Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории
микропроцессорных систем управления

Г.Г. Меньшиков

ЛОКАЛИЗУЮЩИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Конспект лекций

Выпуск 3

ИНТЕРВАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЁННЫХ ФОРМУЛ
ЧИСЛЕННОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Санкт-Петербург
2003

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Факультета прикладной математики - процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета

УДК 519.95

Меньшиков Г. Г. Локализующие вычисления: Конспект лекций. Выпуск 3. Интервализация приближённых формул. Численное суммирование рядов. — СПб: НИИ Химии СПбГУ, 2003, 61 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ 3

По сравнению с аналогом [Меньшиков, 2.3], в Выпуск внесены следующие основные изменения.

Изменено общее название книги. Развивается новый машинно-программный инструментарий с привлечением IBM-компьютеров. Изложение структурировано более разумно. Изменена библиография. Упрощена программная реализация алгоритмики суммирования числовых рядов. Внесены многочисленные редакционные изменения, несколько уменьшен объём книги. Для понимания книги достаточно знания Математического Анализа в объёме первого курса технического вуза (упоминанием задачи Коши в § 55 можно пренебречь).

Автор благодарит А. В. Зубова за помощь, оказанную при подготовке книги.

Меньшиков Григорий Григорьевич
ЛОКАЛИЗУЮЩИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
Конспект лекций
Выпуск 3. Интервализация приближённых формул. Численное суммирование рядов.

ГЛАВА 4
ИНТЕРВАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ

§ 40. ИНТЕРВАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ ПРИБЛИЖЁННЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ С ИНФОРМАЦИЕЙ ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ

400. Введение

Пока в нашем композиционном интервальном расчёте предполагалось точное выражение композиции. Однако на практике точные представления далеко не всегда бывают известны. Либо не поддаются точному расчёту машинными средствами. Не все ряды "сворачиваются" и т. д. Наша нынешняя задача — наладить двустороннее нахождение функции, для которой нет точного вычислительного представления. Бóльшая часть нашего курса вообще посвящена этой ситуации.

Пусть для функции $f(x)$ мы знаем приближенное представление $\varphi(x)$. Тогда разность $r(x) = f(x) - \varphi(x)$ называется *остаточным членом* этого представления, или просто *остатком*, или *погрешностью*. В принципе, безразлично, что считать остатком: $f - \varphi$ или $\varphi - f$.

Поэтому функция оказывается суммой ее приближенного представления и остатка (либо разностью). Это соображение служит основой *интервализации* $f(x)$, т. е. перехода от функции $f(x)$ к её интервальному расширению (ИР) $F(X)$. Конечно об остатке должно быть достаточно информации, чтобы составить его ИР. Если мы можем указать его (обозначив через $R(X)$), то по Второй Теореме о композициях отображение $\Phi(X) + R(X)$ будет интервальным расширением для f.

Значит, главное звено предстоящих рассуждений — это интервализация остатка. Мы рассмотрим несколько типовых случаев. Все они сводятся к включению

$$r(x) \in \text{некоторый промежуток},$$

причем правая часть будет, вообще говоря, зависеть от x.

Наши рассуждения будут справедливы для всё тех же двух моделей: идеальной (выражение локализующего множества через любые вещественные числа и стандартные $f_i(x)$) и машинной (более широкие, чем в идеальной модели, множества, выраженные машинными числами).

401. Случай остатка, заключенного между двумя известными функциями

В этом случае из каких-то соображений известно, что

(401.1) $$r(x) \in r_1(x) \vee r_2(x).$$

Подобная информация может иметь вид неравенства

$$r_1(x) \leq r(x) \leq r_2(x)$$

или включения $r(x) \in [r_1(x),\ r_2(x)]$, что одно и то же. С учетом того, что x пробегает некоторый промежуток, для остатка известна соответствующая зона в плоскости $(x,\ y)$ — см. рис. 401.1.

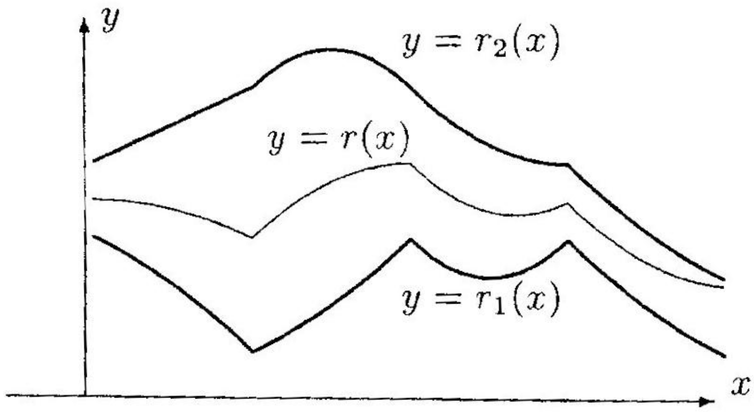


Рис. 401.1

По этим сведениям об $r(x)$ выражение для функции $f(x) = \varphi(x) + r(x)$ подвергаем интервализации.

Во-первых, расширяем правую часть, заменяя для каждого фиксированного x число $r(x)$ на объемлющее множество $r_1(x) \vee r_2(x)$. По Второй Теореме о композициях получаем:

$$f(x) \in \varphi(x) + r_1(x) \vee r_2(x).$$

Частный случай $r_1(x) \equiv r(x) \equiv r_2(x)$ возникает иногда в теоретических рассуждениях. Тогда первый этап интервализации отпадает.

Во-вторых, допускаем, что значения x заполняют отрезок X. Тогда заменой x на X снова расширяем правую часть включения. Тем более оно усилится:

$$f(x) \in \varphi(x) + r_1(X) \vee r_2(X).$$

В третьих, раз это включение верно для всех $x \in X$, то это так и для множества $f(X)$ соответствующих значений $f(x)$:

$$f(X) \subseteq \Phi(X) + R_1(X) \vee R_2(X). \tag{401.2}$$

Итак, правая часть — ИР для f, которое можно искать машинными средствами.

В упомянутом частном случае это соотношение приобретает вид:

$$f(X) \subseteq \Phi(X) + R(X)$$

В четвертых, это особенно легко делается, когда $r_1(x)$ и $r_2(x)$ выражены в стандартных (основных элементарных) функциях. Тогда для этих двух функций производится композиционный расчет и для результатов $R_1(X)$ и $R_2(X)$ вычисляется интервальная оболочка. Этому расчету подвергается и функция $\varphi(x)$, следствием чего будет $\Phi(X)$. Потом вычисляется сумма — правая часть (401.2).

Напомним, что множество $F(X)$ является отрезком, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке X.

Заметим, что информация об остатке может иметь вид неравенства для абсолютной величины:

$$|r(x)| \leq h(x).$$

Это равносильно тому, что

$$r(x) = \theta\, h(x), \quad \theta \in [-1,\ 1]. \tag{401.3}$$

Упражнение 401.1. Доказать эту равносильность. □

Другими словами,

$$-h(x) \leq r(x) \leq h(x),$$

т. е. мы вернулись к случаю двустороннего неравенства.

Из (401.3) следует еще одно включение:

$$r(x) \in [-1,\ 1]\, h(X),$$

откуда тем более

$$r(x) \in [-1,\ 1]\, H(X),$$

где $H(X)$ — интервальное расширение для $h(x)$, так что в итоге для $f(X)$ получается красивое включение:

$$f(X) \subseteq \Phi(X) + [-1,\ 1]\, H(X). \tag{401.4}$$

402. Пример: суммирование лейбницева ряда

Рассмотрим задачу двустороннего суммирования числового ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$

предположив, что он удовлетворяет признаку сходимости Лейбница, т. е. $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$, $|a_k|$ не возрастает, знак a_n чередуется.

Как известно из курса Анализа, тогда сумма s ряда лежит между двумя соседними частичными суммами s_n и s_{n+1}. Отсюда

$$s \in s_n \vee s_{n+1} \subseteq S_n \vee S_{n+1},$$

где S_n — ИР частичной суммы $s_n = a_1 + \ldots + a_n$.

Методам численного суммирования рядов будет посвящена глава 5 нашего курса.

403. Случай, когда остаток представлен функцией от неопределенного параметра

Допустим, для $r(x)$ известно представление: $r(x) = r(x,\ \theta)$, где θ – некоторое число, о котором известно, что оно лежит в известном отрезке Θ. Отрезок этот может зависеть от x. Частный случай $r_1(x) \equiv r(x) \equiv r_2(x)$ отмечен в п. 401.

Допустим также, что r является стандартной функцией по обоим аргументам. Тогда мы можем провести композиционный интервальный расчёт, т. е. найти $R(X) = R\big(X,\ \Theta(X)\big)$.

Практичнее сразу находить ИР для $f(x)$ в виде:

$$f(x) \in F(X) = \Phi(X) + R\big(X,\ \Theta(X)\big).$$

Отметим еще тот предельный случай, когда такое представление известно для всей искомой функции, без разделения ее на главную часть φ и остаток r.

Пример 403.1. Согласно интегральной теореме о среднем значении для непрерывной на отрезке $X = [a,\ b]$ функции $g(x)$ имеет место:

$$\int_a^b g(x)\,dx = (b-a)\ g(\theta), \quad \theta \in X.$$

Отсюда

$$\int_a^b g(x)\,dx \in w(X)\ g(X). \tag{403.1}$$

404. Пример: примитивное локализующее интегрирование

Обратимся к задаче вычисления интеграла $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Разобьем отрезок $X = [a,\ b]$ равноотстоящими точками x_k на отрезки равной длины h:

$$X_k = [x_k,\ x_{k+1}], \quad x_0 = a, \quad x_{n+1} = b.$$

Тогда $X = \bigcup\limits_{k=0}^{n} X_k$ и по аддитивности интеграла $I = \sum\limits_{k=0}^{n} \displaystyle\int_{X_k} f(x)\,dx$.

Предположим, что f непрерывна. Тогда согласно последнему примеру

$$I_k = \int_{X_k} f(x)\,dx \in hf(X_k) \stackrel{def}{=} [I_k]\,.$$

Тогда согласно Второй Теореме о композиции

$$I \in h\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \stackrel{def}{=} [I]\,.$$

Таково *примитивное* локализующее численное интегрирование.

Применим материал главы 3 к исследованию грубости этого нового способа численного интегрирования. Сосчитаем ширину правой части. Снова принимаем идеальную модель композиционного расчета и налагаем на f интервальное условие Липшица: $w\big(f(X_k)\big) \le \lambda w(X_k) = \lambda h$. Тогда

$$w\left([I]\right) = hw\left(\sum_{k=0}^{n} f(X_k)\right) = h\sum_{k=0}^{n} w\big(f(X_k)\big) \le \lambda h^2(n+1) = (b-a)\lambda h.$$

Как видно, найденая мажоранта ширины вилки линейно зависит от h. Отсюда для уменьшения ширины, например, в 10 раз для увеличения точности надо в 10 раз уменьшить h, т. е. в 10 раз увеличить объем вычислений. Это — очень невыгодное соотношение между точностью и объемом работы.

Поэтому метод годится, но лишь, когда не нужна высокая точность, т. е. когда хватает грубых границ интеграла.

§ 41. ФОРМУЛА ТЭЙЛОРА

410. Общие сведения

Из Анализа студент знает, что *формула Тэйлора* (ФТ) представляет собой тождество

$$f(x) = \varphi(x) + r(x),$$

где $\varphi(x)$ — *полином Тэйлора*:

$$\varphi(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

x – текущий аргумент, x_0 – фиксированная *начальная точка*. Для *остатка* $r(x)$ известно несколько форм. Так, из *интегральной формы*

$$r(x) = \frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x - t)^k dt$$

видно, что ФТ является для $f(x)$ интегральным уравнением специфического вида, справедливым, если непрерывны все производные-участницы на отрезке $x_0 \vee x$. Из интегральной формы следует *дифференциальная форма Лагранжа*:

$$r(x) = r(x,\ \theta) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

где θ — неопределённый параметр: $\theta \in x_0 \vee x$.

Применения ФТ в анализе исключительно разнообразны. Мы рассмотрим её сначала как пример приближенной формулы и решим задачу её интервализации.

411. Интервализация формулы Тэйлора

Из включения $\theta \in x_0 \vee x$, рассуждая, как в § 40, получаем:

$$f(x) \in \varphi(x) + r(x,\ x_0 \vee x).$$

Здесь x фиксирован.

Теперь освободим переменную x и позволим ей заполнить отрезок X. Тогда переменная $x - x_0$ заполнит отрезок $X - x_0$, а семейство множеств $x \vee x_0$ — отрезок $X \vee x_0$. Поэтому

$$(411.1) \qquad r(x) \in \frac{f^{(k+1)}(X \vee x_0)}{(k+1)!}(X - x_0)^{k+1}.$$

Учитывая, что $\varphi(x) \in \varphi(X)$, по Второй Теореме о композициях получаем включение:

(411.2) $$f(x) \in \varphi(x) + \text{правая часть (411.1)}.$$

Это - чисто теоретический результат (идеальная модель). Как мы знаем, множество значений функции в точной форме, вообще говоря, не вычислимо.

Чтобы перейти к следующему этапу интервализациии, предположим, что умеем находить для $f^{(i)}(x)$ интервальные расширения $F^{(i)}(X)$. Тогда как для полинома Тейлора, так и остатка можем вычислить их интервальные расширения:

$$\Phi(X) = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!}(X - x_0) + \ldots + \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k,$$
$$R(X) = \frac{F^{(k+1)}(X \vee x_0)}{(k+1)!}(X - x_0)^{k+1}.$$

Затем по той же Второй Теореме получаем *тэйлорово интервальное расширение* для f:

$$f(x) \in F_{\mathrm{T}}(X) \stackrel{def}{=} \Phi(X) + R(X).$$

Конечно, если мы хотим использовать его для вычислений $f(x)$ в точках x, то вместо X должны фигурировать числа x.

$F_T(X)$ пригодится нам, в частности, при организации локализующего интегрирования дифференциальных уравнений в главе 12.

412. Применение к формуле конечных приращений

Эта формула:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\theta)\,(x - x_0), \quad \theta \in x_0 \vee x,$$

знакома студентам по курсу Анализа. Она получена в предположении, что f непрерывна на $x_0 \vee x$ и дифференцируема внутри этого отрезка. Ее можно рассматривать как частный случай ФТ:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\theta)\,(x - x_0).$$

Второе слагаемое правой части выступает как остаток. Если провести рассуждения по интервализации (как выше), то получится включение:

(412.1) $$f(x) \in f(x_0) + f'(x_0 \vee x)(x - x_0).$$

413. Применение интервализованной формулы конечных приращений к вычитанию близких значений

В примере с $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ нам удалось подобрать более удобное точное выражение для f, не содержащее вычитания. В других подобных примерах найти подходящее точное выражение не удается. Тогда неприятностей с "обнажением" погрешности помогает избежать представление разности $f(x) - f(x_0)$ по формуле конечных приращений. В следующем примере увидим, как применение этой формулы позволяет получить сравнительно узкий локализатор для $f(x)$.

Пример 413.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x+1)^\alpha - x^\alpha, \; 0 < \alpha < 1$$

— более общий случай, нежели разность квадратных корней. Проблема остается, так как по-прежнему

$$f(x) \to 0 \quad (x \to +\infty), \tag{413.1}$$

откуда значения $(x+1)^\alpha$ и x^α остаются близкими при больших x. Действительно, пишем:

$$f(x) = x^\alpha \left(\left(\frac{x+1}{x} \right)^\alpha - 1 \right)_* .$$

Здесь $(\;)_* = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^\alpha - 1$. Как известно из дифференциального исчисления (один из замечательных пределов!),

$$()_* \sim \frac{\alpha}{x} \quad (x \to +\infty),$$

так что

$$f(x) \sim \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{413.2}$$

Откуда следует (413.1), что и требовалось доказать.

Вместе с тем мы получили эквивалентность (413.2), в правой части которой уже нет разности близких значений. Поэтому имеет смысл использовать эту эквивалентность как приближенную формулу для нахождения $f(x)$ при больших x.

В практике традиционных, неинтервальных вычислений расчёт велся бы просто по правой части (413.1), пренебрегая ее отличием от $f(x)$.

Мы же должны подготовить включение для $f(x)$. Его мы получим, если построим для $f(x)$ равенство, правая часть которого асимптотически была бы эквивалентна $\alpha x^{\alpha-1}$ и которое, возможно, содержала бы неопределенный член. Потом последний подвергнется интервализации.

Для этого возьмем вспомогательную $\psi(y) = (1+y)^{\alpha}$. Тогда

$$f(x) = x^{\alpha}\left(\psi(y) - \psi(0)\right)^{*}, \quad y = 1/x.$$

По формуле конечных приращений

$$(\ )^{*} = \psi'(\theta)y, \quad \theta \in 0 \vee y = 0 \vee \frac{1}{x}.$$

Так как $\psi'(y) = \alpha(1+y)^{\alpha-1}$, то

$$f(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+\theta)^{1-\alpha}}.$$

Искомое выражение, ассоциированное с (413.2), получено. Из него следует включение:

$$f(x) \in \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\left(1+\left[0,\ \dfrac{1}{x}\right]\right)^{1-\alpha}} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\left[1,\ 1+\dfrac{1}{x^{1-\alpha}}\right]}.$$

Правая часть годится для интервального расчета.

§ 42. ПРОДОЛЖЕНИЕ: MV-ФОРМА ИНТЕРВАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

420. Суть дела

Продолжим тему п. 412. Мы получили выше следствие формулы конечных приращений:

$$f(x) \in f(x_0) + f'(x_0 \vee x)(x - x_0).$$

Вновь при расширении в правой части x до X отрезок $x_0 \vee x$ расширится до $x_0 \vee X$, а переменная $x - x_0$ до $X - x_0$. Допустим непрерывность f' в $x_0 \vee X$, так что $f'(x_0 \vee X)$ — отрезок. Тогда по Второй Теореме о композициях интервальным расширением для f будет

$$F_{MV} = F_{MV}(X,\ x_0) = f(x_0) + f'(x_0 \vee X)(X - x_0) \qquad (420.1)$$

Эту форму интервального расширения — частный случай $F_T(X)$ — называют *MV-формой (mean value form)*.

Как видно, ширина множества $f'(x_0 \vee X)$, участвующего здесь, зависит от расположения точки x_0. Она минимизируется по x_0, если $x_0 \in X$, поскольку тогда $x_0 \vee X = X$.

В частном случае берут среднюю точку отрезка X:

$$x_0 = m(X) = \check{X}.$$

Это — *MV-форма в узком смысле.* Иногда ее и называют MV-формой, а более общий случай (420.1) — *обобщенной* MV-формой.

Замечание 420.1. Подчеркнем: пока разговор идет о теоретической, идеальной модели, когда все вещественные числа доступны для машины. В реальной ситуации не всегда возможно поделить пополам машинное число.

421. О полезности MV-формы

Нередко MV–расширение оказывается более узким, чем композиционное. Это покажет следующий пример.

Пример 421.1 (Ноймайер, Arnold Neumaier). Рассмотрим $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Сравним при $X = [2,\ 3]$ три интервальных расширения этой функции: $f(X)$ – минимальное, F_{comp} – композиционное и F_{MV}.

Во-первых, из выражения $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ видно, что $f(x)$ убывает. Поэтому

$$f(X) = [f(3),\ f(2)] = \left[\frac{3}{2},\ 2\right].$$

Во-вторых, согласно правилам интервальной арифметики

$$F_{comp}(X) = \frac{[2,\ 3]}{[1,\ 2]} = [1,\ 3].$$

Как следовало ожидать, $F_{comp}(X) \supset f(X)$.

В третьих, найдем сначала $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Положим $x_0 = m(X) = 2.5$ и сосчитаем

$$F_{MV} = f(x_0) + f'(X)(X - x_0) = f(2.5) - \frac{X - 2.5}{(X-1)^2} = \frac{2.5}{1.5} - \frac{[-0.5,\ 0.5]}{[1,\ 2]^2} =$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{[-0.5,\ 0.5]}{[1,\ 4]} = \frac{5}{3} + \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{2},\ \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{7}{6},\ \frac{13}{6}\right].$$

Как видно,

$$f(X) \subset F_{MV}(X) \subset F_{comp}(X)$$

– см. рис. 421.1.

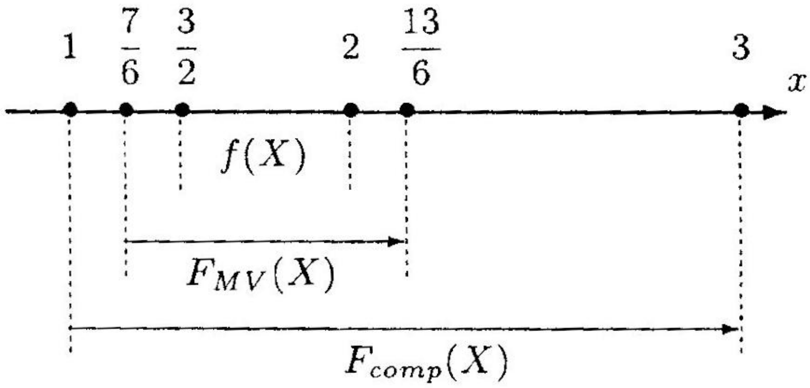


Рис. 421.1

Итак, иногда (но не всегда) MV-форма дает более узкие вилки, чем композиционный расчет.

Однако, рассмотренный вариант MV-формы на машине нереализуем, поскольку (вновь напоминаем) точные значения функций вычисляются исключительно редко. В действительности пользуются получаемыми на машине интервальными расширениями $F(x_0)$, $F'(X)$, сложения и умножения. Благодаря их монотонности по включению, замена в MV-форме этих действий на их машинные интервальные расширения дает более грубое, т. е. обширное интервальное расширение для $f(x)$:

$$f(X) \subseteq F_{MV\text{маш}}(X,\ x_0) = F(x_0) + F'(X)(X - x_0).$$

Здесь для нахождения $F(x_0)$, $F'(x)$, F_{MV} может быть применен композиционный расчет.

Итак, получено ещё одно средство поиска интервального расширения.

422. Монотонность по включению MV-формы

Теорема 422.1 (Каприни—Мадсен, Ole Caprani, Kay Madsen). Для непрерывно дифференцируемой функции f (типа $R \to R$) MV-форма интервального расширения

$$f(x_0) + f'(X)(X - x_0), \quad x_0 = m(X)$$

монотонна по включению.

Замечание 422.1. Доказательство можно найти в книгеНоймайера, которая содержит довольно полную теорию MV-формы.

Замечание 422.2. Как сообщает Ноймайер, условие $x_0 = m(X)$ существенно. Поэтому теорема на практике плохо обеспечивает монотонность по включению, поскольку точное деление отрезка пополам не гарантируется. Именно поэтому имеет смысл думать над доказательством теоремы и ее усовершенствованием (предмет для научной работы студента).

423. Анализ ширины MV-формы

1. Мы его выполним для того более реального случая, когда вместо (420.1) употребляется

$$F_{MV}(X) = f(x_0) + F'(X)(X - x_0).$$

По-прежнему рассматриваем идеальную модель. Роль $F'(X)$ может играть, например, композиционное интервальное расширение для f'.

Запишем для $x_0 \in X$:

$$w\big(F_{MV}(X)\big) = w\Big(f(x_0) + F'(X)(X - x_0)\Big) = w\Big(F'(X)(X - x_0)\Big) \leq$$

по неравенству для ширины произведения:

$$\leq \|F'(X)\| w(X - x_0) + \|X - x_0\| w\big(F'(X)\big),$$

где $w(X - x_0) = w(X)$.

Так как $X - x_0 \ni 0$, то по одному из свойств нормы имеем: $\|X - x_0\| \leq w(X - x_0) = w(X)$. Отсюда

$$w\big(F_{MV}(X)\big) \leq \Big(\|F'(X)\| + w\big(F'(X)\big)\Big) w(X). \qquad (423.1)$$

Сравним с шириной композиционного интервального расширения. Вспомним, что для него $w\big(F(X)\big) \leq \lambda w(X)$, если оно удовлетворяет условию Липшица. Как видим, и здесь, и в (423.1) $w(X)$ имеется в правой части в виде множителя. Таким образом, порядок мажоранты ширины относительно $w(X)$ — один и тот же. Казалось бы, существенного выигрыша в ширине $F(X)$ нет.

2. Но рассмотрим теперь специальный случай, когда $F'(X) \ni 0$.

Вновь по тому же свойству нормы $\|F'(X)\| \leq w\big(F'(X)\big)$. Поэтому, согласно (423.1), имеем: $w\big(F_{MV}(X)\big) \leq 2w\big(F'(X)\big)w(X)$. Теперь потребуем от F' выполнения условия Липшица: $w\big(F'(X)\big) \leq \lambda_1 w(X)$. Тогда

$$w\big(F_{MV}(X)\big) \leq 2\lambda_1 \big(w(X)\big)^2. \qquad (423.2)$$

Это — гораздо более выгодный порядок узости локализатора, квадратичный.

Теперь конкурентноспособность MV-формы очевидна.

3. Случай $F'(X) \ni 0$ представляет особый интерес для забот, так как при

(423.3) $$F'(X) \not\ni 0$$

функция f монотонна и потому сжатие ИР достигается применением соответствующей формы:

$$F_M(X) = F(\underline{X}) \vee F(\overline{X}).$$

Этот вопрос уже был рассмотрен во Втором Выпуске. Тут MV-форма просто не нужна. Как бы то ни было, теперь можно комбинировать все три формы: $F_{comp}(X)$, $F_M(X)$, $F_{MV}(X)$ (как?).

424. Многомерный вариант

В виде упражнения предлагаем читателю вывести многомерное ($R^n \to R$) обобщение MV-формы:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{X}) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + [\boldsymbol{f}'(\mathbf{X})](\mathbf{X} - \boldsymbol{x}^0)$$

либо обратиться к Выпуску 8, где это сделано.

ГЛАВА 5
ЧИСЛЕННОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

§ 50. ВВЕДЕНИЕ. ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ОСТАТКА

500. Введение. Интервализация суммы ряда

Ряд суммируется в аналитической форме ("свертывается") столь же редко, как интеграл выражается в элементарных функциях ("берется"). Те обильные примеры, которые мы видим в задачниках, подобраны специально для учебных целей.

Поэтому конкретный ряд приходится, вообще говоря, суммировать численно. Естественно опираться на частичную сумму s_n в качестве приближенного выражения суммы ряда s. Но надо и учитывать остаток. Таким образом, нужно следовать схеме:

(500.1) $$s = s_{n-1} + r_n,$$

где $s_{n-1} = a_1 + \ldots + a_{n-1}$ — частичная сумма, $r_n = a_n + a_{n+1} + \ldots$ — остаток.

Вычисляя в обычной манере, остатком пренебрегают. Пренебрегают и ошибками, возникающими при суммировании членов, т. е. при нахождении частичной суммы. Пример такой бездумной методики рассмотрен нами в § 03.

Мы же, следуя выводам предыдущей главы, будем искать включение для суммы:

$$s \in S_{n-1} + R_n, \tag{500.2}$$

где S_{n-1} и R_n — интервальные расширения соответственно для s_{n-1} и r_n.

Для поиска R_n понадобится *оценка остатка* в виде неравенства:

$$r'_n \le r_n \le r''_n, \tag{500.3}$$

где r'_n и r''_n – явные выражения, т. е. композиции от n. Они вычисляются в интервальной манере, в результате чего появляются их интервальные расширения: R'_n и R''_n. После этого будем полагать $R_n = R'_n \vee R''_n$.

Нужно только уметь находить оценки остатка.

Мы рассмотрим несколько наиболее распространенных способов. Каждый из них связан с соответствующим способом доказательства сходимости ряда. Более полную информацию о получении оценок остатка можно получить в книге Данилова и др.

501. Желательные свойства оценки остатка

Оценку остатка сходящегося ряда (500.3) следует считать *негодной*, если одно из двух соотношений (тем более оба) не выполнено:

$$r'_n,\ r''_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Действительно, тогда выполнение необходимого признака сходимости ряда: $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ не гарантировано.

Если же r'_n, $r''_n \to 0$, то оценка годится для употребления.

Эту оценку следует признать *хорошей*, если

$$r'_n \sim r''_n \quad (n \to +\infty). \tag{501.1}$$

Тогда относительная величина локализатора $r'_n \vee r''_n$ остатка (в идеальной модели) стремится к 0. Действительно,

$$\frac{w(r'_n \vee r''_n)}{|r'_n|} = \left|\frac{r''_n - r'_n}{r'_n}\right| = \left|\frac{r''_n}{r'_n} - 1\right| \to 0$$

ввиду того смысла, который вкладывается в понятие предельной эквивалентности $\sim$.

Если же (501.1) неверно, но все-таки r'_n, $r''_n \to 0$, то оценку следует считать просто *удовлетворительной*.

Может оказаться, что найденая оценка верна для n, начиная лишь с некоторого значения n. Это — не беда. Просто включением (500.2) следует пользоваться именно при этих n.

Как водится, сначала рассмотрим положительные ряды.

502. Положительный ряд: тривиальная оценка снизу

Для положительных рядов можно брать в качестве оценки снизу очевидное неравенство

$$r_n \geq a_n, \tag{502.1}$$

Она неплоха в случае быстросходящихся рядов. Но оказывается грубой для рядов с медленной сходимостью.

503. Ориентация на признак Даламбера

Если сходимость положительного ряда установлена с помощью признака Даламбера, то имеет смысл ориентироваться на него при нахождении двустороннего неравенства для остатка. Поступают так.

1. Преобразуют остаток $r_n = a_n + a_{n+1} + \ldots$, выделяя старший член как множитель:

$$r_n = a_n \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_n} + \ldots \right).$$

2. Образуют в этом выражении *даламберовы отношения* $d_k = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$:

$$r_n = a_n(1 + d_n + d_{n+1}\, d_n + d_{n+2}\, d_{n+1}\, d_n + \ldots). \tag{503.1}$$

3. Вводят точные границы участвующих здесь даламберовых отношений:

$$\eta_n = \inf_{k \geq n} d_k, \quad \xi_n = \sup_{k \geq n} d_k$$

. Если $\xi_n < 1$ при некотором n, то и $\eta_n < 1$. Ряды в неравенстве (503.1) сходятся, так как мажорируются сходящимися геометрическими прогрессиями:

$$a_n(1 + \eta_n + \eta_n^2 + \ldots) \leq r_n \leq a_n(1 + \xi_n + \xi_n^2 + \ldots),$$

т. е.

$$\frac{a_n}{1 - \eta_n} \leq r_n \leq \frac{a_n}{1 - \xi_n}. \tag{503.2}$$

Оценка получена. Ее можно записать в интервально-арифметической форме:

$$r_n \in \frac{a_n}{1 - [\eta_n,\ \xi_n]}. \tag{503.2a}$$

Пример 503.1. Оценим остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n!+1}$, а заодно докажем сходимость.

Пишем даламберово отношение:

$$d_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{(k+1)!+1} \cdot \frac{k!+1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{k!+1}{(k+1)!+1}. \tag{503.3}$$

Обе дроби убывают с ростом k (но это надо доказать – докажите!). К тому же вторая дробь в правой части (503.3) стремится к 0 при $k \to +\infty$. Поэтому d_k убывает, вследствии чего

$$\eta_n = \inf d_k = \lim_{k \to +\infty} d_k = 0,$$

$$\xi_n = \sup d_k = d_n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n!+1}{(n+1)!+1}. \tag{503.4}$$

Отсюда следует оценка:

$$a_n \leq r_n \leq \frac{a_n}{1 - d_n}. \tag{503.5}$$

Неравенство же $d_n < 1$ следует из убывания d_n и факта, что $d_1 = 1$. Значит, оно верно при $n \geq 2$. Поэтому ряд сходится.

Посмотрим качество оценки (503.5). Так как $d_k \to 0$, то $\dfrac{a_n}{1 - d_n} \sim a_n$, т. е. по нашей терминологии это — хорошая оценка.

504. Упрощающие мажорантные преобразования

Нередко делу помогает почленное мажорирование остатка (не путать с мажоризацией!) более простым рядом, поддающимся аналитическому суммированию либо одному из способов получения оценки.

Пример 504.1. Рассмотрим все тот же ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n+1}{n!+1}$. Выше нам просто повезло с убыванием одной из дробей. Но мы могли и не усмотреть или не суметь доказать это убывание. Оценим остаток более простым рядом, выбросив единицу в знаменателе. Тогда

$$r_n = \sum_{k\geq n} \frac{k+1}{k!+1} \leq \sum_{k\geq n} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k\geq n} \frac{1}{(k-1)} + \sum_{k\geq n} \frac{1}{k!}.$$

Отсюда

$$r_n \leq \frac{1}{(n-1)!} + 2\sum_{k\geq n} \frac{1}{k!}.$$

Теперь оценим образовавшийся ряд геометрической прогрессией. Получим:

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n!n}.$$

Отсюда

$$r_n \leq \frac{1}{(n-1)!} + 2\frac{n+1}{n!n} \overset{def}{=} r''_n.$$

Вдобавок к этому возьмём тривиальную оценку снизу:

$$r_n \geq a_n = \frac{n+1}{n!+1} \overset{def}{=} r'_n.$$

После этого легко доказывается эквивалентность r'_n и r''_n при $n \to +\infty$. Мы получили хорошую оценку остатка.

505. О почленном разложении остатка в сумму рядов

Только что в примере мы видели, как полезно почленное разложение мажоранты остатка в сумму более простых рядов. Этот прием годится и непосредственно для выражения остатка рядом.

506. Ориентация на интегральный признак Коши

Рассмотрим положительный числовой ряд, в котором a_k не возрастает и может быть продолжен до кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$, заданой на $[1, +\infty[$ и такой, что

1) $\varphi(k) = a_k$,

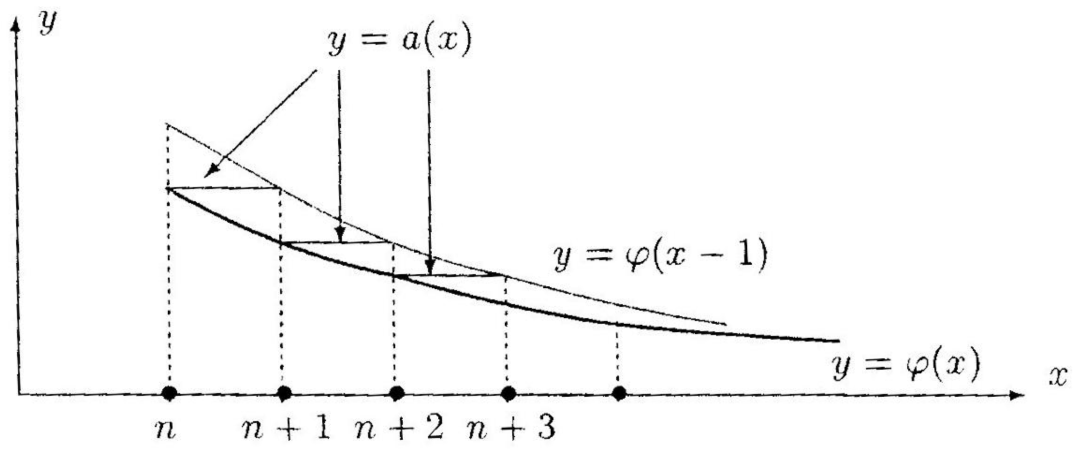
2) $\varphi(x)$ не возрастает,

3) $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится.

По соответствующей теореме Анализа ряд сходится.

Мы воспроизведем фрагмент ее доказательства.

Рассмотрим еще одну вспомогательную функцию – кусочно-постоянную $a(x)$, равную $a(k)$ при $k \le x < k+1$. Сделаем это на промежутке $x \ge n$ — см. рис. 506.1. Как видно, график функции $a(x)$ образует ступенчатую фигуру, площадь которой, расположенная правее вертикали $x = n$, равна сумме остатка, поскольку каждый входящий в нее прямоугольник имеет площадь, равную соответствующему члену ряда. Благодаря невозрастанию $\varphi(x)$, ее график расположен ниже графика $a(x)$. График же $\varphi(x-1)$ расположен выше графика $a(x)$.



.5 Рис. 506.1

Поэтому остаток $r_n = a_n + a_{n+1} + \ldots$ мажорируется и минорируется двумя несобственными интегралами:

$$\int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx \le r_n \le \int_n^{+\infty} \varphi(x-1)\,dx,$$

т. е.

$$r_n \in \left[\int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx,\ \int_{n-1}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right]. \qquad (506.1)$$

Ввиду же непрерывности этого интеграла по нижнему пределу (почему?), можно написать это включение через равенство с неопределенным членом:

$$r_n = \int_{\theta}^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \theta \in [n-1,\ n]. \tag{506.2}$$

Есть и другие формы неравенства для остатка. Например, из рис. 506.1 можно увидеть (пусть студент это и увидит!), что

$$r_n \le a_n + \int_{n}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда — оценка с участием только одного интеграла:

$$\int_{n}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \le r_n \le a_n + \int_{n}^{+\infty} \varphi(x)\,dx. \tag{506.3}$$

А можно написать и в интервально-арифметическом виде:

$$r_n \in \int_{n}^{+\infty} \varphi(x)\,dx + [0,\ a_n]. \tag{506.3a}$$

Пример 506.1. Рассмотрим *обобщенный гармонический ряд*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p), \quad p > 1.$$

Его сумма $\zeta(p)$ называется *дзэта-функцией Римана* (**Bernhard Riemann**, 1826 – 1866).

Продолжая функцию n^{-p} с натуральных значений n на полуось $x \ge 1$, получаем $\varphi(x) = x^{-p}$. Вычисляем нужный для оценки интеграл:

$$\int\limits_{n}^{+\infty} \varphi(x)dx = -\frac{1}{p-1}x^{-p+1}\Bigg|_{x=n}^{x\to+\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Таким образом, для остатка справедливо неравенство:

$$\frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}} \le r_n \le \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}}. \tag{506.4}$$

Как видно, правая часть эквивалентна левой части при $(n \to +\infty)$ и потому оценка является хорошей.

Замечание 506.1. Фигурирующий в оценке остатка интеграл может оказаться и "неберущимся". Тогда остается искать для него в аналитической форме верхнюю и нижнюю границы:

$$\psi_1(n) \le \int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx \le \psi_2(n),$$

хотя в роли нижней можно взять тривиальную: a_{n+1}. Как искать эти границы? Конечно, оценивая сверху и снизу подынтегральную функцию. Есть и другие возможности. Они будут рассмотрены в главе о локализующем вычислении интегралов.

507. Знакопеременные ряды: ориентация на абсолютную сходимость

В случае знакопеременного ряда остаётся:

а) рассматривать ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n\ge1} |a_n|$,

либо

б) сразу мажорировать ряд по модулю сходящимся:

$$\sum_{n\ge1} |a_n| \le \sum_{n\ge1} b_n$$

и в дальнейшем для остатка исходного ряда взять в качестве мажоранты остаток $\psi_n = b_n + b_{n+1} + \ldots$. Тогда $|r_n| \le \psi_n$ и потому

$$-\psi_n \le r_n \le \psi_n \tag{507.1}$$

или, другими словами,

$$r_n \in [-1,\ 1]\,\psi_n.$$

Тут следует заметить, что $-\psi_n \not\to \psi_n$ и поэтому эта оценка является всего лишь удовлетворительной (если, конечно, мажорантный ряд сходится).

На практике по уже понятным студенту причинам следует использовать Ψ_n — интервальное расширение для ψ_n. Так что следует производить расчет правой части включения:

$$s \in S_{n-1} + [-1,\ 1]\,\Psi_n.$$

§ 51. ДВУХХОДОВАЯ АЛГОРИТМИКА СУММИРОВАНИЯ ЧИСЛОВОГО РЯДА

510. Общее описание

Процесс, управляемый этой алгоритмикой, состоит из двух частей: *суммирования вперед* и *суммирования назад*.

На первой части процесса последовательно вычисляются для s локализаторы Z^k, образующие вложеную последовательность:

$$Z^{n_0} \supseteq Z^{n_0+1} \supseteq Z^{n_0+2} \supseteq \ldots \ni s,$$

где n_0 – некоторое натуральное число, начиная с которого разрешено применение оценки остатка $r_n \in R_n$, т. е. при $n \geq n_0$.

В качестве начального локализатора можно положить

$$Z^{\text{нач}} = Z^{n_0-1} = [-\text{НБЧ},\ \text{НБЧ}].$$

Формируются эти отрезки Z^k на основании интервальных расширений для s:

$$S_{n-1} + R_n, \quad n \geq n_0,$$

получаемых машиной. Для этих n полагается:

$$Z^n = Z^{n-1} \cap (S_{n-1} + R_n).$$

Т. е. из $S_{n-1} + R_n$ извлекается общая часть с предыдущим локализатором Z^{n-1}.

Первая из операций этого рода выглядит так:

$$Z^{n_0} = Z^{\text{нач}} \cap (S_{n_0-1} + R_{n_0}) = (S_{n_0-1} + R_{n_0}).$$

Отрезки же S_n формируются так: $S_n = S_{n-1} + A_n$, где A_n — интервальное расширение для a_n. При этом полагается $S_0 = 0 = [0,\ 0]$. Как видно, эти множества формируются добавлением очередного члена ряда (в его интервальной форме) в порядке возрастания номера. Этим и вызван термин "суммирование вперед".

Теорема. Пусть $Z^{n_0} \supseteq Z^{n_0+1} \supseteq \ldots$ — вложенная последовательность боксов в R^n_{M}. Тогда в машинном исполнении она *стабилизируется*, т. е. при некотором m достигается равенство:

$$Z^{m+1} = Z^m.$$

Доказана в книге [Меньшиков 2.3]. См. также один из следующих Выпусков.

По теореме последовательность локализаторов для s, вычисленная компьютером, стабилизируется. Этот факт и принимается за окончание первой части.

Вторая часть исходит из достигнутого ИР остатка R_m. К нему добавляются A_{m-1}. К полученной сумме добавляется A_{m-2} и т. д., в порядке уменьшения номера члена ряда. Заканчивается это добавлением A_1. Получается локализатор

$$S_{\text{об}} = R_m + A_{m-1} + \ldots + A_1 \ni s.$$

Как правило, получается значительно более узкий отрезок $S_{\text{об}}$, нежели $Z^{\text{стаб}} = Z^m$.

В заключение образуем их пересечение: $S = Z^{\text{стаб}} \cap S_{\text{об}} \ni s$.

Замечание 510.1. Меньшая ширина $S_{\text{об}}$, чем $Z^{\text{стаб}}$, соответствует известному явлению в суммировании чисел на ЭВМ: сложение в порядке возрастания модуля связано с меньшими вычислительными ошибками, чем наоборот. Этот факт можно даже облечь в форму теоремы. Соответствующие аналитико-библиографические разработки могли бы составить курсовую работу.

Оказывается, родственное явление возникает и при интервальном суммировании. В первом случае как правило получается более узкий локализатор для суммы ряда, чем во втором. Сходящиеся же ряды имеют тенденцию к уменьшению модуля члена по понятной причине.

Замечание 510.2. Но тогда ценность первой части суммирования состоит в том, что она указывает, с какого n надо начинать суммирование назад. Попутно становится видно, чего не шире будет получен локализатор в конце-концов. Вот почему главной частью суммирования по этой алгоритмике оказывается как правило (но любопытно, что не всегда) вторая. По этому поводу можно смотреть примеры в п. 84 книги [Меньшиков 1].

Замечание 510.3. При суммировании вперед из-за мажоризации на каждом n происходит дополнительное, паразитное расширение. Поэтому вилка S_{n-1} расширялась бы неограниченно. Локализатор же R_n, вообще говоря, убывает по ширине из-за стремления $r_n \to 0$. Поэтому со временем $S_{n-1} + R_n$ начинает расширяться.

511. Унификация суммирования лейбницева ряда

Известный нам вариант суммирования лейбницева ряда:

$$s \in S_{n-1} \vee S_n \tag{511.1}$$

не укладывается в схему $s \in S_{n-1} + R_n$. Поэтому вспомним другую теорему (по существу другую формулировку) о ряде Лейбница: остаток сохраняет знак своего первого члена и не превышает его по модулю. Эти слова записываются так:

$$r_n \in a_n \vee 0. \tag{511.2}$$

По существу, это равносильно соотношению (511.1) с малыми литерами s. Нам это дает выражение локализатор остатка:

$$R_n = A_n \vee 0. \tag{511.3}$$

512. Недостатки и возможности улучшения алгоритмики

1) Как видно, отрезки A_n используются дважды: на прямом ходе и обратном. Если машина имеет достаточную память, то после первого применения их имеет смысл отправлять в память, а на обратном ходе вызывать оттуда.

2) В определённых случаях стабилизация может наступить слишком быстро. Тогда первая часть дает слишком широкую вилку Z^m со слишком малым m. Отметим два таких случая.

2.1) Совсем не обязательно члены ряда убывают по модулю. Они могут осциллировать. Например, возрастать при малых n. В связи с этим может оказаться $w(S_n + R_{n+1}) > w(S_{n-1} + R_n)$ и даже

$$S_n + R_{n+1} \supseteq S_{n-1} + R_n. \tag{512.1}$$

Посмотрим, как это скажется на Z^n. Пишем:

$$Z^n = Z^{n-1} \cap (S_n + R_{n+1}) = Z^{n-2} \cap (S_{n-1} + R_n)_1 \cap (S_n + R_{n+1})_2 =$$

$$= Z^{n-2} \cap ((\ )_1 \cap (\ )_2) = Z^{n-2} \cap (\ )_1 = Z^{n-1}.$$

Как видно, наступила стабилизация. Поэтому первая часть процесса дает очень грубый локализатор и потому своего назначения не выполняет.

2.2) К тому же явлению приводит пропажа одного из членов ряда. Допустим, ряд таков, что $a_{n'} = 0$. Тогда $r_{n'} = r_{n'+1}$. Если это обстоятельство повторяется для интервальных расширений:

$$A_{n'} = 0 = [0,\ 0], \quad R_{n'} = R_{n'+1},$$

то окажется

$$S_{n'} + R_{n'+1} = S_{n'-1} + R_{n'},$$

т. е. частный случай включения (512.1). Наступает стабилизация и первая часть процесса заканчивается раньше времени.

3) В этом случае "досрочного" окончания первой части ясно, что и вторая часть вряд ли даст узкую вилку: для этого m слишком мало. Поэтому надо иметь возможность проводить только вторую часть с произвольно выбираемым m.

§ 52. НОВОЕ ПОПОЛНЕНИЕ БАЗОВОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ

520. Дополнительные стандартные процедуры

Ими пополняется наша БИПС из §§ 18, 25. Сведения о них для пользователя содержатся в табл. 520.1. Через "X" обозначен адрес интервальной пары, содержащей X. Через "Y" обозначен адрес интервальной пары, хранящей отрезок Y. Тогда операционная часть первой макрокоманды вызова пишется в виде G 60 (т.е. GOSUB 60). Если же Y — число (вырожденный отрезок), то под "Y" понимается хранящий его регистр; тогда вместо G 60 пишется G 45. Хотя, конечно, можно пользоваться интервальной возможностью и в вырожденом случае.

Таблица 520.1

Строка	Операция	Исходное состояние пары 0	Вызов операции	Примечание
90	$m+n$	m	A=n: G 90	m, n – цел.
91	$m-n$	m	A=n: G 91	—"—
92	mn	m	A=n: G 92	—"—
100	$n!$	любое	A=n: G 100	n - натур.
106	$n!!$	любое	A=n: G 106	n - натур.
185	X^p	X	A=p: G 185	$X \geq 0$
45	X^Y	любое	A="X": G 60/86 A="Y": G 45	$X \geq 0$ Y инт./нат.

Ниже приводятся тексты соответствующих программных фрагментов и комментарии к ним.

521. Целочисленные арифметические операции. Формирование константы C1

```
90 K(0) = K(0) + A: GOTO 93
91 K(0) = K(0) - A: GOTO 93
92 K(0) = K(0) * A
93 L(0) = K(0): IF ABS(K(0)) >= C1 THEN 7
ELSE RETURN
94 RETURN
```

Предполагается, что один операнд находится перед операцией в паре 0, в её младшей компоненте $K(0)$, а второй вводится параметром A. При этом вычитание производится по схеме "пара $0 - A \mapsto 0$". Все эти ПП имеют общую концовку, которая начинается строкой 93. Эта строка выясняет, укладывается ли результат основной строки подпрограммы в наибольшее 24-разрядное двоичное целое число, которое равно $C1 = 2^{24} - 1$ (т.е. 16777215). Если это так, то результат остаётся в паре 0. Если это не так, то возникает возможность ошибочности этого результата. Тогда он подвергается мажоризации посредством ПП 7. Другими словами, он расширяется до отрезка, содержащего истинный результат.

Формирование константы C1 поручается ПП 2, которая поэтому дополняется соответствующей командой (вторая строка).

```
2 K = 23: GOSUB 98: C = P
C1=2/P-1
K = 126: GOSUB 98: D1 = P
DIM K(100), L(100): GOSUB 2.1: RETURN
```

522. Факториалы — простой n! и двойной n!!.

Соответственно ПП 100 и ПП 106. Обе они, как только что рассмотренные ПП, применяют мажоризацию, как только формируемое для факториала произведение достигает или превышает $C1 = 2^{24} - 1$. Операнд n назначается параметром A. Естественно, значение факториала остаётся в паре 0.

Текст этих ПП следует ниже:

```
100 H = 0
101 IF A = 0 THEN A = 1: G 86
102 B = A: G 86: IF B <= 2 + H THEN RETURN
103 B = B - 1 - H: K(0) = K(0)  B: G 93
104 IF B > 2 + H  SGN(K(A) / 2 - INT(K(A) / 2))
THEN 103
105 RETURN
106 H = 1: GOTO 101
```

Студентам следует самостоятельно разобраться в этих ПП.

523 Степенная функция с числовым показателем

Предполагаем, что
X^p $(X \geq 0,\ p \in R$, но $p > 0$, если $\underline{X} = 0)$.

Перед запуском X должен находиться в паре 0, а число p присвоено параметру A. Текст:

```
185  IF K < 0; PRINT "#(x < 0)^V{p}"
186  IF K = 0; IF A ≤ 0; PRINT "#(x = 0)^V{p < 0}"
187  IF K = 0; IF L = 0; RETURN
188  IF K = 0; K = L; G 189: K = 0: RETURN
189  B = A: A = 0: G 18: A = B: G 82:
     B = A: A = 0: G 16: A = B: RETURN
```

Строка 185 предписывает аварийный останов (АВОСТ), когда $\underline{X} < 0$.

Строка 186 предписывает АВОСТ, когда $\underline{X} = 0$, $p \leq 0$.

Строка 189 вычисляет $\exp(A * \ln X)$, в строке 188 она используется как подпрограмма в том случае, когда $\underline{X} = 0$.

Строка 187 сохраняет нулевой X, передавая управление строке 188, если это не так.

Строка 188 занимается случаем, когда $\underline{X} = 0$ и (благодаря строке 187) $\overline{X} > 0$. Она сначала делает содержимое пары 0 равным $[\overline{X}, \overline{X}]$, затем с помощью ПП 189 вычисляет $[\overline{X}, \overline{X}]^p$. Затем возвращает младшей компоненте пары 0 нулевое значение. Поэтому ПП 189 избавляется от необходимости логарифмировать нуль.

Если же $\underline{X} > 0$, $\overline{X} > 0$, то управление передаётся ПП 189 как концовке подпрограммы 185. Сначала значение параметра A = p отдаётся на хранение бэйсик-переменной B. Затем макрокомандой A = 0: G 18 вычисляется $\ln X$, который остаётся в паре 0. Затем макрокомандой A = B: G 82 этот логарифм умножается на

p; найденное произведение остаётся в паре 0. При этом переменная B, в которой хранилось p, может испортиться из-за ПП 6. Поэтому p вновь присваивается переменной B. Затем макрокомандой A = 0: G 16 произведение p ln X подвергается потенцированию. Множество X^p остаются в паре 0, оператором A = B восстанавливается (согласно нашему стандарту) прежнее значение переменной A. Само собой, наши обозначения lnX и X^p имеют в виду интервальные расширения соответствующих функций.

524 Степенная функция с интервальным показателем

45 GOSUB 5: A = 1: GOSUB 52
IF K(0) < 0 THEN PRINT "#(x < 0) ∨ p"; : GOTO 99
IF K(0) = 0 AND K(1) ¡= 0 THEN PRINT "#(x = 0)$^{(p=<0)}$"; : GOTO 99
IF K(0) = 0 AND L(0) = 0 AND K(1) > 0 THEN RETURN
IF K(0) = 0 AND L(0) > 0 THEN K(0) = L(0): GOTO 46: K(0) = 0: RETURN
46 B = A: A = 0: GOSUB 18: A = 1: GOSUB 12: A = 0: GOSUB 16: A = B: RETURN

Эта ПП осуществляет возведение интервального основания в интервальную степень. Используется пара 1. Поэтому в программах не следует использовать эту пару. Подготовка и задание этой операции проводится по схеме: A=: GOSUB 60 (основание в 0-ую пару), A=@: GOSUB 45 (показатель в 1 пару). Будущие основание и показатель занимают пары и @.

§ 53. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМИКИ

530. Блок-схема

Описанная выше алгоритмика в виде блок-схемы изобоажена на рис. 520.1. Главная часть программы, называемая Программой "Ряд", соответствует этой схеме. Она опирается на вариант БИПС, созданный в § 18 (Выпуск 1) и дополненный в § 25 (Выпуск 2).

Блок 1 этой программы есть не что иное, как строка 1 БИПС с подпрограммой инициализации (ПП 2).

В остальном блок 1 состоит из команды, выдающей информацию о характере задачи. Номер занимаемой ею строки – 1100, первая команда второго блока имеет номер 1200, и т.д., номер строки первой команды 6-го блока – 1600.

Главную программу поддерживают не отражённые на рис. 530.1 подпрограммы, вычисляющие локализатор A_n члена ряда a_n (ПП 7000) и локализатор R_n остатка r_n (ПП 7500). Кроме того, для предварительной отладки этих ПП в комплекте имеется *тест-программа* ТП 6510.

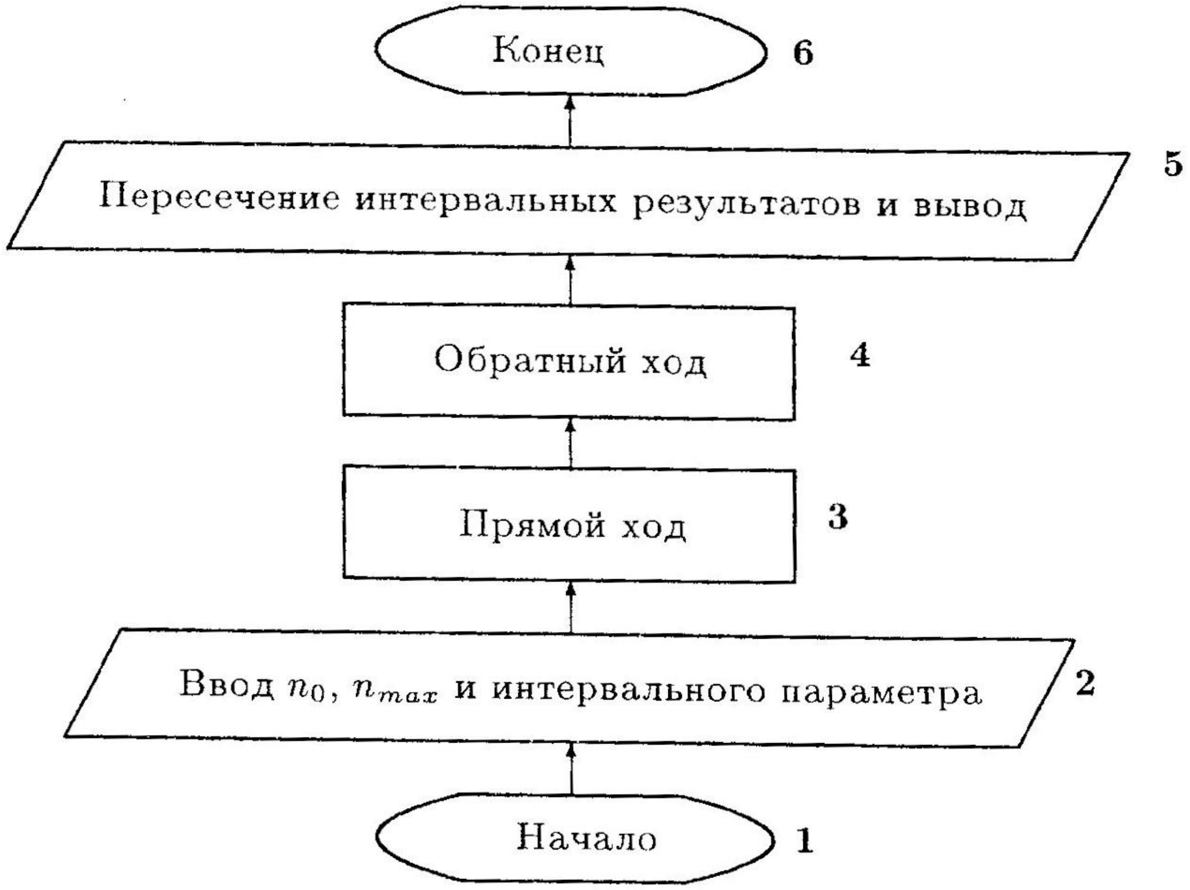


Рис. 530.1

В числе исходных данных в блоке 2 вводятся:

n_0 — значение n, начиная с которого локализатор остатка действителен,

$n_{\max}$ — предельное значение n, на котором обрывается прямой ход, если к этому времени он не закончится стабилизацией (предотвращает практическое "зависание" прямого хода, когда ряд сходится лениво),

x — параметр, который может входить в ряд (например, p в дзэта-функции или x в степенном ряде); для общности предусмотрена его интервальная форма.

531. Распределение памяти.

Распределение памяти даётся табл. 531.1.

Числовой материал размещается как в регистрах, так и в парах интервальной памяти.

Таблица 531.1

Регистр	Назначение
D	n
E	$(-1)^n$
F	n_0
J	n_{max}
Интервальная пара	Назначение
2	z^i на прямом ходе
3	Формирование $S_{об}$
4	A_n
5	Хранение z^m на обратном ходе
6	Параметр ряда X

532. Программная реализация главной программы.

Для краткости обозначаем подпрограммы из БИПС не GOSUB △, а G △. Понятно, что при вводе программ в компьютер полная запись должна быть восстановлена.

Программа 532.1 (Главная часть системы "Ряд").

1 G 2: GOTO 1000

Комментарий. В промежутке между строками 1 и 1000 размещаются подпрограммы БИПС.

1000 CLS

Комментарий. Эта команда стирает экран.

1100 PRINT "Система РЯД"

1200 INPUT "n_0 =?", F, "n_{max} =?", J

1210 PRINT "Интервальный параметр=?";: A=6: G 51

1300 A=3: G 39: D=0: E=1: L(2)=1E+38: K(2) = -L(2)

Комментарий. Здесь производится установка начальных значений. В том числе $Z^0 = [-1E{+}38,\ 1E{+}38]$ вместо [−НБЧ, НБЧ].

1310 D=D+1: E=-E

Комментарий. Увеличивается n и меняется знак $(-1)^n$.

1320 G 7000: A=4: G 40: IF D<F THEN 1370

Комментарий. A_n вычисляется и посылается в пару 4.

1330 G 7500: A=3: G 10

Комментарий. Вычисляется R_n и добавляется к S_{n-1}. Однако остаток не включается в игру, пока $n < n_0$.

1340 A=2: G 34: G 33: IF B=0 THEN 1380

Комментарий. Промежутки Z^n формируются в паре 2. В этой строке посредством пересечения $R_n + S_{n-1}$ с Z^{n-1} получается Z^n и тут же сравнивается с Z^{n-1}. Если $Z^n = Z^{n-1}$, то управление передается к строке 1380, которая предписывает вывод промежутка Z^m и пары 2 на экран.

1350 IF D=J THEN 1380

Комментарий. Если оказывается $n = n_{\max}$, то управление передается строке 1380.

1360 G 40

Комментарий. Локализатор Z^n вводится в пару 1.

1370 A=4: G 60: A=3: G 10: G 40: GOTO 1310

Комментарий. Здесь из пары 4 вынимается значение A_n, посланное туда при предшествующем значении n, т. е. A_{n-1}. Оно добавляется к только что найденному S_{n-1}, и сумма $S_{n-1} + A_n$ помещается в пару 3. После этого совершается переход к повторению цикла.

Именно к этим действиям совершается переход от строки 1320, когда из-за неравенства $n < n_0$ приходится выключать работу с остатком.

1380 PRINT "[Сумма] прямого хода=";: G 50: A=5: G 40: PRINT "n=";D

Комментарий. Заканчивается прямой ход. Производится вывод на экран и посылка вилки Z^m в пару 5 для её употребления на обратном ходе. Достигнутое значение $n = m$ посылается на экран.

1400 G 7500: A=3: G 40

Комментарий. Здесь R_n вычисляется подпрограммой 7500 и отправляется в пару 3.

1410 D=D-1: E=-E

Комментарий. Текущее n уменьшается, а $(-1)^n$ меняет знак.

1420 G 7000

Комментарий. Вычисляется A_{n-1} — локализатор для a_{n-1}.

1430 A=3: G 10: G 40: IF D $\neq$ 1 THEN 1410

Комментарий. Здесь A_{n-1} складывается с уже накопленной суммой, которая началась с $R_{n_{\max}}$, и получаемая сумма посылается в пару 3. Если имеющееся n (о нем только что говорилось как об $n-1$) равно 1, то производится вывод результата обратного хода — локализатора для s. Если же $n \neq 1$ то производится возврат к строке 1410, т. е. переход к новому слагаемому.

1440 PRINT "[Сумма] обратного хода=";: G 50.1

Комментарий. На экран выводится содержимое пары 2, т. е. результат суммирования на обратном ходе.

1500 A=5: G 34: PRINT "[Сумма=]";: A=0: G 50.1: END

1600 END

Здесь $[X]$ означает локализатор множества X.

533. О составлении и отладке подпрограмм для членов ряда и оценки остатка

При составлении этих интервальных подпрограмм, ПП 7000 для a_n и ПП 7500 для остатка, следует следить за тем, чтобы в них не загружались регистры и интервальные пары, используемые в главной программе. Таким образом, разрешается использовать для помещения информации пары, начиная с 8-й.

Пример 504.1. В § 50 рассматривался ряд $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{n+1}{n!+1}$. Для вычисления общего члена можно предложить следующую ПП. □

Программа 533.1.

```
7000 A=D: G 190
7010 A=1: G 90
7020 A=6: G 40
7030 A=D: G 86
7040 A=1: G 90
7050 A=6: G 13
7060 RETURN
```

□

Для остатка того же ряда получена оценка:

$$a_n = \frac{n+1}{n!+1} \leq r_n \leq \frac{1}{(n-1)1} + \frac{2}{n!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^2+1}{n!n}.$$

Ниже следует соответствующая ПП.

Программа 533.2.

```
7500 A=D: G 190
7510 G 92
7520 A=7: G 40
7530 A=D+1: G 86
7540 G 92
7550 A=1: G 90
7560 A=7: G 13
7570 G 40
7580 G 7000
7590 A=7: G 61
7600 RETURN
```

□

Упражнение 533.1. Провести анализ ПП 7000 и 7500 и убедиться в их верности. □

После составления этих ПП следует их отладить.

Сначала нужно вычислить контрольные значения как члена ряда, так и локализатора остатка для нескольких младших значений n. Для этого используется подручный калькулятор.

Пример 504.1 (продолжение). Полученные при этом результаты сведены в табл. 524.1. □

Таблица 533.1

n	Контрольные значения	
	для a_n	для r_n
1	1	$[1,\ 5]$
2	1	$\left[1,\ \frac{5}{2}\right]$
3	$4/7 \approx 0.571\ 428\ 571$	$\left[\frac{4}{7},\ \frac{17}{18}\right] \approx$ $\approx [0.571\ 428\ 571,\ 0.944\ 444\ 444]$

□

Затем найденные значения нужно сравнить с теми результатами, которые даются этими подпрограммами.

Ниже приводится тест-программа, которую следует вставить в систему "Ряд". Ссылку на неё следует вставить непосредственно после строки 1000 в виде строки:

GOTO 6500.

Программа 524.3.

```
6500 INPUT "n=? ", D
REM 6510 PRINT "Инт. параметр=? "; : A = 6: GOSUB 51
6520 G 7000
6530 PRINT "Чл. ряда=";: A=0: G 50
6540 G 7500
6550 PRINT "Оп. остатка=";: A=0: G 50
6560 END
```

□

Как видно, посредством тест-программы сначала вызывается ПП для локализатора члена ряда, затем ПП для локализатора оценки остатка.

Сначала вводится значение n. Интервальный параметр X вводится, если предусмотрен. В этом случае опервтор REM снимается со строки 6510.

Пример 504.1 (продолжение) . В данном случае параметр X отсутствует. Вводятся те же значения n. Полученные при этом результаты сведены в табл. 533.1. Как видно, они близки к найденным контрольным значениям и объемлют их. Можно полагать ПП составленными верно.

Таблица 533.2

n	Локализаторы — экранные значения	
	для a_n	для r_n
1	$[.9_7,\ 1]$	$[.9_7,\ 5]$
2	$[.9_7,\ 1]$	$[.9_7,\ 2.5]$
3	$[.571\ 428\ 5,\ \ .571\ 428\ 7]$	$[.571\ 428\ 5,\ \ .94_5 5]$

□

534. Продолжение. Рабочие вычисления

Убирая строку **GOTO 6500**, восстанавливаем систему РЯД, состоящую из БИПС, Главной программы, отладочной программы и подпрограмм члена и остатка данного конкретного ряда.

Пример 504.1 (продолжение). Суммируем все тот же ряд на компьютере. Берем $n_0 = 1$, $n_{\max} = 1000$. Мы взяли столь большое значение для того, чтобы прямой ход закончился "естественным путем" – стабилизацией. Компьютер дал следующие экранные результаты:

После прямого хода:	После обратного хода:
$[2.832\ 562,\ 2.832\ 567]$ $w = 5.01E - 06$ $n = 11$	$[2.832\ 564,\ 2.832\ 566]$ $w = 1.91E - 06$

Окончательный результат: локализатор суммы ряда, полученный на обратном ходе, причём для этого хватило 11 циклов.

После корректировки он таков: $[2.832\ 563,\ 2.832\ 567]$, а после совместного округления (Выпуск 2) выражается числом: 2.832 6.

□

§ 54. УТОЧНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

540. Схема Хорнера и ее применение к численному суммированию ряда

Напомним слушателям суть *схемы Хорнера* (**William George Horner**, 1786 – 1837) вычисления степенных полиномов, понятие о которой обычно дается в курсе Алгебры. Рассмотрим пример.

Пример 540.1. Рассмотрим кубический полином и его следующее преобразование:

$$(540.1)\quad p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \big((a_3x + a_2)x + a_1\big)x + a_0.$$

Как видно, вычислительный процесс организован из нескольких шагов, на каждом из которых вычисляется очередная пара круглых скобок:

$$\text{на первом шаге: } a_3x + a_2 \overset{def}{=} (\ )_1;$$
$$\text{на втором шаге: } (\ )_1x + a_1 \overset{def}{=} (\ )_2;$$
$$\text{на третьем шаге: } (\ )_2x + a_0 \overset{def}{=} p_3(x).$$

Это разложение полинома (530.1) и выражает схему Хорнера. Ее применение резко уменьшает объем вычислений (пусть читатель сравнит количество операций в исходном выражении $p_3(x)$ и в хорнеровом) и потому уменьшает набегающую вычислительную погрешность. Кроме того, расчет приобретает четко выраженный циклический характер, что облегчает составление программы. При вычислениях в интервальной манере схема Хорнера отвечает принципу "выноси, все, что можно вынести" (о множителях), который диктуется субдистрибутивностью. Уменьшение набегающей погрешности проявляется в сужении полученных локалийзаторов.

Так вот, для суммирования ряда имеет смысл применять хорнерову и "хорнероподобные" схемы.

Пример 540.2. Рассмотрим ряд для экспоненты:

$$1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots.$$

Это – ряд Маклорена – частный случай тэйлорова разложения. Поэтому каждая его частичная сумма представляет полином Тэйлора. Значит, остаток можно записать, например, в форме Лагранжа:

$$r_n = \frac{e^\theta}{n!}x^n, \quad \theta \in x \vee 0, \text{ откуда } r_n \in \frac{e^x \vee 1}{n!}x^n \overset{def}{=} R_n.$$

Остается к этому локализатору остатка добавить в интервальной манере предшествующие члены тэйлорова полинома. Сделаем это "в режиме обратного хода":

$$R_n + \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + x + 1\right)_1 =$$

применяем схему Хорнера:

$$\left(\left(\ldots\left(\frac{e^x \vee 1}{n}x + 1\right)\frac{x}{n-1} + 1\right)\frac{x}{n-2}\ldots + 1\right)x + 1$$

— читатель сам расставит нужное количество круглых скобок. В итоге вычислений получится (согласно Второй Теореме о композициях) интервальное расширение для суммы ряда, т. е. для e^x. □

Строго говоря, в этом примере имеет место не хорнерова, а *хорнероподобная* схема: выносятся за скобки не только множители x, но и другие, образующие факториалы в знаменателях.

Идея *хорнеризации*, как видим, требует индивидуального подхода к ряду. Это — еще один возможный метод интервального суммирования, особенно степенных рядов.

Хорнеризация ряда, как и получение оценок остатка, — одна из задач для символьных вычислений. Тема для научной работы студента!

Замечание 540.1. В примере 540.2 $s = e^x$. Но полученное включение

$$e^x \in \frac{e^x \vee 1}{n!}x^n + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + x + 1$$

непосредственно все-таки не годится для нахождения e^x, так как функция эта содержится в правой части. Чтобы получить пригодное включение, вернемся к формуле Маклорена с лагранжевым остатком:

$$e^x = (\ )_1 + \frac{e^\theta}{n!}x^n, \tag{540.2}$$

где выражение $(\ )_1$ определено в примере 540.2. Пусть сначала $x > 0$. Тогда $e^\theta = e^x\theta'$, где $\theta' \in [0,\ 1]$. Поэтому (540.2) принимает вид:

$$e^x = (\ )_1 + \frac{e^x\theta'}{n!}x^n \quad \text{или} \quad \left(1 - \frac{\theta'}{n!}x^n\right)_2 e^x = (\ )_1.$$

Если предположить дополнительно, что x не слишком велик:

$$\frac{x^n}{n!} < 1, \tag{540.3}$$

то получим $(\ )_2 > 0$ и тогда

$$e^x = \frac{(\ )_1}{(\ )_2}. \tag{530.4}$$

Расширяя θ' в знаменателе до $[0,\ 1]$, получаем отсюда включение:

$$e^x \in \frac{(\ )_1}{1 - [0,\ 1]\dfrac{x^n}{n!}} = \frac{(\ )_1}{\left[1 - \dfrac{x^n}{n!},\ 1\right]}. \tag{540.5}$$

Это включение уже практически пригодно для нахождения e^x. Именно, по x находим такое n, чтобы выполнялось (540.3), проводим хорнеризацию полинома $(\ )_1$ и выполняем вычисление правой части (540.5) в интервальной манере.

В случае $x < 0$ нужно сосчитать согласно (540.5) локализатор $[e^{-x}]$, а затем сделать то же для обратной величины $[e^{-x}]^{-1}$.

541. Ускорение суммирования ряда. Куммеризация

Один из инструментов суммирования медленно сходящихся ряда – выразить данный ряд через быстро сходящийся. С различными способами такого *ускорения сходимости* студент может познакомиться в книге Данилова и др. Мы остановимся на наиболее ярком, по нашему мнению, на *способе Куммера* (**Ernst Eduard Kummer**, 1810 – 1893).

Пусть имеются знакопостоянные ряды $\sum a_k$ и $\sum b_k$. Скажем, что второй *сходится быстрее первого*, если

$$\frac{b_k}{a_k} \to 0 \ \ (k \to +\infty).$$

Допустим, что для ряда $\sum a_k$ удалось найти *эквивалентный* ряд $\sum b_k$ с известной суммой s^*. Эквивалентность означает:

$$b_k \sim a_k \ \ (k \to +\infty).$$

Напомним, что эквивалентные ряды не обязаны иметь одно и ту же сумму.

Запишем:
$$s = \sum_k = \underbrace{\sum b_k}_{s^*} + \sum (a_k - b_k).$$

Дело свелось к изучению и вычислению нового ряда $\sum(a_k - b_k)$. Покажем, что он сходится быстрее исходного ряда. Действительно,
$$\frac{a_k - b_k}{a_k} = 1 - \frac{b_k}{a_k} \to 0,$$
благодаря эквивалентности. Естественно, с этим новым рядом работать легче. Иногда и новый ряд с успехом подвергается подобной *куммеризации*.

Пример 541.1. Пусть дан ряд
$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}. \text{ Как видно, } \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Поэтому ряд эквивалентен ряду для $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Изучим состояние дел с "разностным" рядом
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)_1.$$

Благодаря неравенству $\sin x \le x$ $(|x| \le 1)$ члены ряда отрицательны. Поэтому — и остаток. Получим нижнюю границу остатка. Благодаря другому неравенству: $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{6}$ $(|x| \in [0,\ 1])$, получаем: $(\ )_1 \ge -\dfrac{1}{6n^6}$. Отсюда – двустороннее неравенство для остатка:
$$-\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^6} \le r_n \le 0.$$

Как видно, новый ряд сходится значительно быстрее исходного.

Замечание 541.1. Тут можно вспомнить, что в примере 506.1 мы нашли оценку 506.4, из которой при $p = 6$ следует:
$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^6} \le \frac{1}{5n^5} + \frac{1}{n^6}.$$

Поэтому для r_n получается более простая оценка:

$$-\left(\frac{n^{-5}}{30}+\frac{n^{-6}}{6}\right)\le r_n\le 0.$$

Упражнение 541.1. Применить куммеризацию к ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!+1}.$$

542. Использование справочной литературы по рядам

Работа с рядами и, в том числе, куммеризация сильнейшим образом облегчается справочниками. Прежде всего это — упоминавшаяся книга Данилова и др. Затем отметим справочники Двайта, Прудникова и др., Абрамовица и Стиган, Градштейна и Рыжика.

Эти книги перечисляются в порядке роста сложности пользования ими. Они же содержат информацию об интегралах. Есть и другие справочники.

Отметим еще, что приёмы сворачивания рядов можно найти в книгах Демидовича и Марона, Данилова и др.

§ 55. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА "СУММА – ИНТЕГРАЛ" И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РЯДАМ

Обратимся к более изощрённому методу суммирования медленно сходящихся рядов.

550. Сведения из Анализа: числа Бернулли

Примем определение *чисел Бернулли* (**Jakob Bernoulli**, 1654 – 1705) по Лапласу (**Pierre-Simon de Laplace**, 1749 – 1827). Возьмем $B_0=1$ и для $n\ge 1$ положим

$$B_n=(-1)^n n!\begin{vmatrix}\frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 & 0\\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!}\end{vmatrix}.$$

Пример 550.1. Из этого определения $B_1 = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$, далее

$$B_2 = 2\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

Слушателям для практического применения хватит следующих значений (без доказательства):

$$B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1,\ 2, \ldots),$$

$$B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6}. \qquad \square$$

Есть и другие, равносильные определения чисел Бернулли [Демидович и Марон, Данилов и др.].

551. Полиномы Бернулли

Определим их рекуррентной формулой Коши:

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad B_n(0) = B_n, \tag{551.1}$$

положив сначала $B_0(x) = 1$. Как видно, это – действительно полиномы с положительными старшими членами.

Пример 551.1. Как видно, поиск полиномов Бернулли состоит в поиске решений задачи Коши (551.1) для $n = 1,\ 2, \ldots$. Действуя так, получаем:

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{x}{2}. \qquad \square$$

В книге Данилова и др. имеются выражения нескольких следующих полиномов Бернулли (ПБ).

Примем без доказательства следующую лемму.

Лемма 551.1 (о ПБ). Справедливы равенства:

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n \quad (n \geq 2) \tag{551.2}$$

Собственно, нам будут нужны приведенные полиномы Бернулли (ППБ):

$$\beta_n(x) = B_n(x) - B_n.$$

Как видно, ППБ получаются из ПБ отбрасыванием постоянных слагаемых.

Пример 551.2. Так, $\beta_0(x) = 0, \qquad \beta_1(x) = x.$ □

Следствие (о ППБ). Справедливы равенства:

$$\beta_n(0) = \beta_n(1) = 0 \quad (n \geq 2). \tag{551.3}$$

552. Формула Эйлера первого порядка

Оказывается, для достаточно гладких функций справедливы тождества между суммой значений функции и интегралом, включая некоторые прочие члены. Они носят название формул Эйлера. Получим сначала простейшую из них.

Предположим, что функция $\varphi(x)$ типа $R \to R$ на интересующих нас промежутках имеет столько производных, сколько потребуется.

Интеграл $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(x)\,dx$ приведем к виду $\displaystyle\int_0^1$, для чего заменим переменную x на t так, чтобы при этом переходе оказалось: $k \Rightarrow 1,\ k+1 \Rightarrow 0$. Для этого положим $t = k+1-x$. Ясно, что такая замена отвечает нашему замыслу, причем $x = k+1-t$. Тогда получим:

$$I_k = \int_1^0 \varphi(k+1-t)\,d(k+1-t) = \int_0^1 \varphi(k+1-t)\,dt.$$

Теперь проведем интегрирование по частям:

$$I_k = t\varphi(k+1-t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\,d\varphi(k+1-t) = \varphi(k) + \int_0^1 t\varphi'(k+1-t)\,dt.$$

Теперь просуммируем эти равенства по $k = n, n+1, \ldots, s-1$:

$$\sum_{k=n}^{s-1} I_k = \boxed{\int_n^s \varphi(x)\,dx = \sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) + \int_0^1 t \sum_{k=n}^{s-1} \varphi'(k+1-t)\,dt.} \qquad (\text{ФЭ}_1)$$

Тождество в рамке и есть *формула Эйлера первого порядка* ФЭ_1.

Отметим, что интеграл в правой части, который можно было бы назвать остаточным членом, не содержит неопределенных параметров. В принципе, его можно было бы писать в неинтервальной форме, если бы φ' позволяла это.

Теперь видно, что для всех наших проведенных рассуждений хватает непрерывной дифференцируемости функции $\varphi(x)$.

553. Формула Эйлера произвольного порядка

Так будем называть тождество:

$$\int\limits_n^s \varphi(x)\,dx = \sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) + \sum\nolimits_p + J_p, \tag{ФЭ$_p$}$$

где обозначено:

$$\sum\nolimits_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{B_i}{i!} \left(\varphi^{(i-1)}(n) - \varphi^{(i-1)}(s)\right) \quad (p \geq 2),$$

$$J_p = \frac{1}{p!} \int\limits_0^1 \beta_p(t) \sum_{k=n}^{s-1} \varphi^{(p)}(k+1-t)\,dt,$$

причем предполагается $\sum_1 = 0$.

Студенту должно быть ясно, что ФЭ$_p$ в самом деле представляет частный случай при $p = 1$.

Для доказательства применим индукцию. Чтобы легализовать интеграл J_p, предположим существование непрерывной $\varphi^{(p)}$ на $[n,\ s]$.

Допустим, что верна ФЭ$_{p-1}$ предыдущего, $p-1$-го порядка:

$$\int\limits_n^s \varphi(x)\,dx = \sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) + \sum\nolimits_{p-1} + J_{p-1}.$$

Преобразуем здесь J_{p-1}:

$$J_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_0^1 \beta_{p-1}(t) \sum_{k=n}^{s-1} \varphi^{(p-1)}(k+1-t)\,dt. \tag{553.1}$$

Здесь

$$\beta_{p-1}(t) = B_{p-1}(t) - B_{p-1}. \tag{553.2}$$

Соответственно

$$J_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!}\left(\int_1 - \int_2\right). \tag{553.3}$$

Займемся этими двумя интегралами.

Сначала

$\displaystyle\int_1 = \sum_{k=n}^{s-1}\int_0^1 B_{p-1}(t)\varphi^{(p-1)}(k+1-t)\,dt =$ по дифференциальному уравнению для ПБ: $\displaystyle = \sum_{k=n}^{s-1}\int_0^1 \frac{B_p'(t)}{p}\varphi^{(p-1)}(k+1-t)\,dt.$

Интегрируем по частям с тем, чтобы повысить порядок $\varphi^{(p-1)}$. Учитываем, что $B_p'(t) = \beta_p'(t)$. Получаем:

$$\int_1 = \frac{1}{p}\sum_{k=n}^{s-1}\int_0^1 \varphi^{(p-1)}(k+1-t)\,d\beta_p(t) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=n}^{s-1}\left(\beta_p(t)\varphi^{(p-1)}(k+1-t)\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \beta_p(t)\varphi^{(p)}(k+1-t)\,dt\right).$$

Так как $\beta_p(0) = \beta_p(1) = 0$ (следствие о ППБ), то внеинтегральный член равен 0 и

$$\int_1 = \frac{1}{p}\int_0^1 \beta_p(t)\sum_{k=n}^{s-1}\varphi^{(p)}(k+1-t)\,dt. \tag{553.4}$$

Теперь – второй интеграл в (553.3):

$\displaystyle\int_2 = B_{p-1}\sum_{k=n}^{s-1}\int_0^1 \varphi^{(p-1)}(k+1-t)\,dt =$ проводим интегрирование:

$$= -B_{p-1}\sum_{k=n}^{s-1}\int_0^1 d\varphi^{(p-2)}(k+1-t) =$$

$$= = -B_{p-1}\sum_{k=n}^{s-1}\varphi^{(p-2)}(k+1-t)\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= -B_{p-1}\sum_{k=n}^{s-1}\left(\varphi^{(p-2)}(k) - \varphi^{(p-2)}(k+1)\right).$$

Раскрываем сумму. В результате взаимного уничтожения смежных членов после раскрытия скобок останутся только крайние члены: $\varphi^{(p-2)}(n)$ и $-\varphi^{(p-2)}(s)$. Поэтому получим:

$$\int_2 = -B_{p-1}\left(\varphi^{(p-2)}(n) - \varphi^{(p-2)}(s)\right). \tag{553.5}$$

Теперь возвращаемся к равенству (553.3); подставим в него (553.4) и (553.5):

$$J_{p-1} = \underbrace{\frac{1}{p!}\int_0^1 \beta_p(t)\sum_{k=n}^{s-1}\varphi^{(p)}(k+1-t)\,dt}_{J_p} + \frac{B_{p-1}}{(p-1)!}\left(\varphi^{(p-2)}(n) - \varphi^{(p-2)}(s)\right). \tag{533.6}$$

Подставим это в $\Phi Э_{p-1}$. В правой части первая сумма не меняется. Сумма $\sum_{p-1}$ получит новое слагаемое и превратится в $\sum_p$. Остается слагаемое J_p. Итак, получается $\Phi Э_p$. Доказательство формулы Эйлера закончено.

554. Случай знакопостоянной старшей производной

Если $\varphi^{(p)} \geq 0$ или $\varphi^{(p)} \leq 0$, то J_p сильно упрощается. Действительно, по обобщенной теореме о среднем (курс Анализа) будет:

$$J_p = \frac{\beta_p(\theta)}{p!}\int_0^1 \sum_{k=n}^{s-1}\varphi^{(p)}(k+1-t)\,dt, \quad \theta \in [0,\ 1].$$

Дальше вновь проводим рассуждения с интегрированием производной, раскрытием суммы и взаимным уничтожением смежных членов:

$$J_p = -\frac{\beta_p(\theta)}{p!}\sum_{k=n}^{s-1}\int_0^1 d\varphi^{(p-1)}(k+1-t) =$$

продолжаем:

$$= -\frac{\beta_p(\theta)}{p!}\sum_{k=n}^{s-1}\varphi^{(p-1)}(k+1-t)\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= -\frac{\beta_p(\theta)}{p!}\sum_{k=n}^{s-1}\left(\varphi^{(p-1)}(k) - \varphi^{(p-1)}(k+1)\right).$$

Т. е.

$$J_p = \frac{\beta_p(\theta)}{p!}\left(\varphi^{(p-1)}(s) - \varphi^{(p-1)}(n)\right). \tag{554.1}$$

Отсюда — включение:

$$J_p \in \frac{\beta_p([0,\ 1])}{p!}\left(\varphi^{(p-1)}(s) - \varphi^{(p-1)}(n)\right). \tag{554.2}$$

Замечание 554.1. Отсюда видно, что для практической работы надо знать множества $\beta_p([0,\ 1])$ для различных p. Так, $\beta_1(t) = t$. Поэтому

$\beta_1([0,\ 1]) = [0,\ 1]$.

В книге Данилова и др. на стр.177 видим:

$\beta_2([0,\ 1]) = \left[-\frac{1}{4},\ 0\right]$,

$\beta_3([0,\ 1]) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{36},\ \frac{\sqrt{3}}{36}\right] = [-1,\ 1]\cdot\frac{\sqrt{3}}{36}$,

$\beta_4([0,\ 1]) = \left[0,\ \frac{1}{16}\right]$,

$\beta_5([0,\ 1]) = [-1,\ 1]\cdot 0.024\,458\,2$.

Вообще, для этих множеств нетрудно находить внешние оценки с помощью интервального расчета. Скажем, в рамках задания по исследованию функций.

555. Приложение к суммированию рядов

Предположим следующее:

1) функция $\varphi(x)$ имеет на промежутке $[n,\ +\infty[$ знакопостоянную непрерывную $\varphi^{(p)}(x)$,

2) при $x \to +\infty$ имеет место:

$$\varphi(x),\ \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(p-1)}(x) \to 0,$$

3) сходятся интеграл и ряд $\displaystyle\int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx,\ \sum_{k=n}^{+\infty}\varphi(k)$.

Перепишем (ФЭ–р):

$$\sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) = \int_n^s \varphi(x)\,dx - \sum\nolimits_p \, -J_p.$$

Согласно включению (544.2) для J_p, пишем включение для этой суммы:

$$\sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) \in \int_n^s \varphi(x)\,dx - \tag{555.1}$$

$$-\sum\nolimits_p - \frac{\beta_p([0,\ 1])}{p!} \left(\varphi^{(p-1)}(s) - \varphi^{(p-1)}(n)\right).$$

Оно равносильно некоторому двустороннему неравенству:

$$\Delta_1 \leq \sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) \leq \Delta_2. \tag{555.2}$$

Правая часть (555.1) зависит от величин, которые, в свою очередь, зависят от s :

$$\varphi(s),\ \varphi'(s), \ldots, \varphi^{(p-1)}(s),\ \int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx. \tag{555.3}$$

Очевидно, Δ_1 и Δ_2 будут непрерывными функциями от этих величин. Поэтому их пределы при $s \to +\infty$ будут получаться подстановкой в Δ_1 и Δ_2 предельных значений этих величин.

По теореме о предельном переходе в неравенстве, соотношение (555.2), а с ним и (555.1) будет перенесено на ряд:

$$\lim_{s\to+\infty} \Delta_1 \leq \sum_{k=n}^{s-1} \varphi(k) \leq \lim_{s\to+\infty} \Delta_2. \tag{555.4}$$

Здесь крайние части получаются, как отмечено, подстановкой нулей вместо $\varphi^{(i)}(s)$, $i = 0, \ldots, p-1$ и несобственного интеграла вместо собственного.

Но неравенство (555.2) есть лишь иная форма записи включения (555.1). Поэтому и (555.1) представляет собой другую форму записи включения. Последнее, следовательно, получается из

(555.1) точно так же, как (555.4) из (555.2). Выполнив эти подстановки в (555.1), получаем:

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\varphi(k)\in\int_n^{+\infty}\varphi(x)\,dx-\sum\nolimits_p^{\infty}+\frac{\beta_p([0,\ 1])}{p!}\varphi^{(p-1)}(n), \tag{555.5}$$

где, согласно п. 543,

$$\sum\nolimits_p^{\infty}=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{B_i}{i!}\varphi^{(i-1)}(n)\ \ (p\geq 2),\ \ \sum\nolimits_1=0. \tag{555.6}$$

Остаётся заметить, что левая часть (555.5) представляет собой остаток $r_n=a_n+a_{n+1}+\ldots$ ряда $a_1+a_2+\ldots$, ассоциированного с функцией $\varphi(x)$ — продолжением общего члена на полуось $[n,\ +\infty[$. Итак с помощью ФЭ получена оценка остатка:

$$r_n\in \text{правая часть (555.5)}.$$

556. Связь с интегральным признаком сходимости

Покажем, что полученным включением для r_n обобщается оценка, ориентированная на интегральный признак сходимости Коши. Возьмём $p=1$.

Пусть для определенности $\varphi\geq 0$ и, конечно, $\varphi(x)\not\equiv 0$. По знакопостоянству φ' возможны два случая монотонности $\varphi(x)$. Случай возрастания отпадает, так как противоречит сходимости интеграла и ряда. Остаётся случай убывания, т.е. $\varphi<0$. Так как $\sum_1=0$ и $\beta([0,\ 1])=[0,\ 1]$, вследствие чего включение (555.5) принимает вид:

$$r_n\in\int_n^{+\infty}\varphi(x)\,dx+[0,\ 1]\,a_n,$$

т. е. получена оценка (506.3а), что и требовалось доказать.

557. Пример: выражение остатка дзэта-функции Римана

Снова рассмотрим задачу вычисления функции

$$\zeta(\sigma)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-\sigma}.$$

Она определена при $p > 1$, но при p, близких к 1, ряд сходится очень медленно. Применим формулу Эйлера. Запишем включение (555.5) для остатка:

$$r_n \in \int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx - \sum\nolimits_p^\infty - [J_p^\infty]\,, \tag{557.1}$$

где $\sum_p^\infty$ определена выражением (545.6), а

$$[J_p^\infty] = -\frac{\beta_p([0,\ 1])}{p!}\varphi^{(p-1)}(n).$$

Принимаем $\varphi(x) = x^{-\sigma}$ и $p = 4$. Запишем слагаемые правой части (547.1).

Во-первых,

$$\int_n^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_n^{+\infty} x^{-\sigma}\,dx = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\Big|_{x=n}^{x\to+\infty} = \frac{n^{1-\sigma}}{\sigma-1}.$$

Во-вторых,

$$\sum\nolimits_p^\infty = \sum\nolimits_4^\infty + B_1\,\varphi(n) + \frac{B_2}{2}\varphi'(n) + \frac{B_3}{3}\varphi''(n).$$

Так как $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_2 = -\dfrac{1}{6}$, $B_3 = 0$, то

$$\sum\nolimits_4^\infty = -\frac{\varphi(n)}{2} + \frac{\varphi'(n)}{12} = -\frac{n^{-\sigma}}{2} - \frac{\sigma n^{-\sigma-1}}{12}.$$

Наконец, $\varphi^{(4)}$, очевидно, сохраняет знак. Поэтому верно включение: $J_4^\infty \in -\beta_4([0,\ 1])\,\dfrac{\varphi'''(n)}{4!}$.

Здесь, согласно замечанию 544.1, $\beta_4([0,\ 1]) = \dfrac{[0,\ 1]}{16}$.

Далее $\varphi'''(n) = -\sigma(-\sigma-1)(-\sigma-2)n^{-\sigma-3}$. Поэтому

$$J_4^\infty \in \frac{[0,\ 1]}{24\cdot 16}\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)n^{-\sigma-3} = [J_4^\infty]\,.$$

Как видно, в правой части включения для r_n первые два слагаемых, интеграл и сумма – числа, а третье, $[J_4^\infty]$ – отрезок. Его ширина невелика, благодаря малости множителей $\dfrac{1}{384}$ и $n^{-\sigma-3}$. Поэтому ширина включения для r_n будет очень малой, что и нужно для получения хорошей точности.

Теперь запишем и хорнеризуем включение для остатка:

$$r_n \in R_n = \frac{n^{1-\sigma}}{\sigma-1} + \frac{n^{-\sigma}}{2} + \frac{\sigma\, n^{-\sigma-1}}{12} - [J_4^{+\infty}] = \tag{557.2}$$

$$= n^{-\sigma}\left(\left(-\frac{[0,\ 1](\sigma+1)(\sigma+2)}{32\, n^2} + 1\right)\frac{\sigma}{12n} + \frac{1}{2} + \frac{n}{\sigma-1}\right).$$

558. Продолжение: вычисление дзэта-функции Римана

Используем для вычисления дзэта-функции программу РЯД с учётом параметра σ. Тут нужно принять во внимание следующие два обстоятельства.

Во-первых, нас интересуют значения σ, близкие к 1, как границе промежутка сходимости. Поэтому обозначим $\sigma = 1 + \varepsilon$.

Во-вторых, ввод в компьюьер σ крайне нежелателен потому. что тогда предстояло бы вычисление $\varepsilon = \sigma - 1$ – вычитание близких значений, одно из которых отягощено погрешностью (которая свойственна переводу из десятичной системы счисления в двоичную). Имеет смысл вводить именно ε и притом в интервальной форме, в виде локализатора для конкретного числового значения ε_0.

К тому же нам понадобятся и ε, и σ, и $-\sigma$.

Поэтому дополняем таблицу 531.1 распределения памяти следующим образом:

Таблица 558.1.

Интервальная пара	Назначение
6	Параметр ε
7	Резервная пара для ПП 7500
9	$-\varepsilon$
10	$-1-\varepsilon = -\sigma$
11	$1+\varepsilon = \sigma$

В связи с этим, дополняем строку 1200:

1200 INPUT bf"n_0 =?", **F: INPUT** "$\mathrm{n_{max}}$ =?", **J: GOSUB 5500**.

Фигурирующая здесь ПП 5500 загружает пары, предназначенные для обслуживания параметров ε и σ :

Программа 558.1 (ПП 5500).

```
5500 PRINT "Eps=? "; : A = 6: GOSUB 51
GOSUB 60: GOSUB 9
A = 9: GOSUB 40
A = -1: GOSUB 80
GOSUB 9: A = 10: GOSUB 40
GOSUB 9: A = 11: GOSUB 40
RETURN
```

Теперь следует выполнить работу по составлению интервальных подпрограмм для члена $a_n = n^{-\sigma}$ и r_n — для системы "Ряд".

Подпрограмма 558.2 (ПП 7000).

```
REM ПП ДЛЯ ЧЛЕНА РЯДА
7000 A = D: GOSUB 86
7010 A = 11: GOSUB 45
7020 RETURN
```

Подпрограмма 558.3 (ПП 7500)

```
REM ПП ОЦЕНКИ ОСТАТКА РЯДА
7500 A=D: G 86: G 92
     A=32: G 92
     A=7: G 40
     K(0)=-1: L(0)=0
     A=7: G 13
     A=7: G 40
     A=6: G 60
     A=2: G 80
     A=7: G 12
     A=7: G 40:
     A=6: G 60:
     A=3: G 80:
     A=7: G 12:
     A=1: G 80
     A=10: G 12
     A=D: G 83
     A=12: G 83
     A=1/2: G 80
     A=7: G 40
     A=D: G 86
     A=6: G 13
     A=7: G 10
     A=7: G 40
     A=D: G 86
     A=11: G 45
     A=7: G 12
     RETURN
```

Упражнение 558.1. Проанализировать эти ПП. □

Затем следует этап численной проверки и, если потребуется, отладки этих ПП.

Берём $n = 1,\ 2,\ 3$ и $\sigma = 2$. Последний выбор вызван тем, что нам придётся из соображений контроля вычислять $\zeta(2)$. По той причине, что это значение можно найти в справочниках. Более того, при $\sigma = 2$ этот ряд сворачивается и сумма его равна $\frac{\pi^2}{6}$ [Данилов и др.]. Тем самым мы проверим методику расчёта.

Ручная проверка на калькуляторе показывает результаты, приведённые в табл. 558.2.

Таблица 558.2

n	Ручные контрольные значения	
	Общий член ряда	Оценка остатка
1	1	[1.604 166 667, 1.6_9]
2	.25	[.643 880 208 3, $.645\,83_6$]
3	$.1_{10}$	[.394 804 527 6, .395 061 728 4]

Подготавливаем систему РЯД к проверке ПП общего члена и оценки остатка. Для этого после строки **1000 CLS** вставляем уже знакомую нам строку **GOTO 6500**.

После этого вызываем программу при упомянутых n и σ. Компьютерные вычисления дают результаты, приведённые в табл.558.3.

Таблица 558.3

n	Машинные контрольные значения	
	Общий член ряда	Оценка остатка
1	[$.9_7$, 1]	[1.604 165, 1.666 668]
2	[$.249_48$, .250 000 2]	[.643 879 4, .645 834 1]
3	[$.1_6$, $.1_62$]	[.394 803 9, .395 062 4]

Итак, "ручные" результаты соответствуют компьютерным.

Затем снимаем строку **GOTO 6500**, восстанавливая систему РЯД и, таким образом, приступаем к рабочим вычислениям.

Проведена серия тестов с $n_0 = 2$, $n_{max} = 1000$. Их результаты приводятся в табл. 558.4.

Тест же при $\sigma = 1.0001$ проведен "из спортивного интереса", поскольку суммировать этот ряд в обычной манере вообще нереально из-за крайне медленной сходимомсти. Что касается $\frac{\pi^2}{6}$, то студент для проверки может сам сосчитать это.

Таблица 558.4

$\varepsilon = \sigma - 1$	$\zeta(\sigma)$	
	Экранные значения	Скорректированные значения
1	[1.664 932, 1.664 936]	[1.664 931, 1.664 937]
1.0001	[10 000.57, 10 000.59]	[10 000.56, 10 000.60]

§ 56. РЯДЫ: ДОПОЛНЕНИЯ

560. Разные замечания о суммировании рядов

1. В нашей алгоритмике прямой ход обилен пересечениями:
$$Z^n = Z^{n-1} \cap (S_{n-1} + R_n).$$
Это обстоятельство весьма способствует самоконтролю процесса суммирования. Действительно, появление ошибки в ПП A_n или ПП R_n сразу же вызывает отклонение вновь полученной $S_{n-1} + R_n$ предшествующего Z^{n-1} — см. рис. 560.1.

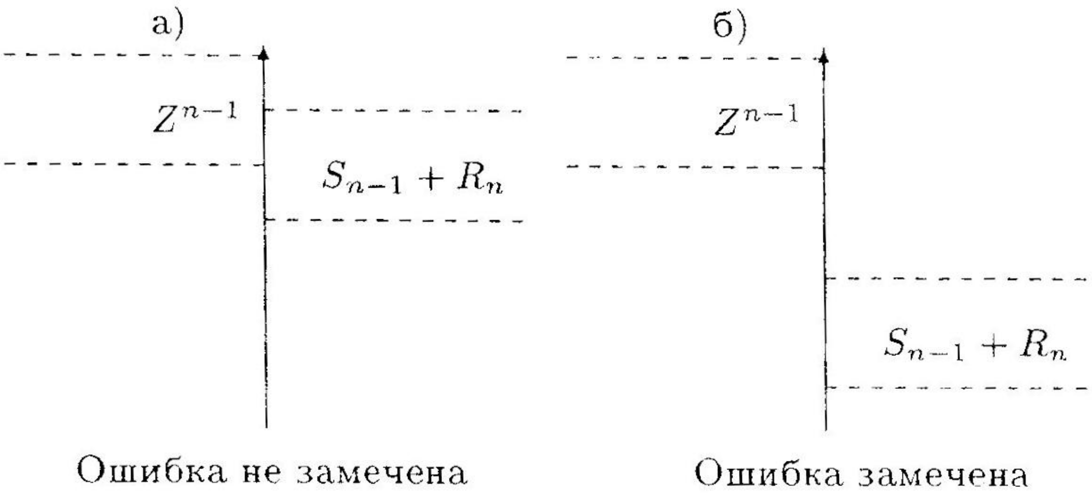


Рис. 560.1

Когда эти вилки-отрезки уже являются достаточно узкими, то велик шанс на то, что пересечение окажется пустым. Вызванный этим аварийный останов будет свидетельствовать о допущенной где-то ошибке.

Надо думать, что и традиционная, неинтервальная организация суммирования ряда не обходится на практике без ошибок. Но эти ошибки во многом остаются незамеченными, поскольку такого средства контроля там нет.

2. Говоря в Прологе (Выпуск 1) о принципиальной неправильности суммирования рядов в традиционной манере до машинной стабилизации, мы привели в пример расходящийся ряд

$\sum \frac{1}{n}$. Конечно, его машинная стабилизация произошла бы нескоро, может быть, через много лет. Таким образом, пример этот недемонстративен. Но нетрудно придумать вполне демонстративный пример расходящегося, но суммируемого машиной ряда: $1 + \mu^{-s-1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

3. Мы не затронули использование формулы Эйлера для суммирования рядов в случае, когда производная продолженного общего члена избранного порядка меняет знак. Это — хороший предмет для самостоятельных размышлений студента.

4. Вообще, у студента открывается хорошая возможность отличиться: вооружившись материалом этой главы, заняться своего рода видом спорта — отыскивать научные публикации, содержащие результаты численного суммирования рядов с целью *верификации* (проверки) этих результатов.

561. О различии в смысле терминов "локализующие" и "интервальные" вычисления

Впервые термин *интервальный* применительно к научному направлению применил в своей работе Теруо Сунага. Первая книга на русском языке по вычислениям этого рода принадлежит академику Ю.И. Шокину.

Реальность интервального построения локализаторов подтверждается как мировым опытом, так и проведением у нас на факультете локализующей реконструкции курса "Методы вычислений". Что особенно важно — успешным выполнением контрольно-лабораторных заданий по этому курсу, несмотря на то, что они оснащены жёстким контролем верности, предусматривающим пересечение различными способами построенных локализаторов.

Однако имеются авторы, проповедующие нелокализующие вычисления в интервалах.

Яркий пример подобной научной литературы являет выдержавшая недавно второе издание книга западноевропейских математиков [Клатте и др.]. Книга представляет учебник интервального языка программирования PASCAL-XSC и в этом качестве, по-видимому, исправна.

Но учебником по локализующим вычислениям её назвать нельзя. Так раздел 5.5.2 "Суммирование степенного ряда" не соответствует своему названию: там вовсе не суммируется степенной ряд. Речь идёт всего лишь о нахождении частичных сумм.

Правда, в интервалах. Но ведь локализация ограниченного числа частных сумм ещё не приводит к локализатору суммы ряда. Для этого (как теперь знает читатель) нужно сначала построить в символической форме оценку остатка.

В книге нет понятия об интервализации приближённых формул, поскольку нигде не участвует остаточный член, который подвергается расширению.

Правда, в предисловии редакторов перевода содержится обязательство вычислять именно в локализующей манере.

Таким образом, употребление в литературе термина "интервальный" ещё не гарантирует локализации.

Вполне возможно, что подобными обстоятельствами вызван скепсис некоторых образованных математиков в отношении математических результатов, называемых интервальными.

С другой стороны, термин "интервальный" получает дополнительный оттенок как антоним по отношению к термину "точечный". Оттенок того, что объект имеет смысл множества.

Кроме того, в Выпуске 2 мы ввели в рассмотрение (как вспомогательную) идеальную модель композиционного интервального расчёта. Она может оказаться совсем не локализующей за счёт, может быть, малых отличий от реальной модели. Но наша главная цель — реальная модель. Таким образом, отличие интервального и локализующего начал может быть вызвано вовсе не плохим научным качеством той или иной публикации, как в случае книги Клатте и др., а просто её незавершённостью (с нашей, локализующей точки зрения). Может быть, вины автора в этой незавершённости и нет, может быть, он и не стремился к завершённости и отлично понимает это. Но тем не менее его долг — разъяснить это читателю.

Вот почему всюду в нашей книге предпочитаем термин "локализующий" как более определённый.

Однако, терминология ещё не установилась. Разнообразие названий данного научного направления является следствием его новизны. Достаточно проследить трансформацию названий нашего специализированного журнала. Он назывался вначале (с 1991) "Interval Computations. Интервальные вычисления", а с 1995 — "Reliable Computing. Надёжные вычисления". С 1997 русская компонента названия вовсе отпала. А расшифровка на обложке журнала стала гласить: An International Journal Devoted to Reliable Mathematical Computations Based on Finite Representations and Guaranteed Accuracy.

БИБЛИОГРАФИЯ

Абрамовиц М. и Стиган И.

Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М.: Наука, 1979, 832 с.

Градштейн И.С. и Рыжик И.М.

Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963, 1100 с.

Данилов В.Л. и др.

В.Л. Данилов, А.Н. Иванова, Е.К Исакова, Л.А. Люстерник, Г.С. Салехов, А. Н. Хованский, Л. Я. Цлаф, А. Р. Янпольский. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. - М.: Физматгиз, 1961, 440 с.

Двайт Г.Б.

Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука, 1966, 228 с.

Демидович Б. П., Марон И. А.

Основы вычислительной математики — М.: Физматгиз, 1960, 660 с.

Калмыков С. А. и др.

Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986, 224 с.

Клатте Р. и др.

Р. Клатте, У. Кулиш, М. Неага, Д. Рац, Х. Уллырих. PASCAL-XSC: Руководство по языку и учебный курс. – М.: Теревинф, 1997, 336 с.

Меньшиков Г. Г.

1. Практические начала интервальных вычислений: Учебное пособие. — Л.: ЛГУ, 1991, 92 с.

2. Интервальный анализ и методы вычислений: Конспект лекций.

   2.3. Выпуск 3. Интервализация приближённых формул. Численное суммирование рядов. Издание второе. - НИХИ СПБГУ. 2000, 63 с.

   2.8. Выпуск 8. Итерационные процессы и системы числовых уравнений. - НИХИ СПБГУ. 1999, 81 с.

3. Локализующие вычисления: Конспект лекций. Выпуски 1, 2. - НИХИ СПБГУ. 2003, 89+59 с.

Ноймайер А.

Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations. — Cambridge, University Press, 1990, 256 pp.

Прудников А.П. и др.

Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1981, 800 с.

Сунага Т.

Sunaga T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. //RAAG Memoirs, 1958, v. 2, pp. 547 – 564.

Шокин Ю. И.

Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981, 112 с.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ВЫПУСКОВ

Выпуск 1
ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕРВАЛЬНО-ЛОКАЛИЗУЮЩУЮ ОРГАНИЗАЦИЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Выпуск 2
ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕРВАЛЬНО-ЛОКАЛИЗУЮЩУЮ ОРГАНИЗАЦИЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ГЛАВА 3. ПРОБЛЕМА ГРУБОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО РАСЧЁТА

§ 30. Введение

§ 31. Проблема минимальности композиционных интервальных расширений

§ 32. Понятия и свойства, применяемые в теоретическом анализе точности интервальных вычислений

§ 33. Продолжение: интервальное условие Липшица

§ 34. Примеры теоретического анализа точности интервального расчёта

§ 35. Проблема уточнения композиционного интервального расширения

СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА 3

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 18.03.2003 г. Формат бумаги 60Х84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 3,75 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ 2876.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.