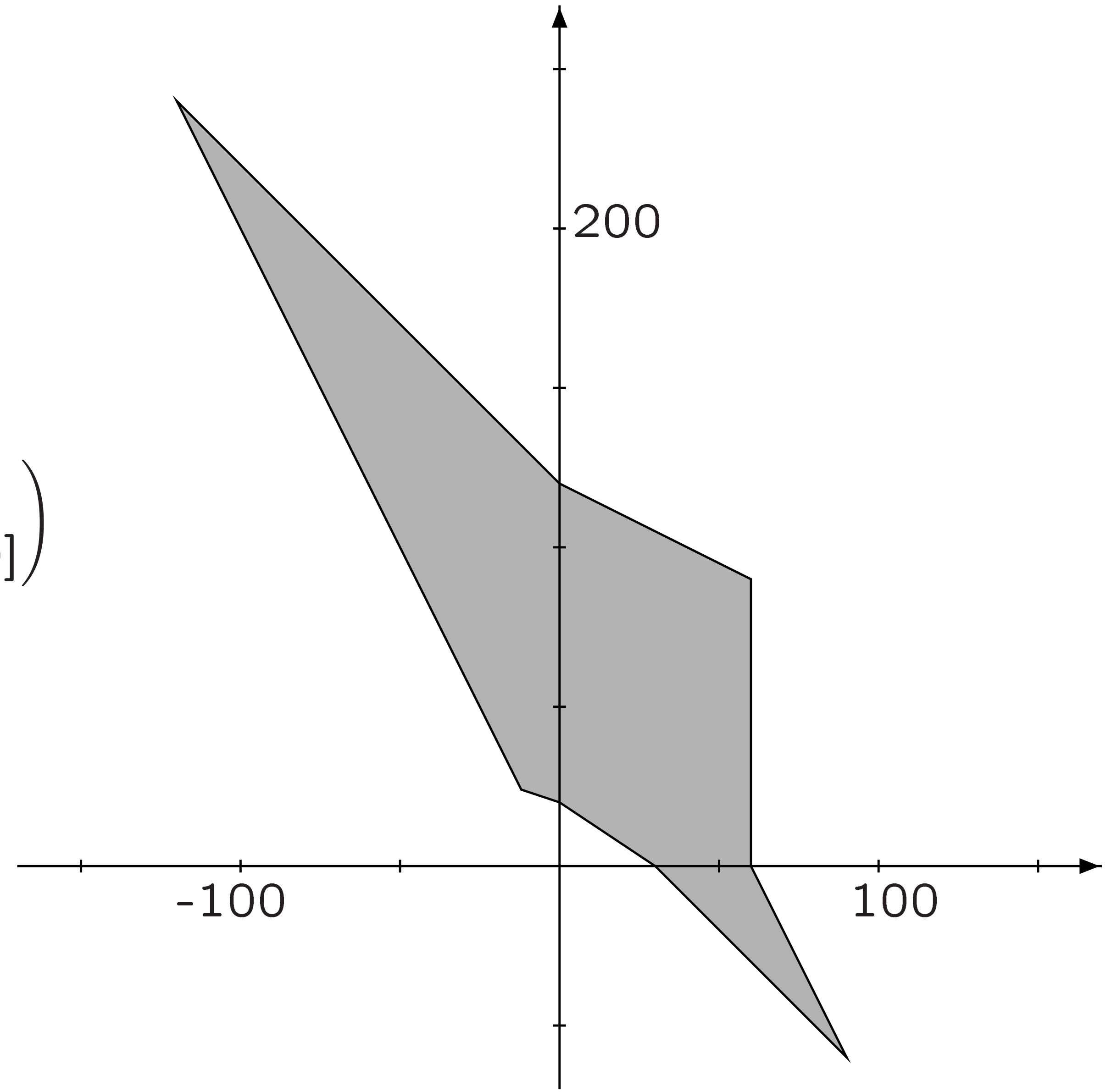
Множество решений
интервальной линейной системы уравнений —

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \Big\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b \,) \,\Big\}$$

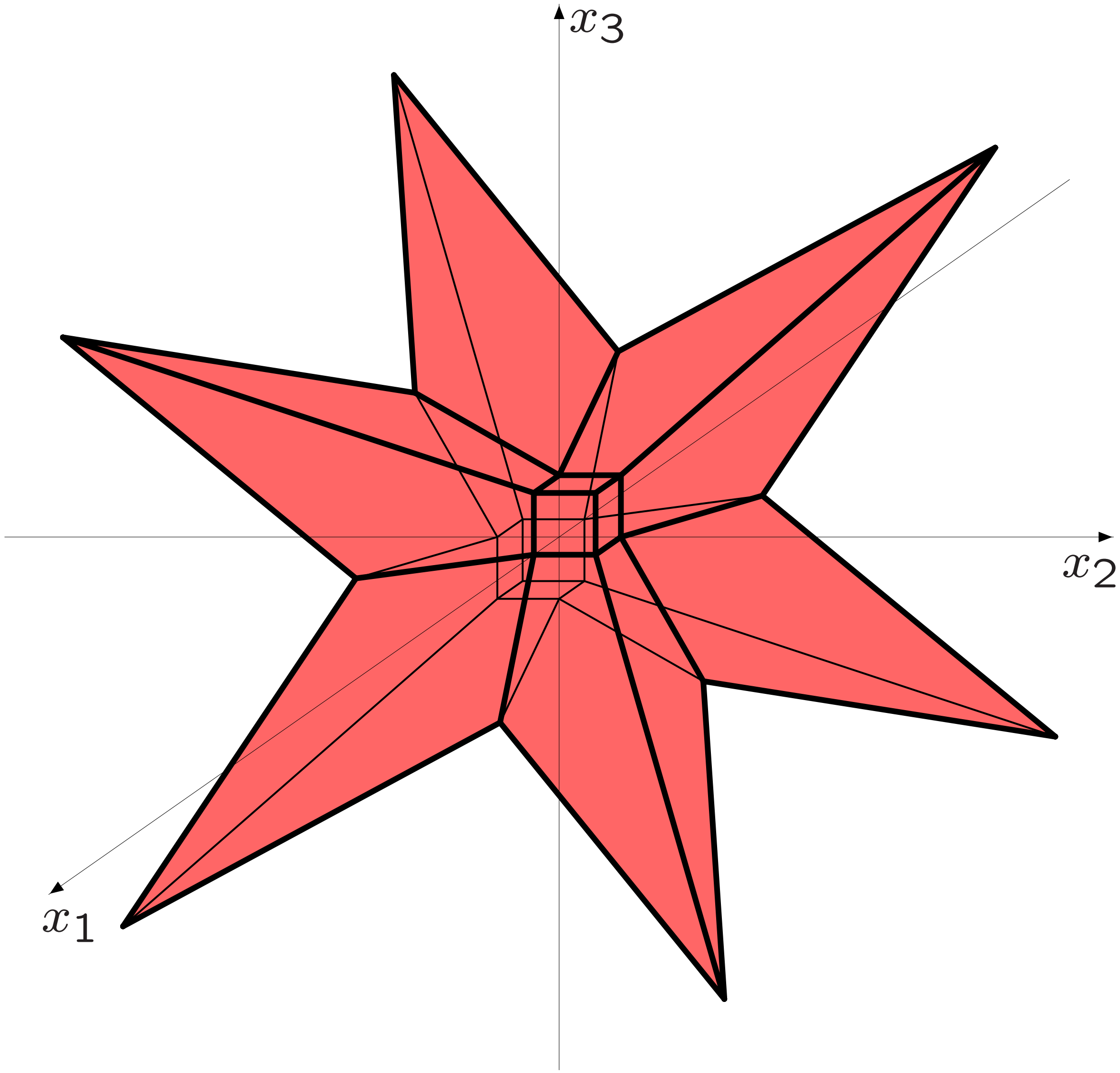
Также *объединённое множество решений* . . .

Пример — система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$



Пример — системаНоймайера



$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

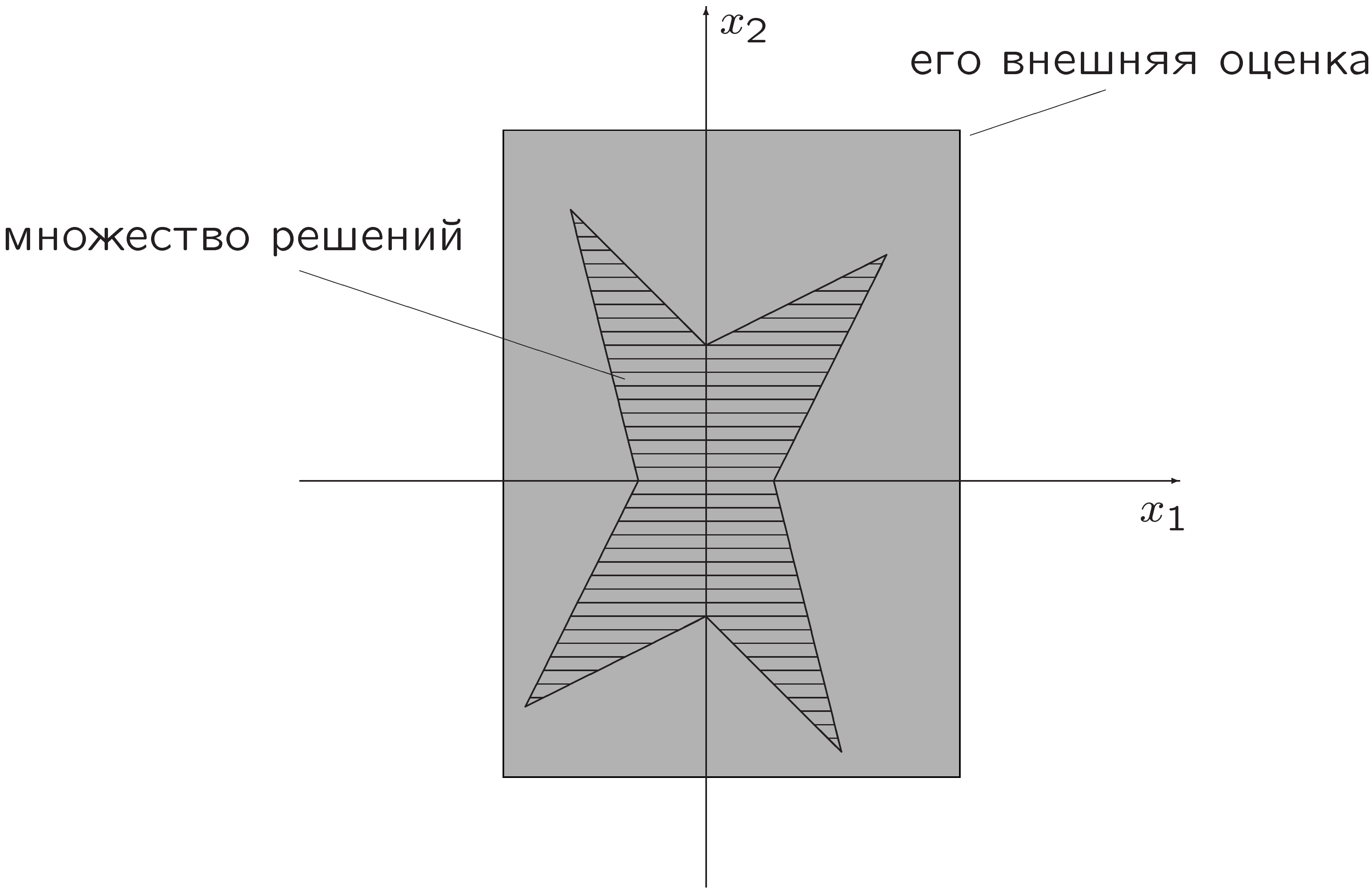
Интервальные линейные системы уравнений

Точное и полное описание множества решений

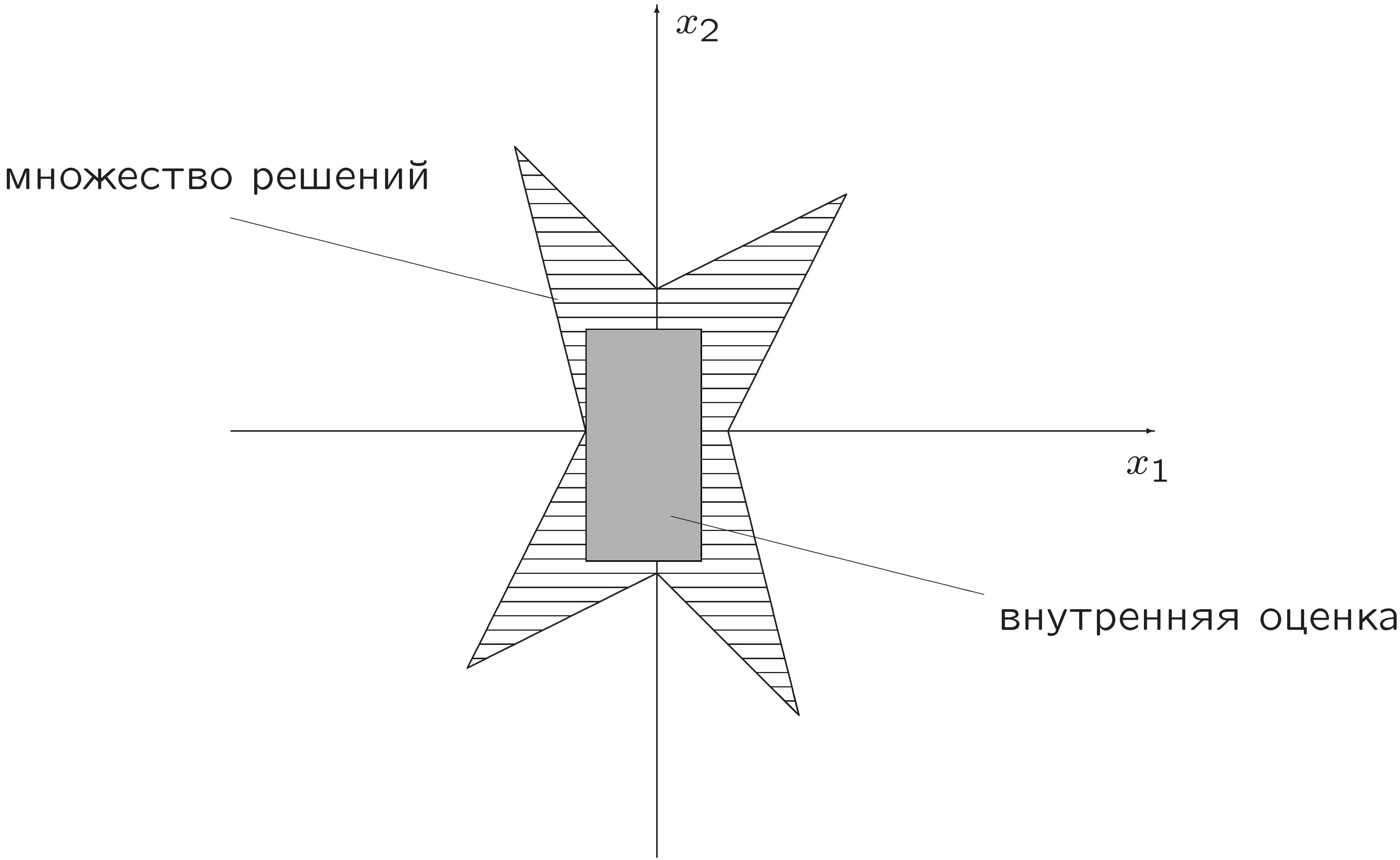
- практически невозможно в силу огромной сложности,
- реально не нужно.

В большинстве случаев достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами (т.е. имеющими меньшую конструктивную сложность).

«Внешняя задача»



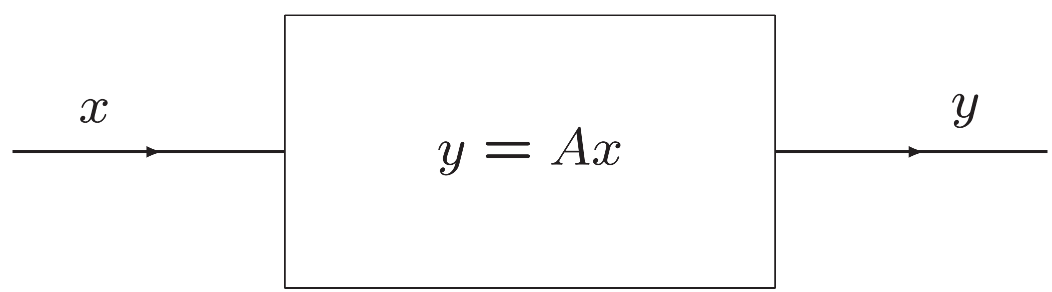
«Внутренняя задача»



Интервальная линейная задача о допусках

Дан «чёрный ящик» с входом $x \in \mathbb{R}^n$ и выходом $y \in \mathbb{R}^m$,

соотношение вход-выход линейно:



Параметры «чёрного ящика» не известны точно,

даны лишь интервалы $\boldsymbol{a}_{ij} \ni a_{ij}$, $(\boldsymbol{a}_{ij}) = \boldsymbol{A}$.

Интервальная линейная задача о допусках

Множество выходов «чёрного ящика» имеет смысл задать тоже интервально как брус $\boldsymbol{y}$, чтобы обеспечивалось попадание $y \in \boldsymbol{y}$ вне зависимости от значений a_{ij} из $\boldsymbol{a}_{ij}$:

> *существуют ли входные воздействия $\tilde{x}$, такие что для любого значения параметров a_{ij} из $\boldsymbol{a}_{ij}$ выход y всё-таки впишется в пределы заданных допусков $\boldsymbol{y}$?*

Множества AE-решений

Пусть для интервальной $m \times n$-системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ заданы кванторные $m \times n$-матрица α и m-вектор β и ассоциированные с ними разбиения индексных множеств матрицы и вектора тех же размеров на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma} = \{\,\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\,\check{\gamma}_1, \ldots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$, $\hat{\Delta} = \{\,\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\,\check{\delta}_1, \ldots, \check{\delta}_s\}$, $r + s = m$.

Назовём *множеством AE-решений типа* $\alpha\beta$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ множество

$$
\begin{aligned}
\Xi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ :=& \\
\Big\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid & \\
& (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots \ (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_p}) \ (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\hat{\delta}_r} \in \boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_r}) \\
& (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots \ (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_q}) \ (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \boldsymbol{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\check{\delta}_s} \in \boldsymbol{b}_{\check{\delta}_s}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\, Ax = b \,) \,\Big\}.
\end{aligned}
$$

Почему интервалы?

Интервальные методы $=$

I) Строгая обработка и учёт ошибок округления при вычислениях на цифровых ЭВМ

II) Новые эффективные подходы к традиционным математическим задачам

III) Практические задачи с неопределённостями и неоднозначностями в данных

Полная интервальная арифметика $\mathbb{KR}$

— получена алгебраическим и порядковым пополнением интервальной арифметики $\mathbb{IR}$

Элементы $\mathbb{KR}$ — пары $\boldsymbol{x} := [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}]$, причём не обязательно $\underline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}$

$$\begin{cases} \textit{правильные интервалы } \boldsymbol{x} \text{ с } \underline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{x}} \\ \textit{неправильные интервалы } \boldsymbol{x} \text{ с } \underline{\boldsymbol{x}} > \overline{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

Дуализация —

$$\mathrm{dual}\,[\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] := [\overline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}]$$

Независимые и связанные интервальные величины

Интервальная величина — переменная, изменяющаяся в пределах некоторого интервала.

Интервальные величины $x_1 \in \mathbf{x}_1$, $x_2 \in \mathbf{x}_2$, ..., $x_n \in \mathbf{x}_n$ — *независимые*, если кортеж из соответствующих переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает любые значения из бруса

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \ldots \times \mathbf{x}_n.$$

Иначе интервальные величины называются *связанными* или *зависимыми*.

Диаграммы связанности

— чертежи, изображающие множества всевозможных значений кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на фоне бруса $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \ldots \times \mathbf{x}_n$.

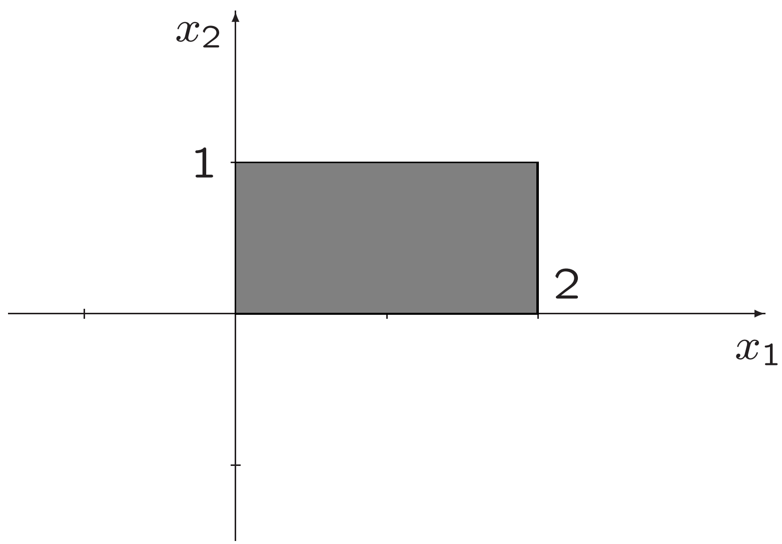


Диаграмма связанности независимых интервальных величин $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$

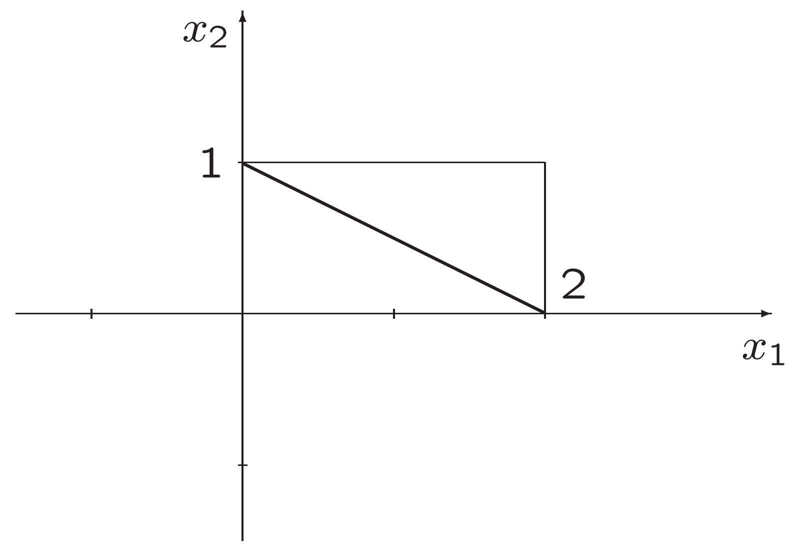


Диаграмма связанности интервальных величин $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$, таких что $x_1 + 2x_2 = 2$

Полное и более корректное определение

Интервальный анализ — это математическая дисциплина,

- *предметом которой является решение задач с интервальными (ограниченными) неопределённостями и неоднозначностями в данных, возникающими в постановке задачи либо на промежуточных стадиях процесса решения,*

- *чьей характеристической особенностью является рассмотрение множеств неопределённости как самостоятельных целостных объектов, посредством установления между ними операций, отношений и т.п.*

Информационный Интернет-портал
«Интервальный анализ и его приложения»

http://www.nsc.ru/interval/

Спасибо за внимание!