КРАСОТА И СИЛА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Марек В. Гутовски

Институт физики, Польская академия наук

Варшава, Польша

Аннотация

Интервальный анализ является относительно новым разделом математики. Будучи изначально набором инструментов для оценки качества вычислений, который обеспечивает строгий контроль над ошибками округления, в настоящий момент он стал самостоятельной дисциплиной. Интервальные методы оказываются полезны, когда нам приходится работать с неточными значениями, погрешность которых можно строго оценить. Нечёткие множества, неточные множества и вероятностные методы могут решать задачи подобного рода, но только интервальные методы позволяют строго доказать существование или отсутствие решений. Известен также ряд задач (не представленных здесь), которые другие методы решить не в состоянии. В данной статье излагаются ключевые идеи и определения интервального анализа, а также в качестве примера приводятся два полезных алгоритма.

Ключевые слова: Интервал, интервальные вычисления, гарантированные результаты, доказательные вычисления, глобальная оптимизация, алгебраические системы.

1 Что же такое интервал?

Определение: Интервал — *это замкнутое связное подмножество вещественных чисел, то есть*

$$\big(\boldsymbol{X} = [a,b] - \textit{интервал}\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\boldsymbol{X} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \,\}\big),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Числа a и b называются концами интервала, левым и правым. Как a, так и b могут быть бесконечны, хотя стоит заметить, что в классической интервальной арифметике концы интервалов ограничены.

В геометрической интерпретации интервал представляет собой отрезок на вещественной прямой, определённый своими концами. Множество всех интервалов обозначается $\mathbb{IR}$. Левый и правый концы интервала $\boldsymbol{X}$ записываются в виде $\overline{\boldsymbol{X}}$ и $\underline{\boldsymbol{X}}$ соответственно. Интервалы, для которых $\overline{\boldsymbol{X}} = \underline{\boldsymbol{X}}$, называются *вырожденными* и содержат только одно вещественное число. На $\mathbb{IR}$ вводятся две простейшие вещественнозначные функции, характеризующие интервалы: *ширина* интервала $\operatorname{wid} \boldsymbol{X} = (\overline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{X}})$ и *середина* (или *медиана*) интервала $\operatorname{mid} \boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\underline{\boldsymbol{X}} + \overline{\boldsymbol{X}})$.

Арифметические операции над интервалами определены таким образом, чтобы их результаты содержали в себе *все возможные* результаты выполнения соответствующих операций над числами из исходных интервалов. Более точно, результатом $\boldsymbol{X} \diamond \boldsymbol{Y}$ является интервал $\boldsymbol{Z}$, такой что

$$\boldsymbol{X} \diamond \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z} = \{\, z = x \diamond y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \,\},$$

где $\diamond$ — какая-то операция из $\{\, +, -, \times, / \,\}$. Несложно показать, что арифметические операции над интервалами можно определить через операции над их концами следующим образом:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} &= [\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{Y}},\ \overline{\boldsymbol{X}} + \overline{\boldsymbol{Y}}] \\
\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} &= [\underline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{Y}},\ \overline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{Y}}] \\
\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} &= [\min\{\underline{\boldsymbol{X}} \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}, \underline{\boldsymbol{X}} \cdot \overline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}} \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}} \cdot \overline{\boldsymbol{Y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{X}} \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}, \underline{\boldsymbol{X}} \cdot \overline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}} \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}} \cdot \overline{\boldsymbol{Y}}\}] \\
\boldsymbol{X} / \boldsymbol{Y} &= [\min\{\underline{\boldsymbol{X}}/\underline{\boldsymbol{Y}}, \underline{\boldsymbol{X}}/\overline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}}/\underline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}}/\overline{\boldsymbol{Y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{X}}/\underline{\boldsymbol{Y}}, \underline{\boldsymbol{X}}/\overline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}}/\underline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{X}}/\overline{\boldsymbol{Y}}\}]
\end{aligned}$$

Для операции деления дополнительным условием выполнимости является $0 \notin \boldsymbol{Y}$.

В программной реализации нам также следует учитывать округление каждой операции, для того, чтобы сохранить строгость (доказательность) оценки. Необходимое округление называется *внешним* или *направленным*. При нём $\underline{\boldsymbol{Y}}$ всегда округляется вниз (к минус бесконечности), а $\overline{\boldsymbol{Y}}$ вверх (к плюс бесконечности). Это достигается или на аппаратном уровне, с помощью изменения режима округления процессора, или *искусственным округлением*, как в некоторых программных пакетах.

Интервалы как множества. Поскольку интервалы представляют собой множества, для них определены теоретико-множественные операции и отношения. Например, можно взять *пересечение* двух интервалов $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{X}_2$. Однако пересечение некоторых интервалов даёт пустое множество, что демонстрирует необходимость рассматривать *пустой интервал*, как один из членов $\mathbb{IR}$. Он обозначается $\varnothing$, и в компьютерной реализации его иногда представляют [`NaN`, `NaN`], где `NaN` — особое состояние числа с плавающей точкой, используемое для обозначения неопределённого результата.

К несчастью, *объединение* двух интервалов не всегда является интервалом. Вместо этого определяется *интервальная оболочка* двух произвольных интервалов (или любых других подмножеств $\mathbb{R}$), представляющая собой наименьший интервал, который содержит их:

$$\mathrm{hull}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \square(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = [\ \min(\underline{\boldsymbol{X}}, \underline{\boldsymbol{Y}}),\ \max(\overline{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{Y}})\ ].$$

Проблем с проверкой вложений $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$ или $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y}$ не возникает.

Стоит также заметить, что сложение и умножение интервалов коммутативны

$$\boldsymbol{X} \diamond \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \diamond \boldsymbol{Y}$$

и ассоциативны

$$\boldsymbol{X} \diamond \boldsymbol{Y} \diamond \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X} \diamond \boldsymbol{Y}) \diamond \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \diamond (\boldsymbol{Y} \diamond \boldsymbol{Z}).$$

Однако при этом верно

$$\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}) \subseteq \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Z} \text{ (строгое равенство } \textit{не} \text{ выполняется!)}$$

Таким образом, умножение на интервалах только *субдистрибутивно* относительно сложения. Можно также заметить, что использование одной переменной более одного раза (здесь: $\boldsymbol{X}$) ведёт к расширению оценки конечного результата. Этот феномен известен под названием *проблемы зависимости интервальных данных*. Вдобавок к этому множество $\mathbb{IR}$ является только лишь частично упорядоченным, что делает задачу перевода обычных компьютерных программ в их интервальные аналоги не столь тривиальной задачей. Например, каждую конструкцию вида

```
если x < y
    то ...
    иначе ...
конец
```

необходимо полностью переосмыслить.

Пример:

> Перед походом по магазинам у меня в кармане было ровно 100.00 денежных единиц, а у моей жены от 42.00 до 45.00. Соответственно, вместе у нас было [142, 145] единиц. Мы потратили 127.99, после чего у нас осталось [14.02, 17.01]. Можем ли мы позволить себе поездку на такси, которая может стоит [13, 15] единиц? *Возможно...*
> Однако мы *точно* можем купить две бутылки молока, которые стоят
> $2 \cdot [1.19,\ 3.59] = [2.38,\ 7.18]$ единиц. Это можно гарантировать.

Интервальные векторы и матрицы. Любой вектор размера n, имеющий хотя бы одну интервальную компоненту, называется интервальным вектором или *брусом*. Любая матрица, содержащая хотя бы один интервальный элемент, называется интервальной матрицей. Над этими объектами можно совершать обычные арифметические операции, заменяя элементарные арифметические операции интервальными аналогами, определёнными ранее. По-видимому, наиболее часто используемые нормы для интервальных векторов это 1-норма (сумма модулей всех компонент) и равномерная норма (наибольший из модулей компонент вектора).

2 Интервальные функции

Для построения интервального аналога $\boldsymbol{f}$ функции f возникает задача оценки её *области значений* на интервале, то есть множества

$$\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X}) = \{\ f(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\ \}.$$

Будем называть интервальную функцию $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ *интервальным продолжением* функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\text{для любого } x \in D \text{ имеет место } f(x) = \boldsymbol{f}(x).$$

В случае, если $\boldsymbol{f}$ также *монотонна по включению*, то есть удовлетворяет условию

$$\text{для любых интервалов } \boldsymbol{x} \text{ и } \boldsymbol{y},\ \text{ таких что } \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y},\ \text{ справедливо } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),$$

будем называть $\boldsymbol{f}$ *интервальным расширением* f.

Несложно заметить, что интервальное расширение функций позволяет получить оценку области её значений, так как для любого $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ имеем

$$x \in \boldsymbol{X} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \boldsymbol{f}(x) \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}).$$

Существует большое количество различных способов построения интервальных расширений функций, и стоит отдельно заметить, что, вообще говоря, при этом

- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ может быть «шире», чем область значений,
  то есть оценивать $\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X})$ с заметной погрешностью;

- не существует точного и однозначного ответа на вопрос,
  насколько шире эта оценка, чем $\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X})$.

Будем называть интервальную функцию $\boldsymbol{f}$ *оптимальным интервальным расширением* точечной функции f, если её значения являются интервальными оболочками множеств значений f, то есть

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \square\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{x}) \;\text{ для всех интервалов } \boldsymbol{x}.$$

Можно заметить, что оптимальное интервальное расширение должно возвращать точечные значения для точечных аргументов, в то время как прочие могут принимать в этом случае интервальные значения с радиусом, большим нуля.

Пример:

$$\text{Пусть } f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Оптимальное интервальное расширение для неё будет выглядеть следующим образом:

$$\mathrm{SIGN}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{X} = [0,\ 0]; \\ +1, & \text{если } \underline{\boldsymbol{X}} > 0; \\ [0,\ +1], & \text{если } \underline{\boldsymbol{X}} = 0 \text{ и } \overline{\boldsymbol{X}} > 0; \\ [-1,\ +1], & \text{если } \underline{\boldsymbol{X}}\overline{\boldsymbol{X}} < 0; \\ [-1,\ 0], & \text{если } \underline{\boldsymbol{X}} < 0 \text{ и } \overline{\boldsymbol{X}} = 0; \\ -1, & \text{если } \overline{\boldsymbol{X}} < 0, \end{cases},$$

а одним из других возможных расширений является

$$F(\boldsymbol{X}) = [-1.5,\ 2.5]$$

Важное замечание. Область значений $\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X})$ функции f определена только для $x \in \boldsymbol{X} \cap \mathcal{D}(f)$, где $\mathcal{D}(f)$ — область определения f. Во всех остальных случаях результатом должно быть пустое множество. Например, для функции $f(x) = \sqrt{x}$, $\operatorname{ran}(f, [-4, +4]) = [0,\ 2]$, однако $\operatorname{ran}(f, [-20,\ -10]) = \varnothing$.

3 Интервальные алгоритмы

Как отмечает Дж. Корлисс, обобщение обычных (не-интервальных) методов на интервальный случай редко даёт хорошие результаты. Большая часть проделанной на данный момент в интервальном анализе работы относится к задачам оптимизации и решению интервальных систем алебраических уравнений. В этой области достигнуты существенные результаты, одним из наиболее важных среди которых является интервальная версия алгоритма Ньютона.

Характерным примером интервальных методов может служить алгоритм, предложенный С. Скельбоэ на основе идей Р. Мура и относящийся к классу методов «ветвей и границ». Предположим, что нашей задачей является нахождение глобального минимума вещественной функции f от n переменных на брусе $\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{X}_n$. Первоначальным шагом будет построение интервального расширения $\boldsymbol{F}$ функции f. Алгоритм работает с набором n-мерных брусов, $\mathcal{L}$, который изначально содержит только один элемент — пару из бруса $\boldsymbol{V}_0$ и интервала $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_0)$. Также потребуется число f_{test}, изначально равное $\uparrow f(x)$ (здесь и далее «↑» обозначает округление вверх) для любого $x \in \boldsymbol{V}_0$ или просто $\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}_0)$.

В целом алгоритм можно записать в виде псевдокода, приведённого в таблице 1.

Таблица 1: Алгоритм поиска глобального минимума функции

```
пока (диаметр первого бруса в 𝓛 больше
                некоторой заранее определённой величины) выполнять
    взять первый элемент V и его оценку F(V) из списка 𝓛;
    если ( F̲(V) ≤ f_test ) то
        разбить V пополам перпендикулярно самой длинной
        стороне и получить V₁, V₂, такие, что: V₁ ∪ V₂ = V;
        посчитать интервалы F₁ = F(V₁) и F₂ = F(V₂);
        цикл (i = 1, 2) выполнять
            если (F̲ᵢ > f_test) то
                отбросить брус Vᵢ;
            иначе
                добавить пару (Vᵢ, Fᵢ(V)) в конец списка 𝓛;
                f_test ← min(f_test, F̄ᵢ, ↑f(центр Vᵢ));
            конец если
        конец цикла
    конец если
конец пока
```

Описанный алгоритм последовательно уменьшает размеры брусов в наборе $\mathcal{L}$, делая их всё меньше и меньше. Некоторые из них окончательно исчезают. В результате мы можем говорить о том, что точка глобального минимиума x^* (или все такие точки, если их более одной), такие что $f(x^*) = \min_{x \in \boldsymbol{V}_0} f(x)$, лежат внутри объединения брусов, оставшихся в $\mathcal{L}$. Для менее общих случаев (например, для функций f, дифференцируемых почти всюду в $\boldsymbol{V}_0$) существует также большое количество вариаций приведённого выше алгоритма. С точки зрения производительности очень важно избавиться от «бесперспективных» (для нахождения глобального минимума) брусов как можно раньше. Причина этого достаточно проста: чтобы проверить все брусы со стороной в два раза меньшей, необходимо рассмотреть все 2^n внутри исходного, то есть если не избавляться от «лишних» брусов количество необходимых проверок на каждом шаге будет быстро расти. Свойства функции f и её интервального расширения F могут существенно повлиять на скорость сходимости, которая может быть сколь угодно малой.

Из-за ограничений на объём статьи нам придётся завершить на этом вводный курс. Большее количество материалов (вероятнее всего, также и лучшего качества) может быть найдено в интернете [1]. Хорошей отправной точкой со ссылками на другие полезные сайты могут послужить также [2], [3]. Тем же, кто предпочитает классическую форму, можно порекомендовать книги [4], [5], [10], [11], [12].

4 Текущее положение вещей

Интервальный анализ берёт своё начало в численном анализе, где он изначально использовался, в основном, для автоматической проверки доказательности результатов, полученных при вычислениях на ЭВМ. Для решения простых задач было вполене достаточно четырёх базовых арифметических операций. Перед исследователями стояло всего две цели:

- Получить гарантированную оценку для результата вычислений.
- Приложить все возможные усилия для того, чтобы эта оценка была максимально точной.

Поскольку эти задачи всё ещё не потеряли своей актуальности, методики построения интервальных оценок функций продолжают развиваться. Кроме естественных интервальных расширений в нашем распоряжении имеются теорема о среднем, форма Липшица и, с недавних пор, разложение Тейлора. После «повторного открытия» некоторых старых результатов и доказательства ряда новых стало понятно, что интервальные методы (а особенно те из них, которые основаны на теоремах о неподвижной точке) обладают большой силой, позволяющей точно доказать или опровергнуть существование решений систем нелинейных уравнений. Удивительно, что некоторые задачи, в которых нельзя было применить ни одну из традиционных методик, оказались решаемыми с помощью методов интервального анализа.

На данный момент можно выделить два основных направления дальнейшей деятельности:

- Распространение интервальных методов в другие науки, такие как физика, астрономия или химия, а также в инженерные дисциплины и повседневную деловую практику.
- Установление связей с другими разделами теоретической и прикладной математики, например, теорией нечётких множеств, математической статистикой и другими.

Первое из этих направлений представляется относительно простым. Постоянный рост вычислительных мощностей делает использвание интервальных вычислений оправданным даже несмотря на то, что они в несколько раз медленнее обычных операций над числами с плавающей точкой. Для выполнения вычислений пользователям доступны как коммерческие, так и свободно распрастроняемые программные продукты.

Второе направление является более глубоким. В настоящий момент появляются новые идеи, а интервальные методы вдохновляют специалистов из других областей. Несложно заметить, например, планомерный сдвиг в сторону «неточной» теории вероятностей. Практические последствия этого важны в анализе рисков, робототехнике, теории нечётких множеств и её приложениях, дифференциальных уравнениях и т.д.

5 Новые парадигмы прикладных наук

Оценивание параметров, *восстановление зависимостей* в инженерных дисциплинах и *аппроксимация параметров модели* в прикладных науках обозначают почти одно и то же. Задача оценки значений неизвестных параметров на основе определённого количества экспериментальных данных даёт характерный пример так называемых *обратных задач*.

Обычно подобные задачи формулируется следующим образом:

Дано:

- Результаты N экспериментов $y_1, y_2, \ldots, y_N$.
- Соответствующие им N значений входной переменной x:
$$x_1, x_2, \ldots, x_N.$$
- p неизвестных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_p$, где $p < N$.
- Математическая модель $f(x, y, a) = 0$, где a — вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Найти: значения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_p$, согласующиеся с данными.

Существует большее количество более или менее стандартных подходов к её решению в случае, когда соотношение $f(x, y, a)$ представляет из себя функцию $y = f(x, a)$. Наиболее популярные из них — это метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей и метод максимальной энтропии. Все они основаны на нахождении глобального (абсолютного) минимума определённым образом подобранного функционала. Мы пытаемся найти наиболее подходящий набор параметров, который является минимизирующим для этого функционала. Очевидно, что конечный результат будет существенно отличаться в зависимости от его формы.

Попробуем теперь применить к той же самой задаче интервальный подход. Заменим процедуру минимизации решением задачи «удовлетворения условиям». В связи с практической неточностью измерений все значения как x, так и y будем считать интервалами, содержащими неизвестные истинные значения. Будем также предполагать, что они являются достоверными, то есть в них существует такой набор точечных значений, для которого зависимость выполнена. Будем пытаться отыскать не *наиболее вероятные* значения параметров $\boldsymbol{a}$, а их *возможные* значения. Например, если мы пытаемся аппроксимировать данные интервальной «прямой» (которая будет иметь вид расширяющейся с двух сторон полосы) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, определяемой парой параметров $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, нам следует рассмотреть следующий набор условий:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{b}) \cap \boldsymbol{y}_j \neq \varnothing, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

С геометрической точки зрения это означает, что прямая с угловым коэффициентом $\boldsymbol{a}$ пересекает «прямоугольник неопределённости» $\boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{y}_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. В чисто алгебраических терминах:

$$\big(\, (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{b}) \cap \boldsymbol{y}_j \neq \varnothing \,\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\, \underline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{b}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}_j \ \wedge\ \overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{b}} \geq \underline{\boldsymbol{y}}_j \big). \tag{1}$$

Таким образом *данные* и *их неопределённость* без каких-либо дополнительных предположений определяют интервалы возможных значений параметров a и b. Чтобы найти эти интервалы для a и b можно выполнить следующие инструкции:

1. Начнём с бруса $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, такого что все неравенства (1) *могут быть* удовлетворены внутри него, но наверняка не выполняются на его границах.

2. Возьмём брус $\boldsymbol{V}'$, представляющий собой точную копию $\boldsymbol{V}$, и с помощью алгоритма *дробления бруса* (приведён ниже) получим его новое значение, беря в рассчёт только неравенства $(\underline{\boldsymbol{a}x_j + \boldsymbol{b}}) \le \overline{\boldsymbol{y}}_j$.

3. Аналогично, отправляясь от $\boldsymbol{V}$, вычислим брус $\boldsymbol{V}''$, на котором выполнены неравенства $(\overline{\boldsymbol{a}x_j + \boldsymbol{b}}) \ge \underline{\boldsymbol{y}}_j$.

4. Если $\boldsymbol{V}' \cap \boldsymbol{V}'' \neq \boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{V} \leftarrow \boldsymbol{V}' \cap \boldsymbol{V}''$ и перейти к шагу 2, иначе остановиться.

Последний шаг иллюстрирует очень важное и часто применямое правило интервальных вычислений: *если результат может быть получен более чем одним способом, следует использовать их все и пересечь полученные данные*. Иногда на этом шаге пересечение $\boldsymbol{V}' \cap \boldsymbol{V}''$ может оказаться пустым. Если это случилось, то мы можем быть уверены, что исходный брус $\boldsymbol{V}$ не содержит решений. Это может означать одно из двух:

- Данные содержат один или более выбросов.
- Используемая математическая модель f неадекватно описывает поведение системы.

Алгоритм *дробления бруса* приведён ниже. Приведённый псевдокод описывает фазу *отсечения слева*. Отсечение справа может быть получено заменой строчек 2, 5 и 7 на комментарии (окружены последовательностями символов «/*» и «*/»). Полный алгоритм, приведённый в таблице 2 является отсечением слева и отсечением справа, применённые к брусу в произвольном порядке.

Таблица 2: Алгоритм дробления бруса

1: **цикл** $(i = 1, p)$
2: $\quad \xi \leftarrow 1 \qquad /^*\xi \leftarrow 0^*/$
3: $\quad k \leftarrow 1$
4: $\quad$ **повторять**
5: $\qquad \xi \leftarrow \xi/2 \qquad /^*\xi \leftarrow (1+\xi)/2^*/$
6: $\qquad k \leftarrow k+1$
7: $\qquad \boldsymbol{V}' \leftarrow \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times [\underline{\boldsymbol{a}}_j,\ \underline{\boldsymbol{a}}_j + \xi(\overline{\boldsymbol{a}}_j - \underline{\boldsymbol{a}}_j)] \times \ldots \times \boldsymbol{a}_p$
$\qquad /^*\boldsymbol{V}' \leftarrow \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times [\underline{\boldsymbol{a}}_j + \xi(\overline{\boldsymbol{a}}_j - \underline{\boldsymbol{a}}_j),\ \overline{\boldsymbol{a}}_j] \times \ldots \times \boldsymbol{a}_p{}^*/$
8: $\qquad$ success $\leftarrow$ **не** (*в* $\boldsymbol{V}'$ *выполнены все условия*)
9: $\qquad$ **если** success **то**
10: $\qquad\quad \boldsymbol{V} \leftarrow \boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{V}'$
11: $\qquad$ **конец если**
12: $\quad$ **пока не** (success **или** $k > M$)
13: **конец цикла**

Число M, используемое в псевдокоде, обозначает количество битов в представлении чисел с плавающей точкой в используемом вычислительном окружении. Например, $M = 25$ для чисел с одинарной точностью на PC-совместимых компьютерах при использовании компиляторов `g77` или `gcc`, в то время как для чисел с двойной точностью на них же $M = 57$. Переменная success имеет логический тип.

Стоит заметить, что описанная выше процедура вычисляет интервальную оболочку множества возможных решений, но не каждая её точка является решением задачи. С другой стороны, ни одна из точек, лежащих за пределами полученного в результате бруса не может удовлетворять условиям. За графическим представлением алгоритма можно обратиться, например, к работам [6], [7].

Идеи, описанные здесь, очень близки к идеям из [8], [9], однако разработаны глубже. Вместо того, чтобы просто получить интервальную версию хорошо известного метода наименьших квадратов, как в [8], мы разработали значительно более сильный и независимый подход. Разумеется, он не лишён и недостатков, например:

- Корреляции между искомыми параметрами теряются.
- Соотношение получаемой интервальной оценки с *доверительными интервалами* и другими статистическими оценками ещё не в полной мере изучено и в настоящий момент уточняется. Возможно, подходящим инструментом для решения этой задачи является хорошо известное неравенство Чебышёва.

Что же касается достоинств, то их можно обозначить следующим образом:

◇ Не делается никаких предположений о функции распределения ошибок при измерении экспериментальных данных.

◇ Результаты всегда являются корректными, независимо от того, насколько велика неопределённость измерений.

◇ При использовании приведённого метода достаточно просто определять выбросы в данных.

◇ Естественным образом учитывается неопределённость как входных, так и выходных переменных.

◇ В полном соответствии со здравым смыслом бóльшие объёмы данных дают, как правило, более узкие интервалы оценок.

◇ Решение может быть не получено, если неопределённость какой-либо переменной недооценена, умышленно или нет.

◇ Оценка погрешности данных получается автоматически в процессе вычислений, не требует дополнительного анализа и напрямую зависит от неопределённости входных данных.

Интересным можно назвать тот факт, что в [7] обнаружен пример, в котором «наиболее вероятные» значения a и b, полученные с помощью метода наименьших квадратов лежат за пределами результата, полученного с помощью алгоритма рассечения бруса.

Список литературы

1. R.B. Kearfott. Interval Computations: Introduction, Uses, and Resources, *Euromath. Bull.*, 2 (1), pp. 95–112. – Электронная версия доступна на `http://interval.louisiana.edu/preprints/survey.ps` (дата обращения 28.09.2013).

2. Interval Computations. Веб-портал `http://www.cs.utep.edu/interval-comp/` (дата обращения 28.09.2013).

3. Интервальный анализ и его приложения. Веб-портал `http://www.nsc.ru/interval` (дата обращения 28.09.2013).

4. Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. *Прикладной интервальный анализ.* – Издательство «РХД», Москва-Ижевск, 2007.

5. С.П. Шарый. *Конечномерный интервальный анализ.* – Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2013. – Электронная книга, доступная на `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf` (дата обращения 28.09.2013).

6. M.W. Gutowski. Interval straight line fitting. – Электронная статья, доступная на `http://arXiv.org/abs/math/0108163` (дата обращения 28.09.2013).

7. M.W. Gutowski. Prosta dostatecznie gruba. – Электронная статья, доступная на `http://pupil.ifpan.edu.pl/~postepy/dodatki/prosta/prosta.pdf` (дата обращения 20.02.2003).

8. H.T. Nguyen, V. Kreinovich, Chin-Wang Tao. Why 95% and Two Sigma? A Theoretical Justification for an Empirical Measurement Practice. – Электронная статья, доступная на: `http://www.cs.utep.edu/vladik/2000/tr00-26a.ps.gz` (дата обращения 28.09.2013).

9. L. Longpré, W. Gasarch, G.W. Walster, V. Kreinovich. m Solutions Good, $m-1$ Solutions Better. – Электронная статья, доступная на `http://www.cs.utep.edu/vladik/2000/tr00-40b.ps.gz` (дата обращения: 28.09.2013).

10. A. Neumaier. *Interval methods for systems of equations.* – Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

11. Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. *Введение в интервальные вычисления.* – Мир, Москва, 1987.

12. R.E. Moore, R.B. Kearfott, M.J. Cloud. *Introduction to interval analysis.* – Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

Творческий перевод с английского выполнен К.С. Дроновым и С.П. Шарым.