РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА

УДК 517.977.1

на правах рукописи

НАЗИН Сергей Александрович

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ И ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ И ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОПИСАНИЕМ МОДЕЛИ

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2004

Оглавление

Обозначения

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества вещественных и комплексных чисел.
$|x|$ — модуль числа x.
$\operatorname{sign} x$ — знак числа $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n$ — пространство n-мерных векторов с вещественными компонентами.
$\operatorname{sign} x$ — вектор с компонентами $\operatorname{sign} x_i$, где $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.
(x, y) — скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$, $(x, y) = x^T y$.
$\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.
$\|x\|_1$ — 1-норма вектора: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
$\|x\|_\infty$ — ∞-норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

$\mathbb{R}^{m \times n}$ — пространство $m \times n$ матриц с вещественными элементами.
I — единичная матрица.
^{T} — транспонирование.
$\lambda_i(A)$ — i-е собственное значение матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\det A$ — определитель матрицы: $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A)$.
$\operatorname{tr} A$ — след матрицы: $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$.
ρ_A — спектральный радиус матрицы A: $\rho_A = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i(A)|$.
$A > 0$ $(A \ge 0)$ — матрица A симметрична и положительно (неотрицательно) определена.

$\sigma_j(A)$ — j-е сингулярное число матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\sigma_j(A) = \lambda_j^{1/2}(A^T A), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

$\|A\|$ — спектральная норма матрицы: $\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \sigma_j(A)$.
$\|A\|_1$ — 1-норма матрицы $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$.
$\|A\|_\infty$ — ∞-норма: $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$.
$\|A\|_{\infty,1}$ — $(\infty, 1)$-норма: $\|A\|_{\infty,1} = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_1$.
$\|A\|_F$ — фробениусова норма матрицы:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n).$$

$\mathbb{IR}$ — пространство всех вещественных интервалов $[a, b]$, $a \le b$.
$\mathbb{IR}^n$ — пространство n-мерных интервальных векторов.
$\mathbb{IR}^{m \times n}$ — пространство $(m \times n)$-мерных интервальных матриц.

Введение

Задачи оценивания являются одними из фундаментальных проблем в теории управления. С развитием понятия робастности [47, 93, 119] в управлении и идентификации все больше внимания стало уделяться задачам с неопределенностью и при наличии неполной информации об объекте. Современные системы автоматического управления работают в сильно неопределенной среде и должны обеспечивать все растущие требования к поведению характеристик динамического объекта. В этой связи, встает вопрос о том, как характеризовать различные типы неопределенностей, о выборе модели или семейства моделей, адекватно описывающих поведение системы в окружающей среде, и о построении эффективных алгоритмов оценивания, учитывающих влияние всякого рода возмущений и неточностей на исходные параметры и переменные. На основе этого можно затем решать различные задачи анализа и синтеза систем автоматического управления.

Стохастические модели реальных процессов являются наиболее распространенными в этом контексте. Естественно с первого взгляда полагать все ошибки и возмущения в системе случайными с некоторыми наперед заданными распределениями. Разработано целое многообразие вероятностных методов и подходов в задачах управления, идентификации, адаптации и фильтрации, которые довольно широко используются на практике. В рамках задачи оценивания состояний динамических систем выделим, например, фильтр Калмана-Бьюси, который дает простой алгоритм вычисления оптимальной оценки вектора состоянии при гауссовских помехах и возмущениях. Тем не менее, во многих ситуациях предположения о случайной природе неопределенных возмущений оказываются неверными, к примеру, когда основные ошибки и неточности в системе являются детерминированными. К тому же, на практике достоверное знание распределений исходных величин зачастую является довольно жестким и ограничительным требованием, а легко доступны только границы их изменения. В этой связи, адекватно полагать эти ошибки и возмущения *неизвестными, но ограниченными* некоторыми множествами (чаще всего — компактами). Возникает тогда необходимость построения некоторых гарантированых минимаксных подходов, в частности, и к задачам оценивания (фильтрации) состояний динамических систем, где требуется, по-возможности, наиболее точно оценить вектор фазовых координат системы по имеющимся неким априорным данным и на основе наблюдений в условиях неопределенности.

Данная проблематика активно изучалась, начиная с конца 60-х — начала 70-х годов прошлого столетия. В первых работах на эту тему Витзенхаузена [161, 162], Швеппе [94, 150–152], Бертсекаса и Родэса [73, 74] была разработана некая основа, проведены сравнения и определены дальнейшие пути развития подходов и методов фильтрации в условиях неслучайной неопределенности.

В настоящее время, гарантированное оценивание — активно развивающаяся область в теории управления и идентификации. Ее исследованию посвящено множество публикаций, как в отечественной, так и в западной литературе. В качестве основных назовем книги [27, 61, 78, 100, 108, 116, 160], сборники статей [111, 118] и специализированные выпуски научных журналов [129, 158].

Ключевыми в задаче гарантированного оценивания фазовых состоянии динамических систем являются понятия множеств достижимости или информационных множеств. Они определяют всевозможный набор фазовых состояний динамической системы в различные моменты времени. Эти множества играют важную и существенную роль при решении многих задач теории управления и идентификации. Поэтому во многих ситуациях необходимо их точное или приближенное знание. Нахождению и исследованию свойств множеств достижимости, а также их точному или приближенному построению посвящен целый ряд работ отечественных авторов. Выделим среди него монографии Н.Н. Красовского [22, 23], А.Б. Куржанского [27] и Ф.Л. Черноусько [61, 78].

Представим далее также круг публикаций в научных журналах, так или иначе связанных с изучением множеств достижимости. Статьи [4, 6, 34, 54, 56, 89, 113, 135] посвящены построению, исследованию структуры и описанию границы областей достижимости и управляемости для линейных дискретных и непрерывных динамических систем. Свойства этих множеств для линейных систем с неопределенностью также изучаются в [5, 20, 33, 45]. Выводятся уравнения их эволюции во времени [41, 44] с последующим применением в задачах оптимального управления [43]. В [15,120,157] рассматриваются различные возможности построения областей достижимости и их оценок для нелинейных систем. В данном контексте исследуется проблема достижимости [2, 109, 110] для линейных управляемых систем, развивается гарантированный подход к задачам оценивания, анализа и синтеза робастного управления [24, 25, 105, 106].

В работах А.Б. Куржанского и его соавторов используется понятие информационного множества для систем с наблюдениями, чрезвычайно схожего с понятием области достижимости. Оно часто используется в задачах наблюдения, идентификации и параметрического оценивания. Построение и изучение свойств этих множеств, а также их аппроксимация, базирущаяся на аппарате опорных функций, дается в [21, 26, 27, 30, 53, 57]. На основании этого построены алгоритмы идентификации систем [28, 29, 31, 32], разработаны различные минимаксные методы [49, 50] оценивания.

Сравнения стохастических и гарантированных подходов и методов в оценивании довольно актуальны. Они прослеживаются во множестве работ, где [10,116,130,152,160] — только некоторые из них. Интерес также проявляется и к различным задачам со смешанными типами неопределенности в модели [7] и к моделям с “почти произвольными” помехами [3].

Задачам оценивания состояний в системах с неизвестными, но ограниченными возмущениями уделяется большое внимание в западной литературе. В особенности, это касается ее частного случая, а именно, проблемы параметрического оценивания, т.е. аппроксимации множества возможных параметров объекта, совместимых с результатами проведенных наблюдений. Интерес к ней мотивирован большим количеством приложений, в которых требуется с максимальной точностью идентифицировать параметры системы в условиях неопределенности. Публикация [130] дает обзор возникающих при этом проблем и приводит также сравнение стохастического и детерминированного подходов. Структура и свойства возникающих можеств возможных параметров (информационных множеств) исследуются в [123]. Для их оценивания предложены различные рекуррентные методы [67, 68, 70, 83, 90, 91, 118, 128, 136, 156, 158], рассмотрено их применение для ряда регрессионных моделей. Общей постановке задачи гарантированного оценивания посвящены работы [117, 120, 121, 129, 149].

Подчеркивая важность построения множеств достижимости или информационных множеств динамических систем, отметим, что их форма и структура в большинстве случаев оказывается довольно сложной. В этих случаях представляют интерес их приближения областями определенной канонической формы. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие. Их использование довольно распространено в теории систем и задачах гарантированного оценивания. Построение различных операций над ними формирует предмет так называемого множественного анализа [66], которому в последнее время уделяется пристальное внимание. В зависимости от выбора типа аппроксимирующих множеств, различают метод эллипсоидов, интервальный и полиэдральный подходы и другие множественные методы. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, и выбор определенного метода оценивания зависит от каждой конкретной ситуации. В данной диссертационной работе мы остановимся на рассмотрении только метода эллипсоидов и интервального подхода, которые являются наиболее существенными по сравнению с другими в задачах оценивания состояний динамических систем.

Использование эллипсоидов в качестве аппроксимирующих множеств — наиболее привлекательный, на наш взгляд, способ гарантированного оценивания. Этому способствует наличие ряда их неоспоримых преимуществ. Так, например, с помощью эллипсоидов можно получать хорошие оценки произвольных выпуклых множеств; квадратичное описание позволяет легко решать на них задачи оптимизации; класс эллипсоидов инвариантен по отношению к линейным преобразованиям; основные операции, сложения и пересечения, в классе эллипсоидов не вызывают трудностей и даются простыми решениями выпуклых задач оптимизации. Если предполагается, что вектора ошибок и внешних возмущений в динамической системе удовлетворяют квадратичным ограничениям, то применение метода эллипсоидов для аппроксимации областей достижимости представляется естественным и наиболее эффективным.

Исследование метода эллипсоидов в задачах оценивания фазовых состояний началось с работ Швеппе [151, 152]. Его изучению и применению посвящены публикации [75, 102, 155]. Большое влияние на развитие этого метода оказали работы Ф.Л. Черноусько и А.Б. Куржанского [32, 59–61, 78, 108], а также их учеников. Выделим здесь статьи [13, 55] по численному построению эллипсоидальных оценок, [39, 48, 51, 63] по описанию суммы и пересечения эллипсоидов, [8, 41, 42] по алгоритмам эллипсоидальной фильтрации, [14, 37, 38, 40, 79, 134] по исследованию, в частности, асимптотических свойств аппроксимирующих эллипсоидов.

Существенный вклад в разработку эллипсоидальной техники оценивания внесли работы [81, 91, 143]. В них строятся рекуррентные алгоритмы параметрического оценивания систем методом эллипсоидов, исследуется их сходимость, показывается эффективность получаемых оценок. Недавние публикации [85, 114, 115] представляют ряд новых результатов по эллипсоидальной аппроксимации векторов фазовых состояний динамических систем. Некоторые подходы к оцениванию состояний нелинейных систем можно найти в [69]. Работы [112, 115] обращают внимание на вычислительные трудности, которые возникают при оценивании фазовых сосотояний методом эллипсоидов, и предлагают некоторые алгоритмы и подходы, избегающие их. Удобным инструментом для построения эллипсоидальных аппроксимаций являются линейные матричные неравенства [76], используемые в [87]. Поиск оптимального аппроксимирующего эллипсоида можно свести к задаче “полуопределенного” программирования [71], т.е. нахождения экстремума некой весовой функции при ограниченях типа линейных матричных неравенств. Такие задачи эффективно решаются с помощью современных пакетов программ.

В рамках гарантированного подхода к задачам оценивания альтернативой методу эллипсоидов является интервальная техника, где неопределенность в переменных задается в покомпонентных терминах. Такой способ ее описания, предполагающий, что каждый элемент векторной или матричной переменной принадлежит заданному ограниченному интервалу, чрезвычайно прост с точки зрения моделирования неопределенностей. К тому же, простые операции над интервальными величинами элементарно реализуются в интервальной арифметике [1, 9, 100, 122, 147]. Однако задачи оценивания в такой интервальной постановке нередко оказываются NP-сложными, и поиск их решения тогда сталкивается с вычислительными трудностями.

Отметим в этой связи классическую проблему в интервальном анализе, которой будет уделено некоторое внимание в главе 3, а именно, решение возмущенных, интервальных систем линейных алгебраических уравнений [72, 96, 98, 127]. Нахождение для них оптимального интервального решения является NP-трудным [104], и использование аппарата линейного программирования (см. [84, 131–133, 148]), традиционного в этом случае, или аналитических методов, как например в [144], может оказаться неприемлемым. Поэтому строят приближенные прямые и итеративные методы аппроксимации оптимального интервального решения [64, 65, 95, 97, 145, 153, 154].

Множества достижимости для интервальных динамических систем имеют многогранную структуру, причем число их вершин и граней может быть достаточно большим. Изучению свойств этих многогранников и построению для них интервальных аппроксимаций посвящен цикл работ [16] и статья [82]. Интервальные оценки выпуклых множеств нередко оказываются довольно консервативными по сравнению, например, с эллипсоидальными. Одним из выходов из данной ситуации служит рассмотрение и поиск полиэдральных оценок, где в качестве аппроксимирующих множеств выступают параллелепипеды, а не интервальные вектора. Алгоритмы их построения для областей достижимости и информационных множеств разработаны в [17–19, 159]. Другой подход к улучшению интервальных оценок, предложенный в ряде работ [99–101, 103], исходит из концепции разбиения интервальных аппроксимаций и последовательного их улучшения. Для него разработаны численные аргоритмы робастного минимаксного оценивания фазовых состояний динамических систем на основе интервальной арифметики и метода распространения ограничений. Однако данные алгоритмы представляются довольно сложными и громоздкими.

Все перечисленное множество работ рассматривает проблему гарантированного оценивания фазовых состояний или параметров динамических систем при условии, что ее модель нам известна точно. На практике же это предложение может являться довольно ограничительным, так как в приложениях нередко встречаются объекты с неопределенной структурой, модель которых дается с некоторой погрешностью. Ее учет ведет к рассмотрению, наряду с аддитивной векторной, мультипликативной матричной неопределенности. Главная цель и значимость данной работы заключаются в построении на основе метода эллипсоидов и интервальной техники эффективных алгоритмов внешнего оценивания фазовых состояний или параметров динамических систем с непределенностью в описании модели. Некоторые случаи такой, более общей постановки задачи были рассмотрены в литературе: [11, 52, 62, 80, 108, 146]

— задачи достижимости и оценивания состояний, [77, 158] — задачи параметрического оценивания. Отмечались возникающие сложности, связанные с невыпуклостью областей достижимости и информационных множеств таких систем. Был предложен ряд подходов к их оцениванию, которые, однако, в большинстве случаев дают довольно консервативные и неудовлетворительные аппроксимации. В данной работе будут построены простые алгоритмы для общего случая задачи фильтрации, обеспечивающие хорошие субоптимальные решения. Приводится их сравнение с известными.

Цель работы. Главная цель и значимость данной работы заключается в построении на основе метода эллипсоидов и интервальной техники эффективных алгоритмов внешнего оценивания фазовых состояний и параметров линейных дискретных динамических систем с неопределенностью в описании модели, т.е. при наличии как аддитивной, так и мультипликативной составляющих неопределенности. Помимо этого, в задачи диссертационной работы входит исследование предельного поведения внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости линейных стационарных динамических систем в дискретном времени при условии устойчивости.

Методы исследования. В работе использовались методы линейной алгебры и линейных матричных неравенств, математического анализа, теории управления и оптимизации, интервального анализа и вычислительной математики.

Научная новизна. В диссертации получен ряд новых научных результатов по эллипсоидальному и интервальному оцениванию в динамических системах с неопределенностью. В частности, в рамках эллипсоидальной техники рассмотрен класс моделей линейных динамических систем с совместными квадратичными ограничениями на мультипликативную матричную и аддитивную векторную части неопределенности, что позволяет упростить задачу аппроксимации невыпуклых областей достижимости и информационных множеств и обеспечить хорошие субоптимальные решения. Предложенный метод может также быть применен и к “слабонелинейным” системам, если трактовать нелинейность как неопределенность. Для задачи интервального параметрического оценивания предложен оригинальный подход, основанный на решении интервальных систем линейных алгебраических уравнений, который дает покомпонентные оценки неизвестного вектора параметров системы при наличии большого числа измерений. Также сформулированы и доказаны утверждения касательно асимптотического поведения классических рекуррентных алгоритмов эллипсоидального оценивания для устойчивых стационарных динамических систем в дискретном времени.

Практическая значимость. В диссертации построен эллипсоидальный фильтр фазовых состояний для динамических систем с неопределенностью в описании модели, который по сути является аналогом широко распространенного фильтра Калмана-Бьюси в стохастических моделях со случайными возмущениями, что весьма перспективно с точки зрения различных приложений. Кроме того, исследованы асимптотические свойства эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости, учет которых полезен с точки зрения моделирования динамических систем с неизвестными, но ограниченными возмущениями. Предложены алгоритмы интервального параметрического оценивания, которые позволяют избежать многих вычислительных трудностей. Они легко реализуются и могут применяться в задачах идентификации объектов управления.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из трех глав, каждая из которых посвящена самостоятельной научной проблематике и, в принципе, может рассматриваться независимо от других. Работа содержит список литературы (162 источника), 36 рисунков. Общий объем диссертации составляет 118 страниц.

Приведем далее краткое изложение и описание основных результатов всех глав данной диссертационной работы.

Первая глава посвящена развитию и обобщению классического метода эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания фазовых состояний линейных дискретных динамических систем на случай неопределенности в описании модели. Наряду с аддитивными внешними возмущениями и ошибками измерений в модели предполагается наличие матричной (мультипликативной) неопределенности. Наличие матричных возмущений приводит к сложностям, связанным с невыпуклостью соответствующих областей достижимости или информационных множеств динамических систем. Для упрощения задачи рассматриваются совместные квадратичные ограничения на мультипликативную и аддитивную части неопределенности, позволяющие остаться в рамках квадратичного описания неопределенных множеств в модели, использовать результаты теории квадратичных отображений и получить аналитические оптимальные или субоптимальные решения, которые легко затем обобщаются на случаи других типов неопределенности. Поиск аппроксимирующих эллипсоидов при этом сводится к простым процедурам минимизации скалярной функции на конечном интервале. Полученные результаты формируют рекуррентный эллипсоидальный фильтр фазовых состояний линейных динамических систем с неопределенностью в описании модели.

Во второй главе исследуются асимптотические свойства классических рекуррентных эллипсоидальных алгоритмов внешнего оценивания множеств достижимости линейных стационарных динамических систем в дискретном времени и без измерений. При условии устойчивости системы, т.е. когда спектральный радиус ρ_A матрицы A меньше 1, последовательность ее множеств достижимости D_k сходится к некоторому компакту D_∞. В этой связи возникает вопрос о предельном поведении их внешних эллипсоидальных аппроксимаций. В таком контексте исследуются стандартные и наиболее распространенные рекуррентные алгоритмы оценивания с использованием критерия следа: рекуррентный локально оптимальный и оптимальный на конечном интервале времени. Рассмотрена возможность их использования для аппроксимации предельного множества достижимости устойчивой системы. Показано, что предельное поведение аппроксимаций существенно зависит от выбора критерия оптимальности получаемых оценок. Так, для критерия следа доказана ограниченность, а в некоторых случаях — сходимость эллипсоидальных оценок при условии устойчивости системы, которые в асимптотике зачастую дают хорошие аппроксимации предельного множества достижимости. С другой стороны, для критерия детерминанта такой ограниченности не наблюдается. Кроме того, описан простой способ построения внешних эллипсоидальных оценок предельного множества достижимости для устойчивых систем, который сводит поиск минимального по критерию следа эллипсоида к задаче выпуклой одномерной оптимизации, легко решаемой численными методами.

Третья глава посвящена рассмотрению интервального подхода к задаче внешнего гарантированного оценивания фазовых состояний и параметров линейных дискретных динамических систем при наличии неопределенности в описании модели. Как и в главе 1, помимо внешних возмущений и ошибок измерений в модели предполагается наличие мультипликативной матричной неопределенности, причем вся неопределенность описывается интервальными векторами или матрицами. В этом случае множества достижимости и информационные множества динамической системы будут невыпуклыми многогранниками, нахождение которых представляет собой NP-трудную задачу, связанную с перебором всех их вершин. Поэтому ищут интервальные аппроксимации этих многогранных множеств. Задача оценивания фазовых состояний динамических систем аналогично фильтру Калмана подразделяется на этап предсказания и этап уточнения. Построение интервальной оценки вектора фазовых координат системы на этапе предсказания сводится к простым в интервальном анализе операциям над интервальными векторами и матрицами. В то же время как на этапе уточнения приходится обращать интервальную матрицу, что является NP-трудной задачей, решение которой может оказаться затруднительным при больших размерностях. Поэтому основное внимание в данной главе уделено именно этим трудностям в задаче параметрического оценивания для статических систем с большим числом выходов (измерений). Эта задача заключается в нахождении по-возможности наилучшей оценки вектора параметров некоторой статической системы по измерениям в условиях неопределенности. Предложен алгоритм интервального оценивания параметров таких систем. Он базируется на идее разбиения исходной модели на определенное число квадратных интервальных систем линейных алгебраических уравнений, для которых разработан оригинальный метод нахождения оптимального и простого приближенного интервальных решений. Этот подход позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с большим количеством измерений, и дает хорошие внешние интервальные оценки невыпуклых множеств допустимых параметров объекта. Все построенные алгоритмы легко реализуются на вычислительной технике и представляют интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения.

В заключительной части диссертации кратко представлены основные полученные результаты, выносимые автором на защиту, и список литературы, который дает довольно полное представление о текущем состоянии теории гарантированного оценивания.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на различных научных симпозиумах и конференциях:
• 5-й Международный симпозиум IFAC “Нелинейные системы управления”, NOLCOS’2001 (С.-Петербург, 2001);
• 15-й Всемирный конгресс IFAC (Барселона, Испания, 2002);
• 4-й Международный симпозиум IMACS по математическому моделированию, MATHMOD’03 (Вена, Австрия, 2003);
• 2-я Международная конференция по проблемам управления (ИПУ РАН, 2003);
• Рабочее совещание “Интервальная математика и методы распространения ограничений” в рамках 5-й Международной конференции “Перспективы систем информатики” (Новосибирск, 2003);
• 13-й Международный симпозиум IFAC “Идентификация систем”, SYSID’2003 (Роттердам, Нидерланды, 2003);

а также на научных семинарах под руководством:
проф. Б.Т. Поляка (ИПУ РАН),
акад. Ф.Л. Черноусько (ИПМех РАН),
проф. Э. Вальтера (Высшая Электротехническая Школа г. Парижа).

Диссертация поддержана грантом INTAS-YSF-2002-181. Работа над диссертацией входила также в состав проектов РФФИ № 00-15-96018 и № 02-01-00127.

Все полученные и представленные здесь результаты опубликованы или приняты к публикации в ряде ведущих отечественных [35] и западных [126,142] научных журналах, а также в трудах международных конференций [36,124,125,139–141], обсуждались на различных научных семинарах как у нас в стране, так и зарубежом.

Глава 1

Метод эллипсоидов в задаче оценивания состояний

Результаты, представленные в данной главе, развивают классический *метод эллипсоидов* в задаче гарантированного оценивания фазовых состояний линейных дискретных динамических систем на случай неопределенности в описании модели. Наряду с аддитивными внешними возмущениями и ошибками измерений в модели предполагается наличие матричной (мультипликативной) неопределенности. Предложен эффективный метод оценивания, который может также быть применен и к "слабо"-нелинейным системам, если трактовать нелинейность как неопределенность. Наличие матричных возмущений в модели приводит к сложностям, связанным с невыпуклостью соответствующих множеств достижимости и информационных множеств динамических систем. Для упрощения задачи рассматриваются совместные квадратичные ограничения на мультипликативную и аддитивную части неопределенности, позволяющие получить аналитические оптимальные или субоптимальные решения, которые легко затем обобщаются на случаи других типов неопределенности. Полученные результаты формируют рекуррентный эллипсоидальный фильтр фазовых состояний линейных динамических систем с неопределенностью в описании модели, являющийся в некотором смысле аналогом фильтра Калмана-Бьюси для задач оценивания в стохастических моделях.

1.1 Введение

В рамках гарантированного подхода к задачам оценивания фазовых состояний (фильтрации) динамических систем одним из наиболее удобных и привлекательных инструментов является метод эллипсоидов. При этом предполагается, что ошибки и возмущения, действующие на систему, удовлетворяют квадратичным эллипсоидальным ограничениям, а структура их распределения нам вовсе неизвестна. Необходимо тогда найти эллипсоид, достоверно содержащий фазовый вектор системы. Среди основных преимуществ использования эллипсоидов в качестве аппроксимирующих множеств назовем простоту их описания, гладкость границы, “хорошую” точность при оптимальной аппроксимации произвольных выпуклых множеств, инвариантность по отношению к линейным преобразованиям, а также простоту алгоритмов, реализующих операции сложения и пересечения эллипсоидов. Выделим [61, 75, 78, 91, 108, 118, 129, 152, 158] как наиболее существенные публикации и сборники статей на эту тему. В этой главе предлагается применить метод эллипсоидов для решения задачи оценивания состояний линейных дискретных динамических систем уже при наличие неопределенности в описании модели.

Рассмотрим линейную дискретную модель динамической системы с неопределенностью, описываемую уравнением состояний

$$x_{k+1} = (A_k + \Delta A_k)\, x_k + v_k \tag{1.1}$$

и уравнением наблюдений

$$y_k = (C_k + \Delta C_k)\, x_k + w_k, \tag{1.2}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых координат системы, $y_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений; $v_k \in \mathbb{R}^n$ и $w_k \in \mathbb{R}^m$ — внешние возмущения, действующие на систему, $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $C_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — известные номинальные значения матриц модели, а ΔA_k и ΔC_k — матричная неопределенность. Полагаем, что начальный фазовый вектор x_0 системы точно неизвестен, но принадлежит ограниченному эллипсоиду E_0.

Эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром c и симметрической положительно определенной матрицей $P = P^T > 0$ будем обозначать через

$$E(c, P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \ (x - c)^T P\, (x - c) \le 1 \right\}. \tag{1.3}$$

Заметим, что размер и форма эллипсоида полностью характеризуется только его матрицей и не зависит от расположения центра. Будем рассматривать две основные меры величины эллипсоида:

$$f_1(P) = \operatorname{tr} P^{-1} \tag{1.4}$$

и

$$f_2(P) = -\ln \det P. \quad (1.5)$$

Значение функции $f_1(P)$ равно сумме квадратов длин полуосей эллипсоида с матрицей P (критерий следа), а $f_2(P)$ соответствует значению его объема (критерий объема или детерминанта). Если для некоторого эллипсоида $E(c, P)$ функция $f_1(P)$ или $f_2(P)$ принимает минимальное значение на каком-либо классе эллипсоидов, то будем говорить о $E(c, P)$ как о минимальном в смысле следа или соответственно объема эллипсоиде из этого класса. Существуют и другие, более общие, критерии; их исследованию посвящена статья [12].

Классический гарантированный подход к оцениванию методом эллипсоидов исходит из того, что матричная неопределенность в (1.1) и (1.2) отсутствует, предполагая внешние возмущения v_k и ошибки измерений w_k ограниченными в некоторой норме

$$\|v_k\| \leq \alpha_k, \quad \|w_k\| \leq \beta_k \quad (1.6)$$

с известными α_k и β_k. Эти возмущения также могут быть ограничены компактами более общего вида, в частности, принадлежать соответствующим эллипсоидам. Требуется определить гарантированную оценку фазового вектора x_k, основываясь на полученных к этому моменту измерениях $y_1, ..., y_k$ и на априорной информации касательно начального положения системы x_0. Отметим, что всевозможный набор фазовых векторов x_k, удовлетворяющий уравнению состояний (1.1) при данных ограничениях на неопределенность, формирует к моменту времени k множество достижимости D_k системы, причем при отсутствии матричной неопределенности это множество выпукло для всех $k \geq 0$ (см., например, [61]). Аналогично, все фазовые вектора x_k, удовлетворяющие в момент k уравнению наблюдений (1.2) при данных ограничениях на неопределенность, формируют так называемое множество возможных состояний (или информационное множество) системы [27], которое в отсутствии матричной неопределенности является выпуклым. Другими словами, проблема заключается в поиске внешней эллипсоидальной оценки этих множеств в любой момент времени k. Традиционно (как и в фильтре Калмана для стохастических моделей) задача поиска оценки вектора состояний x_k подразделяется на два этапа: этап предсказания, т.е. построения оценки, предсказывающей состояние динамической системы в следующий момент времени (построение оценки множества достижимости на основе аппроксимации суммы соответствующих эллипсоидальных множеств, вытекающих из уравнения (1.1)); и этап уточнения полученной оценки по имеющимся к данному моменту наблюдениям (аппроксимируя пересечение соответствующих эллипсоидов, определяемых априорной информацией и уравнением наблюдений (1.2)). Эллипсоидальные алгоритмы ее решения строятся в основном рекуррентно на основе оценок, вычисленных на этих двух этапах (см. ключевые работы по этой теме [61, 78, 85, 91, 108, 118, 129, 151, 152, 158]). Важными частными случаями такой задачи являются: аппроксимация множеств достижимости динамической системы без измерений ($C_k \equiv 0,\ w_k \equiv 0$), задача параметрического оценивания (система без динамики: $A_k \equiv I,\ v_k \equiv 0,\ x_k = \theta$) и задача слежения (когда $A_k \equiv I,\ x_k = \theta_k$).

Наличие матричной неопределенности ΔA_k и ΔC_k в модели существенно усложняет задачу. Это было отмечено в ряде статей, посвященных этой, более общей, постановке задачи. Некоторые ее частные случаи были исследованы в [11, 52, 62, 77, 80, 83, 93, 108]. Разбирались примеры, демонстрирующие трудности при получении оптимальных оценок как на этапе предсказания, так и на этапе уточнения. Например, рассматривая неопределенность, описываемой классом интервальных матриц $\mathbf{A}$ с элементами a_{ij}, принадлежащими замкнутым интервалам $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, множество векторов $\mathbf{A}x$, где x выбирается из некоторого эллипсоида, представляет собой невыпуклое многообразие многогранного типа. И его описание или построение внешней аппроксимации (с применением, в частности, метода эллипсоидов [62]) сталкивается с вычислительными трудностями при больших размерностях, связанными с перебором вершин.

Для того, чтобы избежать этих трудностей и получить приемлемые эллипсоидальные оценки множеств достижимости, мы будем рассматривать следующий тип неопределенности в модели. А именно, предполагаем, что матричная неопределенность и аддитивные внешние возмущения в уравнениях (1.1), (1.2) подчиняются совместным квадратичным (эллипсоидальным) ограничениям:

$$\frac{\|\Delta A_k\|^2}{\varepsilon_{A_k}^2} + \frac{\|v_k\|^2}{\delta_{v_k}^2} \leq 1, \tag{1.7}$$

$$\frac{\|\Delta C_k\|^2}{\varepsilon_{C_k}^2} + \frac{\|w_k\|^2}{\delta_{w_k}^2} \leq 1, \tag{1.8}$$

где $\varepsilon_{A_k} > 0$, $\delta_{v_k} > 0$, $\varepsilon_{C_k} > 0$ и $\delta_{w_k} > 0$ — соответствующие известные весовые коэффициенты. Если в системе $\varepsilon_{A_k} = 0$, то это подразумевает, что $\Delta A_k = 0$ и $\|v_k\| \le \delta_{v_k}$; а если $\delta_{v_k} = 0$, то $v_k = 0$ и $\|\Delta A_k\| \le \varepsilon_{A_k}$. Аналогично доопределяется вырожденный случай и для (1.8). Здесь и далее в этой главе векторная норма является евклидовой, а для матриц используется спектральная норма $\|A\| = \max\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$. Множества достижимости динамической системы при таком описании неопределенности исследуются в разделе 1.3 данной главы. Похожие с (1.7) и (1.8) модели возникают и в других задачах, связанных с анализом систем с неопределенностью, таких как робастная оптимизация [71] и полный метод наименьших квадратов [88]. Более общее дробно-линейное представление матричной неопределенности, позволяющее учитывать структурированный характер неопределенной матрицы, рассматривается в [87], где вычисление оптимальной эллипсоидальной оценки сводится к задаче *"полуопределенного" программирования* (Semi-Definite Programming) [71]; она заключается в поиске минимума линейной функции при ограничениях типа линейных матричных неравенств и может численно решаться, к примеру, с помощью пакета `MATLAB LMI-Toolbox`.

Основным результатом данной главы является то, что мы сводим поиск эллипсоида, аппроксимирующего положение вектора фазовых состояний системы, к задаче одномерной оптимизации, решение которой можно легко получить численными методами. Этот факт основан на квадратичном описании всех ограничений на неопределенность в системе. Поэтому удается применить некоторые утверждения касательно квадратичных отображений выпуклых множеств, сформулированных в [137], предложить подход, обобщающий метод эллипсоидов на модели с наличием матричной неопределенности, и показать эффективность полученных эллипсоидальных оценок на этапе предсказания (или аппроксимации суммы, раздел 1.4) и на этапе уточнения (или аппроксимации пересечения, раздел 1.5). Кроме того, этот подход можно распространить на случаи неопределенностей более общего вида (раздел 1.6).

1.2 Вспомогательные утверждения

Приведем несколько простых утверждений, которые будут необходимы в дальнейшем.

Лемма 1.1 *Для любого фиксированного* $x \in \mathbb{R}^n$ *множество векторов* $z = \Delta\, x + v$ *таких, что*

$$\frac{\|\Delta\|^2}{\varepsilon^2} + \frac{\|v\|^2}{\delta^2} \leq 1, \tag{1.9}$$

есть шар:

$$\left\{\Delta\, x + v : \ \frac{\|\Delta\|^2}{\varepsilon^2} + \frac{\|v\|^2}{\delta^2} \leq 1\right\} = \left\{z : \ \|z\|^2 \leq \varepsilon^2\|x\|^2 + \delta^2\right\}. \tag{1.10}$$

Доказательство.
Прямо: Для любой пары $\{\Delta, v\}$, удовлетворяющей (1.9), выполнено: $\|\Delta\ x + v\| \leq \|\Delta\|\,\|x\| + \|v\| \leq (\varepsilon^2\|x\|^2 + \delta^2)^{1/2}$. Последнее неравенство легко демонстрируется, например, методом множителей Лагранжа.
Обратно: Для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $\|z\|^2 \leq \varepsilon^2\|x\|^2 + \delta^2$, возьмем

$$\Delta = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2\|x\|^2 + \delta^2}\, z\, x^T, \qquad v = \frac{\delta^2}{\varepsilon^2\|x\|^2 + \delta^2}\, z. \tag{1.11}$$

Прямой проверкой демонстрируется выполнение равенства $\Delta\ x + v = z$ и неравенства (1.9).
Таким образом, равенство (1.10) доказано. $\square$

Лемма 1.2 *Предположим, что* $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i > 0$, $i = 0, 1, 2$. *Тогда матричное неравенство*

$$G = \begin{pmatrix} B_0 - B_1 & B_0 \\ B_0 & B_0 - B_2 \end{pmatrix} \leq 0 \tag{1.12}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$B_0^{-1} \geq B_1^{-1} + B_2^{-1}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Поскольку $B_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, то из (1.12) и (1.13) следует, что матрицы $B_0 - B_1$ и $B_0 - B_2$ невырождены. В самом деле, если выполнено (1.13), то поскольку $B_2^{-1} > 0$, $B_0^{-1} > B_1^{-1}$, $B_0 - B_1 < 0$. Аналогично $B_0 - B_2 < 0$. Пусть выполнено (1.12) и, например, матрица $B_0 - B_1$ вырождена, т.е. $(B_0 - B_1)\, x = 0$, $x \neq 0$. Тогда для $z = (\gamma x^T,\, y^T)^T$ верно $0 \geq (Gz, z) = 2\gamma(B_0 x, y) + ((B_0 - B_2)y, y)$ при всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Однако, выбрав $y = B_0 x \neq 0$ $(B_0 > 0,\ x \neq 0)$, имеем $0 \geq (Gz, z) = 2\gamma\|B_0 x\|^2 + ((B_0 - B_2)y, y)$; последнее слагаемое есть линейная функция по γ, значения которой неотрицательны при всех $\gamma \in (-\infty, \infty)$, чего не может быть, т.е. мы пришли к противоречию. Значит, $B_0 - B_1$ невырождена. Аналогично показывается невырожденность $B_0 - B_2$.

Далее, выражение (1.12) можно эквивалентно переписать, используя формулу Шура, как $B_0 - B_1 \leq B_0(B_0 - B_2)^{-1}B_0$. Для обратных матриц известно разложение (см. [58]): $(B_0 - B_2)^{-1} = B_0^{-1} + B_0^{-1}(B_2^{-1} - B_0^{-1})^{-1}B_0^{-1}$. Тогда

$$B_0 - B_1 \leq B_0 + (B_2^{-1} - B_0^{-1})^{-1};$$

и $B_1 + (B_2^{-1} - B_0^{-1})^{-1} \geq 0$. Таким образом, условие (1.12) эквивалентно (1.13). □

Нам также понадобится так называемая *S–процедура*, которая довольно широко используется в теории управления, в системном анализе и их приложениях (см. [76]). Рассмотрим следующую ее модификацию. Для данных двух однородных квадратичных форм $f_i(x) = x^T A_i\, x,\ i = 1, 2,$ в $\mathbb{R}^N$ и двух действительных чисел $\alpha_i,\ i = 1, 2$, требуется найти все такие однородные квадратичные формы вида $f_0(x) = x^T A_0\, x$ в $\mathbb{R}^N$ и действительные числа α_0, что

$$f_1(x) \leq \alpha_1,\ \ f_2(x) \leq \alpha_2 \implies f_0(x) \leq \alpha_0. \tag{1.14}$$

Другими словами, задача состоит в том, чтобы описать все однородные квадратичные формы, для которых при $x \in E_1 \bigcap E_2$ выполнялось бы $x \in E_0$, где $E_i = \{x :\ f_i(x) \leq \alpha_i\},\ i = 0, 1, 2.$ Матрицы A_i при этом могут быть не все положительно определенными, соответственно и множества E_i не обязательно все являются невырожденными эллипсоидами. Взяв сумму f_1 и f_2 с весами $\tau_1 \geq 0$ и $\tau_2 \geq 0$, получим очевидное достаточное условие выполнения (1.14):

$$A_0 \leq \tau_1 A_1 + \tau_2 A_2, \qquad \alpha_0 \geq \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2. \tag{1.15}$$

Более интересный факт заключается в том, что при некоторых нежестких предположениях это достаточное условие также является и необходимым. Приведем следующую лемму.

Лемма 1.3 (Polyak, [137]) *Положим $N \geq 3$ и пусть существуют такие $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ и $x^0 \in \mathbb{R}^N$, что*

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 > 0, \qquad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2. \tag{1.16}$$

В этом случае (1.14) выполняется тогда и только тогда, когда существуют $\tau_1 \geq 0$ и $\tau_2 \geq 0$ такие, что верны неравенства в (1.15).

Доказательство получено в статье [137, теорема 4.1], которая посвящена изучению свойств квадратичных отображений выпуклых множеств.

Рассмотрим аналог задачи (1.14) для неоднородных квадратичных функций. Здесь удается получить только достаточное условие ее решения. В интересующем нас виде оно представляется следующим образом.

Лемма 1.4 (Schweppe, [152]) *Рассмотрим две квадратичные функции $f_i(x) = (x-c_i)^T P_i\,(x-c_i)$, $i = 1, 2$, и их взвешенную сумму $f_\tau(x) = (1-\tau)f_1(x)+\tau f_2(x)$, $0 \leq \tau \leq 1$. Тогда множество $E = \{x :\ f_\tau(x) \leq 1\}$ есть эллипсоид $E(c, P)$, где*

$$\left.\begin{array}{rcl} c &=& P_\tau^{-1}[(1-\tau)P_1c_1 + \tau P_2c_2], \\ P &=& (1-\nu)^{-1}P_\tau, \\ P_\tau &=& (1-\tau)P_1 + \tau P_2, \\ \nu &=& (1-\tau)\,c_1^TP_1c_1 + \tau\,c_2^TP_2c_2 - c^TP_\tau c, \qquad 0 < \nu < 1, \end{array}\right\} \tag{1.17}$$

при условии, что $P_\tau > 0$.

Доказательство легко проводится прямыми вычислениями. □

Заметим, что в последней лемме матрицы P_1 и P_2 не предполагаются положительно определенными, а требуется положительная определенность только их взвешенной суммы $P_\tau = (1-\tau)P_1 + \tau P_2$. Отметим также, что, если $c_1 = c_2 = 0$, то $c = 0$, $\nu = 0$ и $P = P_\tau$.

1.3 Множества достижимости

В этом параграфе проиллюстрируем структуру и поведение областей достижимости исходной модели (1.1) без измерений при ограничениях на неопределенность в виде (1.7). Итак, пусть начальный фазовый вектор x_0 системы принадлежит ограниченному эллипсоиду $E(c_0, P_0)$, $P_0 > 0$, а остальные рекуррентно пересчитываются по формуле (1.1)

$$x_{k+1} = (A_k + \Delta A_k)\,x_k + v_k,$$

где

$$\frac{\|\Delta A_k\|^2}{\varepsilon_{A_k}^2} + \frac{\|v_k\|^2}{\delta_{v_k}^2} \leq 1,$$

а матрицы A_k известны. Множество достижимости D_k такой динамической системы тогда будет определяться равенством

$$D_k = \left\{ x_k = \left[\prod_{i=0}^{k-1}(A_i + \Delta A_i)\right] x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left[\prod_{j=i+1}^{k-1} (A_j + \Delta A_j)\, v_i\right] : \right.$$

$$\left. x_0 \in E(c_0, P_0), \quad \frac{\|\Delta A_i\|^2}{\varepsilon_{A_i}^2} + \frac{\|v_i\|^2}{\delta_{v_i}^2} \leq 1, \;\; i = 0, 1, ..., k-1 \right\}. \tag{1.18}$$

Оно может вычисляться рекуррентно, используя результат леммы 1.1, по формуле

$$D_{k+1} = \left\{x_{k+1} = A\, x_k + z_k : \;\; x_k \in D_k, \;\; \|z_k\|^2 \leq \varepsilon_{A_k}^2 \|x_k\|^2 + \delta_{v_k}^2 \right\} \tag{1.19}$$

при начальном $D_0 = E(c_0, P_0)$. В большинстве случаев эти множества имеют довольно сложную структуру. В частности, они зачастую оказываются невыпуклыми и несимметричными, а иногда и неодносвязными. Приведем далее несколько их иллюстраций.

Пример 1.1 Пусть

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_{A_k} = 1, \;\; \delta_{v_k} = 0; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Множество достижимости D_1 уже после первого шага будет невыпуклым (см. рисунок 1.1). На рисунке 1.2 показана эволюция этих множеств для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

При

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_{A_k} = 0.5, \;\; \delta_{v_k} = 0.1; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

динамику развития областей достижимости можно увидеть из рисунка 1.3. Аналогичная ситуация показана на рисунке 1.4 в наиболее общем случае, когда взят ненулевой вектор $c_0 = (1, 1)^T$ и $\delta_{v_k} = 0.5$.

Если

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_{A_k} = 0.4, \;\; \delta_{v_k} = 0; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; c_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

то области достижимости изменяются в соответствии с рисунком 1.5, причем рисунок 1.6 в увеличенном масштабе демонстрирует неодносвязность множества достижимости D_7. □

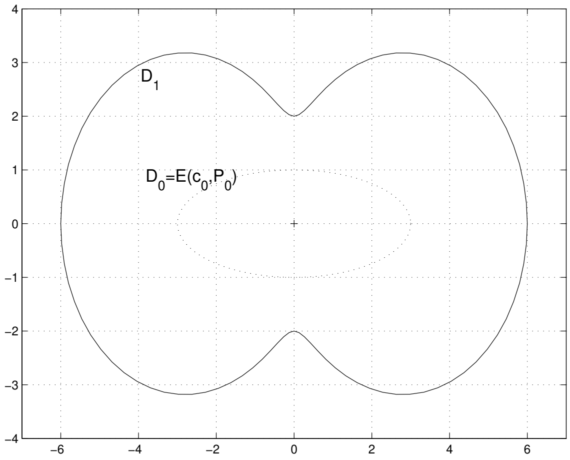

Рис. 1.1: Множество достижимости D_1 системы с матричной неопр-ю ($c_0 = 0$).

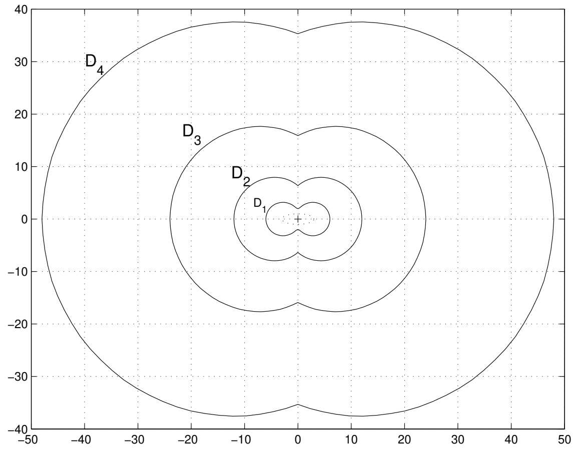

Рис. 1.2: Эволюция множеств достижимости D_1–D_4, ($c_0 = 0$).

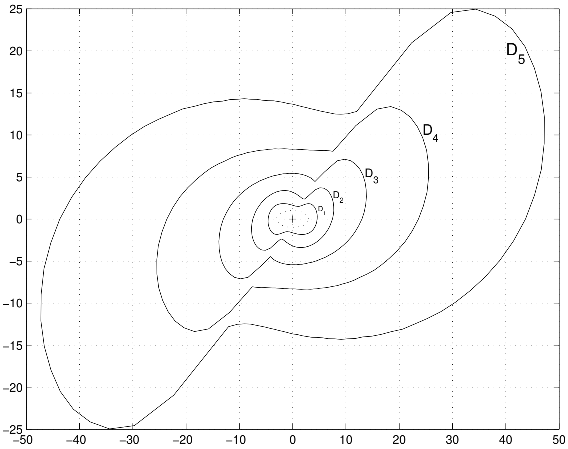

Рис. 1.3: Множества достижимости.

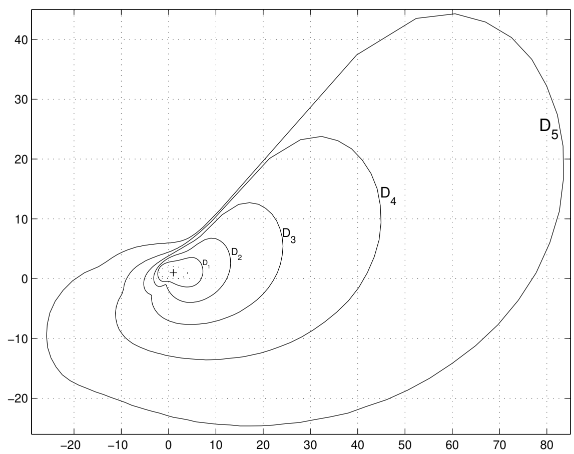

Рис. 1.4: Множества достижимости.

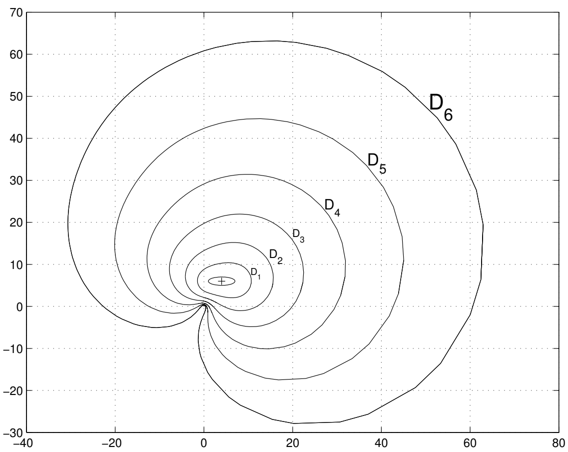

Рис. 1.5: Множества достижимости.

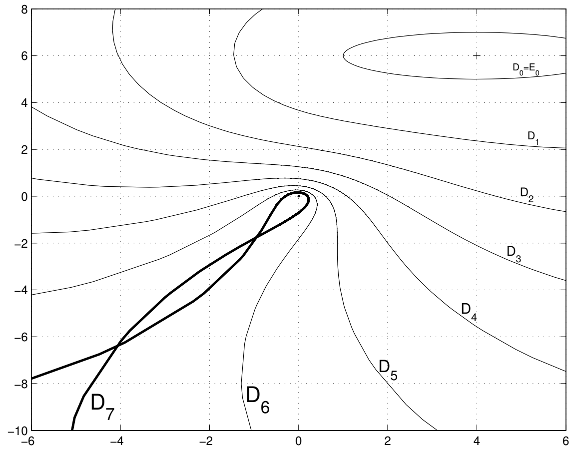

Рис. 1.6: Множества достижимости при $c_0 \neq 0$ (D_7 — неодносвязно).

1.4 Аппроксимация суммы

Сложный характер множеств достижимости рассматриваемой системы диктует необходимость их аппроксимации областями более простого вида. В этом параграфе будет предложен алгоритм их рекуррентного внешнего эллипсоидального оценивания.

Без ограничения общности, рассмотрим уравнение (1.1) состояний системы в виде

$$x^+ = (A + \Delta_A)\, x + v, \tag{1.20}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Для простоты временные индексы здесь опущены. Нас интересует множество $\mathcal{D}$ всех векторов x^+, при которых x лежит в некотором эллипсоиде $E(c, P)$, $P > 0$, а пара $\{\Delta_A, v\}$ удовлетворяет квадратичному ограничению

$$\frac{\|\Delta_A\|^2}{\varepsilon_A^2} + \frac{\|v\|^2}{\delta_v^2} \le 1. \tag{1.21}$$

Заметим, что эллипсоид $E(c, P)$ полагается произвольным невырожденным (с центром не обязательно в начале координат). Тогда

$$\mathcal{D} = \left\{ (A + \Delta_A)\, x + v : \quad x \in E(c, P), \quad \frac{\|\Delta_A\|^2}{\varepsilon_A^2} + \frac{\|v\|^2}{\delta_v^2} \le 1 \right\}. \tag{1.22}$$

есть множество достижимости для (1.20). Это множество не является эллипсоидом, в большинстве случаев оно даже невыпукло (см. выше иллюстрации к примеру 1.1). Чтобы применить эллипсоидальную технику для оценивания состояний системы (1.1), решим задачу погружения множества $\mathcal{D}$ в некий эллипсоид $E(d, Q)$:

$$\mathcal{D} \subseteq E(d, Q). \tag{1.23}$$

Более того, желательно, чтобы этот эллипсоид был по-возможности наименьшим в смысле следа его матрицы или в смысле объема. Итак, задача состоит в минимизации (1.4) или (1.5) при ограничении (1.23). Следующая теорема сводит эту проблему к одномерной задаче оптимизации.

Теорема 1.1 *Пусть множество $\mathcal{D}$ определяется формулой (1.22). Тогда каждый эллипсоид из семейства $E(d(\tau), Q(\tau))$ с параметрами*

$$d(\tau) \;=\; (1 - \delta_v^2 \tau)\, A\, Q_\tau^{-1} P\, c, \tag{1.24}$$

$$Q(\tau) \;=\; \frac{\left\{ A\, Q_\tau^{-1} A^T + \tau^{-1} I \right\}^{-1}}{1 - \xi_\tau}, \tag{1.25}$$

где

$$\begin{aligned} Q_\tau &= (1-\delta_v^2\tau)\,P - \tau\varepsilon_A^2 I, & (1.26)\\ \xi_\tau &= (1-\delta_v^2\tau)\;c^T P\,c - (1-\delta_v^2\tau)^2 c^T P\,Q_\tau^{-1} P\,c, & (1.27)\end{aligned}$$

содержит $\mathcal{D}$ *при всех* τ *таких, что*

$$0 < \tau < \tau_{\max} = \frac{\lambda_{\min}}{\delta_v^2\,\lambda_{\min} + \varepsilon_A^2}. \qquad (1.28)$$

Здесь $\lambda_{\min}$ *— минимальное собственное значение матрицы* P.

Доказательство. Любой вектор $x^+ \in \mathcal{D}$ согласно (1.22) удовлетворяет соотношению $x^+ = A\,x + z$, где $x \in E(c, P)$, а $z = \Delta_A\,x + v$ с парой $\{\Delta_A, v\}$ из (1.21). Тогда $A\,x \in E(A\,c, (A^{-1})^T P A^{-1})$, и z удовлетворяет квадратичному неравенству $\|z\|^2 \le \varepsilon_A^2\|x\|^2 + \delta_v^2$, что следует из леммы 1.1. Для простоты выкладок предполагаем, что матрица A обратима; иначе, без ограничения общности, мы могли бы рассмотреть модель (1.20) в подпространстве $\mathbb{R}^n$, где A невырождена.

Итак, задача состоит в построении квадратичного неравенства $(A\,x + z - d)^T Q\,(A\,x + z - d) \le 1$, т.е. в нахождении таких Q и d, чтобы выполнялись два ограничения: $(x-c)^T P\,(x-c) \le 1$ и $\|z\|^2 \le \varepsilon_A^2\|x\|^2 + \delta_v^2$. Запишем ее в стандартной форме, введя вектор $s = ((Ax)^T,\ z^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, вектора $s_i \in \mathbb{R}^{2n}$ и матрицы $M_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} Q & Q\\ Q & Q\end{pmatrix}, \quad s_0 = \begin{pmatrix} d\\ 0\end{pmatrix}, & (1.29)\\ M_1 &= \begin{pmatrix} (A^{-1})^T P A^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} Ac\\ 0\end{pmatrix}, & (1.30)\\ M_2 &= \begin{pmatrix} -\varepsilon_A^2 (A^{-1})^T A^{-1} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}, \quad s_2 = 0. & (1.31)\end{aligned}$$

Теперь условие того, что $x^+ \in E(d, Q)$ может быть переписано как

$$f_1(s) = (s - s_1)^T M_1\,(s - s_1) \le 1, \quad f_2(s) = s^T M_2\,s \le \delta_v^2 \implies f_0(s) = (s - s_0)^T M_0\,(s - s_0) \le 1. \qquad (1.32)$$

Таким образом, задача поиска эллипсоида $E(d, Q)$ свелась к аналогу S–процедуры для неоднородных квадратичных форм.

Для любых $\tau_1 \ge 0$ и $\tau_2 \ge 0$, рассмотрим линейную комбинацию квадратичных функций

$$f_{\tau_{1,2}}(s) = \tau_1\ f_1(s) + \tau_2\ f_2(s). \qquad (1.33)$$

Обозначим

$$\mathcal{T} = \left\{\tau = (\tau_1, \tau_2)^T : \quad \tau_1 \geq 0, \;\; \tau_2 \geq 0, \;\; \tau_1 + \delta_v^2 \tau_2 \leq 1\right\}. \tag{1.34}$$

Очевидно, что для всех $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathcal{T}$

$$f_1(s) \leq 1, \quad f_2(s) \leq \delta_v^2 \quad \Longrightarrow \quad f_{\tau_{1,2}}(s) \leq 1. \tag{1.35}$$

Рассмотрим множество $E^s = \{\, s : \; f_{\tau_{1,2}}(s) \leq 1, \;\; \forall\, \tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathcal{T}\,\}$. Для $\forall\, s \in \mathbb{R}^n$ таких, что $f_1(s) \leq 1$, $f_2(s) \leq \delta_v^2$, следует $s \in E^s$. Так как матрица $P > 0$, то E^s заведомо непусто. Напишем неравенство, задающее E^s:

$$\tau_1 \; f_1(s) + \tau_2 \; f_2(s) \leq 1. \tag{1.36}$$

Расписав и дополнив левую часть до полного квадрата, оно эквивалентно преобразуется к виду

$$(s - s_{\tau_{1,2}})^T M_{\tau_{1,2}} (s - s_{\tau_{1,2}}) \leq 1 - \xi_{\tau_{1,2}}, \tag{1.37}$$

где

$$M_{\tau_{1,2}} = \tau_1 \, M_1 + \tau_2 \, M_2, \tag{1.38}$$

$$s_{\tau_{1,2}} = \tau_1 \, M_{\tau_{1,2}}^{-1} M_1 s_1, \tag{1.39}$$

$$\xi_{\tau_{1,2}} = \tau_1 \, s_1^T M_1 s_1 - s_{\tau_{1,2}}^T M_{\tau_{1,2}} s_{\tau_{1,2}}. \tag{1.40}$$

Поскольку $P > 0$, то $\exists\, \tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathcal{T}$ такое, что $M_{\tau_{1,2}} > 0$. Неравенство (1.37) задает ограничение, определяющее непустое множество E^s. Значит, условие $M_{\tau_{1,2}} > 0$ сразу влечет выполнение $1 - \xi_{\tau_{1,2}} > 0$, и

$$(s - s_{\tau_{1,2}})^T \frac{M_{\tau_{1,2}}}{1 - \xi_{\tau_{1,2}}} (s - s_{\tau_{1,2}}) \leq 1. \tag{1.41}$$

$M_{\tau_{1,2}} > 0$ эквивалентно неравенству $\tau_1 P - \tau_2 \varepsilon_A^2 I > 0$. Таким образом, при $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathcal{T}$ и при дополнительном условии $M_{\tau_{1,2}} > 0$ множество E^s есть эллипсоид в $\mathbb{R}^{2n}$ с центром $s_{\tau_{1,2}} = \tau_1 M_{\tau_{1,2}}^{-1} M_1 s_1$ и матрицей $M_{\tau_{1,2}}/(1-\xi_{\tau_{1,2}})$. И его можно взять в качестве решения задачи (1.32). Более того, любой больший эллипсоид $E(s_{\tau_{1,2}}, M)$ с тем же центром и матрицей $M \leq M_{\tau_{1,2}}/(1 - \xi_{\tau_{1,2}})$ также есть решение (1.32). Поэтому мы пишем

$$s_0 = \tau_1 \, M_{\tau_{1,2}}^{-1} M_1 s_1, \qquad M_0 \leq \frac{M_{\tau_{1,2}}}{1 - \xi_{\tau_{1,2}}}, \tag{1.42}$$

где $M_{\tau_{1,2}}$ из (1.38), а $\xi_{\tau_{1,2}}$ из (1.40).

Далее распишем матричное неравенство в (1.42)

$$\begin{pmatrix} Q - \dfrac{\tau_1 (A^{-1})^T P A^{-1} - \tau_2 \varepsilon_A^2 (A^{-1})^T A^{-1}}{1-\xi_{\tau_{1,2}}} & Q \\ Q & Q - \dfrac{\tau_2 I}{1-\xi_{\tau_{1,2}}} \end{pmatrix} \leq 0. \quad (1.43)$$

Применяя лемму 1.2, заключаем, что условие (1.43) эквивалентно неравенству

$$Q^{-1} \geq (1-\xi_{\tau_{1,2}}) \left\{ A \left[\tau_1 P - \tau_2 \varepsilon_A^2 I\right]^{-1} A^T + \tau_2^{-1} I \right\} \quad (1.44)$$

при $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_1 + \delta_v^2 \tau_2 \leq 1$ и при условии, что $\tau_1 P - \tau_2 \varepsilon_A^2 I > 0$. Мы ищем минимальный (по всем допустимым τ_1 и τ_2 из $\mathcal{T}$) эллипсоид с матрицей $Q = Q(\tau_1, \tau_2)$ среди данного семейства (1.44) в смысле следа (1.4) или детерминанта (1.5). Этот минимум достигается на матричном равенстве в (1.44) и на равенстве $\tau_1 + \delta_v^2 \tau_2 = 1$ для параметров τ_1, τ_2. Поэтому можно перейти к рассмотрению однопараметрического семейства. Итак, пусть $\tau_2 = \tau$, а $\tau_1 = 1 - \delta_v^2 \tau$, где $\tau > 0$. Условие $\tau_1 P - \tau_2 \varepsilon_A^2 I = (1-\delta_v^2 \tau) P - \tau \varepsilon_A^2 I > 0$ эквивалентно $\tau < \tau_{\max} = \lambda_{\min} / (\delta_v^2 \lambda_{\min} + \varepsilon_A^2)$. Здесь $\lambda_{\min}$ есть минимальное собственное значение матрицы $P > 0$. Тогда при всех $\tau :\ 0 < \tau < \tau_{\max}$ выражение

$$Q^{-1} = (1-\xi_\tau) \left\{ A\, Q_\tau^{-1} A^T + \tau^{-1} I \right\}, \quad (1.45)$$

где

$$\begin{aligned} Q_\tau &= (1-\delta_v^2 \tau) P - \tau \varepsilon_A^2 I, & (1.46)\\ \xi_\tau &= (1-\delta_v^2 \tau)\, c^T P\, c - (1-\delta_v^2 \tau)^2 c^T P\, Q_\tau^{-1} P\, c, & (1.47) \end{aligned}$$

определяет искомое семейство невырожденных эллипсоидов $E(d, Q)$, содержащих любой вектор x^+ из $\mathcal{D}$. Равенство (1.24) для центра $d(\tau)$ этих эллипсоидов следует непосредственно из равенства для s_0 в (1.42). Теорема доказана полностью. □

Таким образом, теорема 1.1 дает однопараметрическое семейство эллипсоидов, содержащих множество достижимости $\mathcal{D}$ системы (1.20). Находя минимум функции одной переменной $\varphi_1(\tau) = \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ или $\varphi_2(\tau) = -\ln \det Q(\tau)$ на интервале $0 < \tau < \tau_{\max}$, мы получим субоптимальный эллипсоид, содержащий $\mathcal{D}$. Это практически полный аналог ситуации без матричной неопределенности, когда требуется решить одномерную выпуклую задачу оптимизации, чтобы построить наилучшую эллипсоидальную оценку (среди полученного семейства) для алгебраической суммы двух множеств (см., например, [85, 108]). Отметим, что функции $\varphi_1(\tau) = \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ и $\varphi_2(\tau) = -\ln \det Q(\tau)$ здесь, по-видимому, являются строго выпуклыми на промежутке $0 < \tau < \tau_{\max}$ (это подтверждается множеством проведенных численных экспериментов), однако четко доказать это пока не удается.

К сожалению, полученный субоптимальный эллипсоид отличается от оптимального (минимального) среди всех возможных эллипсоидов, включающий в себя $\mathcal{D}$. Однако это отличие незначительно. И минимальный в однопараметрическом семействе эллипсоид дает хорошую внешнюю аппроксимацию множества достижимости $\mathcal{D}$, что подтверждается многочисленными примерами. Результат теоремы 1.1 может напрямую быть применен для решения задачи оценивания состояний дискретной динамической системы с измерениями, так как при наличии измерений центры получаемых эллипсоидов могут оказаться произвольными (отличными от нуля).

Более простой метод внешнего оценивания множеств достижимости был предложен Ф.Л. Черноусько и Д.Я. Рокитянским [80]. Их алгоритм вычисляет эллипсоидальную оценку $E \supseteq \mathcal{D}$ как аппроксимацию суммы эллипсоида $E(Ac,\ (A^{-1})^T P A^{-1})$ и шара $E(0, r^{-2}I)$ радиуса r, равного

$$r^2 = \varepsilon_A^2 \max_{x \in E(c,P)} \|x\|^2 + \delta_v^2 = \varepsilon_A^2 \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} + 2\sqrt{c^T P^{-1} c} + \|c\|^2 \right) + \delta_v^2. \tag{1.48}$$

В самом деле, сумма этих двух эллипсоидов есть уже выпуклое множество, и оно содержит $\mathcal{D}$. Поиск ее аппроксимации $E(Ac, \widetilde{Q})$ тогда не вызывает трудностей и сводится к классической аппроксимации суммы двух эллипсоидов. Простота данного подхода очевидна. Однако полученная при этом аппроксимация может оказаться довольно грубой и заведомо менее точной, чем субоптимальная оценка, вычисленная по теореме 1.1. Приведем следующий пример:

Пример 1.2 Пусть $P = \operatorname{diag}\{1/9, 1\}$, $c = (1,2)^T$, $A = \operatorname{diag}\{1,1\}$, $\varepsilon_A = 1$ и $\delta_v = 0.5$. Множество достижимости $\mathcal{D}$ невыпукло (см. рисунок 1.7), и эллипсоид $E(d(\tau), Q(\tau))$ с параметрами $d(\tau)$ из (1.24) и $Q(\tau)$ из (1.25) содержит $\mathcal{D}$ при всех τ таких, что $0 < \tau < \tau_{\max} = 4/37$. Для простоты опустим явные выражения для $d(\tau)$ и $Q(\tau)$. Минимальный по следу эллипсоид $E(d, Q)$ из семейства теоремы 1.1 (тонкая сплошная линия на

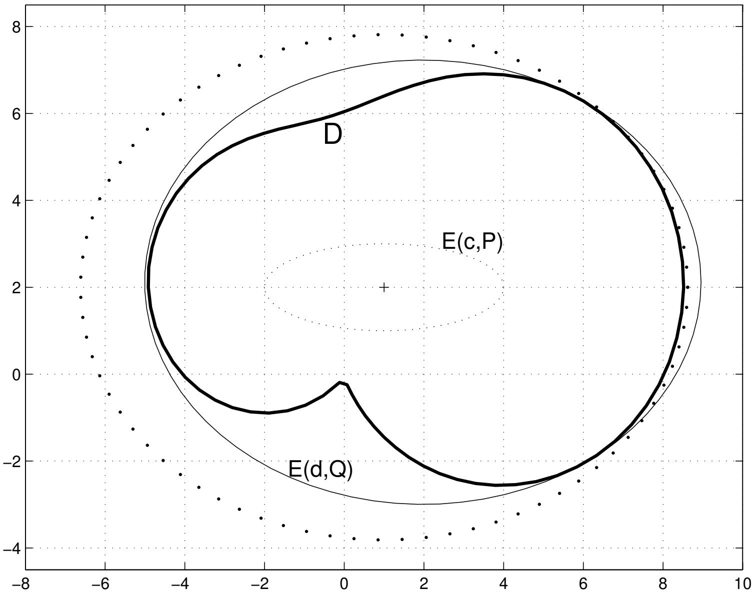

Рис. 1.7: Внешняя аппроксимация множества достижимости.

рисунке 1.7) хорошо внешне аппроксимирует множество достижимости $\mathcal{D}$.

Сравните с более грубой аппроксимацией, полученной из [80] и показанной на рисунке 1.7 точечной линией. Причем разница между этими двумя оценками становится более существенной, если использовать их рекуррентно при оценивании многошагового процесса. □

Приведем далее еще один пример, более явно демонстрирующий субоптимальность получаемой эллипсоидальной оценки.

Пример 1.3 Полагаем $\varepsilon_A = 1.5$, $\delta_v = 0.5$, а

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Множество достижимости $\mathcal{D}$ невыпукло; его граница показана на рисунке 1.8 жирной линией. Причем, недиагональная матрица A системы дополнительно делает поворот начального эллипсоида $E(c, P)$. Тогда эллипсоид $E(d(\tau), Q(\tau))$ с параметрами $d(\tau)$ из (1.24) и $Q(\tau)$ из (1.25) содержит $\mathcal{D}$ при всех τ из интервала $0 < \tau < \tau_{\max} = 4/145$. Минимальный по следу эллипсоид $E(d, Q)$ из этого семейства показан на рисунке 1.8 тонкой сплошной линией. Видно, что он не является минимальным среди всех эллипсоидов, содержащих $\mathcal{D}$. Однако он дает намного

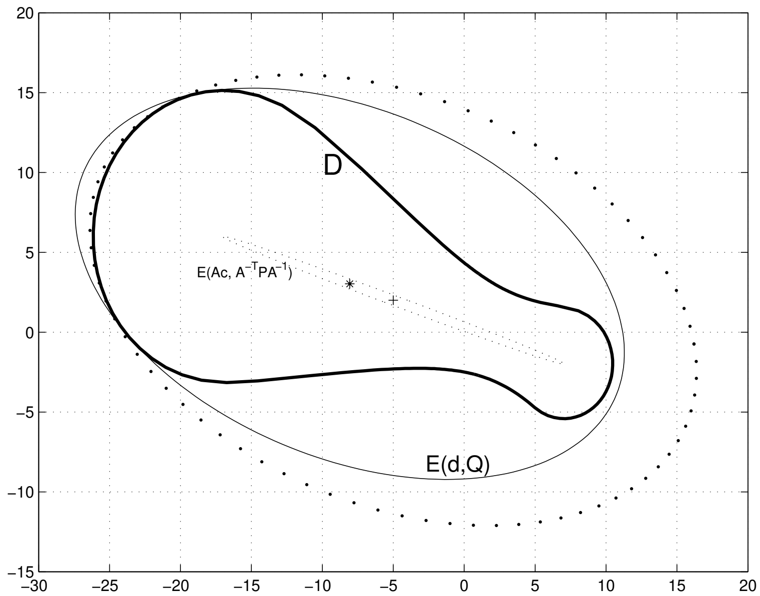

Рис. 1.8: Внешняя аппроксимация множества достижимости.

более лучшую аппроксимацию $\mathcal{D}$, чем эллипсоид (точечная линия), полученный из [80], что безусловно важно с точки зрения рекуррентного применения данного алгоритма. $\square$

В некоторых случаях, иногда, можно полагать, что центр начального эллипсоида $E(c, P)$ расположен в нуле, т.е. $c = 0$. Это предположение естественно, например, при рассмотрении задачи оценивания состояной динамической системы без измерений. Действительно, если $x_0 \in E(0, P_0)$, то $x_k \in E(0, P_k)$ с центром в нуле из-за симметричности множеств достижимости относительно начала координат на каждом шаге k. В этом частном случае, формулы теоремы 1.1 заметно упрощаются; и более того, минимальный в смысле следа или детерминанта эллипсоид из однопараметрического семейства, определяемого теоремой 1.1, оказывается минимальной оценкой среди всех эллипсоидов, содержащих множество $\mathcal{D}$. Таким образом, мы приходим к более сильному утверждению.

Теорема 1.2 *Пусть множество $\mathcal{D}$ определяется формулой (1.22), причем центр эллипсоида $E(c, P)$ расположен в нуле, т.е. $c = 0$. Тогда однопараметрическое семейство эллипсоидов $E(0, Q(\tau))$ с матрицами*

$$Q(\tau) = \left\{ A[(1 - \delta_v^2 \tau)\, P - \tau \varepsilon_A^2 I]^{-1} A^T + \tau^{-1} I \right\}^{-1} \tag{1.49}$$

содержит множество $\mathcal{D}$ при всех τ, удовлетворяющих (1.28). Минимизация гладкой и выпуклой скалярной функции $\varphi_1(\tau) = \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ или $\varphi_2(\tau) = -\ln\det Q(\tau)$ на интервале (1.28) дает минимальный по следу или соответственно по объему эллипсоид среди всех эллипсоидов, включающих в себя $\mathcal{D}$.

Доказательство. Ход доказательства повторяется как в теореме 1.1. Из условия $c = 0$ следует $s_1 = 0$. Тогда $f_0(s)$, $f_1(s)$ и $f_2(s)$ в (1.32) есть однородные квадратичные формы, к которым применима лемма 1.3 об *S–процедуре*. В самом деле, $s^0 = 0$ и $\mu_1 = 1$, а $\mu_2 > 0$ можно взять достаточно малой, чтобы выполнялись неравенства (1.16); размерность $N = 2n > 3$ $(n \geq 2)$. Согласно лемме 1.3, условие (1.32) эквивалентно

$$M_0 \leq \tau_1 M_1 + \tau_2 M_2, \tag{1.50}$$

где $\tau_1 \geq 0,\ \tau_2 \geq 0$ и $\tau_1 + \delta_v^2 \tau_2 \leq 1$. Простые преобразования переводят это линейное матричное неравенство к виду

$$Q^{-1} \geq A(\tau_1 P - \tau_2 \varepsilon_A^2 I)^{-1} A^T + I/\tau_2 \tag{1.51}$$

с условиями $0 < \tau_1 \leq 1 - \delta_v^2 \tau_2$, $0 < \tau_2$ и $\tau_1 P - \tau_2 \varepsilon_A^2 I > 0$. Мы ищем минимальный эллипсоид в смысле следа или детерминанта. Поэтому решение достигается на матричном равенстве в (1.51) и при $\tau_1 = 1 - \delta_v^2 \tau_2$. Таким образом, мы получаем однопараметрическое семейство матриц (1.49) с $\tau = \tau_2$, удовлетворяющим (1.28). Минимизация по этому семейству функций (1.4) или (1.5) дает наилучшую среди всех эллипсоидальную аппроксимацию в смысле критерия следа или детерминанта.

Выпуклость соответствующих гладких одномерных функций $\varphi_1(\tau) = \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ и $\varphi_2(\tau) = -\ln\det Q(\tau)$ на интервале $0 < \tau < \tau^*$ следует из положительности для них второй производной. В самом деле, для $\varphi_1(\tau) = \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ вторая производная по τ тривиальным образом записывается в виде

$$\frac{d^2\varphi_1(\tau)}{d\tau^2} = 2\ \mathrm{tr}\ \left(A Q_\tau^{-1} \widetilde{P} Q_\tau^{-1} \widetilde{P} Q_\tau^{-1} A^T\right) + \frac{\mathrm{tr}\ I}{\tau^3}, \tag{1.52}$$

где

$$Q_\tau = (1 - \delta_v^2 \tau)\, P - \tau \varepsilon_A^2 I, \tag{1.53}$$

$$\widetilde{P} = \delta_v^2\, P + \varepsilon_A^2 I. \tag{1.54}$$

Так как $P > 0$, то $\widetilde{P} > 0$ и $Q_\tau > 0$ при $0 < \tau < \tau^*$, а значит, $\dfrac{d^2\varphi_1(\tau)}{d\tau^2} > 0$.

Доказательство выпуклости функции $\varphi_2(\tau) = -\ln\det Q(\tau)$ немногим более сложное. Поскольку $\dfrac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = -\operatorname{tr}\left(Q(\tau)^{-1}\ \dfrac{dQ(\tau)}{d\tau}\right)$, то

$$\frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = \operatorname{tr}\ [R(\tau)\,Q(\tau)]\,,$$

где $R(\tau) = AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T - I/\tau^2$, а выражения для Q_τ и $\widetilde{P}$ даются (1.53) и (1.54) соответственно. Тогда вторая производная переписывается в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_2(\tau)}{d\tau^2} = \operatorname{tr}\,[S(\tau)\;Q(\tau)]\,,\\ &S(\tau) = 2\,AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T + \frac{2\,I}{\tau^3} - R(\tau)\,Q(\tau)\,R(\tau). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Матрица $Q(\tau) > 0$ на интервале $0 < \tau < \tau^*$. Покажем, что $S(\tau)$ также является положительно определенной. Итак, учитывая, что $R(\tau) = AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T - I/\tau^2$, распишем

$$\begin{aligned} S(\tau) &= 2\,AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T + \frac{2\,I}{\tau^3} - R(\tau)\,Q(\tau)\,R(\tau) = \\ &= 2\,AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T + \frac{2\,I}{\tau^3} - AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T\cdot Q(\tau)\cdot AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T - \\ &\quad -\frac{Q(\tau)}{\tau^4} + AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T\cdot\frac{Q(\tau)}{\tau^2} + \frac{Q(\tau)}{\tau^2}\cdot AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T = \\ &= AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}\left[2Q_\tau - A^TQ(\tau)A\right]Q_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T + \frac{1}{\tau^4}\left[2\tau I - Q(\tau)\right] + \\ &\quad + AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T\cdot\frac{Q(\tau)}{\tau^2} + \frac{Q(\tau)}{\tau^2}\cdot AQ_\tau^{-1}\widetilde{P}Q_\tau^{-1}A^T. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых в этом выражении являются положительно определенными, тогда как положительная определенность двух первых следует из того, что $Q(\tau)^{-1} = AQ_\tau^{-1}A^T + I/\tau$. Действительно,
а) $Q(\tau)^{-1} > AQ_\tau^{-1}A^T$ или $A^TQ(\tau)A < Q_\tau$, отсюда $2Q_\tau - A^TQ(\tau)A > Q_\tau > 0$;
б) $Q(\tau)^{-1} > I/\tau$ или $Q(\tau) < \tau I$, отсюда $2\tau I - Q(\tau) > Q(\tau) > 0$.
Таким образом, $S(\tau) > 0$ на $0 < \tau < \tau^*$, а значит, $\dfrac{d^2\varphi_2(\tau)}{d\tau^2} > 0$. Теорема доказана. $\square$

Следующий пример иллюстрирует результат теоремы 1.2.

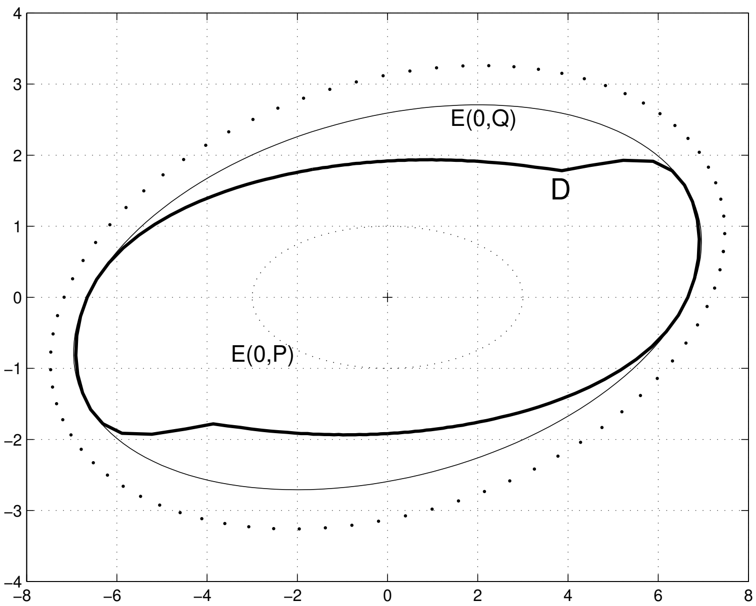

Рис. 1.9: Внешняя аппроксимация множества достижимости ($c = 0$).

Пример 1.4 Пусть начальный эллипсоид имеет матрицу $P = \text{diag}\{1/9,\ 1\}$, а матрица A системы равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varepsilon_A = \delta_v = 0.5$. Тогда эллипсоиды $E(0, Q(\tau))$ с $Q(\tau)$ из (1.49) содержат множество достижимости $\mathcal{D}$ при всех τ таких, что $0 < \tau < \tau_{\max} = 2/5$. Чтобы найти минимальный, например, по следу эллипсоид необходимо решить простое алгебраическое уравнение, которое имеет единственный корень $\tau_{\min}$ на интервале $(0, 2/5)$. Полученная оценка является оптимальной внешней эллипсоидальной аппроксимацией множества $\mathcal{D}$, она представлена тонкой сплошной линией на рисунке 1.9.

Сравните с менее точной аппроксимацией, полученной по методу из [80] (точечная линия на рисунке 1.9). $\square$

1.5 Аппроксимация пересечения

Рассмотрим теперь линейную систему с измерениями, описываемую уравнением (1.2). Эллипсоидальная аппроксимация пересечения эллипсоидов является основной операцией в классической задаче гарантированного оценивания фазовых состояний динамической системы с измерениями. При этом в общем случае эллипсоиды полагаются вырожденными, т.е. с неотрицательно определенными матрицами. Например, в модели (1.2) с известными регрессорами (без матричной неопределенности) наличие одного измерения $y \in \mathbb{R}$ определяет множество всех допустимых фазовых векторов x, являющееся полосой в $\mathbb{R}^n$. Основным инструментом для решения задачи о пересечении эллипсоидов (возможно вырожденных) является лемма 1.4. Однако наша постановка задачи более общая, и мы предполагаем матрицу в уравнении (1.2) точно не известной, а разделенной на известное номинальное ее значение C и на матрицу неопределенности Δ_C:

$$y = (C + \Delta_C)\, x + w. \tag{1.56}$$

Временные индексы здесь также для простоты опущены, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а пара $\{\Delta_C, w\}$ удовлетворяет квадратичному неравенству:

$$\frac{\|\Delta_C\|^2}{\varepsilon_C^2} + \frac{\|w\|^2}{\delta_w^2} \le 1. \tag{1.57}$$

Для данного вектора измерений y и известной номинальной матрицы C ставится задача оценить множество всех фазовых векторов x, совместимых с данной моделью (1.56)–(1.57). Такое множество иногда называют информационным или множеством допустимых состояний системы. В соответствии с леммой 1.1 имеем

$$\|y - Cx\|^2 \le \varepsilon_C^2 \|x\|^2 + \delta_w^2, \tag{1.58}$$

или эквивалентно

$$x^T (C^T C - \varepsilon_C^2 I)\, x - 2x^T C^T y + y^T y - \delta_w^2 \le 0. \tag{1.59}$$

Пусть ε_C^2 не является собственным значением матрицы $C^T C$, т.е. $C^T C - \varepsilon_C^2 I$ обратима, что всегда верно, если полагать ошибки или возмушения в системе небольшими по отношению к известным номинальным величинам. Тогда (1.59) может быть записано в виде неоднородной квадратичной формы:

$$(x - d)^T M (x - d) \le 1, \tag{1.60}$$

где

$$M = \frac{R}{y^T C R^{-1} C^T y - y^T y + \delta_w^2}, \tag{1.61}$$

$$d = R^{-1} C^T y, \tag{1.62}$$

$$R = C^T C - \varepsilon_C^2 I. \tag{1.63}$$

Матрицы R и M могут не оказаться положительно или даже неотрицательно определенными. Поэтому множество всех x, удовлетворяющих (1.60), не является эллипсоидом или полосой в $\mathbb{R}^n$. Его структура зависит от значений C и ε. Тем не менее, можно применить эллипсоидальную технику для аппроксимации пересечения этого множества с некоторым невырожденным эллипсоидом. Сформулируем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 1.3 *Если* x *принадлежит* $E(c,P)$, $P>0$, *и удовлетворяет* $y=(C+\Delta_C)\,x+w$, *где пара* $\{\Delta_C,w\}$ *подчинена (1.57), то* x *принадлежит эллипсоиду* $E(g(\tau),Q(\tau))$ *с параметрами*

$$\left.\begin{array}{rcl} Q(\tau) &=& (1-\nu_\tau)^{-1}Q_\tau, \\ g(\tau) &=& Q_\tau^{-1}[(1-\tau)Pc+\tau Md], \\ Q_\tau &=& (1-\tau)P+\tau M, \\ \nu_\tau &=& (1-\tau)\,c^TPc+\tau d^TMd-g(\tau)^TQ_\tau g(\tau) \end{array}\right\} \tag{1.64}$$

при всех значениях τ *из интервала* $0\le\tau<\tau_{\max}=\min\{1;\,1/(1-\widehat{\lambda}_{\min})\}$, *где* $\widehat{\lambda}_{\min}$ *— минимальное обобщенное собственное значение матричной пары* $\{M,P\}$.

Обобщенными называют собственное значение $\widehat{\lambda}_i$ и собственный вектор $\widehat{v}_i$ для матричной пары $\{M,P\}$, если $M\widehat{v}_i=\widehat{\lambda}_iP\widehat{v}_i$.

Доказательство. Поскольку $x\in E(c,P)=\{x:\ (x-c)^TP\,(x-c)\le 1\}$, $P>0$ и выполнено неравенство (1.60), то

$$f_\tau(x)=(1-\tau)\,(x-c)^TP\,(x-c)+\tau\,(x-d)^TM\,(x-d)\le 1, \quad \forall\,\tau:\ 0\le\tau\le 1. \tag{1.65}$$

Пусть $Q_\tau=(1-\tau)P+\tau M$, а $\widehat{\lambda}_{\min}$ — минимальное обобщенное собственное значение матричной пары $\{M,P\}$. Так как $P>0$, очевидным образом отсюда следует, что

$$Q_\tau>0, \qquad \forall\,\tau:\ 0\le\tau<\tau_{\max}, \tag{1.66}$$

где $\tau_{\max}=\min\{1,\,1/(1-\widehat{\lambda}_{\min})\}$.

Далее рассмотрим множество $E=\{x:\ f_\tau(x)\le 1\}$. Применим лемму 1.4 при условии (1.66) на параметр τ, откуда и следуют окончательные формулы в (1.64). Теорема доказана. □

Оптимизируя $\varphi_1(\tau)=\operatorname{tr}Q(\tau)^{-1}$ или $\varphi_2(\tau)=-\ln\det Q(\tau)$ по $0\le\tau<\tau_{\max}$, получим минимальный в однопараметрическом семействе

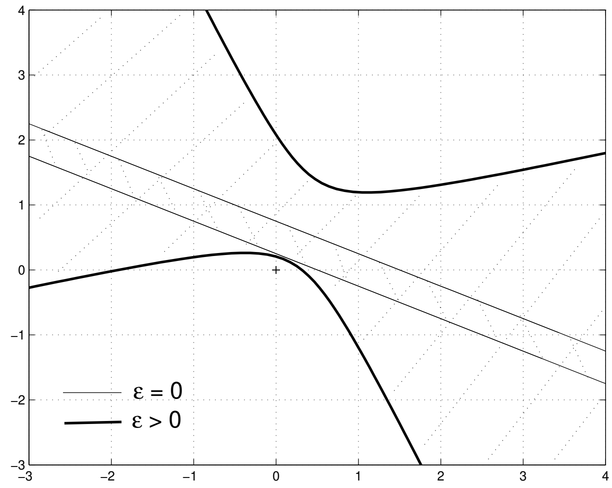

Рис. 1.10: Множество допустимых значений параметров.

$E(g(\tau), Q(\tau))$ эллипсоид, содержащий пересечение. Однако этот эллипсоид дает только субоптимальную оценку в классе всех эллипсоидов аналогично случаю аппроксимации суммы (теорема 1.1). Он окажется оптимальным, если центры c и d пересекаемых множеств будут совпадать, что можно показать, опираясь на результаты [137]. Но в общем случае задачи оценивания такое совпадение центров не наблюдается. Заметим, что когда c и d различны, то центр результирующего эллипсоида g будет отличаться от начального c. Отметим также, что как и в случае аппроксимации суммы, функции $\varphi_1(\tau) = \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ и $\varphi_2(\tau) = -\ln \det Q(\tau)$, по-видимому, являются строго выпуклыми на интервале $0 \leq \tau < \tau_{\max}$, что подтверждается множеством численных экспериментов, но доказать полностью этот результат пока не удается.

Для того, чтобы продемонстрировать отличительные свойства и структуру множеств возможных состояний системы (информационных множеств), определяемых результатами измерений при наличии матричной неопределенности в модели, рассмотрим скалярное измерение, т.е. случай $m = 1$. Тогда все допустимые вектора x при фиксированном значении y лежат внутри гиперболоида в $\mathbb{R}^n$. Рисунок 1.10 дает иллюстрацию этого множества на плоскости ($n = 2$). В то же время, если уменьшать матричную неопределенность (значение ε_C стремить к нулю), то этот гиперболоид стягивается в полосу (тонкая сплошная линия на рисунке 1.10), которая является множеством возможных состояний системы в отсутствии матричной неопределенности.

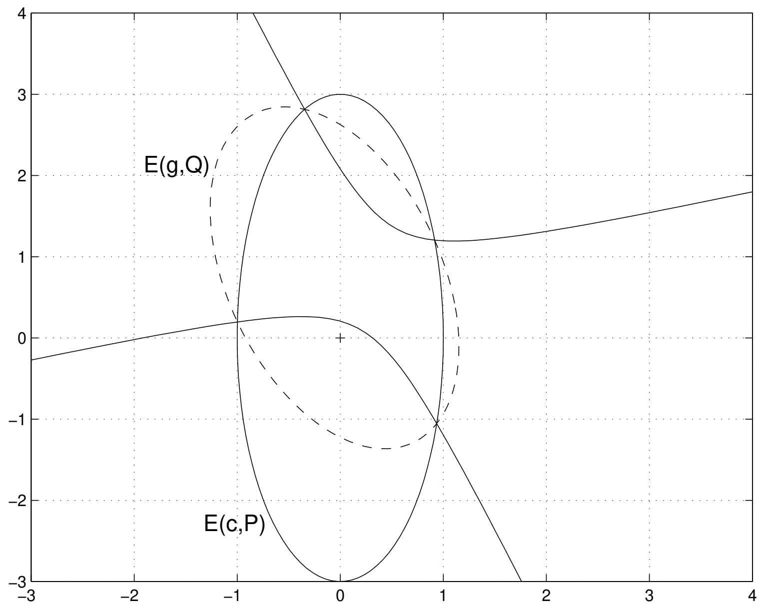

Рис. 1.11: Внешняя аппроксимация пересечения.

Пример 1.5 Возьмем $m = 1,\ n = 2$, $y = 1$, $C = (1,\ 2)$, $\varepsilon_C = 1.5$ и $\delta_w = 0.5$. Предположим, что априорно известна принадлежность фазового вектора x системы невырожденному эллипсоиду $E(0, P)$ с матрицей $P = \mathrm{diag}\{1, 1/9\}$. Два собственных значения матрицы R, определяемой по формуле (1.63), имеют в этом случае разные знаки. Значит, ни R, ни M не являются положительно или неотрицательно определенными. Поэтому множество всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(x - d)^T M(x - d) \leq 1$ есть пространство между двумя гиперболами на плоскости (см. рисунок 1.11). Вычисляя $\lambda_{\min} = -2.953$ и $\tau_{\max} = 0.253 < 1$, находим минимальный эллипсоид $E(g, Q)$ в однопараметрическом семействе (1.64) теоремы 1.3. На рисунке 1.11 показана аппроксимация пересечения минимальным в смысле следа эллипсоидом (пунктирная линия). □

Рассмотрим еще один пример, который лучше демонстрирует субоптимальность эллипсоидальной оценки пересечения.

Пример 1.6 Пусть $m = 1,\ n = 2$, $y = 0$, $C = (1,\ -2)$, $\varepsilon_C = 1.5$ и $\delta_w = 0.5$. Тогда множество всех $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих (1.60), есть пространство между двумя гиперболами на плоскости (см. рисунок 1.12). Положим также известным, что фазовый вектор x системы лежит в шаре $E(c, P)$, $P = I$, единичного радиуса с центром $= (0, 1.5)^T$. Однопараметрическое семейство эллипсоидов $E(g(\tau), Q(\tau))$ из (1.64) содер-

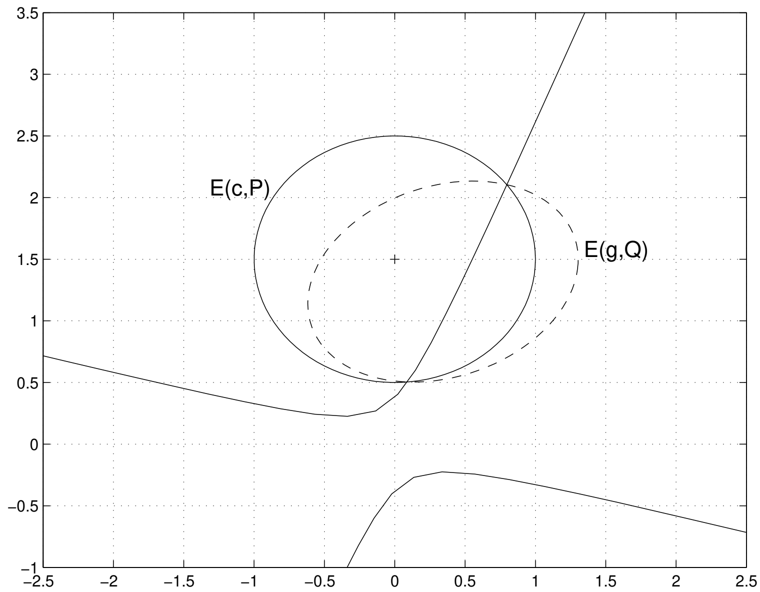

Рис. 1.12: Внешняя аппроксимация пересечения.

жит пересечение этого шара с множеством векторов x, совместимых с данным наблюдением y. Минимальный по следу эллипсоид в семействе показан на рисунке 1.12 пунктирной линией. Легко заметить, что этот эллипсоид не является минимальным среди всех, содержаших пересечение. Тем не менее, он дает более точную аппроксимацию вектора фазовых состояний x исходной системы, чем начальный эллипсоид $E(c, P)$. $\square$

1.6 Обобщения

Итак, в предыдущих двух разделах были найдены "хорошие" субоптимальные эллипсоиды, содержащие сумму и пересечение соответствующих множеств, для случая совместных квадратичных ограничений на матричную (мультипликативную) и аддитивную (векторную) неопределенности в линейной динамической системе. Однако только узкий класс систем с неопределенностью может удовлетворять таким ограничениям. В этой связи, встает вопрос о возможности распространения полученных результатов на более общие типы неопределенностей.

1.6.1 Матричная неопределенность, ограниченная во фробениусовой норме

Лемма 1.1 остается верной, если спектральную матричную норму заменить на фробениусову в ограничениях на неопределенность. Ее доказательство сохраняется неизменным, поскольку $\|Hx\| \le \|H\|_F \, \|x\|$ и $\|zx^T\|_F = \|z\| \, \|x\|$, где x и z — вектора. По этой причине, здесь не будет наблюдаться никаких различий в формулировке задачи оценивания фазовых состояний системы и в алгоритмах ее решения. Значит, все результаты теорем 1.1, 1.2 и 1.3 могут очевидным образом быть обобщены на случай совместных квадратичных ограничений (1.7) и (1.8) с фробениусовой матричной нормой.

1.6.2 Аппроксимация суммы при раздельных ограничениях на неопределенность

Совместное квадратичное ограничение (1.7) является очень жестким и грубым условием. Зачастую в наличии имеются только раздельные ограничения на матричную и аддитивную составляющие неопределенности. Оказывается, что результаты теорем 1.1 и 1.2 можно легко распространить и на этот случай.

Рассмотрим следующую ситуацию для линейной динамической модели

$$x_{k+1} = (A_k + \Delta_k)\, x_k + V_k\, v_k, \tag{1.67}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $v_k \in \mathbb{R}^p$, и также полагаем, что $x_0 \in E(c_0, P_0)$, $\|\Delta_k\| \le \varepsilon_{A_k}$ и $\|v_k\| \le \delta_{v_k}$. Для матриц здесь используется спектральная норма. Заметим, что модель (1.67) учитывает случай с прямоугольной матрицей возмущений $V_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Без потери общности, рассмотрим один шаг в уравнении (1.67)

$$x^+ = (A + \Delta_A)\, x + V\, v; \quad x \in E(c, P), \;\; \|\Delta_A\| \le \varepsilon_A, \;\; \|v\| \le \delta_v. \tag{1.68}$$

Тогда $A\,x \in E(Ac, (A^{-1})^T P A^{-1})$, $\|\Delta_A x\| \le \varepsilon_A \|x\|$ и $V v \in E_1$, где $E_1 = \{V v : \; \|v\| \le \delta_v\}$ — эллипсоид (возможно вырожденный). Чтобы найти эллипсоид $E(d, Q)$, содержащий все вектора x^+ при данных ограничениях, достаточно выполнить следующие две операции:

a) найти эллипсоид $E(d_a, Q_a)$, описывающий векторную сумму $x_a^+ = A\,x + \Delta_A\, x$, напрямую из теоремы 1.1 при $\delta_v = 0$;

б) вычислить оптимальную внешнюю оценку $E(d, Q)$ суммы двух эллипсоидов $E(d_a, Q_a)$ и E_1 (см, например, [85]).

Эллипсоид $E(d, Q)$ будет искомой аппроксимацией вектора $x^+ = x_a^+ + B\,v$. Каждая операция в отдельности дает хорошую субоптимальную аппроксимацию, поэтому конечный эллипсоид будет эффективным субоптимальным решением. Отметим, что выполнять эти операции можно и в обратном порядке; это приведет к другому субоптимальному решению.

Таким образом, для решения задачи эллипсоидального оценивания фазовых состояний динамических систем вида (1.67) с раздельными ограничениями на матричную и аддитивную части неопределенности можно рекуррентно применять процедуру аппроксимации множества векторов x^+ из (1.68), воспользовавшись предложенными здесь результатами теорем 1.1 и 1.2.

1.6.3 Аппроксимация пересечения при раздельных ограничениях на неопределенность

Анализируя в разделе 1.5 настоящей главы уравнение наблюдений исходной динамической системы, видно, что совместные ограничения (1.8) эквивалентно приводят к квадратичному неравенству (1.58). К сожалению, это оказывается неверным в случае раздельных ограничений. Действительно, множество всевозможных векторов состояний x, совместных с результатами измерений

$$y = (C + \Delta_C)\,x + w, \qquad \|\Delta_C\| \le \varepsilon_C, \;\; \|w\| \le \delta_w, \tag{1.69}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, эквивалентно определяется неравенством

$$\|y - Cx\| \le \varepsilon_C \|x\| + \delta_w. \tag{1.70}$$

Это неравенство не является квадратичным в отличие от (1.58). По этой причине, не удается напрямую применить теорему 1.3. Однако из условия (1.70) следует, что

$$\|y - Cx\|^2 \le \varepsilon_C^2 \|x\|^2 + \left(\delta_w^2 + 2\varepsilon_C\,\delta_w \max_{x \in E(c,P)} \|x\| \right). \tag{1.71}$$

Тогда после замены δ_w^2 на $\widetilde{\delta}_w^2 = \delta_w^2 + 2\varepsilon_C \delta_w \max\limits_{x \in E(c,P)} \|x\|$ можно воспользоваться теоремой 1.3.

Итак, оказывается возможным также вычислить эллипсоидальную аппроксимацию пересечения при наличии раздельных ограничений (1.69) на матричную и аддитивную части неопределенности. Очевидно, что полученное решение является только субоптимальным и в общем случае может сильно отличаться от оптимального.

1.7 Рекуррентный алгоритм (эллипсоидальный фильтр)

Кратко резюмируя результаты данной главы, представим в этом параграфе рекуррентный алгоритм внешнего эллипсоидального оценивания, являющийся по сути эллипсоидальным фильтром фазовых состояний линейных дискретных динамических систем вида (1.1)–(1.2) с неопределенностью в описании модели. При этом неопределенность в модели полагается удовлетворяющей совместным (на матричную и аддитивную векторную части) квадратичным ограничениям (1.7)–(1.8). Это дает возможность построения эффективных эллипсоидальных аппроксимаций для суммы и пересечения соответствующих множеств, возникающих в задаче оценивания для рассматриваемых систем. При других типах неопределенности можно использовать обобщающие результаты раздела 1.6. Будем применять обозначения, принятые в теории фильтрации Калмана-Бьюси для стохастических систем со случайной неопределенностью. Начальный эллипсоид $E_{0|0}$ в алгоритме (по аналогии с фильтром Калмана) может быть взят достаточно большим и с центром в нуле, так чтобы он гарантированно содержал неизвестный начальный фазовый вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Выпишем один шаг рекуррентного алгоритма эллипсоидального оценивания.

1.7.1 Этап предсказания

Пусть $x_k \in E_{k|k} = E(c_{k|k}, P_{k|k}),\ P_{k|k} > 0$. На первом этапе оценивания, который называется этапом предсказания или аппроксимацией суммы, необходимо найти эллипсоид $E_{k+1|k} = E(c_{k+1|k}, P_{k+1|k})$, достоверно содержащий фазовый вектор x_{k+1}, на основе имеющихся данных на момент времени k. Алгоритм его поиска выглядит следующим образом:

- Вычислить последовательно

$$
\begin{aligned}
\tau_{\max} &= \frac{\lambda_{\min}(P_{k|k})}{\delta_v^2\,\lambda_{\min}(P_{k|k}) + \varepsilon_{A_k}^2},\\
Q_\tau &= (1-\delta_v^2\tau)\,P_{k|k} - \tau\varepsilon_{A_k}^2 I,\\
\xi_\tau &= (1-\delta_v^2\tau)\,c_{k|k}^T P_{k|k} c_{k|k} - (1-\delta_v^2\tau)^2 c_{k|k}^T P_{k|k}\,Q_\tau^{-1} P_{k|k} c_{k|k},\\
d(\tau) &= (1-\delta_v^2\tau)\,A_k\,Q_\tau^{-1} P_{k|k} c_{k|k},\\
Q(\tau) &= \frac{\left(A_k\,Q_\tau^{-1} A_k^T + \tau^{-1} I\right)^{-1}}{1-\xi_\tau}.
\end{aligned}
$$

- Найти $\tau^* = \arg\min\limits_{0<\tau<\tau_{\max}} \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ или $\tau^* = \arg\min\limits_{0<\tau<\tau_{\max}} \ln\det Q(\tau)^{-1}$.

- Вычислить $E_{k+1|k} = E(c_{k+1|k}, P_{k+1|k})$, где $c_{k+1|k} = d(\tau^*)$ и $P_{k+1|k} = Q(\tau^*)$.

Получившийся эллипсоид $E(c_{k+1|k}, P_{k+1|k})$ является результирующей аппроксимацией вектора состояний x_{k+1} после этапа предсказания. Эту оценку называют априорной для следующего шага в алгоритме оценивания (этапа уточнения).

1.7.2 Этап уточнения

Полагая $x_k \in E_{k+1|k} = E(c_{k+1|k}, P_{k+1|k})$, $P_{k+1|k} > 0$, распишем второй этап оценивания, который называется этапом уточнения оценки, полученной после этапа предсказания, или аппроксимацией пересечения. Здесь ищется эллипсоид $E_{k+1|k+1} = E(c_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1})$, содержащий фазовый вектор x_{k+1}, по вычисленной априорной оценке $E_{k+1|k}$ на этапе предсказания и по имеющимся измерениям y_{k+1} в момент времени $k+1$. Причем, предполагаем здесь, что все измерения являются “правильными” и среди них нет выбросов, т.е. формируемое ими множество возможных состояний системы действительно содержит вектор x_k. Итак, алгоритм его поиска выглядит следующим образом:

- Вычислить последовательно

$$
\begin{aligned}
R &= C_{k+1}^T C_{k+1} - \varepsilon_{C_{k+1}}^2 I,\\
M &= \frac{R}{y_{k+1}^T C_{k+1} R^{-1} C_{k+1}^T y_{k+1} - y_{k+1}^T y_{k+1} + \delta_{w_{k+1}}^2},\\
d &= R^{-1} C_{k+1}^T y_{k+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_\tau &= (1-\tau)P_{k+1|k} + \tau M,\\
g(\tau) &= Q_\tau^{-1}\left[(1-\tau)P_{k+1|k}c_{k+1|k} + \tau M d\right],\\
\nu_\tau &= (1-\tau)c_{k+1|k}^T P_{k+1|k}c_{k+1|k} + \tau d^T M d - g(\tau)^T Q_\tau g(\tau),\\
Q(\tau) &= (1-\nu_\tau)^{-1} Q_\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь $\widehat{\lambda}_{\min}$ есть минимальное обобщенное собственное значение матричной пары $\{M, P_{k+1|k}\}$.

- Определить $\tau_{\max} = \min\left\{1, (1-\widehat{\lambda}_{\min})^{-1}\right\}$.
- Найти $\tau^* = \arg\min\limits_{0<\tau<\tau_{\max}} \operatorname{tr} Q(\tau)^{-1}$ или $\tau^* = \arg\min\limits_{0<\tau<\tau_{\max}} \ln\det Q(\tau)^{-1}$.
- Вычислить $E_{k+1|k+1} = E(c_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1})$, где $c_{k+1|k+1} = g(\tau^*)$ и $P_{k+1|k+1} = Q(\tau^*)$.

Эллипсоид $E(c_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1})$ является результирующей аппроксимацией вектора состояний x_{k+1} динамической системы после этапа уточнения предсказанной оценки. Этот эллипсоид называют апостериорной оценкой, которая получена на основе результатов измерений.

Таким образом, на каждом шаге $k \geq 1$ эллипсоид $E_{k|k}$ будет содержать вектор фазовых состояний x_k исходной динамической системы с аддитивной векторной и мультипликативной матричной неопределенностями. Причем данный алгоритм позволяет получать значительно более точные эллипсоидальные оценки, чем немногие методы, известные ранее (см., например, [11, 52, 77, 80, 83]). Эти методы легко даются решениями одномерных задач минимизации следа или детерминанта соответствующих матриц результирующих эллипсоидов.

1.8 Заключение

В первой главе был рассмотрен и применен метод эллипсоидов для решения задачи гарантированного оценивания фазовых состояний линейных дискретных динамических систем при наличии матричной мультипликативной и аддитивной векторной неопределенностей. Предполагалось, что неопределенность характеризуется совместными квадратичными (эллипсоидальными) ограничениями (1.7) и (1.8). Как и в обычном случае (в отсутствии матричной неопределенности), были рассмотрены две стандартные задачи, лежащие в основе построения оценок. Первая заключается в аппроксимации некоторой “обобщенной” суммы эллипсоидов, а вторая — их пересечения. Получены эффективные субоптимальные решения для каждой из этих задач, которые сводят поиск внешней эллипсоидальной аппроксимации к минимизации скалярной функции на конечном интервале. Показано, что совместные квадратичные ограничения на неопределенность в матрице модели и на внешние возмущения приводят к оптимальным на одном шаге оценкам для систем без измерений, в то время как общая постановка задачи при наличии измерений приводит к субоптимальным решениям. Предложенный метод формирует основные блоки рекуррентного алгоритма оценивания, который является аналогом фильтра Калмана-Бьюси в стохастических моделях со случайными возмущениями. Более того, как показано в разделе 1.6, этот метод легко обобщается на случаи неопределенностей более общего вида, что придает ему большую гибкость при использовании в конкретных приложениях.

Глава 2

Асимптотические свойства эллипсоидальных оценок множеств достижимости стационарных динамических систем

Асимптотические свойства классических эллипсоидальных алгоритмов внешнего оценивания множеств достижимости линейных стационарных динамических систем в дискретном времени и без измерений изучаются в этой главе. При условии устойчивости системы (и только при нем) последовательность ее множеств достижимости D_k сходится к некоторому компакту D_∞. В этой связи встает вопрос о предельном поведении их внешних эллипсоидальных аппроксимаций. В таком контексте рассматриваются стандартные и наиболее распространенные рекуррентные алгоритмы оценивания, а также исследуется возможность их использования для аппроксимации предельного множества достижимости D_∞. Показывается, что асимптотическое поведение таких алгоритмов существенно зависит от используемого в них критерия оптимальности оценок. В этой связи приводится сравнение критериев следа и детерминанта. Наряду с этим, рассматривается простой метод эллипсоидальной аппроксимации множества D_∞ устойчивой динамической системы и проводится его сравнение с вышеупомянутыми рекуррентными оценками.

2.1 Введение и постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную дискретную модель динамической системы без измерений

$$x_{k+1} = A\,x_k + B\,w_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ есть фазовый вектор системы, $w_k \in \mathbb{R}^m$ представляет собой вектор внешних возмущений, A и $B \neq 0$ — заданные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Без ограничения общности, полагаем $\|w_k\| \leq 1,\ \ k = 0, 1, 2, ...$

Обозначим эллипсоид в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ как линейный образ единичного шара

$$\mathcal{E} = \{\, c + Vv : \ \|v\| \leq 1 \,\}\ . \tag{2.2}$$

В такой записи он может быть вырожденным, т.е. не иметь внутренних точек в $\mathbb{R}^n$. Здесь вектор c есть центр эллипсоида, а $P = VV^T$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, определяющая его форму. Сам эллипсоид будем в дальнейшем писать через $\mathcal{E}(c, P)$. Скалярные функции, определяющие критерии размера эллипсоидов (критерии следа и детерминанта) тогда перепишутся в следующем виде:

$$f_1(P) = \operatorname{tr} P, \qquad f_2(P) = \ln \det P. \tag{2.3}$$

Заметим, что мера $f_1(P)$ очень удобна для использования в силу ее линейности как функции от матрицы.

Вектор Bw_k в этом случае будет принадлежать эллипсоиду $\mathcal{E}(0, BB^T)$ (возможно вырожденному), который соответствует аддитивным внешним возмущениям, действующим на систему. Будем предполагать, что начальный фазовый вектор x_0 принадлежит ограниченному, возможно вырожденному эллипсоиду $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(c_0, P_0)$. Тогда множество

$$D_k = \big\{ x_k = A^k x_0 + A^{k-1}Bw_0 + A^{k-2}Bw_1 + \ldots + Bw_{k-1} : \\ x_0 \in \mathcal{E}(c_0, P_0), \quad \|w_j\| \leq 1, \quad j = 0, \ldots, k-1 \big\} \tag{2.4}$$

есть множество достижимости системы (2.1) в момент времени k. D_k является алгебраической суммой $k + 1$ эллипсоидов, которая в общем случае есть выпуклое множество, но не эллипсоид. Различные алгоритмы, аппроксимирующие это множество классом оптимальных (субоптимальных) в определенном смысле эллипсоидов, построены в целом ряде работ (среди них выделим [59–61,78,85,91,108,114,118,129,150–152]) для случаев непрерывных или дискретных моделей. Приведем далее следующий вспомогательный результат об аппроксимации суммы нескольких эллипсоидов, который очень часто используется для построения таких оценок:

Лемма 2.1 (см. [85]) *Пусть* $S_N = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}(c_i, Q_i)$ *есть алгебраическая сумма* N *эллипсоидов,* $Q_i \geq 0$. *Предположим, что* $\mathcal{A}_N$ *есть выпуклое множество векторов* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)^T \in \mathbb{R}^N$ *таких, что все* $\alpha_i > 0$ *и* $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \leq 1$. *Тогда при любом* $\alpha \in \mathcal{A}_N$ *эллипсоид* $\mathcal{E}(c, P_\alpha)$ *с параметрами*

$$c = \sum_{i=1}^{N} c_i, \qquad P_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{-1} Q_i \tag{2.5}$$

содержит S_N. *При этом, функции* $f_1(P_\alpha) = \operatorname{tr} P_\alpha$ *и* $f_2(P_\alpha) = \ln\det P_\alpha$ *являются строго выпуклыми на* $\mathcal{A}_N$.

Отметим здесь, что впервые формулы (2.5) были получены Ф. Швеппе и сформулированы в его монографии [152] в качестве упражнения.

Таким образом, для поиска минимального по следу или объему (детерминанту) эллипсоида среди семейства $\mathcal{E}(c, P_\alpha)$ можно пользоваться стандартными численными методами выпуклой оптимизации. В общем случае, однако, полученный эллипсоид может не оказаться минимальным среди всех эллипсоидов, содержащих сумму S_N. Тем не менее, его отличие от минимального будет в большинстве случаев незначительным. А для частного случая суммы двух эллипсоидов справедливо следующее важное замечание.

Замечание 2.1 *Если* $N = 2$, *то однопараметрическое семейство эллипсоидов* $\mathcal{E}(c, P_\alpha)$ *из (2.5) содержит минимальный по следу или детерминанту эллипсоид среди всевозможных эллипсоидов, которым принадлежит множество* S_N. *Поэтому минимизация по скалярному параметру строго выпуклой функции* $f_1(P_\alpha)$ *или* $f_2(P_\alpha)$ *на* $0 < \alpha < 1$ *ведет соответственно к минимальному по следу или по объему эллипсоиду, содержащему* S_N.

Подробнее об аппроксимации суммы эллипсоидов см. также [51, 60, 78, 108].

Так как множество достижимости D_k системы (2.1) есть сумма $k+1$ эллипсоидов с центрами

$$d_0 = A^k c_0, \qquad d_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k \tag{2.6}$$

и матрицами

$$Q_0 = A^k P_0 (A^T)^k, \qquad Q_i = A^{k-i} B B^T (A^T)^{k-i}, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{2.7}$$

то его эллипсоидальную оценку можно строить прямо по лемме 2.1. Получившийся эллипсоид дает приемлемую внешнюю аппроксимацию множества D_k, что подтверждается многочисленными примерами (см. ниже некоторые из них).

На основе утверждения леммы 2.1 можно также построить *рекуррентный* алгоритм эллипсоидального оценивания (см., в частности, [85]) для исходной системы (2.1), аппроксимируя на каждом шаге сумму только двух эллипсоидов. Действительно, при некоторых начальных c_0 и $P_0 \geq 0$ рассмотрим последовательность эллипсоидов $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}(c_k, P_k)$ с

$$c_{k+1} = A\, c_k, \qquad P_{k+1} = \frac{A P_k A^T}{\gamma_k} + \frac{B B^T}{1-\gamma_k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

где параметр γ_k, $0 < \gamma_k < 1$, при каждом фиксированном k есть решение выпуклой одномерной задачи оптимизации

$$\gamma_k = \arg \min_{0<\gamma_k<1} \operatorname{tr} P_{k+1} \tag{2.9}$$

или

$$\gamma_k = \arg \min_{0<\gamma_k<1} \ln \det P_{k+1}. \tag{2.10}$$

Тогда $\mathcal{E}_k \supseteq D_k$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ Рекуррентный алгоритм (2.8) требует менее громоздких вычислений, чем прямой метод по лемме 2.1. Более того, согласно замечанию 2.1, на каждом шаге он дает локально оптимальные эллипсоиды. Однако в глобальном смысле это не так, и точность рекуррентных оценок иногда значительно уступает точности прямого, нерекуррентного подхода (2.6)–(2.7).

Определим далее спектральный радиус матрицы A как максимальный модуль ее собственных значений:

$$\rho_A = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|. \tag{2.11}$$

Говорят, что матрица A и соответственно система (2.1) устойчивы по Шуру, если $\rho_A < 1$. Известно (см. [58]), что если матрица A устойчива, то для любой матричной нормы $\|\cdot\|$ и $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, C_\varepsilon > 0$, что выполнено неравенство

$$\|A^k\| \leq C_\varepsilon(\rho_A + \varepsilon)^k. \tag{2.12}$$

Отсюда следует основное свойство устойчивых матриц: $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.

Последовательность множеств достижимости D_k сходится к некоторому компакту D_∞ тогда и только тогда, когда матрица A системы устойчива. Естественным образом тогда встает вопрос о предельном поведении их внешних эллипсоидальных аппроксимаций, полученных, в частности, используя результат леммы 2.1. Заметим, что центры рекуррентных эллипсоидов $c_k = A^k c_0$ сходятся к нулю при $k \to \infty$. Поэтому асимптотика этих оценок полностью зависит от поведения их матриц.

Аналогичные вопросы для случая непрерывных линейных динамических систем рассматриваются в [37, 38, 40, 60, 78, 79, 134], где исследованы на устойчивость точки равновесия дифференциальных уравнений локально оптимальных эллипсоидов для устойчивых систем (в [60, 78] приведен вариант только с диагональными матрицами). Тем не менее, общая картина глобального поведения оптимальных эллипсоидов для непрерывных устойчивых систем остается довольно неопределенной. Скажем, неясно, будут ли они сходящимися или ограниченными.

В этом разделе мы исследуем на ограниченность и сходимость представленные здесь алгоритмы эллипсоидального оценивания (оптимальные по критериям следа и детерминанта) для устойчивых линейных дискретных систем (2.1); а также построим простые внешние эллипсоидальные аппроксимации (по возможности наилучшие) предельного множества достижимости D_∞.

2.2 Оценка предельного множества достижимости

Устойчивость матрицы A есть необходимое и достаточное условие сходимости последовательности множеств достижимости динамической системы (2.1). Поскольку система линейна, то все ее множества достижимости выпуклые, и их можно описать с помощью опорных функций. Напомним, что опорной для некоторого замкнутого множества $\mathcal{D}$ называется функция $\varphi(d) = \max\limits_{x\in\mathcal{D}} d^T x$, где $d \in \mathbb{R}^n$. Тогда из (2.4) следует, что опорная функция множества достижимости D_k (D_k есть сумма $k+1$ эллипсоидов) равна

$$\varphi_k(d) = \max_{x \in \mathcal{E}(A^k c_0,\, A^k P_0 (A^k)^T)} d^T x + \sum_{i=0}^{k-1} \|(A^i B)^T d\|, \qquad (2.13)$$

причем первый член в этом выражении

$$\max_{x \in \mathcal{E}(A^k c_0,\, A^k P_0 (A^k)^T)} d^T x = d^T A^k c_0 + \sqrt{d^T A^k P_0 (A^T)^k d}$$

стягивается к нулю при $k \to \infty$. Тогда предельное множество достижимости D_∞ определяется как набор точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству

$$d^T x \le \varphi_\infty(d) = \sum_{i=0}^{\infty} \|(A^i B)^T d\| \qquad (2.14)$$

для любого вектора $d \in \mathbb{R}^n$. Видно, что это есть выпуклое множество, симметричное относительно начала координат. Оно определяется только матрицами A и B системы и не зависит от выбора начального фазового вектора x_0. В этой связи, по данным этим матрицам системы представляется возможным найти минимальный в определенном смысле эллипсоид, содержащий D_∞, основываясь на следующей теореме, в той или иной форме встречающейся в [27, 61, 76, 152].

Теорема 2.1 *Пусть D_∞ есть предельное множество достижимости для устойчивой динамической системы (2.1). Тогда для любого фиксированного $\gamma:\ \rho_A^2 < \gamma < 1$ эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_\gamma)$ с матрицей, являющейся решением уравнения Ляпунова*

$$P_\gamma = \frac{A P_\gamma A^T}{\gamma} + \frac{B B^T}{1-\gamma}, \qquad (2.15)$$

содержит D_∞. При этом, функция $f_1(P_\gamma) = \operatorname{tr} P_\gamma$ является строго выпуклой по γ на интервале $\rho_A^2 < \gamma < 1$.

Для полноты изложения приведем здесь ее доказательство.

Доказательство. Для предельного множества выпишем опорную функцию (см. (2.14))

$$\varphi_\infty(d) = \sum_{k=0}^{\infty} \|(A^k B)^T d\| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(d, A^k B B^T (A^k)^T d\right)^{1/2}.$$

Таким образом, множество D_∞ есть набор точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $|d^T x| \le \varphi_\infty(d)$ для любого вектора $d \in \mathbb{R}^n$. Отсюда, в частности, видно, что это есть выпуклое замкнутое множество, симметричное относительно начала координат. Рассмотрим эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_\gamma)$ с матрицей, удовлетворяющей уравнению Ляпунова (2.15) для произвольного фиксированного $\gamma: \ \rho_A^2 < \gamma < 1$. Так как при этом матрица $A/\sqrt{\gamma}$ остается устойчивой, то решением этого уравнения, и причем единственным, есть неотрицательно определенная матрица (матрица BB^T может быть вырожденной). Запишем ее в явном виде:

$$P_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k BB^T (A^k)^T}{\gamma^k (1-\gamma)}.$$

Тогда опорная функция эллипсоида $\mathcal{E}(0, P_\gamma)$ равна

$$\varphi_{\mathcal{E}(0,P_\gamma)}(d) = \sqrt{d^T P_\gamma d} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(d, \frac{A^k BB^T (A^k)^T}{\gamma^k (1-\gamma)}\, d \right)^{1/2} \ge$$
$$\ge \sum_{k=0}^{\infty} \left(d, A^k BB^T (A^k)^T d \right)^{1/2} = \varphi_\infty(d), \qquad 0 < \rho_A^2 < \gamma < 1.$$

Итак, для любого вектора $d \in \mathbb{R}^n$ и любого γ из интервала $0 < \rho_A^2 < \gamma < 1$ верно неравенство для опорных функций $\varphi_{\mathcal{E}(0,P_\gamma)}(d) \ge \varphi_\infty(d)$. Значит, $\mathcal{E}(0, P_\gamma) \supseteq D_\infty$.

Легко показать, что функция

$$\varphi_1(\gamma) = \operatorname{tr} P_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tr} A^k BB^T (A^k)^T}{\gamma^k (1-\gamma)}.$$

есть сумма строго выпуклых функций на интервале $\rho_A^2 < \gamma < 1$. Следовательно $\varphi_1(\gamma)$ строго выпуклая. Таким образом, теорема доказана полностью. $\square$

Отметим здесь, что функция $\varphi_2(\gamma) = \ln\det P_\gamma$, вероятно, также является выпуклой на $\rho_A^2 < \gamma < 1$.

Минимальный по следу эллипсоид из однопараметрического семейства $\mathcal{E}(0, P_\gamma)$ есть решение выпуклой задачи минимизации функции $\varphi_1(\gamma) = \operatorname{tr} P_\gamma$ на интервале $\rho_A^2 < \gamma < 1$. Он дает “хорошую” внешнюю оценку предельного множества достижимости. Причем эту оценку можно вычислить сразу по известным матрицам A и B, не прибегая

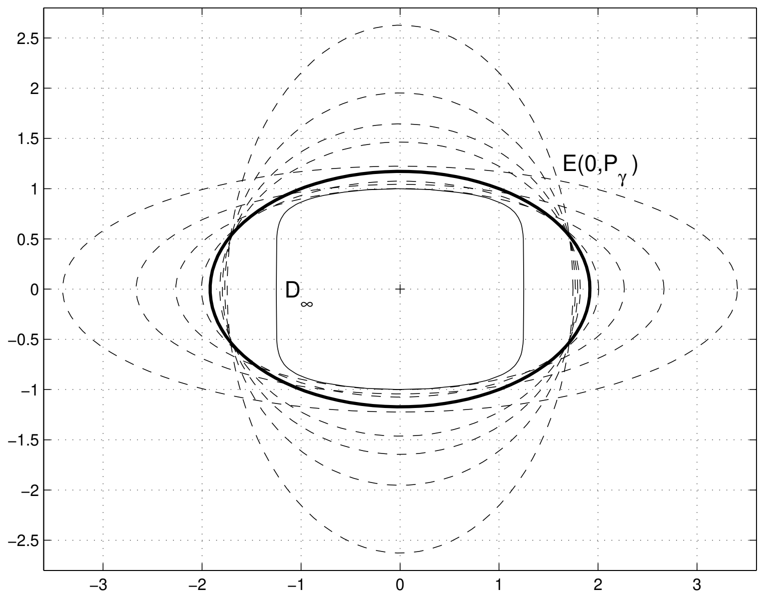

Рис. 2.1: Семейство эллипсоидов, содержащих предельное множество достижимости.

к анализу эволюции множеств достижимости системы. Этот результат имеет важное применение, в частности, в задаче о подавлении внешних ограниченных возмущений, а также и в других задачах управления.

Пример 2.1 Пусть задана устойчивая динамическая система (2.1) с матрицами $A = \mathrm{diag}\{0.2,\, 0.8\}$ и $B = \mathrm{diag}\{1,\, 0.2\}$. При любом выборе начального эллипсоида, содержащего вектор x_0, области достижимости D_k системы стремятся к компакту D_∞, граница которого показана на рисунке 2.1 тонкой сплошной линией. Видно, что множество D_∞ симметрично относительно начала координат. Однопараметрическое семейство эллипсоидов $\mathcal{E}(0, P_\gamma)$ содержит D_∞, где P_γ есть решение уравнения Ляпунова (2.15) при любом фиксированном $\gamma:\ \rho_A^2 < \gamma < 1$. Некоторые эллипсоиды данного семейства изображены на рисунке 2.1 пунктирными линиями. Минимальный по следу эллипсоид из этого семейства (жирная линия) есть $\mathcal{E}(0, P)$ с матрицей $P = \mathrm{diag}\{3.6797,\, 1.3727\}$. Заметим, что он не является оптимальной внешней эллипсоидальной оценкой множества D_∞, однако отличается от нее незначительно. $\square$

2.3 Локально оптимальный рекуррентный алгоритм

Рассмотрим рекуррентный алгоритм эллипсоидального оценивания (2.8), оптимальный по критерию следа (2.9) и детерминанта (2.10). Последовательность центров $c_k = A^k c_0$ сходится к нулю. Поэтому, без ограничения общности, полагаем начальный фазовый вектор x_0 системы (2.1) принадлежащим ограниченному эллипсоиду $\mathcal{E}(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$, с центром в нуле ($c_0 = 0$). Исследуем тогда последовательность матриц

$$P_{k+1} = \frac{AP_kA^T}{\gamma_k} + \frac{BB^T}{1-\gamma_k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

На каждом шаге k мы будем находить γ_k, минимизируя только след или только детерминант матрицы P_{k+1}. Таким образом, такой рекуррентный алгоритм будет давать локально оптимальные эллипсоидальные оценки.

2.3.1 Критерий детерминанта

Пусть γ_k есть решение задачи

$$\gamma_k = \arg \min_{0<\gamma_k<1} \ln \det P_{k+1} \tag{2.17}$$

для любых $k = 0, 1, 2, ...$ Эллипсоиды $\mathcal{E}(0, P_k)$ тогда будут локально оптимальными с точки зрения объема внешними аппроксимациями множества достижимости D_k: $\mathcal{E}(0, P_k) \supseteq D_k$, $\forall\, k = 1, 2, \ldots$ Несомненным преимуществом критерия детерминанта является инвариантность эллипсоида оптимального объема, аппроксимирующего некоторое выпуклое множество, по отношению к линейным преобразованиям. При аппроксимации множеств достижимости D_k из (2.4), однако, могут получаться довольно вытянутые эллипсоиды, что приводит к трудностям в случае больших k. Кроме того, анализ уравнения (2.16) с параметрами из (2.17) затрудняется неявной формой его выражения. Тем не менее, приведем следующий пример, который иллюстрирует, что последовательность таких эллипсоидов может оказаться неограниченной даже при устойчивой матрице A.

Пример 2.2 Рассмотрим последовательность (2.16) с коэффициентами из (2.17) для двумерного случая при условиях

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $-1 < a < 1$ для устойчивости матрицы A. Тогда из (2.16) получим очень простую матричную последовательность:

$$P_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^k a^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (2a^2)^k \end{pmatrix}.$$

Определим $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\widehat{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В этом случае

$$P_k \to \begin{cases} \widetilde{P}, & 0 < |a| < 1/\sqrt{2}, \\ \widehat{P}, & |a| = 1/\sqrt{2}, \\ \infty, & 1/\sqrt{2} < |a| < 1. \end{cases}$$

□

Таким образом, в данном примере мы имеем случай неограниченного роста эллипсоидов наименьшего объема в последовательности $\mathcal{E}(0, P_k)$ (при $1/\sqrt{2} < |a| < 1$) несмотря на то, что матрица A исходной динамической системы остается устойчивой.

Замечание 2.2 *В условии примера 2.2 пара матриц A и B неуправляема, поскольку $\mathrm{rank}[B\ AB] = 1 < n = 2$. Однако полученный результат можно легко распространить и на случай управляемых динамических систем, взяв, например,*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ — произвольное вещественное число. Легко показать, что для любого $\hat{\varepsilon}$ эллипсоиды с матрицами из (2.16) при (2.17) будут также расходиться при определенных a из интервала $(-1, 1)$.

В [61, стр. 171] рассмотрен пример неограниченности предельного эллипсоида наименьшего объема для случая непрерывных динамических систем.

Резюмируя, приведем следующее утверждение.

Утверждение 2.1 *Устойчивость матрицы A линейной системы не гарантирует сходимости и ограниченности локально оптимальных рекуррентных эллипсоидальных оценок, вычисленных по критерию детерминанта согласно формулам (2.16), (2.17).*

Для обеспечения сходимости или ограниченности, а также для решения задачи существования и нахождения предельного эллипсоида в этом случае необходимо, чтобы исходная устойчивая система удовлетворяла более жестким достаточным условиям.

2.3.2 Критерий следа

Для критерия следа удается аналитически найти решение задачи минимизации (2.9), получить параметры γ_k

$$\gamma_k = \frac{(\operatorname{tr} AP_kA^T)^{1/2}}{(\operatorname{tr} AP_kA^T)^{1/2} + (\operatorname{tr} BB^T)^{1/2}} \tag{2.18}$$

и выписать алгоритм в явном виде. Матрицы эллипсоидов будут удовлетворять нелинейному рекуррентному уравнению

$$P_{k+1} = \frac{\alpha_k + \beta}{\alpha_k} AP_kA^T + \frac{\alpha_k + \beta}{\beta} BB^T, \tag{2.19}$$

где

$$\alpha_k = \sqrt{\operatorname{tr} AP_kA^T}, \qquad \beta = \sqrt{\operatorname{tr} BB^T}. \tag{2.20}$$

Тогда $\mathcal{E}(0, P_k) \supseteq D_k,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots$ Данный метод позволяет получать значительно менее вытянутые эллипсоиды, чем для критерия детерминанта, даже при больших k, что является одним из достоинств использования критерия следа. Это также дает возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2 *Матричная последовательность (2.19) с параметрами из (2.20) ограничена тогда и только тогда, когда матрица A устойчива.*

Доказательство. Прямое утверждение очевидно, так как, если последовательность (2.19) ограничена, то заведомо ограничена и последовательность множеств достижимости D_k системы, а значит, матрица A устойчива.

Докажем обратное, а именно, что из устойчивасти A следует ограниченность (2.19). Без ограничения общности, считаем матрицы $A \neq 0,\ B \neq 0$. Рассмотрим уравнение (2.19)

$$P_{k+1} = AP_kA^T + \frac{\beta}{\alpha_k} AP_kA^T + \frac{\alpha_k}{\beta} BB^T + BB^T.$$

Для матричных норм справедливо:

$$\|P_{k+1}\| \le \|A\|\,\|P_k\|\,\|A^T\| + \frac{\beta}{\alpha_k}\|AP_kA^T\| + \frac{\alpha_k}{\beta}\|BB^T\| + \|BB^T\|,$$

$$\|P_{k+1}\| \le \|A\|\,\|P_k\|\,\|A^T\| + \alpha_k\left(\beta\frac{\|AP_kA^T\|}{\alpha_k^2} + \frac{\|BB^T\|}{\beta}\right) + \|BB^T\|.$$

Приведем далее несколько простых утверждений.

Утверждение 2.2 *Пусть задана произвольная матрица A и достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая матричная норма $\|\cdot\|_\varepsilon$, для которой имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \rho_A \le \|A\|_\varepsilon \le \rho_A + \varepsilon = \rho_\varepsilon(A) < 1, \\ \rho_A \le \|A^T\|_\varepsilon \le \rho_A + \varepsilon = \rho_\varepsilon(A) < 1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Доказательство: См. [58]. □

Утверждение 2.3 *Пусть P произвольная фиксированная положительно определенная матрица, а $\alpha(P) = \sqrt{\operatorname{tr}(APA^T)}$. Тогда для любой матричной нормы $\|\cdot\|$ найдется такое число $C > 0$, что выполнено неравенство*

$$\frac{\|APA^T\|}{\alpha^2(P)} \le C. \tag{2.22}$$

Доказательство: Матрица APA^T положительно определенная. Значит, $\operatorname{tr}(APA^T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(APA^T) \ge \rho_{(APA^T)} > 0$, где $\rho_{(APA^T)}$ — спектральный радиус матрицы APA^T. Рассмотрим ее спектральную норму:

$$\|APA^T\| = \max_{\|x\|=1}\|APA^Tx\| = \rho_{(APA^T)} \le \operatorname{tr}(APA^T).$$

Тогда $\|APA^T\|/\alpha^2(P) = \|APA^T\|/\operatorname{tr}(APA^T) \le 1$, откуда следует искомое неравенство для спектральной нормы. Значит, и для любой другой матричной нормы отношение $\|APA^T\|/\alpha^2(P)$ будет ограниченным. Неравенство (2.22) доказано. □

Утверждение 2.4 *Для любой положительно определенной матрицы P выполнено $\alpha(P) \le C\,\|P\|_\varepsilon^{1/2}$, где $\alpha(P) = \sqrt{\operatorname{tr}(APA^T)}$, а $C = const > 0$.*

Доказательство: Пусть ρ_P — спектральный радиус $(n\times n)$-матрицы $P>0$. Тогда, используя результат утверждения 2.2, имеем: $\operatorname{tr} P \le n\,\rho_P \le n\|P\|_\varepsilon$ и

$$\alpha^2(P) = \operatorname{tr}(APA^T) \le |\lambda_i(A^TA)|_{\max} \operatorname{tr} P \le |\lambda_i(A^TA)|_{\max} n\|P\|_\varepsilon = \hat{C}\|P\|_\varepsilon.$$

Поскольку $\alpha(P)\ge 0$, то $\alpha(P) \le C\|P\|_\varepsilon^{1/2}$, $C = \mathrm{const} > 0$, и утверждение доказано. □

Далее, учитывая утверждения 2.2 и 2.3, имеем:

$$\|P_{k+1}\|_\varepsilon \le \rho_\varepsilon^2(A)\,\|P_k\|_\varepsilon + \alpha_k\left(\beta C + \frac{\|BB^T\|_\varepsilon}{\beta}\right) + \|BB^T\|_\varepsilon;$$

$$\|P_{k+1}\|_\varepsilon \le \rho_\varepsilon^2(A)\,\|P_k\|_\varepsilon + C_1\alpha_k + C_2. \qquad (2.23)$$

Применяя к неравенству (2.23) утверждение 2.4, получим:

$$\|P_{k+1}\|_\varepsilon \le \rho_\varepsilon^2(A)\,\|P_k\|_\varepsilon + \tilde{C}_1\|P_k\|_\varepsilon^{1/2} + C_2.$$

Так как $2\|P_k\|_\varepsilon^{1/2} \le \frac{1}{M}\|P_k\|_\varepsilon + M$ для любого числа $M>0$, то

$$\|P_{k+1}\|_\varepsilon \le \left(\rho_\varepsilon^2(A) + \frac{\tilde{C}_1}{2M}\right)\|P_k\|_\varepsilon + \tilde{C}_2. \qquad (2.24)$$

Согласно (2.21), $\rho_\varepsilon(A) < 1$. Значит, $\exists\, M_0 > 0$, что $\forall\, M > M_0$ выполнено:

$$\rho_\varepsilon^2(A) + \frac{\tilde{C}_1}{2M} < 1.$$

Таким образом, из (2.24) вытекает

$$\|P_k\|_\varepsilon \le \frac{\tilde{C}_2}{1-(\rho_\varepsilon^2(A) + \tilde{C}_1/2M)}, \quad \forall\, k = 0,1,2,\ldots$$

откуда следует ограниченность последовательности матриц P_k, а значит, и последовательности эллипсоидов. Теорема доказана. □

Факт ограниченности внешних эллипсоидальных аппроксимаций минимального следа для устойчивых систем влечет сходимость некой подпоследовательности из (2.19). Утверждение о сходимости всей последовательности эллипсоидов, по-видимому, имеет место, но строго доказать его пока не удается. Оно требует более тщательного анализа нелинейных, рекуррентного и стационарного, матричных уравнений, что служит предметом дальнейших исследований.

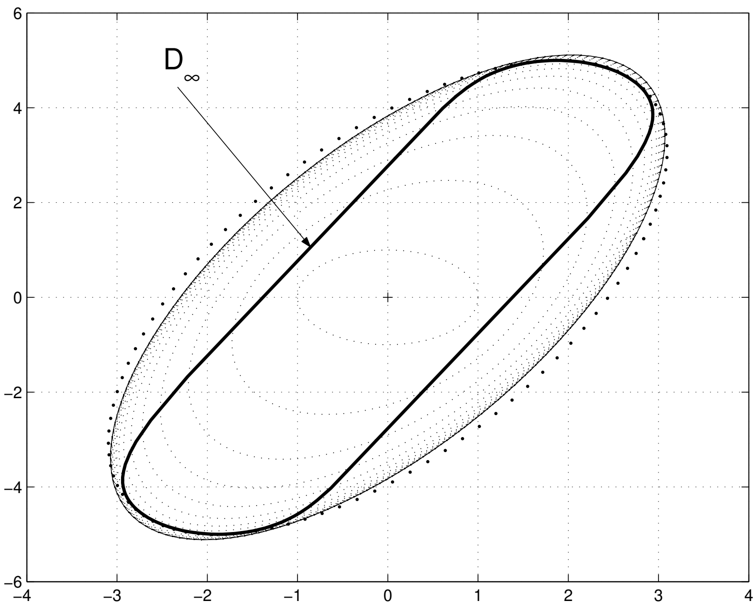

Рис. 2.2: Ограниченность локально оптимального рекуррентного метода (критерий следа).

Рассмотрим далее иллюстративный пример, демонстрирующий предельное поведение эллипсоидальных оценок, вычисленных по критерию следа.

Пример 2.3 Пусть задана линейная динамическая система с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A устойчива. Поэтому, согласно теореме 2.2, рекуррентные эллипсоиды $\mathcal{E}(0, P_k)$, удовлетворяющие (2.19), ограничены при $k \to \infty$. Более того, вычисления показывают, что они здесь сходятся к предельному с матрицей

$$P_\infty \simeq \begin{pmatrix} 9.4400 & 10.4167 \\ 10.4167 & 26.1727 \end{pmatrix}$$

при любых начальных условиях. В частности, на рисунке 2.2 показано асимптотическое поведение этих оценок, когда начальный эллипсоид есть единичный круг. Заметим, что предельный эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_\infty)$ (тонкая сплошная линия) для рассматриваемого локально оптимального рекуррентного метода (2.19) очень хорошо аппроксимирует предельное множество достижимости D_∞ исходной системы, граница которого представлена жирной линией. При этом он практически не отличается от минимального по следу эллипсоида $\mathcal{E}(0, P)$ (точечная линия на рисунке 2.2) из однопараметрического семейства (2.15), полученного по теореме 2.1. В нашем случае

$$P \simeq \begin{pmatrix} 9.5761 & 9.5182 \\ 9.5182 & 25.0540 \end{pmatrix},$$

а $\operatorname{tr} P_\infty = 35.6127$ и $\operatorname{tr} P = 34.6301$.

Однако, если взять матрицу в системе

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 5 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

с доминирующим недиагональным элементом, т.е. когда $\rho_A \ll \|A\|$, то точность рекуррентного метода заметно падает. Аналогично предыдущему случаю, при любом начальном эллипсоиде $\mathcal{E}(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$, рекуррентный алгоритм здесь будет также сходиться к предельному эллипсоиду $\mathcal{E}(0, P_\infty)$ с матрицей

$$P_\infty \simeq \begin{pmatrix} 5.8764 & 0.7680 \\ 0.7680 & 0.1578 \end{pmatrix} \cdot 10^3.$$

Этот эллипсоид показан на рисунке 2.3 тонкой сплошной линией. Однако из рисунка видно, что эта оценка является сильно завышенной (консервативной) в сравнении с минимальным эллипсоидом $\mathcal{E}(0, P)$ (точечная линия), полученным по теореме 2.1. Здесь

$$P \simeq \begin{pmatrix} 1.2077 & 0.1533 \\ 0.1533 & 0.0256 \end{pmatrix} \cdot 10^3.$$

$\square$

Таким образом, если, в частности, $\rho_A \ll \|A\|$, т.е. когда спектральная норма матрицы сильно превышает (в несколько раз) ее спектральный радиус, то локально оптимальный по критерию следа рекуррентный алгоритм (2.19) дает очень консервативные аппроксимации множеств достижимости динамической системы при больших k. В этом случае его использование для аппроксимации предельного множества достижимости D_∞ нецелесообразно.

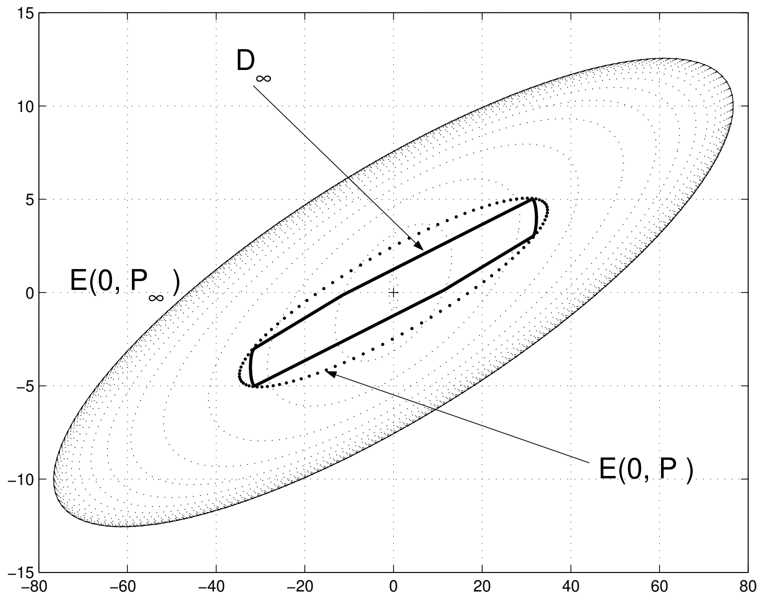

Рис. 2.3: Ограниченность локально оптимального рекуррентного метода (критерий следа).

2.4 Оптимальный алгоритм на конечном интервале времени

Пусть D_N есть множество достижимости динамической системы (2.1) в некоторый конечный момент времени N. Рассмотрим эллипсоидальную аппроксимацию этого множества как сумму $(N+1)$ эллипсоидов, напрямую используя лемму 2.1 и формулы (2.6), (2.7). По аналогии с предыдущем параграфом центры этих эллипсоидальных аппроксимаций $c_N = A^N c_0$ стремятся к нулю при $N \to \infty$. Поэтому, без ограничения общности, здесь также полагаем $c_0 = 0$ и будем далее исследовать только поведение их матриц.

Итак, пусть для некоторого $P_0 \geq 0$ и $N \geq 1$ задано матричное равенство

$$P_N = \frac{A^N P_0 (A^T)^N}{\gamma_N} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k B B^T (A^T)^k}{\gamma_k}. \tag{2.25}$$

Здесь все $\gamma_k > 0,\ k = 0, 1, ..., N$, такие что $\sum_{k=0}^{N} \gamma_k \leq 1$, формируют выпуклый симплекс $\widehat{\mathcal{A}}_N$ в $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$\widehat{\mathcal{A}}_N = \left\{ (\gamma_0, ..., \gamma_N)^T : \quad \gamma_k > 0,\ k = 0, 1, ..., N,\ \sum_{k=0}^{N} \gamma_k \leq 1 \right\}. \tag{2.26}$$

По лемме 2.1 эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_N)$ содержит множество достижимости

D_N динамической системы (2.1) при начальном $x_0 \in \mathcal{E}(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$. Таким образом, для $\mathcal{E}(0, P_N)$ мы имеем зависимость от $N+1$ параметров γ_k, $k = 0, 1, ..., N$, принадлежащих симплексу $\widehat{\mathcal{A}}_N$. Минимальный эллипсоид по всем этим параметрам в соответствии с критерием следа или детерминанта будем называть оптимальной оценкой для момента времени N, а алгоритм ее получения — оптимальным на конечном интервале времени. Исследуем предельное поведение последовательности матриц $\{P_N\}_{N\geq 1}$, определяемых формулой (2.25), при $N \to \infty$.

2.4.1 Критерий детерминанта

Решить задачу минимизации детерминанта матрицы P_N из (2.25) по параметрам γ_k, $k = 0, 1, ..., N$, аналитически не удается. Однако найти ее решение и вычислить P_N можно легко численными методами, так как такая задача минимизации выпукла (лемма 2.1). Пусть $\Gamma_N = (\gamma_0, ..., \gamma_N)^T$. Тогда, вычислив

$$\Gamma_N^* = \arg \min_{\Gamma_N \in \widehat{\mathcal{A}}_N} \ln \det P_N, \tag{2.27}$$

будет найдена матрица $P_N^* = P_N(\Gamma_N^*)$, однозначно определяющая эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_N^*)$ минимального объема среди семейства $\mathcal{E}(0, P_N)$ с матрицами P_N из (2.25). Проверить предельное поведение последовательности $\{P_N\}_{N\geq 1}$ можно только численно, на примерах, которые показывают, что она, по-видимому, сходится к конечному пределу при любом выборе начального $P_0 \geq 0$. Приведем далее один из таких примеров.

Пример 2.4 Рассмотрим линейную динамическую систему с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 5 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть начальный эллипсоид есть единичный шар $\mathcal{E}(0, P_0)$ с центром в нуле ($P_0 = \mathrm{diag}\{1,\ 1\}$). Матрица A системы устойчива, но имеет существенный по величине недиагональный элемент, а значит, $\|A\| \gg \rho_A$. Для $N = 15$ эллипсоид минимального объема находится решением выпуклой задачи минимизации (2.27) по $N+1 = 16$ параметрам γ_k, $k = 0, \ldots, 15$, из симплекса $\widehat{\mathcal{A}}_N$. Он показан на рисунке 2.4 тонкой сплошной линией и является удовлетворительной внешней аппроксимацией множества достижимости D_N (жирная линия). Для сравнения здесь также

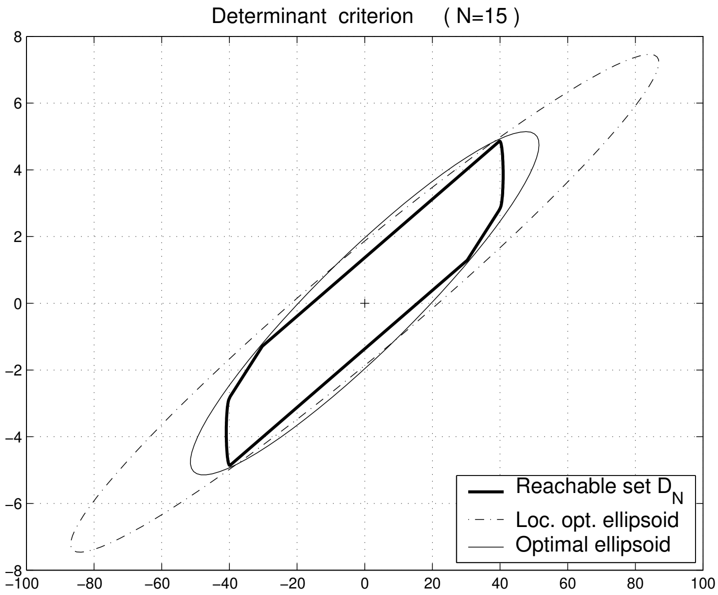

Рис. 2.4: Аппроксимация множества достижимости D_N $(N = 15)$.

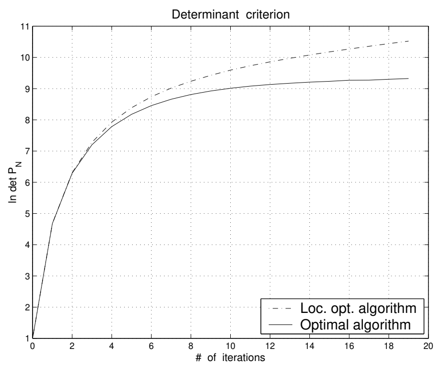

Рис. 2.5: Зависимость $f_2(P_N) = \ln\det P_N$ от N.

нарисован эллипсоид (пунктирная линия), полученный для того же момента времени ($N = 15$) решением локально оптимального рекуррентного алгоритма (2.16) с использованием критерия детерминанта (2.17). Он является сильно вытянутой и неудовлетворительной аппроксимацией множества D_N. Более того, он неограниченно возрастает с ростом N вдоль одной из полуосей, что еще раз подтверждает утверждение 2.1, сделанное в предыдущем параграфе. Рисунок 2.4 также демонстрирует, что эллипсоиды минимального объема могут оказаться значительно более вытянутыми, чем, например, эллипсоиды минимального следа (см. следующий пример).

Вычисления для данного примера показывают сходимость эллипсоидов минимального объема (детерминанта) при $N \to \infty$ для оптимального алгоритма (2.25). Для него на рисунке 2.5 представлен график изменения значений функции $f_2(P_N) = \ln\det P_N$ (сплошная линия) в зависимости от N, показывающий ее сходимость. Представлена также зависимость $f_2(P_N)$ от N (пунктирной линией) для локально оптимального рекуррентного алгоритма, которая неограниченно возрастает с ростом N. $\square$

2.4.2 Критерий следа

Теперь выберем параметры $\Gamma_N = (\gamma_0, \ldots, \gamma_N)^T$ в (2.25) так, чтобы они минимизировали след матрицы P_N

$$\Gamma_N^* = \arg \min_{\Gamma_N \in \widehat{\mathcal{A}}_N} \operatorname{tr} P_N. \tag{2.28}$$

Оказывается, что найти их можно аналитически (см. [85]), решая задачу минимизации (2.28), например, методом множителей Лагранжа. В итоге, имеем

$$\gamma_N = \frac{(\operatorname{tr} A^N P_0 (A^T)^N)^{1/2}}{(\operatorname{tr} A^N P_0 (A^T)^N)^{1/2} + \sum_{i=0}^{N-1} (\operatorname{tr} A^i B B^T (A^T)^i)^{1/2}}, \tag{2.29}$$

$$\gamma_k = \frac{(\operatorname{tr} A^k B B^T (A^T)^k)^{1/2}}{(\operatorname{tr} A^N P_0 (A^T)^N)^{1/2} + \sum_{i=0}^{N-1} (\operatorname{tr} A^i B B^T (A^T)^i)^{1/2}}, \tag{2.30}$$

$$k = 0, \ldots, N-1.$$

Результирующее значение P_N из (2.25) при таких параметрах дает субоптимальную по критерию следа оценку множества достижимости D_N. Однако в большинстве случаев эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_N)$ оказывается близким к оптимальному по следу среди всего семейства эллипсоидов, содержащих D_N. Причем, зачастую эта оценка является значительно более точной внешней аппроксимацией рассматриваемого множества достижимости, чем оценка, полученная с помощью локально оптимального рекуррентного алгоритма предыдущего параграфа. Однако данный метод неудобен для рекуррентного применения, так как всякий раз при поиске новой оценки на следующем шаге $(N+1)$ приходится пересчитывать все предыдущие значения параметров $\gamma_0, ..., \gamma_N$. Тем не менее, это представляется возможным при рассмотрении небольших временных интервалов действия системы. Следующая теорема иллюстрирует предельное поведение матриц P_N из (2.25) с коэффициентами из (2.29)–(2.30).

Теорема 2.3 *Пусть матрица A устойчива. Тогда для любого начального $P_0 \geq 0$ матрица P_N стремится к некоторой конечной неотрицательно определенной матрице $\widehat{P}_\infty$, когда $N \to \infty$. При этом*

$$\widehat{P}_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B B^T (A^T)^k}{\widehat{\gamma}_k}, \tag{2.31}$$

где $\widehat{\gamma}_k$ *равны*

$$\widehat{\gamma}_k = \frac{[\,\mathrm{tr}\ A^k BB^T (A^T)^k\,]^{1/2}}{\sum_{i=0}^{\infty}[\,\mathrm{tr}\ A^i BB^T (A^T)^i\,]^{1/2}}, \tag{2.32}$$

а ее след равен $\mathrm{tr}\ \widehat{P}_\infty = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left[\,\mathrm{tr}\ A^k BB^T (A^T)^k\,\right]^{1/2}\right)^2.$

Доказательство. Последовательность матриц P_N является ограниченной при всех $N \geq 0$. Эта ограниченность вытекает как следствие из теоремы 2.2 об ограниченности последовательности локально оптимальных эллипсоидов. Действительно, с точки зрения следа для любого $N \geq 1$ и при любом начальном $\mathcal{E}(0, P_0) = D_0$ эллипсоид $\mathcal{E}(0, P_N)$ будет более точной внешней аппроксимацией множества достижимости D_N, чем оценка, вычисленная с помощью локально оптимального алгоритма. Значит, числовая последовательность $\mathrm{tr}\, P_N$ ограничена.

С другой стороны, если подставить выражения (2.29)–(2.30) в (2.25) и взять след, то получится уравнение

$$(\,\mathrm{tr}\ P_N)^{1/2} = \left[\,\mathrm{tr}\ A^N P_0 (A^T)^N\,\right]^{1/2} + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\,\mathrm{tr}\ A^k BB^T (A^T)^k\,\right]^{1/2}. \tag{2.33}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $N \to \infty$. В самом деле, $\mathrm{tr}\ [A^N P_0 (A^T)^N] = \mathrm{tr}\ [(A^T)^N A^N P_0] \leq n\,\|(A^T)^N\|\,\|A^N\|\,\|P_0\| \leq n\,\|P_0\|\left(C_\varepsilon(\rho_A+\varepsilon)^N\right)^2 \leq \widehat{C}_\varepsilon(\rho_A+\varepsilon)^{2N}$, где $\|\cdot\|$ — спектральная матричная норма, $\varepsilon > 0$ — любое положительное число, n — порядок матриц, а $C_\varepsilon > 0$ и $\widehat{C}_\varepsilon > 0$ — некие положительные константы, зависящие от выбора ε (см. (2.12)). Так как A устойчива, то $\rho_A < 1$. Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\rho_A + \varepsilon < 1$. Значит, $\mathrm{tr}\ [A^N P_0 (A^T)^N] \to 0,\ N \to \infty$ при любом фиксированном $P_0 \geq 0$.

Второе слагаемое в правой части (2.33) представляет собой ряд из положительных элементов, значение которого монотонно возрастает с ростом N и ограничено. Отсюда следует сходимость и для $\mathrm{tr}\, P_N$:

$$(\,\mathrm{tr}\ P_N)^{1/2} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left[\,\mathrm{tr}\ A^k BB^T (A^T)^k\,\right]^{1/2}, \quad N \to \infty. \tag{2.34}$$

Рассмотрим теперь последовательность параметров $\gamma_0, \ldots, \gamma_N$, которые с учетом (2.33) переписываются в виде

$$\gamma_N = \frac{[\,\mathrm{tr}\ A^N P_0 (A^T)^N\,]^{1/2}}{(\,\mathrm{tr}\ P_N)^{1/2}}, \tag{2.35}$$

$$\gamma_k = \frac{[\,\mathrm{tr}\ A^k BB^T (A^T)^k\,]^{1/2}}{(\,\mathrm{tr}\ P_N)^{1/2}}, \qquad k = 0, \ldots, N-1. \tag{2.36}$$

Для доказательства сходимости матриц P_N подставим γ_k из (2.36) в (2.25). Получим

$$P_N = \frac{A^N P_0 (A^T)^N}{\gamma_N} + (\,\mathrm{tr}\ P_N)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k B B^T (A^T)^k}{[\,\mathrm{tr}\ A^k B B^T (A^T)^k\,]^{1/2}}. \tag{2.37}$$

Первое слагаемое $(A^N P_0 (A^T)^N)/\gamma_N$ есть неотрицательно определенная матрица, которая стремится к нулевой с ростом N, так как ее след

$$\mathrm{tr}\ (A^N P_0 (A^T)^N)\,/\,\gamma_N = \sqrt{\mathrm{tr}\, P_N \ \cdot\ \mathrm{tr}\,(A^N P_0 (A^T)^N)} \ \underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\ 0,$$

поскольку $A^N \to 0$ и $(A^T)^N \to 0$ при $N \to \infty$. Теперь, для сходимости матриц P_N достаточно показать сходимость сумм, фигурирующих в правой части (2.37). Но эти суммы монотонно не убывают и ограничены, а значит сходятся. Таким образом, доказана сходимость P_N к конечному пределу

$$\widehat{P}_\infty = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left[\,\mathrm{tr}\ A^k B B^T (A^T)^k\,\right]^{1/2} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B B^T (A^T)^k}{[\,\mathrm{tr}\ A^k B B^T (A^T)^k\,]^{1/2}} \right),$$

что совпадает с выражением (2.31)–(2.32). Отсюда непосредственно следует выражение и для следа

$$\mathrm{tr}\ \widehat{P}_\infty = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left[\,\mathrm{tr}\ A^k B B^T (A^T)^k\right]^{1/2} \right)^2 < \infty.$$

Теорема доказана полностью. □

Таким образом, данный алгоритм (2.25) с параметрами из (2.29)–(2.30) может считаться в некотором смысле итеративной процедурой поиска оценки предельного множества достижимости в случае устойчивой матрицы A исходной системы. Рассмотрим следующий пример, демонстрирующий в пределе сходимость оптимальных по следу эллипсоидов.

Пример 2.5 Пусть задана система (2.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

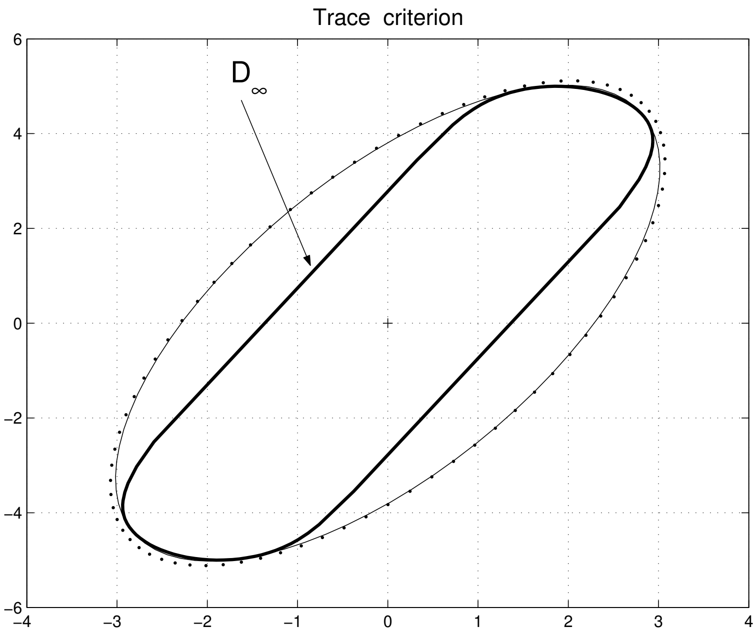

Рис. 2.6: Аппроксимация предельного множества достижимости D_∞ (критерий следа).

Матрица A устойчива. Поэтому последовательность эллипсоидов $\mathcal{E}(0, P_N)$ сходится к $\mathcal{E}(0, \widehat{P}_\infty)$ при $N \to \infty$ для любого начального $\mathcal{E}(0, P_0)$, $P_0 \geq 0$. Предельная матрица $\widehat{P}_\infty$ в данном случае будет равна

$$\widehat{P}_\infty \simeq \begin{pmatrix} 9.1009 & 9.8789 \\ 9.8789 & 25.2340 \end{pmatrix}$$

На рисунке 2.6 этот предельный эллипсоид нарисован тонкой сплошной линией и хорошо аппроксимирует предельное множество достижимости D_∞ (жирная линия). При этом, он практически не отличается от эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(0, P_\infty)$, показанной точечной линией и вычисленной в примере 2.3 локально оптимальным (по критерию следа) рекуррентным методом, а также и от эллипсоида $\mathcal{E}(0, P)$, полученного из однопараметрического семейства (2.15) теоремы 2.1. Сравните: $\operatorname{tr} \widehat{P}_\infty = 34.3349$, $\operatorname{tr} P_\infty = 35.6127$ и $\operatorname{tr} P = 34.6301$. Заметим, что в любом случае (не только в этом примере) эллипсоид $\mathcal{E}(0, \widehat{P}_\infty)$ будет всегда более точной по критерию следа внешней аппроксимацией множества D_∞, чем два других.

Рассмотрим также, как и в примере 2.3, устойчивую матрицу A системы с доминирующим недиагональным элементом

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 5 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

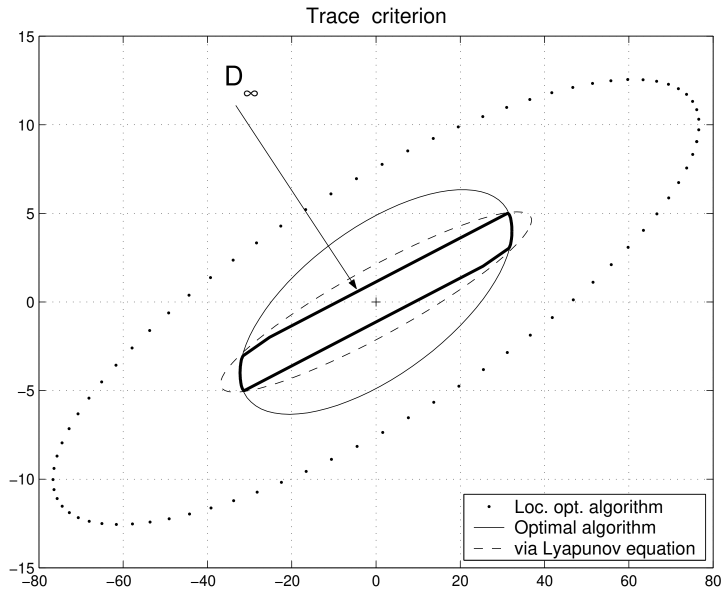

Рис. 2.7: Аппроксимация предельного множества достижимости D_∞ (критерий следа).

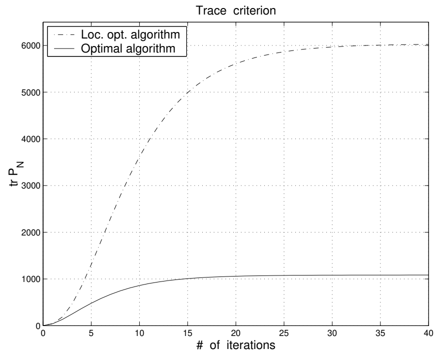

Рис. 2.8: Зависимость $f_1(P_N) = \operatorname{tr} P_N$ от N.

Из параграфа 2.3 и примера 2.3 следует, что точность локально оптимального рекуррентного метода оценивания при этом заметно падает. Однако оптимальный алгоритм на конечном интервале времени здесь заведомо сходится и дает для данного случая заметно лучшую внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию $\mathcal{E}(0, \widehat{P}_\infty)$ предельного множества достижимости D_∞ (см. рисунок 2.7), несмотря на то, что $\|A\| \gg \rho_A$. Действительно, эллипсоид $\mathcal{E}(0, \widehat{P}_\infty)$, показанный на рисунке тонкой сплошной линией, имеет матрицу

$$\widehat{P}_\infty \simeq \begin{pmatrix} 1.0439 & 0.1306 \\ 0.1306 & 0.0402 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

тогда как эллипсоиды $\mathcal{E}(0, P_\infty)$ (точечная линия) и $\mathcal{E}(0, P)$ (пунктирная линия)

$$P_\infty \simeq \begin{pmatrix} 5.8748 & 0.7678 \\ 0.7678 & 0.1577 \end{pmatrix} \cdot 10^3, \qquad P \simeq \begin{pmatrix} 1.3631 & 0.1705 \\ 0.1705 & 0.0259 \end{pmatrix} \cdot 10^3$$

дают менее точные аппроксимации. Сравните: $\operatorname{tr} \widehat{P}_\infty = 1.0841 \cdot 10^3$, $\operatorname{tr} P_\infty = 6.0326 \cdot 10^3$ и $\operatorname{tr} P = 1.389 \cdot 10^3$. Отметим здесь неудовлетворительный размер эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(0, P_\infty)$, полученной с помощью локально оптимального рекуррентного алгоритма.

Для данного случая на рисунке 2.7 представлен график изменения значений функции $f_1(P_N) = \operatorname{tr} P_N$ в зависимости от числа итераций N для двух алгоритмов: оптимального на конечном интервале времени (сплошная линия) и локально оптимального рекуррентного алгоритма (пунктирная линия). Этот рисунок наглядно демонстрирует результаты теорем 2.2 и 2.3. $\square$

2.5 Заключение

В данной главе исследованы асимптотические свойства классических рекуррентных эллипсоидальных алгоритмов внешнего оценивания фазовых состояний линейных стационарных динамических систем в дискретном времени (систем без измерений и без матричной неопределенности, но при наличии аддитивных внешних возмущений). Исследованы на ограниченность и сходимость алгоритмы: рекуррентный локально оптимальный и оптимальный на конечном интервале времени, — которые являются стандартными и наиболее распространенными для задач эллипсоидального оценивания множеств достижимости. Показано, что предельное поведение аппроксимаций существенно зависит от выбора критерия оптимальности получаемых оценок. Так, для локально оптимального рекуррентного алгоритма при условии устойчивости системы доказана ограниченность внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости, построенных по критерию следа, тогда как при использовании критерия детерминанта устойчивость системы не гарантирует такой ограниченности. Для оптимального алгоритма на конечном интервале времени на примерах продемонстрирована бóльшая точность получаемых оценок при использовании обоих критериев. Более того, для критерия следа доказана сходимость аппроксимирующих эллипсоидов при простом требовании устойчивости матрицы A исходной динамической системы.

Помимо этого, описан простой способ построения внешних эллипсоидальных оценок предельного множества достижимости для устойчивых линейных дискретных динамических систем, который сводит поиск минимального по критерию следа эллипсоида к задаче выпуклой одномерной оптимизации, легко решаемой численными методами.

Глава 3

Интервальная техника оценивания

В данной главе строятся *интервальные* алгоритмы внешнего гарантированного оценивания фазовых состояний и параметров линейных дискретных динамических систем при наличии неопределенности в описании модели. Как и в главе 1, помимо внешних возмущений и ошибок измерений в модели предполагается также наличие мультипликативной матричной неопределенности. Вся неопределенность здесь описывается интервальными векторами или матрицами. В этом случае множества достижимости и информационные множества динамической системы будут невыпуклыми многогранниками, детальное описание которых представляет собой NP-трудную задачу, связанную с перебором всех их вершин. Поэтому ищут интервальные апроксимации этих многогранных множеств. Однако во многих случаях поиск таких аппроксимаций также является NP-трудной задачей. Тем не менее, она может эффективно решаться при небольших размерностях вектора состояний (параметров) динамической системы. Для систем большой размерности, когда оптимальные оценки рассматриваемых многогранных множеств получить не удается, приходится упрощать постановку задачи и искать некоторые состоятельные, но уже менее точные их внешние оценки.

Алгоритм оценивания фазовых состояний здесь аналогично методу эллипсоидов разбивается на задачи об аппроксимации суммы (этап предсказания) и аппроксимации пересечения (этап уточнения) соответствующих множеств. Причем нахождение интервальных оценок на каждом из этих этапов сводится к стандартным в интервальном анализе операциям над интервальными векторами и матрицами. Они кратко изложены в этой главе. Однако основной акцент здесь сделан на задачу оценивания параметров статической системы по наблюдениям в условиях неопределенности. Предложен эффективный метод ее решения, основанный на получении так называемого интервального решения (оптимального или приближенного) интервальной системы линейных алгебраических уравнений, что позволяет избежать вычислительных трудностей в задачах оценивания с большим числом измерений.

3.1 Введение

Рассмотрим линейную дискретную модель динамической системы с неопределенностью, описываемую уравнением состояний

$$x_{k+1} = (A_k + \Delta A_k)\, x_k + v_k, \tag{3.1}$$

и уравнением наблюдений

$$y_k = (C_k + \Delta C_k)\, x_k + w_k, \tag{3.2}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ есть вектор фазовых состояний системы, $y_k \in \mathbb{R}^m$ есть вектор измерений; $v_k \in \mathbb{R}^n$ и $w_k \in \mathbb{R}^m$ — вектора, соответствующие внешним возмущениям и ошибкам измерений, $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $C_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — известные номинальные значения матриц системы, а ΔA_k и ΔC_k — матричная неопределенность. Будем предполагать всю неопределенность в системе интервальной. Полагаем также, что начальный фазовый вектор x_0 системы точно неизвестен, но заведомо принадлежит некоторому ограниченному интервальному вектору $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{IR}^n$.

Интервальными называют вектор или матрицу в том случае, если их компоненты являются конечными замкнутыми интервалами; соответствующую интервальную переменную обозначают жирным заглавным шрифтом. Будем использовать стандартные обозначения $\mathbb{IR}^n$ для пространства всех интервальных векторов размерности n и $\mathbb{IR}^{m\times n}$ — для пространства всех интервальных $(m \times n)$-матриц. При этом, интервальный вектор $\mathbf{X} = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}^n$, где $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, есть простой брус или прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$. Задание неопределенности в интервальных (покомпонентных) терминах является наиболее простым и естественным во многих моделях. Однако многие задачи в такой постановке, в частности задача оценивания фазовых состояний динамических систем, являются NP-сложными и приводят к вычислительным трудностям.

В этой главе мы будем оценивать множества возможных состояний или параметров системы классом интервальных векторов. Естественной мерой величины для них служит объем, т.е. произведение длин ребер прямоугольного параллелепипеда, определяемых его вершинами (компонентами интервального вектора). Поэтому поиск минимальной внешней интервальной оценки $\mathbf{X}^*$, скажем, некоторого множества $\mathcal{D}$ сводится к нахождению оптимальных компонент интервального вектора, содержащего $\mathcal{D}$:

$$\underline{x}_i = \min_{x \in \mathcal{D}} e_i^T x, \qquad \overline{x}_i = \max_{x \in \mathcal{D}} e_i^T x, \tag{3.3}$$

где e_i — i-й орт в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Классический гарантированный подход к оцениванию состояний предполагает, что матрицы системы известны точно, т.е. $\Delta A_k \equiv 0$ и $\Delta C_k \equiv 0$, и в системе присутствуют только аддитивные возмущения, стесненные интервальными ограничениями

$$v_k \in \mathbf{V}_k = [\underline{v}_k, \overline{v}_k], \qquad w_k \in \mathbf{W}_k = [\underline{w}_k, \overline{w}_k]. \tag{3.4}$$

Множество всех фазовых векторов x_k, удовлетворяющих исходной модели при измерениях $y_1, ..., y_k$ и некой априорной информации касательно начального x_0, формируют некоторое многообразие в фазовом пространстве, которое будет в этом случае выпуклым многогранником при всех $k \geq 0$. Вопросы их явного описания или поиска для них гарантированной, в частности интервальной, оценки хорошо изучен и не представляет больших трудностей (см. некоторые ссылки [16–19, 26–28, 73, 82, 83, 99, 100, 103, 118, 121, 128–130, 136, 158, 159]). Оценки этих множеств здесь также вычисляются с использованием двух этапов — предсказания и уточнения, определяемых соответственно исходным уравнением состояний системы и уравнением наблюдений. Интервальные алгоритмы оценивания строятся в основном рекуррентно на основе аппроксимаций, вычисленных на этих двух этапах.

Мы будем рассматривать более общую задачу, когда матрицы исходной модели (3.1), (3.2) неизвестны, но принадлежат некоторым интервальным семействам

$$\Delta A_k \in \mathbf{\Delta A}_k, \quad \Delta C_k \in \mathbf{\Delta C}_k, \tag{3.5}$$

$\mathbf{\Delta A}_k \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и $\mathbf{\Delta C}_k \in \mathbb{IR}^{m \times n}$. Такое описание часто встречается на практике, когда мы не обладаем достаточно полной информацией о структуре рассматриваемого динамического объекта. Важные частные случаи проблем оценивания в такой постановке были исследованы в ряде работ [62, 77, 80, 158]. Отмечалось, что наличие интервальной матричной неопределенности в модели ведет к значительным трудностям из-за невыпуклости полиэдральных множеств достижимости и множеств возможных параметров системы. Их описание и зачастую построение для них оптимальных внешних аппроксимаций связано с перебором всех вершин. Эта задача является NP-сложной и приводит к большим вычислительным трудностям при больших размерностях ($n > 10$). Поэтому для случаев систем больших размерностей применяют более грубые, неоптимальные оценки, но которые можно получить за приемлемое время.

Основной результат данной главы заключается в применении интервальной техники для оценивания фазовых состояний и параметров линейной дискретной динамической системы при наличии аддитивной и матричной неопределенностей. Задача оценивания состояний рассмотрена в следующем разделе. Приведены примеры и иллюстрации возникающих при этом множеств достижимости. Интервальная аппроксимация суммы и пересечения здесь сводится к соответствующим операциям над интервальными векторами и матрицами. В частности, аппроксимация суммы (этап предсказания в соответствии с уравнением состояний (3.1) исходной модели) ведет к нахождению произведения интервальной матрицы на интервальный вектор и суммы интервальных векторов, в то время как для аппроксимации пересечения (этап уточнения согласно уравнению наблюдений (3.2) в системе) необходимо обращать интервальную матрицу. Все это есть классические операции в интервальном анализе. Краткое их описание и применение на этапах предсказания и уточнения приведено в разделах 3.2.2 и 3.2.3.

Главной же целью здесь служит рассмотрение интервального подхода к *задаче параметрического оценивания* статической системы с неопределенностью в описании модели. Система в данном случае предполагается статической для того, чтобы можно было провести достаточно большое количество измерений и по ним довольно точно идентифицировать вектор параметров объекта. Таким образом, в задаче параметрического оценивания размерность вектора измерений $y \in \mathbb{R}^m$ обычно много больше размерности вектора параметров $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. $m \gg n$. Предлагается найти интервальные оценки параметров системы с неопределенностью и при наличии большого числа измерений. Основным инструментом для этого служит поиск интервального решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Проблема нахождения такого решения — хорошо известная задача в интервальном анализе. Было доказано в [104], что она является NP-сложной с точки зрения нахождения оптимального интервального решения. Для нее разработан целый ряд подходов, позволяющих находить как оптимальное, так и приближенные интервальные решения (см. некоторые работы [1,9,64,65,84,127,131–133,144,145,148,153,154]). В параграфе 3.4 данной главы предлагается оригинальный подход, который сводит поиск оптимального интервального решения линейной интервальной системы уравнений к решению определенного числа скалярных уравнений или систем уравнений. Этот подход развивает результаты И. Рона [144] по данной проблематике и зачастую требует намного меньшего числа вычислений, чем другие известные методы, например, основанные на процедуре линейного программирования [131, 148]. В случае большого числа параметров в системе ($n > 15$) получить оптимальные интервальные решения для интервальной системы уравнений не удается. Приходится тогда упрощать задачу и искать менее точные оценки. Некоторые простые и во многих случаях эффективные аппроксимации такого рода также предлагаются в разделе 3.4.

В заключительном параграфе 3.5 представлены два алгоритма параметрического оценивания, последовательно рассматривающие квадратные интервальные системы линейных уравнений. Пересечение их интервальных решений даст искомую аппроксимацию вектора параметров исходной системы. Приводится пример, наглядно демонстрирующий результирующие оценки.

3.2 Оценивание состояний

По аналогии с главой 1 рассмотрим далее операции суммы и пересечения множеств, определяющих возможные вектора состояний x_k динамической системы (3.1), (3.2) с интервальной неопределенностью в данных. Их реализация и получение для них соответствующих внешних интервальных аппроксимаций формирует основные блоки рекуррентного алгоритма оценивания. Но прежде приведем некоторые наглядные примеры множеств достижимости системы (3.1) с интервальной неопределенностью.

3.2.1 Множества достижимости

Проиллюстрируем структуру и динамику поведения областей достижимости исходной модели (3.1) без измерений при ограничениях на неопределенные переменные в виде $\Delta A_k \in \mathbf{\Delta A}_k$ и $v_k \in \mathbf{V}_k$. Итак, пусть начальный фазовый вектор x_0 системы принадлежит ограниченному интервальному вектору $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{IR}^n$, а остальные рекуррентно пересчитываются по формуле (3.1)

$$x_{k+1} = (A_k + \Delta A_k)\, x_k + v_k,$$

где

$$\Delta A_k \in \mathbf{\Delta A}_k, \qquad v_k \in \mathbf{V}_k,$$

а номинальные матрицы A_k известны. Множества достижимости D_k такой динамической системы тогда будут определяться равенством

$$D_k = \left\{ x_k = \left[\prod_{i=0}^{k-1}(A_i + \Delta A_i)\right] x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left[\prod_{j=i+1}^{k-1} (A_j + \Delta A_j)\, v_i \right] : \right.$$
$$\left. x_0 \in \mathbf{X}_0, \quad v_j \in \mathbf{V}_j, \quad \Delta A_j \in \mathbf{\Delta A}_j, \;\; j = 0, 1, ..., k-1 \right\}. \quad (3.6)$$

В большинстве случаев эти множества имеют очень сложную структуру. В частности, они часто оказываются невыпуклыми многогранниками, причем число их вершин и граней быстро растет с течением времени k. Приведем далее несколько иллюстраций таких множеств достижимости.

Пример 3.1 Пусть

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta A_k \in \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] & [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] & [-0.2, 0.2] \end{pmatrix},$$
$$v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Множество достижимости D_1 уже после первого шага является невыпуклым многогранником (см. рисунок 3.1), в данном случае симметричным относительно начала координат. На рисунке 3.2 показана эволюция этих множеств для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

При

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta A_k \in \begin{pmatrix} [-0.1, 0.1] & [-0.1, 0.1] \\ [-0.1, 0.1] & [-0.1, 0.1] \end{pmatrix},$$

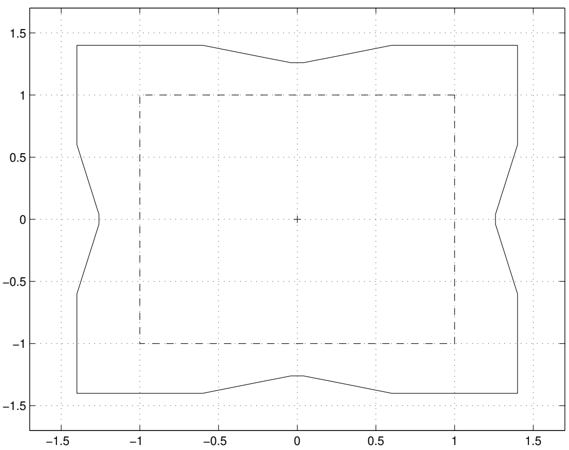

Рис. 3.1: Множество достижимости D_1.

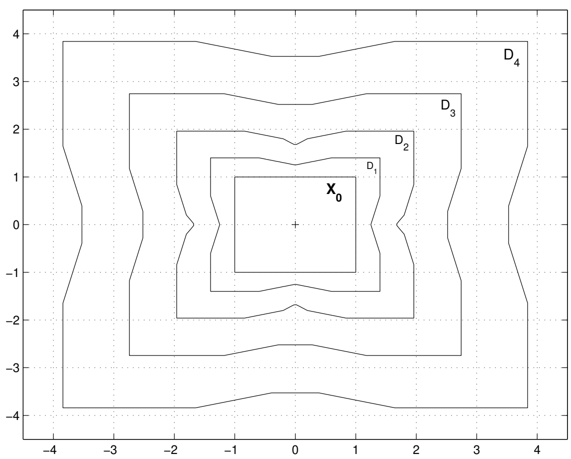

Рис. 3.2: Мн-ва достижимости D_1–D_4.

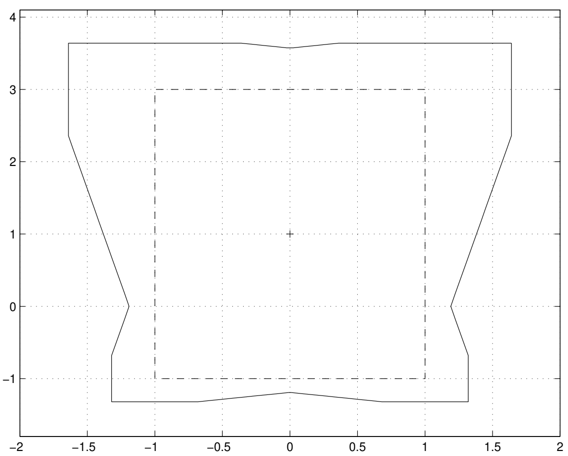

Рис. 3.3: Множество достижимости D_1.

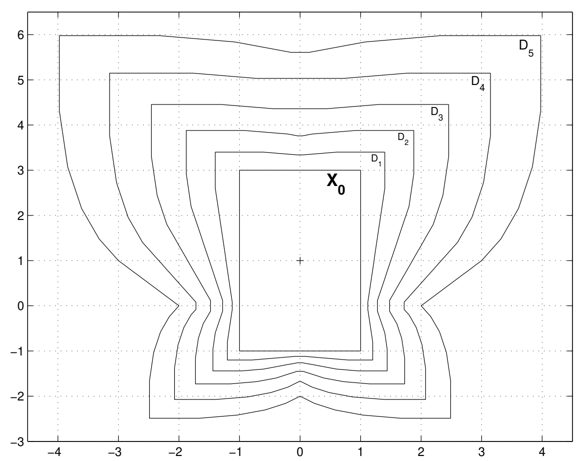

Рис. 3.4: Мн-ва достижимости D_1–D_5.

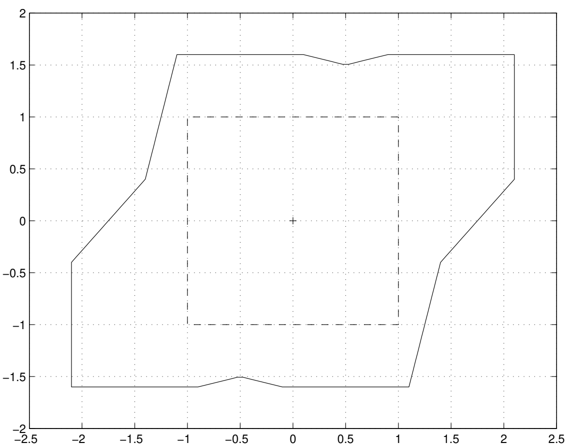

Рис. 3.5: Множество достижимости D_1.

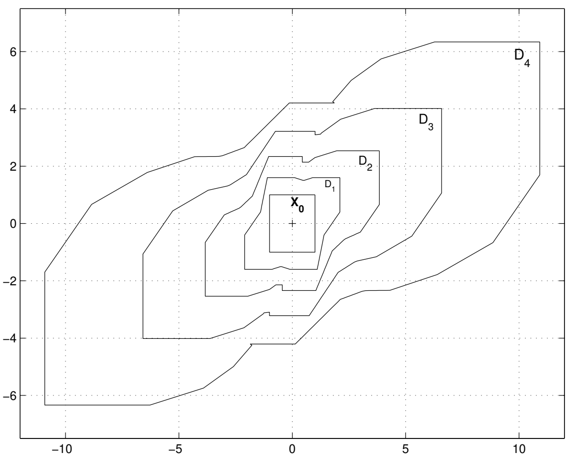

Рис. 3.6: Мн-ва достижимости D_1–D_4.

$$v_k \in \mathbf{V}_k = \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 3] \end{pmatrix}$$

множество достижимости D_1 представлено на рисунке 3.3, а динамику развития областей достижимости можно увидеть из рисунка 3.4.

Наиболее общий случай с недиагональной и несимметрической матрицей A_k, когда

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta A_k \in \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] & [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] & [-0.2, 0.2] \end{pmatrix},$$

$$v_k \in \mathbf{V}_k = \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

приведен на рисунках 3.5 и 3.6, демонстрирующий очень сложный характер возникающих множеств D_k, что практически делает невозможным их прямое описание даже при относительно небольших k. □

3.2.2 Аппроксимация суммы

Перепишем уравнение состояний (3.1) в интервальных терминах

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{V}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{V} \in \mathbb{IR}^n$ — известные интервальные вектора соответственно фазовых состояний и внешних возмущений, а интервальная матрица $\mathbf{A} = \{A + \Delta A : \ \Delta A \in \mathbf{\Delta A}\} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Временные индексы здесь для простоты опущены. Множество векторов

$$\mathcal{D} = \{z = A\,x + v : \quad A \in \mathbf{A},\ x \in \mathbf{X},\ v \in \mathbf{V}\} \tag{3.8}$$

есть множество достижимости такой системы и в общем случае представляет собой невыпуклый многогранник (см. рисунки 2.1, 2.3 и 2.5). Его внешняя интервальная аппроксимация сводится к поиску интервального вектора $\mathbf{Z} \supseteq \mathcal{D}$. Равенство в (3.7) понимается с той точки зрения, что минимальный интервальный вектор, содержащий множество $\mathcal{D} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{V}$, есть $\mathbf{Z}$. Отсюда следует, что нахождение $\mathbf{Z}$ ведет к простым операциям над итервальными векторами и матрицами, а именно, умножение интервальной матрицы $\mathbf{A}$ на интервальный вектор $\mathbf{X}$ и сложение двух интервальных векторов. Последняя операция элементарна и дается простым сложением соответственно их нижних и верхних границ: $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = [\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$. Умножение интервальной

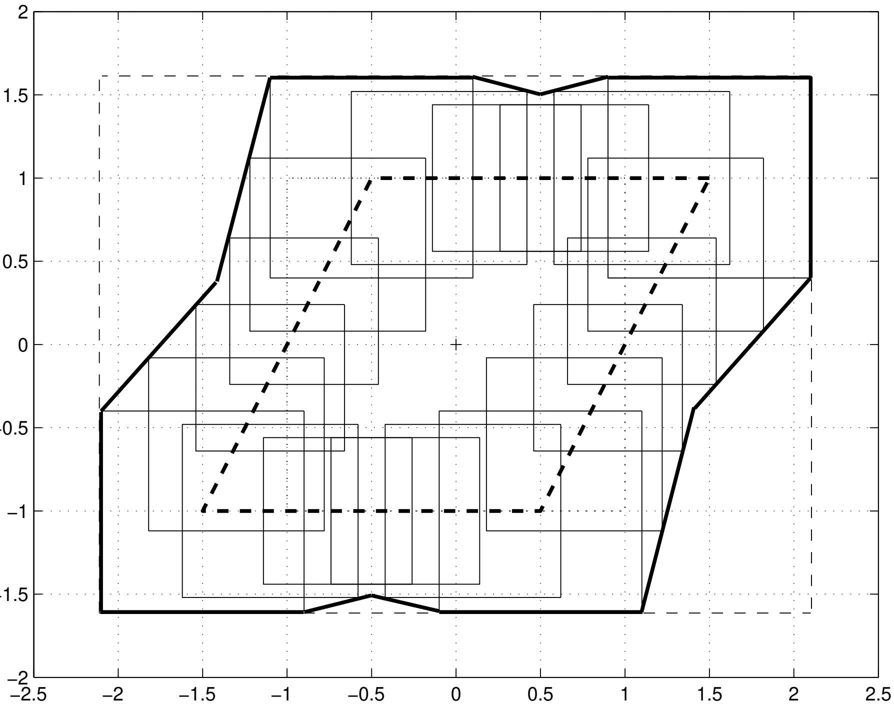

Рис. 3.7: Интервальная аппроксимация множества достижимости.

матрицы $\mathbf{A}$ на интервальный вектор $\mathbf{X}$ также легко реализуется и дается посредством нахождения произведения двух интервалов. Если $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ — i-я строка интервальной матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{X} = [\underline{x}, \overline{x}]$, то

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{X})_i = [\underline{a}_i, \overline{a}_i] \cdot [\underline{x}, \overline{x}] = \sum_{j=1}^{n} [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] \cdot [\underline{x}_j, \overline{x}_j],$$

где произведение двух интервалов равно

$$[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] \cdot [\underline{x}_j, \overline{x}_j] =$$
$$[\,\min\{\underline{a}_{ij}\underline{x}_j, \underline{a}_{ij}\overline{x}_j, \overline{a}_{ij}\underline{x}_j, \overline{a}_{ij}\overline{x}_j\},\ \max\{\underline{a}_{ij}\underline{x}_j, \underline{a}_{ij}\overline{x}_j, \overline{a}_{ij}\underline{x}_j, \overline{a}_{ij}\overline{x}_j\}\,]. \quad (3.9)$$

Заметим, что при этом точное описание выпуклой оболочки множества $\{A\,x:\ A \in \mathbf{A},\ x \in \mathbf{X}\}$, являющегося произведением интервальной матрицы на интервальный вектор, есть NP-трудная задача, которая ведет к перебору всех вершин интервального вектора $\mathbf{X}$.

Пример 3.2 Рассмотрим двумерную систему (3.7) с интервальной неопределенностью,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.8, 1.2] & [0.3, 0.7] \\ [-0.2, 0.2] & [0.8, 1.2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix}.$$

Множество достижимости $\mathcal{D} = \{A\,x + v : \ \ A \in \mathbf{A},\ x \in \mathbf{X},\ v \in \mathbf{V}\}$ есть невыпуклый многогранник, показанный на рисунке 3.7 жирной линией (см. также рисунок 3.5). Прямым вычислением находим интервальный вектор

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{V} = \begin{pmatrix} [-1.9, 1.9] \\ [-1.4, 1.4] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.2, 0.2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2.1, 2.1] \\ [-1.6, 1.6] \end{pmatrix},$$

который является минимальной внешней интервальной аппроксимацией, содержащей множество $\mathcal{D}$ (тонкая пунктирная линия на рисунке 3.7). $\square$

3.2.3 Аппроксимация пересечения

Уравнение наблюдений (3.2) для фиксированного момента времени в интервальных переменных переписывается следующем образом

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\,\mathbf{X}, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{C} = \{C + \Delta C : \ \ \Delta C \in \mathbf{\Delta C}\} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ — интервальная матрица регрессоров модели, $\mathbf{Y} \in \mathbb{IR}^{m}$ — интервальный вектор измерений, а $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^{n}$ — искомая интервальная оценка вектора состояний системы. В этом случае $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}$, и поиск интервального вектора $\mathbf{X}$ сводится к обращению прямоугольной интервальной матрицы $\mathbf{C}$. Обратной к интервальной матрице C называют семейство $\mathbf{C}^{-1} = \{C^{-1} : \ C \in \mathbf{C}\}$. Для обращения прямоугольной матрицы используют инверсию Мура-Пенроуза (см. [58]). Нахождение обратной интервальной матрицы — это уже более сложная, NP-трудная задача. Практически все операции над интервальными матрицами являются NP-трудными, и их сложность экспоненциально возрастает с увельчением размерности. Среди них выделим, например, проверку невырожденности, положительной (неотрицательной) определенности, устойчивости интервальных матриц. В этой связи, при наличии задач большой размерности прибегают к приближенным гарантирующим методам, дающим некоторые удовлетворительные неоптимальные решения.

В задаче оценивания состояний динамической системы в дискретном времени как правило количество измерений меньше размерности вектора состояний, т.е. $m < n$. Это вызвано тем, что за период дискретизации удается провести и обработать только небольшое количество измерений. Поэтому множество возможных векторов состояний x, совместимых с результатами проведенных наблюдений, и следовательно ее внешняя интервальная аппроксимация $\mathbf{X}$ почти всегда являются неограниченными. Однако при наличии априорной оценки $\mathbf{X}_0$ (например, после этапа предсказания или аппроксимации суммы) можно определить пересечение $\mathbf{X}_0$ с множеством возможных состояний, совместимых с результатами измерений, и искать для него внешнюю интервальную аппроксимацию. Это пересечение уже будет ограниченным множеством, а его интервальная аппроксимация может дать более лучшую оценку вектора состояний системы по сравнению с априорной.

Рассмотрим далее линейную модель (3.2) нескольких измерений в системе в условиях неопределенности

$$y = (C + \Delta C)\, x + w, \tag{3.11}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $w \in \mathbb{R}^m$, а $m < n$. Система предполагается статической, поэтому временные индексы здесь не пишем. Пусть для простоты матричная неопределенность и вектор ошибок измерений удовлетворяют соответственно

$$\|\Delta C\|_\infty \le \varepsilon, \quad \|w\|_\infty \le \delta, \tag{3.12}$$

где

$$\|\Delta C\|_\infty = \max_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n} |(\Delta C)_{ij}|, \qquad \|w\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |w_i|. \tag{3.13}$$

Неравенства (3.12) описывают частный случай интервальной неопределенности, когда все компоненты ΔC или w принадлежат одинаковым интервалам. Матрица C, вектор y и величины ε, δ предполагаются известными. Тогда все вектора $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие (3.20) при данных ограничениях (3.12), формируют так называемое информационное множество или *множество допустимых состояний* системы

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \ y = (C + \Delta C)\, x + w, \ \ \|\Delta C\|_\infty \le \varepsilon, \ \ \|w\|_\infty \le \delta\} \tag{3.14}$$

в том смысле, что все параметры $x \in X$ согласованы с моделью (3.11)–(3.12). Предположим $x \in \mathbf{X}_0$ — некоторая априорная интервальная оценка, $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{IR}^n$. Обычно эта априорная оценка может являться достаточно консервативной, но гарантированно содержащей фазовый вектор x системы. Задача заключается в нахождении более точной внешней оценки вектора x в соответствии с имеющимся набором измерений

$y_1, ..., y_m$ и структурой модели (3.11)–(3.12). Другими словами, требуется найти интервальный вектор $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ (желательно наименьший), содержащий пересечение $\mathbf{X}_0 \bigcap X$.

Для наглядности приведем здесь случай наличия одного измерения в системе ($m = 1$). Итак, выпишем скалярную модель

$$y = (c + \Delta c)^T x + w \tag{3.15}$$

с $\|\Delta c\|_\infty \le \varepsilon$ и $|w| \le \delta$. Множество X записывается тогда как

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \ |y - c^T x| \le \varepsilon \|x\|_1 + \delta\}, \tag{3.16}$$

где $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. На рисунке 3.8 это множество показано на плоскости; оно является невыпуклым для всех $\varepsilon > 0$ (область между двумя ломанными). X_1 стягивается в полосу при $\varepsilon \to 0$. В то же время, оно выпукло отдельно в каждом ортанте $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть E^k есть k-й ортант, $k = 1, ..., 2^n$. Если для любого фиксированного числа k вектор $x \in E^k$, то правая часть в неравенстве (3.16) становится линейной функцией от x, и тогда пересечение $X_1 \bigcap E^k$ будет выпуклым множеством.

Предположим $x \in \mathbf{X}_0$. Тогда интервальный вектор $\mathbf{X}$, содержащий $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1$, может быть получен решением задачи линейного программирования в каждом ортанте $\mathbb{R}^n$. Пусть $s^k = \operatorname{sign} x$ для $x \in E^k$. Вектор s^k с элементами $|s_i^k| = 1$ однозначно определяется выбором ортанта. Тогда

$$X_1 \bigcap E^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \ |y - c^T x| \le \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i s_i^k + \delta \right\} \tag{3.17}$$

выпуклое множество, определяемое линейными ограничениями. Нижние и верхние покомпонентные границы пересечения $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^k$ вычисляются аналогично (3.3) линейным программированием

$$\underline{x^k}_j = \arg \min_{x \in \mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^k} (e^j, x), \qquad \overline{x^k}_j = \arg \max_{x \in \mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^k} (e^j, x), \tag{3.18}$$

где e^j — j-й орт в $\mathbb{R}^n$, $j = 1, ..., n$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Отсюда, $\mathbf{X}^k = [\underline{x^k}_1, \overline{x^k}_1], ..., [\underline{x^k}_n, \overline{x^k}_n])^T$ дает минимальную интервальную аппроксимацию $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^k$. Заметим, что пересечение множества $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1$ с некоторыми ортантами может быть пусто. Тогда вычисления в этих ортантах очевидным образом можно опустить, так как задачи линейного программирования (3.18) вырождаются.

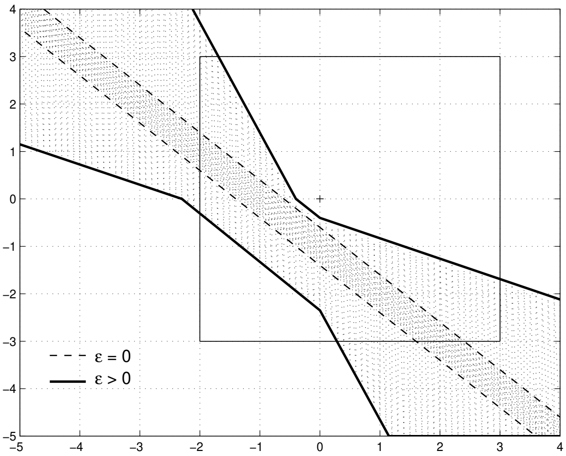

Рис. 3.8: Множество допустимых векторов состояний x для скалярного измерения.

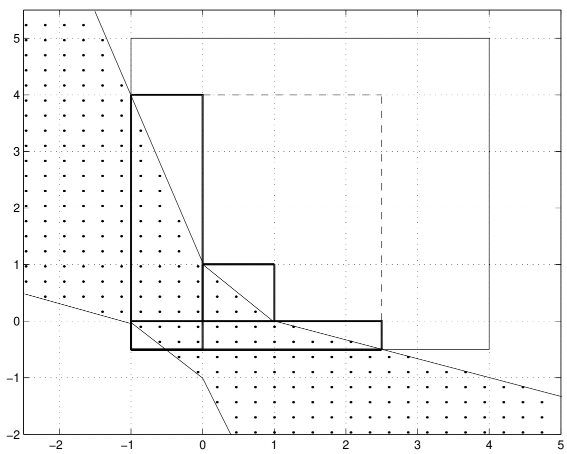

Рис. 3.9: Интервальная аппроксимация пересечения для скалярного измерения.

Далее, пусть $K = \{k:\ \mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \bigcap E^k \neq \emptyset\}$. Тогда $\{E^k:\ k \in K\}$ есть набор ортантов, содержащих хотя бы одну точку из $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1$. Перебирая все ортанты E^k такие, что $k \in K$, получим включение $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1 \subseteq \bigcup_{k \in K} \mathbf{X}^k$. Наконец, вычислив

$$\underline{x}_i = \min_{k \in K} \left\{ \underline{x^k}_i \right\}, \quad \overline{x}_i = \max_{k \in K} \left\{ \overline{x^k}_i \right\}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.19}$$

получим искомый интервальный вектор $\mathbf{X} = ([\underline{x}_1, \overline{x}_1], ..., [\underline{x}_n, \overline{x}_n])^T$, являющийся оптимальной внешней интервальной оценкой пересечения $\mathbf{X}_0 \bigcap X_1$.

Пример 3.3 Возьмем $\mathbf{X}_0 = ([-1, 4], [-0.5, 5])^T$ и $y = 0$, $c = (1, 1)^T$, $\varepsilon = \delta = 0.5$. Множество $X_1 = \{\, x \in \mathbb{R}^2 :\ 2|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| + 1 \}$ показано на рисунке 3.9 (внутренняя область между ломанными). Вспомогательные интервальные вектора $\mathbf{X}^k$ находятся с помощью решения задач линейного программирования (3.18) отдельно в каждом ортанте E^k, $k = 1, ..., 4$ (они показаны жирной линией на рисунке 3.9). Тогда $\mathbf{X} = \bigcup_{k \in K} \mathbf{X}^k = ([-1, 2.5], [-0.5, 4])^T$. □

При наличии нескольких измерений в системе ($m > 1$) можно рассматривать их рекуррентно как скалярные и применять описанную процедуру поиска оптимального $\mathbf{X}$, основанную на решении задачи линейного программирования, что допустимо при небольших m, в частости, в задаче оценивания фазовых состояний динамических систем. Однако такой метод неприменим в случаях с большим числом измерений ($m \gg n$). В следующем разделе в рамках интервального описания неопределенностей рассматривается задача параметрического оценивания для статических систем с большим числом измерений.

3.3 Параметрическое оценивание

Задача параметрического оценивания заключается в нахождении по-возможности наилучшей оценки вектора параметров некоторой статической системы по измерениям в условиях неопределенности. При этом количество измерений $y \in \mathbb{R}^m$ обычно много больше размерности вектора параметров $x \in \mathbb{R}^n$ системы, $m \gg n$, поскольку всегда стараются провести как можно больше измерений, чтобы можно было получить наиболее точные оценки для x.

Рассмотрим линейную модель регрессии (3.2) для исходной системы с ошибками измерений и матричной неопределенностью

$$y = (C + \Delta C)\, x + w, \tag{3.20}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $w \in \mathbb{R}^m$. Пусть также

$$\|\Delta C\|_\infty \le \varepsilon, \quad \|w\|_\infty \le \delta. \tag{3.21}$$

Матрица C, вектор y и величины ε, δ предполагаются известными. Тогда все вектора $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие (3.20) при данных ограничениях (3.21), формируют *множество допустимых параметров* системы

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \;\; y = (C + \Delta C)x + w, \;\; \|\Delta C\|_\infty \le \varepsilon, \;\; \|w\|_\infty \le \delta\}. \tag{3.22}$$

Задача заключается в нахождении внешней интервальной оценки вектора x в соответствии с имеющимся набором измерений $y_1, ..., y_m$ и структурой модели (3.20)–(3.21), т.е. требуется найти интервальный вектор $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ (желательно наименьший), содержащий множество допустимых параметров X. Для построения требуемых и эффективных оценок предлагается группировать каждые n измерений в уравнении (3.20) и рассматривать их как квадратные системы линейных уравнений с интервальной неопределенностью, для каждой из которых находить интервальные решения. Далее описываются простые алгоритмы получения интервальных решений для таких систем.

3.4 Интервальные решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений

Исследование интервальных систем линейных алгебраических уравнений и нахождение для них интервальных решений являются классической и широко распространенной задачей в интервальном и численном анализе. Приведем здесь некоторые алгоритмы ее решения.

3.4.1 Постановка задачи

Пусть квадратная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, вектор $b \in \mathbb{R}^n$ есть известные номинальные значения. Рассмотрим возмущенную систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$(A + \Delta A)\, x = b + \Delta b, \tag{3.23}$$

где матричная неопределенность $\|\Delta A\|_\infty \le \varepsilon$ и неопределенность в правой части $\|\Delta b\|_\infty \le \delta$ ограничены по ∞-норме. Матрица A предполагается невырожденной. Система (3.23) называется интервальной системой линейных алгебраических уравнений, причем все компоненты в интервальной матрице (или соответственно у вектора правой части) принадлежат одинаковым интервалам. Тогда множество решений такой системы имеет вид

$$\widehat{X} = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \;\; (A + \Delta A)\, x = b + \Delta b, \;\; \|\Delta A\|_\infty \le \varepsilon, \;\; \|\Delta b\|_\infty \le \delta \,\}. \tag{3.24}$$

Требуется явно описать множество $\widehat{X} \ni x$ и найти для него оптимальную внешнюю интервальную оценку $\mathbf{X}^* \supseteq \widehat{X}$. Если $e_k \in \mathbb{R}^n$ — k-й орт, то задача поиска $\mathbf{X}^* = \{x : \underline{x}_k \le x_k \le \overline{x}_k\}$ переписывается покомпонентно

$$\underline{x}_k = \min_{x \in \widehat{X}} e_k^T x, \qquad \overline{x}_k = \max_{x \in \widehat{X}} e_k^T x, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.25}$$

Эта задача впервые была рассмотрена в середине 60-х годов в работах [131–133], где для ее решения использовался аппарат линейного программирования; такой подход развивался далее в статьях [84, 148]. Известно [104], что получение оптимального интервального решения для (3.23) является NP-сложной проблемой, неподдающейся решению при высокой размерности системы. В этом случае, представляет интерес поиск любой достаточно хорошей внешней интервальной оценки $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{X}^*$

множества решений $\widehat{X}$, причем зачастую ее можно найти аналитически. В этом контексте были предложены некоторые итеративные численные методы, см. монографии [97, 127] и статьи [64, 65, 145, 153, 154].

Основной отличительной чертой нашего подхода здесь является переход от решения задачи линейного программирования к рассмотрению скалярных уравнений.

3.4.2 Множество решений

Детальное описание множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений было дано еще в первых работах Оеттли и Прагера [131–133] для интервальной неопределенности общего типа. В нашем случае их результат представляется в следующем виде:

Лемма 3.1 ([131, 132]) *Множеством всех допустимых решений системы (3.23) является многогранник*

$$\widehat{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|Ax - b\|_\infty \le \varepsilon\|x\|_1 + \delta\}. \tag{3.26}$$

Доказательство легко проводится по аналогии с леммой 1.1 главы 1. □

Напомним, что $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. В общем случае $\widehat{X}$ невыпукло. Но если это множество полностью лежит в каком-то ортанте $\mathbb{R}^n$, правая часть неравенства в (3.26) есть линейная функция. Тогда $\widehat{X}$ становится выпуклым, и задача построения ее интервальной аппроксимации сводится к выпуклой оптимизации (3.25). Однако в большинстве случаев множество решений лежит в нескольких или может принадлежать всем ортантам, что значительно усложняет ситуацию и ведет к последовательному перебору всех ортантов в $\mathbb{R}^n$. Следующий пример иллюстрирует структуру множеств достижимости линейной интервальной системы.

Пример 3.4 Рассмотрим систему (3.23) при $A = \operatorname{diag}\{1, 1\}$, $b = (1, 1)^T$, $\varepsilon = 0.3$ и $\delta = 0$. Точное решение невозмущенной системы (при $\varepsilon = \delta = 0$) есть точка $x^* = A^{-1}b = (1, 1)^T$. Тогда множество решений

$$\widehat{X} = \left\{x = (x_1, x_2)^T : \ \max\{|x_1 - 1|, |x_2 - 1|\} \le 0.3\,(|x_1| + |x_2|)\right\}$$

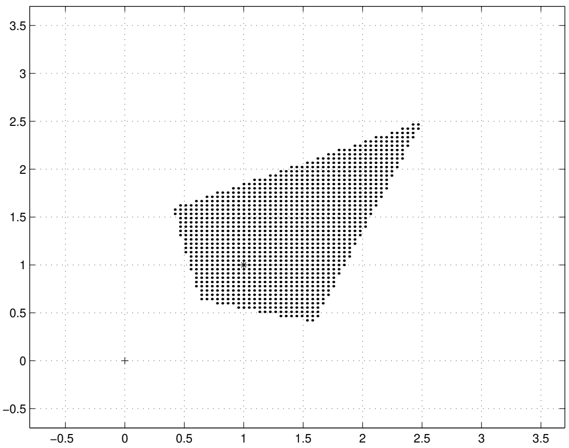

Рис. 3.10: Множество решений.

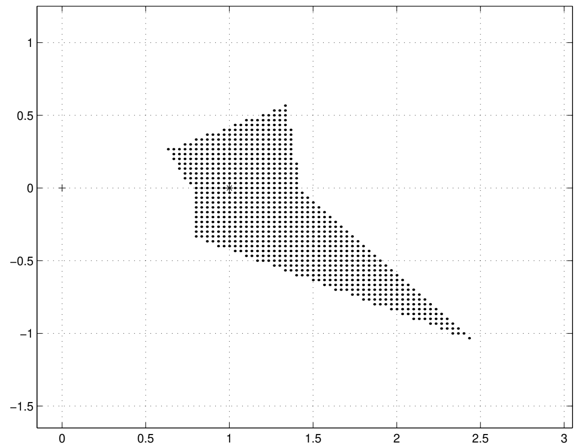

Рис. 3.11: Множество решений.

в нашем случае будет лежать в первом ортанте плоскости (см. рисунок 3.10). Оно ограничено и выпукло при всех $\varepsilon < 0.5$. Однако, если мы возьмем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то $\widehat{X}$ будет невыпуклым для всех $\varepsilon > 0$, что показано на рисунке 3.11. $\square$

3.4.3 Радиус невырожденности

Для любой невырожденной матрицы A существуют такие ΔA, что сохраняется невырожденность матрицы $A + \Delta A$ и следовательно ограниченность множества решений линейной интервальной системы (3.23). Определим радиус невырожденности матрицы для ∞-нормы как

$$\rho(A) = \sup\{\, \varepsilon : \ A + \Delta A \text{ невырождена при } \|\Delta A\|_\infty \le \varepsilon \} \,. \tag{3.27}$$

Тогда $A + \Delta A$ остается невырожденной (а $\widehat{X}$ — ограниченной) при $\varepsilon < \rho(A)$. Запишем $(\infty, 1)$-норму матрицы

$$\|A\|_{\infty,1} = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|A\,x\|_1 = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \sum_{i=1}^{n} |a_i^T x|. \tag{3.28}$$

Здесь вектор a_i равен i-й строке матрицы A.

Лемма 3.2 *Радиус невырожденности (3.27) равен*

$$\rho(A) = \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\infty,1}}. \tag{3.29}$$

Доказательство см., например, в [138]. □

Для любой невырожденной матрицы вычисление ее $(\infty, 1)$-нормы есть NP-трудная задача. Она требует нахождения 2^n чисел, что допустимо при небольших n, скажем $n \leq 15$. Для систем большой размерности существуют некоторые эффективные методы, аппроксимирующие это значение (см. [71]).

3.4.4 Оптимальное интервальное решение

Задача состоит в вычислении нижней $\underline{x}_i$ и верхней $\overline{x}_i$ границ по каждой компоненте вектора $x \in \mathbb{R}^n$ при условии, что $x \in \widehat{X}$. Алгоритм ее решения будет основан на поиске вершин выпуклой оболочки $Conv\widehat{X}$ множества решений $\widehat{X}$, а не на решении задачи линейного программирования отдельно в каждом ортанте (как делалось, в основном, ранее). Основной мотивацией этого служит статья И. Рона [144], где был доказан ключевой результат, определяющий выпуклую оболочку множества решений.

Итак, распишем неравенство, определяющее множество решений $\widehat{X}$ линейной интервальной системы (3.23)

$$\|A\,x - b\|_\infty \leq \varepsilon \|x\|_1 + \delta. \tag{3.30}$$

Это неравенство эквивалентно n скалярным неравенствам

$$\begin{aligned} |a_1^T x - b_1| &\leq \varepsilon \|x\|_1 + \delta, \\ &\vdots \\ |a_n^T x - b_n| &\leq \varepsilon \|x\|_1 + \delta, \end{aligned} \tag{3.31}$$

где a_i — вектор из элементов i-й строки матрицы A. Вместо неравенств в (3.31) запишем равенства

$$|a_i^T x - b_i| = \varepsilon \|x\|_1 + \delta, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.32}$$

Обозначим множество векторов $s \in \mathbb{R}^n$ с компонентами, равными $s_i = \pm 1$, $S = \{s : \ |s_i| = 1, \ i = 1, ..., n\}$, т.е. S — это набор вершин "единичного" куба. Рассмотрим систему уравнений

$$(a_i^T x - b_i)\, s_i = \varepsilon \|x\|_1 + \delta, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.33}$$

при некотором $s \in S$.

Лемма 3.3 ([144]) *Пусть интервальная матрица*

$$\mathbf{A} = \{A + \Delta A : \ \|\Delta A\|_\infty \leq \varepsilon\} \tag{3.34}$$

является регулярной, т.е. все матрицы $A \in \mathbf{A}$ невырождены. Тогда система уравнений (3.33) имеет единственное решение $x_s \in \widehat{X}$ для любого фиксированного вектора $s \in S$, и

$$Conv\,\widehat{X} \;=\; Conv\,\{x_s : \ s \in S\}. \tag{3.35}$$

С целью упрощения дальнейших выкладок обозначим $\widehat{y} = A\,x - b$. Тогда множество решений $\widehat{X}$ интервальной системы преобразуется в

$$\widehat{Y} = \left\{\widehat{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\widehat{y}\|_\infty \leq \varepsilon \|A^{-1}(\widehat{y} + b)\|_1 + \delta\right\}. \tag{3.36}$$

После замены переменных равенства в (3.33) перепишутся в виде

$$\widehat{y}_i s_i = \varepsilon \|A^{-1}(\widehat{y} + b)\|_1 + \delta, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.37}$$

Здесь $s_i = \pm 1, \ \forall i$. Множество $\widehat{Y}$ есть линейный образ $\widehat{X}$, т.е. $\widehat{Y} = A\,\widehat{X} - b$. Заметим, что также $Conv\widehat{Y} = A\;Conv\widehat{X} - b$. Для любого $\varepsilon > 0$ преобразованное множество решений $\widehat{Y}$ частично лежит в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. пересечение $\widehat{Y}$ с каждым ортантом непусто. Из леммы 3.3 следует, что в каждом ортанте находится только одна вершина выпуклой оболочки $Conv\widehat{Y}$ преобразованного множества решений, и она является решением системы уравнений (3.37), в то время как вектор $s = (s_1, ..., s_n)^T = \operatorname{sign}\widehat{y}$ определяет выбор рассматриваемого ортанта. Количество различных векторов $s \in S$ есть 2^n и равно числу ортантов. Перебрав последовательно все различные вектора s из S, мы найдем все вершины выпуклой оболочки $Conv\widehat{Y}$.

Более того, поскольку правая часть в равенствах (3.37) одинакова, то они эквивалентны одному скалярному уравнению

$$\tau = \varphi(\tau), \tag{3.38}$$

где $\tau = \widehat{y}_i s_i$, $\widehat{y} = \tau / s_i = \tau s_i$ и $\varphi(\tau) = \varepsilon \|A^{-1}(\tau s + b)\|_1 + \delta$. Вектор s здесь фиксированный из S. Обозначим $G = A^{-1}$ и g_i — вектор из i-й строки матрицы G. Тогда

$$\varphi(\tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\tau g_i^T s + x_i^*| + \delta, \tag{3.39}$$

где $x^* = A^{-1}b$. Функция $\varphi(\tau)$ определена на положительной полуоси $\tau \geq 0$ и является выпуклой кусочно-линейной функцией от скалярного аргумента.

Лемма 3.4 *Пусть интервальная матрица*

$$\mathbf{A} = \{A + \Delta A : \ \|\Delta A\| \leq \varepsilon\}$$

регулярна. Тогда при любом фиксированном векторе $s \in S$ скалярное уравнение (3.38) имеет единственное решение на $(0, \infty)$.

Доказательство. Начальное значение $\varphi(0) = \varepsilon\|x^*\|_1 > 0$. Так как все матрицы из $\mathbf{A}$ невырождены, то $\varepsilon < \rho(A) = 1/\|A\|_{\infty,1}$. Значит, $\|A\|_{\infty,1} = \max\limits_{s\in S} \sum_{i=1}^n |g_i^T s| < 1/\varepsilon$, и тогда производная на бесконечности будет меньше 1, т.е.

$$\varphi'(\infty) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |g_i^T s| < 1. \tag{3.40}$$

Поскольку функция $\varphi(\tau)$ выпукла (по построению), то следовательно $\varphi'(\tau) < 1$ для всех $\tau \geq 0$, и уравнение (3.38) имеет единственное решение $\tau^* > 0$. Лемма доказана. □

Единственное решение τ^* уравнения (3.38) может быть легко получено итеративным способом, например, методом Ньютона. Рассмотрим $\tau_{k+1} = \varphi(\tau_k)$ и линеаризованное уравнение $\tau = \varphi(\tau_k) + \varphi'(\tau_k) \cdot (\tau - \tau_k)$. Отсюда

$$\tau_{k+1} = \left[\tau_k + \frac{\varphi(\tau_k) - \tau_k}{1 - \varphi'(\tau_k)}\right]_+, \tag{3.41}$$

где использовано обозначение $[\alpha]_+ = \max\{0, \alpha\}$. Этот метод быстро сходится к τ^* за конечное число шагов (не более, чем n) при любом начальном приближении $\tau_0 \geq 0$. Хорошим начальным приближением здесь всегда будет являться, к примеру, $\tau_0 = 0$. Сформулируем далее основной результат данного раздела.

Теорема 3.1 *Многогранник $Conv\widehat{X}$ имеет 2^n вершин. Каждая вершина x_s может быть найдена решением скалярного уравнения (3.38) при данном фиксированном $s \in S$, используя метод (3.41). Тогда $x_s = A^{-1}y(\tau) + x^*$, где $x^* = A^{-1}b$, $y(\tau) = \tau s$, и τ^* — решение уравнения (3.38).*

Доказательство следует из предыдущих выкладок. □

Подытожим кратко алгоритм получения k-й вершины выпуклой оболочки $Conv\widehat{X}$ множества решений $\widehat{X}$ исходной линейной интервальной системы (3.23).

Алгоритм получения вершины выпуклой оболочки $Conv\widehat{X}$:

- Выберем вектор $s = s^k$ (с компонентами ± 1), соответствующий k-му ортанту пространства $\mathbb{R}^n$;
- Для выбранного s^k найдем единственное решение τ^* скалярного уравнения $\tau = \varphi(\tau)$ на интервале $(0, \infty)$, используя, например, итеративную схему метода Ньютона (3.41) вместо решения задачи линейного программирования;
- Вычислим $y^* = \tau^* s^k$;
- Тогда $x_s^* = A^{-1}(y^* + b)$ будет k-й вершиной $Conv\widehat{X}$.

Чтобы найти все вершины $Conv\widehat{Y}$ необходимо применить этот алгоритм 2^n раз (каждый раз брав новый $s \in S$). Получив все 2^n вершин, мы окончательно находим оптимальные нижние и верхние интервальные границы множества решений $\widehat{X}$. В самом деле, если $X_s = \{x_s,\ s \in S\}$ — набор всех вершин $Conv\widehat{X}$, то для каждой компоненты ищем минимальное и максимальное значения

$$\underline{x}_i = \min_{x_s \in X_s}\{\, x_{s_i}\}, \qquad \overline{x}_i = \max_{x_s \in X_s}\{\, x_{s_i}\}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.42}$$

что окончательно дает оптимальное интервальное решение линейной интервальной системы $\mathbf{X}^* = ([\underline{x}_1, \overline{x}_1], ..., [\underline{x}_n, \overline{x}_n])^T$.

Пример 3.5 Для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

и $\varepsilon = \delta = 0.25$ множество решений $\widehat{X}$ ограничено и представляет собой невыпуклый многогранник, представленный на рисунке 3.12. Его линейный образ после преобразования $\widehat{y} = A\,x - b$ показан на рисунке 3.13. Все вершины выпуклой оболочки $Conv\widehat{Y}$ преобразованного множества решений $\widehat{Y}$ определяются выбором вектора $s = s^k$ $(k = 1, ..., 4)$

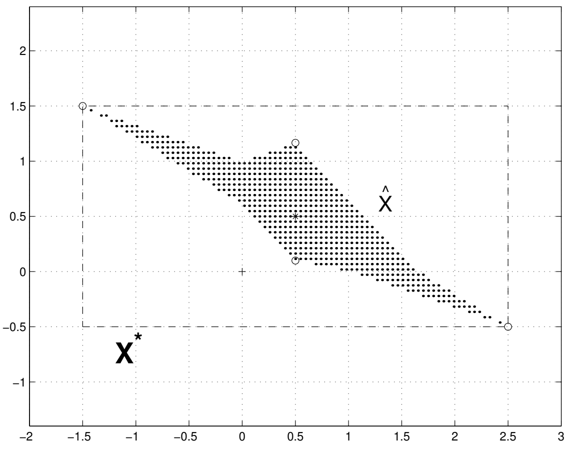

Рис. 3.12: Интервальная аппроксимация множества решений $\widehat{X}$.

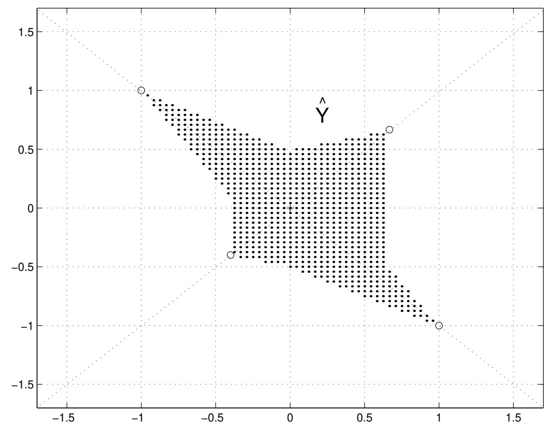

Рис. 3.13: Преобразованное множество решений $\widehat{Y}$.

с компонентами $s_i^k = \pm 1$ и значением τ^*, являющимся решением уравнения (3.38): $\widehat{y}^1 = (2/3, 2/3)^T$, $\widehat{y}^2 = (-1, 1)^T$, $\widehat{y}^3 = (1, -1)^T$ и $\widehat{y}^4 = (-0.4, -0.4)^T$. Обратным преобразованием $x = A^{-1}(\widehat{y} + b)$ находим вершины $Conv\widehat{X}$. И, используя (3.42), вычисляем искомый минимальный интервальный вектор $\mathbf{X}^* = ([-1.5, 2.5], [-0.5, 1.5])^T$, содержащий исходное множество решений $\widehat{X}$ (см. рисунок 3.12). □

3.4.5 Обобщения

Приведем некоторые обобщения предложенного метода получения оптимального интервального решения на случаи более общих предположений о неопределенности в системе.

Интервальная неопределенность общего типа:

Пусть дана линейная интервальная система $(A + \Delta A)\, x = b + \Delta b$ с ограничениями

$$|(\Delta A)_{ij}| \le \varepsilon_{ij}, \qquad |(\Delta b)_i| \le \delta_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.43}$$

Тогда (см. [131, 132]) множество решений $\widehat{X}$ будет в точности описываться не одним скалярным неравенством (3.26), а системой следующих неравенств

$$|\,(A\, x - b)_i| \le \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} |\, x_j| + \delta_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.44}$$

Повторяем далее все выкладки параграфа 3.4.4. Лемма 3.3 (см. [144]) тогда переформулируется в следующем виде: если интервальная матрица $\mathbf{A} = \{A + \Delta A : \ |(\Delta A)_{ij}| \le \varepsilon_{ij}\}$ регулярна, то система уравнений

$$(A\,x - b)_i\, s_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} |\, x_j| + \delta_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.45}$$

имеет единственное решение x_s для фиксированного вектора $s \in S$, которое дает вершину выпуклой оболочки $Conv\widehat{X}$. При этом, перебрав все различные s, получим все вершины для $Conv\widehat{X}$. После преобразования $\widehat{y} = A\,x - b$ поиск вершины x_s сведется к решению системы уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl} \widehat{y}_1\, s_1 & = & \Phi_1(\widehat{y}) \\ & \vdots & \\ \widehat{y}_n\, s_n & = & \Phi_n(\widehat{y}) \end{array}\right\} \tag{3.46}$$

с вектор-функцией $\Phi(\widehat{y}) = (\Phi_1(\widehat{y}), ..., \Phi_n(\widehat{y}))^T$, где $\widehat{y} \in \mathbb{R}^n$, а

$$\Phi_i(\widehat{y}) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} |\, (A^{-1}\widehat{y} + x^*)_j| + \delta_i. \tag{3.47}$$

Таким образом, для линейной интервальной системы (3.23) с неопределенностью, удовлетворяющей (3.43), выпуклая оболочка множества решений $Conv\widehat{X}$ также есть многогранник с 2^n вершинами. Каждая вершина x_s может быть найдена решением системы уравнений (3.46) для данного $s \in S$, а не скалярного уравнения, как в случае (3.38). Это решение может легко быть найдено численными методами. Тогда $x_s = A^{-1}\widehat{y}^* + x^*$, где $x^* = A^{-1}b$ и $\widehat{y}^*$ — решение системы (3.46).

Структурированная неопределенность:

В рамках интервального описания существуют и другие, более общие типы неопределенностей в описании системы линейных алгебраических уравнений. Структурированные матричные возмущения, ограниченные в различных нормах, были рассмотрены, например, в [138]. Дробно-линейное представление матричной неопределенности, был изучен в [86, 87], где авторы сводят поиск оптимального интервального решения к задаче “полуопределенного” программирования.

Семейство линейных интервальных систем со структурированной матричной неопределенностью

$$(A + B\Delta_A C)\, x = b + B\Delta_b \tag{3.48}$$

также можно решать, используя предложенный в параграфе 3.4 метод. Здесь Δ_A — прямоугольная матрица, значение которой ограниченно в ∞-норме: $\|\Delta_A\|_\infty \leq \varepsilon$ и $\|\Delta_b\|_\infty \leq \delta$, а B и C — некоторые известные матрицы весовых коэффициентов. Тогда описание множества решений дается формулой

$$\widehat{X} = x^* + A^{-1}\,\widehat{Y}, \tag{3.49}$$

$$\widehat{Y} = \left\{\widehat{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\widehat{y}\|_\infty \leq \varepsilon\|Cx^* + CA^{-1}B\widehat{y}\|_1 + \delta\right\}. \tag{3.50}$$

Таким образом, все полученные результаты остаются верными и для этого случая. В частности, теорема 3.1 и алгоритм получения оптимальной внешней интервальной оценки множества решений сохраняются, если матрица A^{-1} и вектор $x^* = A^{-1}b$ заменить соответственно на $CA^{-1}B$ и $CA^{-1}b$. Выбирая в (3.48) $B = \mathrm{diag}\{\beta_1, ..., \beta_n\}$, $C = \mathrm{diag}\{c_1, ..., c_n\}$, получаем $(B\Delta_A C)_{ij} = \beta_i c_j (\Delta_A)_{ij}$. Поэтому компоненты w_{ij} матрицы возмущений $W = B\Delta_A C$ стеснены взвешенными ограничениями

$$|w_{ij}| \leq \beta_i c_j \varepsilon, \tag{3.51}$$

которые называются в [144] возмущениями "первого ранга". Мы заключаем, таким образом, что модель (3.48) включает в себя матричную неопределенность "первого ранга".

Заметим вдобавок, что линейная интервальная система с так называемой дробно-линейным представлением матричной неопределенности [86, 87]

$$(A + B\Delta(I - H\Delta)^{-1}C)\; x = b \tag{3.52}$$

может решаться аналогичным образом. При этом матрицу A^{-1} в алгоритме нужно заменить на $H + CA^{-1}B$.

3.4.6 Приближенные интервальные решения

Как видим, вычисление оптимального интервального решения в общем случае сводится к перебору всех ортантов в $\mathbb{R}^n$ и является громоздким для систем большой размерности. В этих случаях представляют интерес простые и достаточно хорошие его внешние аппроксимации. Часто говорят о этих аппроксимациях также как об интервальных решениях интервальной системы уравнений. Ниже даются два таких интервальных решения.

В соответствии с неравенством $\|\widehat{y}\|_\infty \le \varepsilon\|A^{-1}(\widehat{y}+b)\|_1 + \delta$, определяющим множество $\widehat{Y}$, пишем

$$\|A^{-1}(\widehat{y}+b)\|_1 \le \|A^{-1}\widehat{y}\|_1 + \|x^*\|_1 \le \|A^{-1}\|_{\infty,1}\|\widehat{y}\|_\infty + \|x^*\|_1, \qquad (3.53)$$

где $x^* = A^{-1}b$. Тогда

$$\|\widehat{y}\|_\infty \le \gamma_1 = \frac{\varepsilon\|x^*\|_1 + \delta}{1 - \varepsilon\|A^{-1}\|_{\infty,1}}. \qquad (3.54)$$

Отсюда следует, что все вектора $\widehat{y} \in \widehat{Y}$ лежат внутри куба или шара в ∞-норме радиусом γ_1. Этот шар является первой интервальной оценкой. Во многих случаях (3.54) есть минимальный куб с центром в нуле, содержащий множество $\widehat{Y}$.

Основной недостаток оценки (3.54) заключается в наличии $(\infty, 1)$ матричной нормы. Ее вычисление — это снова NP-трудная задача. Существуют хорошие верхние границы приближения ее значения; мы воспользуемся самой простой из них: для любой матрицы G с элементами g_{ij}, $(i, j = 1, ..., n)$ значение $\|G\|_{\infty,1}$ всегда можно сверху приблизить 1-нормой

$$\|G\|_{\infty,1} = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Gx\|_1 = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j| \le \sum_{i,j=1}^{n} |g_{ij}| = \|G\|_1. \qquad (3.55)$$

Значит, неравенство (3.54) можно переписать

$$\|\widehat{y}\|_\infty \le \gamma_2 = \frac{\varepsilon\|x^*\|_1 + \delta}{1 - \varepsilon\|A^{-1}\|_1}, \qquad (3.56)$$

при условии, что $\varepsilon < 1/\|A^{-1}\|_1$, и мы получили вторую оценку для $\widehat{Y}$. Из интервальной аппроксимации для множества $\widehat{Y}$ легко получить интервальную аппроксимацию для $\widehat{X}$. Действительно, x есть линейная функция $\widehat{y}$: $x = x^* + A^{-1}\widehat{y}$, и задача покомпонентной минимизации x_i на кубе решается в явном виде. Таким образом, сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.2 *Интервальный вектор* $\mathbf{X} = ([\underline{x}_1, \overline{x}_1], ..., [\underline{x}_n, \overline{x}_n])^T$ *с компонентами*

$$\underline{x}_i = x_i^* - \gamma\|g_i\|_1, \quad \overline{x}_i = x_i^* + \gamma\|g_i\|_1, \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (3.57)$$

содержит внутри себя множество решений $\widehat{X}$. *Здесь* g_i *— вектор из* i*-й строки матрицы* $G = A^{-1}$, *а* γ *— правая часть неравенств (3.54) или (3.56).*

Доказательство очевидно следует из предыдущих рассуждений. □

Нахождение интервального решения $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{X}^* \supseteq \widehat{X}$, используя (3.57)–(3.56), не вызывает трудностей и не требует решений задач линейного программирования. Многие численные примеры показывают, что это решение оказывается близким к оптимальному.

Пример 3.6 Рассмотрим линейную систему $Hx = b$ с квадратной матрицей Гильберта. Напомним, что $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется матрицей Гильберта порядка n, если ее элементы равны $h_{ij} = 1/(i+j-1),\ \ i,j = 1,...,n$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Эта матрица является плохо обусловленной даже при небольших размерностях. Поэтому возникают трудности при нахождении решения линейных систем с такой матрицей из-за высокой чувствительности решений по отношению к ошибкам в исходных данных (см. [92]). По этой причине, линейные системы с матрицей Гильберта представляют собой хороший пример в контексте интервальной неопределенности.

Пусть $b = (1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots)^T$. Тогда $x^* = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots)^T$. Обратная матрица Гильберта T сильно зависит от размерности n и состоит из больших целых чисел; она генерируется процедурой `invhilb` в пакете `MATLAB`. Например, при $n = 5\quad T$ равно

$$T = H^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

Возьмем $\varepsilon = \delta = 10^{-7}$, что подразумевает точность в данных вплоть до миллионных долей. Применяя алгоритм подраздела 3.4.4, дающий оптимальное интервальное решение, получим

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} [0.99924758, & 1.00075299] \\ [-0.01403808, & 0.01402751] \\ [-0.06046547, & 0.06051100] \\ [-0.09139344, & 0.09132468] \\ [-0.04468784, & 0.04472149] \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

При этом, требуется нахождения решений всего 32 скалярных уравнений, каждое из которых вычисляется за одну итерацию в (3.41) при $\tau_0 = 0$. Более грубые интервальные оценки (3.56)–(3.57) и (3.54)–(3.57) совпадают (поскольку $\|T\|_{\infty,1} = \|T\|_1$) и дают

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0.99924053, & 1.00075946] \\ [-0.01405879, & 0.01415879] \\ [-0.06103135, & 0.06103135] \\ [-0.09217935, & 0.09217935] \\ [-0.04510605, & 0.04510605] \end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

Заключаем, что в этом случае простая интервальная оценка $\mathbf{X}$, вычисленная по формулам (3.56)–(3.57), дает очень точную аппроксимацию оптимального интервального решения $\mathbf{X}^*$. Это верно и для больших размерностей. К примеру, при $n = 10$, $\varepsilon = \delta = 10^{-14}$ имеем $\|T\|_1 \approx 4 \cdot 10^{-13}$, и оценка (3.56)–(3.57) является хорошим приближением оптимального интервального решения

$$\mathbf{X} = \big(1 + [-10^{-6}, 10^{-6}], \dots \\ \dots, [-0.402, 0.402], [-0.211, 0.211], [-0.046, 0.046]\big)^T.$$

Отметим, что при очень высокой точности в исходных данных ($\varepsilon = \delta = 10^{-14}$) точность получившегося интервального решения неудовлетворительна; это является численным подтверждением плохой обусловленности систем уравнений с матрицей Гильберта даже при небольших размерностях. □

3.5 Алгоритмы интервального параметрического оценивания

Рассмотрим линейную модель регрессии (3.20) с большим числом измерений

$$y = (C + \Delta_C)\, x + w, \tag{3.62}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ и $m \gg n$. Согласно этой модели, формируется некое множество X допустимых параметров x системы, совместимых с результатами измерениями. Пусть также априорно известен некий интервальный вектор $\mathbf{X}_0$, содержащий x. Обычно $\mathbf{X}_0$ выбирается достаточно большим, чтобы гарантированно включать в себя вектор параметров системы. Значит, x принадлежит их пересечению $X \bigcap \mathbf{X}_0$. Задачей параметрического оценивания называется нахождение по имеющимся данным оценки, аппроксимирующей пересечение $X \bigcap \mathbf{X}_0$. Представим здесь два схожих рекуррентных алгоритма, вычисляющих интервальные вектора, которые содержат внутри себя это пересечение.

Обозначим через c_i вектор, составленный из i-й строки номинальной матрицы C регрессоров системы. В первом алгоритме для простоты положим $m = Kn$, где $K > 0$ — целое число.

Алгоритм 1:

Пусть $k = 1$. Положим $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ в качестве начального интервального приближения.

• *Шаг 1*: Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений в модели (3.62), соответствующих регрессорам $c_{kn-n+1}, ..., c_{kn}$. Вычислить радиус невырожденности ρ_k для номинальной матрицы этой системы. Если $\varepsilon < \rho_k$, то найти ее интервальное решение $\mathbf{X}_k$, иначе $\mathbf{X}_k$ предполагается бесконечно большим.

• *Шаг 2*: Вычислить интервальный вектор $\widetilde{\mathbf{X}}$, содержащий пересечение $\mathbf{X} \bigcap \mathbf{X}_k$. Положим $\mathbf{X} = \widetilde{\mathbf{X}}$.

• *Шаг 3*: Если $k = K$, то алгоритм остановить, иначе положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 1. $\square$

Интервальное решение $\mathbf{X}_k$ на шаге 1 можно получать как оптимальное, используя алгоритм в параграфе 3.4.4. В случаях систем большой размерности ($n > 15$) можно воспользоваться любым достаточно хорошим интервальным приближением, в частности, предложенным в параграфе 3.4.6. Результирующий интервальный вектор $\mathbf{X}$ в алгоритме 1 содержит пересечение $\bigcap_{k=0}^{K} \mathbf{X}_k$ и дает удовлетворительную внешнюю интервальную аппроксимацию множества допустимых параметров X системы (см. далее пример 3.7). Основное достоинство алгоритма 1 — это сравнительно малое число вычислений. Он требует решения $K = m/n$ интервальных систем линейных уравнений.

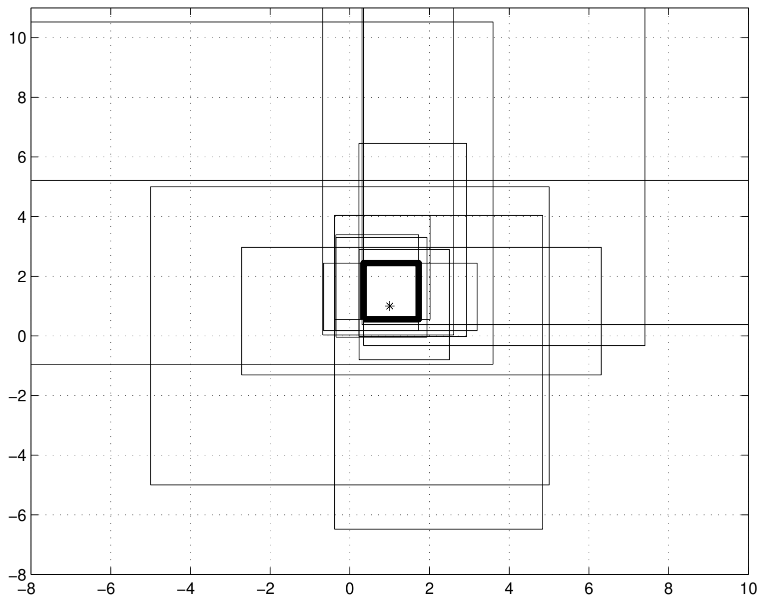

Рис. 3.14: Построение интервальных параметрических оценок.

Алгоритм 2:

Пусть $k = 1$. Положим $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ в качестве начального интервального приближения.

• *Шаг 1*: Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений в модели (3.62), соответствующих регрессорам $c_k, ..., c_{k+n-1}$. Вычислить радиус невырожденности ρ_k для номинальной матрицы этой системы. Если $\varepsilon < \rho_k$, то найти ее интервальное решение $\mathbf{X}_k$, иначе $\mathbf{X}_k$ предполагается бесконечно большим.

• Шаг 2: Вычислить интервальный вектор $\widetilde{\mathbf{X}}$, содержащий пересечение $\mathbf{X} \bigcap \mathbf{X}_k$. Положим $\mathbf{X} = \widetilde{\mathbf{X}}$.

• Шаг 3: Если $k = m-n+1$, то алгоритм остановить, иначе положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 1. □

Второй алгоритм требует решения $m - n + 1$ интервальных систем линейных уравнений вместо m/n для алгоритма 1. Однако он дает более точную внешнюю интервальную оценку.

Пример 3.7 Пусть $n = 2$, $m = 40$ и $x = (1, 1)^T$ есть точное значение вектора параметров системы, т.е. в системе два параметра и сорок измерений. Возьмем в качестве номинальной C матрицу размера $(m \times n)$ со строками c_i, $i = 1, ..., m$, которые являются случайной

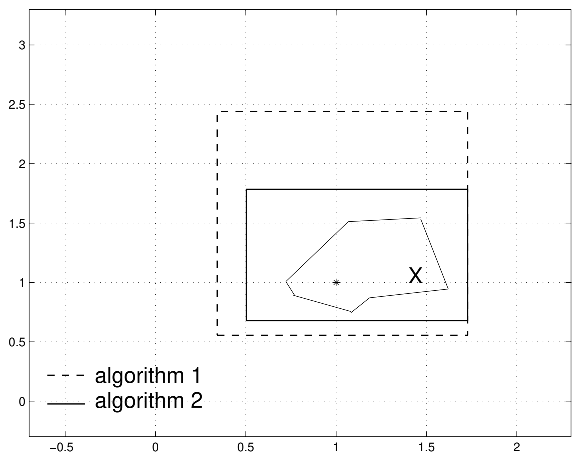

Рис. 3.15: Интервальные аппроксимации множества X допустимых параметров системы.

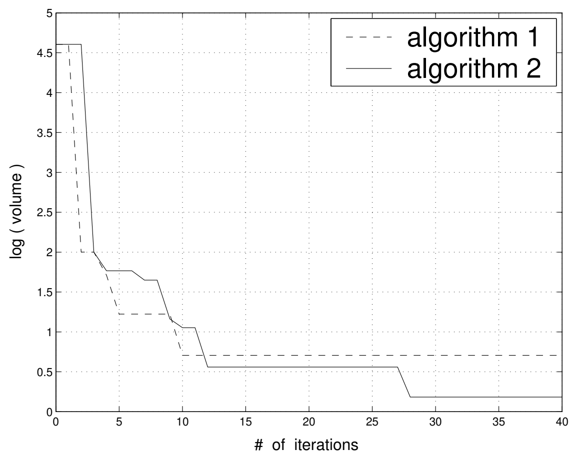

Рис. 3.16: Изменение объема интервальных аппроксимаций X с увеличением числа измерений.

выборкой равномерно распределенных на единичной сфере векторов. Интервальная неопределенность задается $\varepsilon = 0.2$ и $\delta = 0.5$. Тогда положим $\Delta C = 2\varepsilon(\texttt{rand(m,n)} - 0.5)$ и $w = 2\delta(\texttt{rand(m,1)} - 0.5)$. Пусть вектор измерений $y \in \mathbb{R}^n$ равен $y = (C + \Delta C)\,x + w$. Все эти измерения будут совместимы с исходной моделью (3.20)–(3.21) и данным вектором параметров x.

Рассмотрим обратную задачу, а именно, задачу параметрического оценивания, т.е. нахождения интервальной аппроксимации допустимого множества X параметров при данных измерениях y. Пусть начальная (априорная) интервальная аппроксимация равна $\mathbf{X}_0 = ([-5, 5], [-5, 5])^T$.
1) В алгоритме 1 мы рекуррентно перебираем $K = m/n = 20$ линейных интервальных систем. Искомая интервальная оценка строится как пересечение интервальных решений линейных интервальных систем, (см. рисунок 3.14). В итоге, алгоритм 1 дает $\mathbf{X} = ([0.34, 1.72], [0.56, 2.45])^T$ (пунктирная линия на рисунке 3.15).
2) Применяя алгоритм 2, нам нужно решить $m - n + 1 = 39$ линейных интервальных систем, что значительно больше $K = 20$. Однако он вычисляет более точную внешнюю интервальную аппроксимацию (невыпуклого) множества X (сплошная линия на рисунке 3.15). Заметим, что по мере увеличения количества измерений в системе уменьшение размера обоих интервальных аппроксимаций становится незначительным после резкого начального скачка, что подтверждается рисунком 3.16. Этот эффект характерен для задач параметрического оценивания. $\square$

3.6 Заключение

Во третьей главе предложен интервальный подход к решению задачи внешнего гарантированного оценивания фазовых состояний и параметров линейных дискретных систем при наличии мультипликативной матричной и аддитивной векторной неопределенностей интервального типа. В рамках оценивания фазовых состояний динамических систем, как и в главе 1, было рассмотрено две задачи, лежащих в основе построения оценок: интервальная аппроксимация суммы множеств и интервальная аппроксимация их пересечения. Обе эти задачи опираются на уже известные результаты и сводятся к стандартным в интервальном анализе операциям над интервальными векторами и матрицами.

Главной целью данной главы было рассмотрение проблемы оценивания параметров статической системы с интервальной неопределенностью и с большим числом выходов (измерений). Предложенный подход к ее решению базируется на идее разбиения исходной модели на определенное число квадратных интервальных систем линейных алгебраических уравнений, для которых разработан новый метод нахождения оптимального и простого приближенного интервального решения. Этот подход позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с большим количеством данных, и дает хорошие внешние интервальные оценки невыпуклых множеств допустимых параметров объекта. Он также может распространяться и на системы с интервальной неопределенностью более общего типа.

Выводы

Данная диссертационная работа посвящена вопросам гарантированного оценивания фазовых состояний и параметров линейных дискретных динамических систем при наличии неопределенности в описании модели. Это означает, что помимо аддитивных внешних возмущений, действующих на систему, и ошибок измерений в модели предполагается наличие мультипликативной матричной неопределенности вследствие обладания неполной информацией о структуре рассматриваемого объекта. Такая, более общая ситуация, представляется естественной во многих практических задачах. Однако области достижимости и информационные множества таких систем будут тогда иметь довольно сложный невыпуклый характер. Поэтому вопросы их аппроксимации и приближения сталкиваются с серьезными трудностями и мало изучены в литературе. Представленные здесь результаты развивают классическую эллипсоидальную и интервальную техники оценивания или фильтрации, которые являются наиболее распространенными и эффективными методами в рамках гарантированного подхода к описанию неопределенностей. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, диктующие выбор конкретного из них в определенных ситуациях.

В контексте задачи оценивания фазовых состояний динамических систем в условиях неопределенности сформулируем основные новые результаты, полученные автором и описанные в трех главах настоящей работы.

Первая глава рассматривает возможность применения метода эллипсоидов для оценивания фазовых состояний линейных динамических систем в дискретном времени при наличии матричной и аддитивной неопределенностей. Приводятся примеры, иллюстрирующие сложность и невыпуклость возникающих множеств достижимости. Для того, чтобы избежать трудностей, предполагалось, что вся неопределенность в системе характеризуется совместными эллипсоидальными ограничениями, что позволяет оставаться в рамках квадратичного описания неопределенных множеств в модели и применить для построения оценок некоторые результаты их теории квадратичных отображений. В этой связи, получены эффективные субоптимальные эллипсоидальные оценки вектора состояний динамической системы, поиск которых сводится к простой процедуре минимизации скалярной функции на конечном интервале. Описаны также возможные обобщения данного подхода на случаи неопределенностей более общего вида. Предложенный метод формирует основные блоки рекуррентного алгоритма оценивания, который является аналогом фильтра Калмана-Бьюси в стохастических моделях со случайными возмущениями.

Во второй главе изучены асимптотические свойства классических рекуррентных эллипсоидальных алгоритмов внешнего оценивания фазовых состояний для линейных дискретных и стационарных динамических систем без измерений. Исследованы на ограниченность и сходимость алгоритмы: рекуррентный локально оптимальный и оптимальный на конечном интервале времени, и рассмотрена возможность их использования для аппроксимации предельного множества достижимости устойчивой системы. Эти алгоритмы являются стандартными и наиболее распространенными для решения задач внешнего эллипсоидального оценивания областей достижимости. Показано, что предельное поведение аппроксимаций существенно зависит от выбора критерия оптимальности получаемых оценок. Так, для критерия следа доказана ограниченность, а в некоторых случаях — сходимость эллипсоидальных оценок при условии устойчивости системы, которые в асимптотике зачастую дают хорошие аппроксимации предельного множества достижимости. С другой стороны, для критерия детерминанта такой ограниченности не наблюдается. Кроме того, описан простой способ построения внешних эллипсоидальных оценок предельного множества достижимости для устойчивых систем, который сводит поиск минимального по критерию следа эллипсоида к задаче выпуклой одномерной оптимизации, легко решаемой численными методами.

Третья глава посвящена интервальному подходу к решению задачи внешнего гарантированного оценивания фазовых состояний и параметров линейных дискретных систем при наличии мультипликативной матричной и аддитивной векторной неопределенностей интервального типа. Задача оценивания фазовых состояний динамических систем здесь опирается на уже известные результаты и сводится к стандартным в интервальном анализе операциям над интервальными векторами и матрицами. Основной акцент в этой главе был сделан на проблему оценивания параметров статической системы с интервальной неопределенностью и с большим числом выходов (наблюдений). Эта задача является NP-сложной. Предложенный подход к ее решению базируется на идее разбиения исходной модели на определенное число квадратных интервальных систем линейных алгебраических уравнений, для которых разработан новый метод нахождения оптимального и простого приближенного интервального решения. Этот подход позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с большим количеством измерений, и дает хорошие внешние интервальные оценки невыпуклых множеств допустимых параметров объекта.

Все построенные алгоритмы легко реализуются на вычислительной технике и представляют интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения.

Литература

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* М.: Мир, 1987.

[2] Варайя П., Куржанский А.Б. О проблеме достижимости при постоянно действующих возмущениях. *ДАН*, 2000, т. 372, №4, с. 446–450.

[3] Граничин О.Н., Поляк Б.Т. *Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах.* М.: Наука, 2003.

[4] Гусев М.И. О структуре оптимальных минимаксных оценок в задачах гарантированного оценивания. *ДАН*, 1992, т. 322, № 5, с. 832–835.

[5] Гусев М.И. Оптимальность линейных алгоритмов в задачах гарантированного оценивания. *Изв. РАН. Техн. кибернетика*, 1994, № 3, с. 87–95.

[6] Давыдов А.А. Особенности границы достижимости в двумерных управляемых системах. *Успехи матем. наук*, 1982, т. 37, вып. 3, с. 183–184.

[7] Дигайлова И.А. Задача фильтрации со смешанной неопределенностью. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2001, № 5, с. 16–24.

[8] Калинин В.Н., Шикин Е.В. О построении эллипсоидов экстремального объема. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1987, № 4, с. 60–65.

[9] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* Новосибирск: Наука, 1986.

[10] Ким Ю.В., Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н. Сравнение стохастического и гарантированного подходов к оцениванию состояния динамических систем. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1992, № 2, с. 8–94.

[11] Кинев А.Н., Рокитянский Д.Я., Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальные оценки фазового состояния линейных систем с параметрическими возмущениями и неопределенной матрицей наблюдений. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2002, № 1, с. 5–13.

[12] Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию. *АиТ*, 1991, № 9, с. 133–144.

[13] Клепфиш Б.Р. Численное построение эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1983, № 4, с. 216–219.

[14] Клепфиш Б.Р., Овсеевич А.И. Асимптотика эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1984, № 2, с. 66–69.

[15] Комаров В.А. Локально-оптимальные оценки множеств достижимости нелинейных систем. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1985, № 3, с. 153–160.

[16] Корноушенко Е.К. Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы. *АиТ*, 1980–1983: I. 1980, №5, с. 12–22; II. 1980, №12, с. 10–17; III. 1982, № 10, с. 47–52; IV. 1983, № 3, с. 81–87.

[17] Костоусова Е.К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем. *АиТ*, 1997, № 3, с. 57–68.

[18] Костоусова Е.К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов. *Вычисл. технологии*, 1998, т. 3, № 2, с. 11–20.

[19] Костоусова Е.К., Куржанский А.Б. Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания. *Вычисл. технологии*, 1997, т. 2, № 1, с. 19–27.

[20] Кощеев А.С. Об оценивании состояния управляемых систем в условиях неопределенности. *Дифференц. уравн.*, 1977, т. XIII, № 12, с. 2168–2179.

[21] Кощеев А.С., Куржанский А.Б. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1983, № 2, с. 72–93.

[22] Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* М.: Наука, 1970.

[23] Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* М.: Наука, 1985.

[24] Кунцевич А.В. Анализ и синтез дискретных систем управления в условиях нестохастической неопределенности. *Кибернетика и системный анализ*, 1998, № 6, с. 50–56.

[25] Кунцевич В.М. Об одновременном построении гарантированных оценок векторов состояния и параметров дискретных систем управления при ограниченных возмущениях и помехах. *Кибернетика и вычисл. техника*, 1990, т. 87, с. 1–15.

[26] Куржанский А.Б. Об информационных множествах управляемых систем. *Дифференц. уравн.*, 1977, т. XIII, № 11, с. 1957–1965.

[27] Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука, 1977.

[28] Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок. *АиТ*, 1991, № 4, с. 3–26.

[29] Куржанский А.Б., Сивергина И.Ф. Метод гарантированных оценок и задачи регуляризации для эволюционных систем. *ЖВМ и МФ*, 1992, т. 32, с. 1720–1733.

[30] Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы. *Дифферренц. уравн.*, 1987, т. XXIII, № 8, с. 1303–1315.

[31] Куржанский А.Б., Фурасов В.Д. Идентификация нелинейных процессов — гарантированные оценки. *АиТ*, 1999, № 6, с. 70–87.

[32] Куржанский А.Б., Фурасов В.Д. Идентификация билинейных систем. Гарантированные псевдоэллипсоидальные оценки. *АиТ*, 2000, № 1, с. 41–53.

[33] Лотов А.В. О сходимости методов численной аппроксимации множеств достижимости для линейных дифференциальных систем с выпуклыми фазовыми ограничениями. *ЖВМ и МФ*, 1979, т. 19, № 1, с. 44–55.

[34] Лотов А.В. О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем. *ДАН*, 1980, т. 250, № 5, с. 1081–1083.

[35] Назин С.А. Предельное поведение эллипсоидальных оценок состояний линейных динамических систем. *АиТ*, 2001, № 4, с. 91–97.

[36] Назин С.А., Поляк Б.Т. Интервальная техника в задаче параметрического оценивания. *Доклады рабочего совещания "Интервальная математика и методы распространения ограничений"в рамках 5-ой международной конференции "Перспективы систем информатики"*, Новосибирск, Академгородок, Россия, 8–9 июля, 2003, с. 54–57.

[37] Овсеевич А.И. Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости. *Проблемы управления и теория информации*, 1983, т. 12, № 1, с. 43–54.

[38] Овсеевич А.И. Локальное асимптотическое поведение эллипсоидов, ограничивающих области достижимости. *АиТ*, 1994, № 12, с. 48–58.

[39] Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н. Аппроксимация пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1988, № 4, с. 182–189.

[40] Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н. Асимптотическое поведение эллипсоидальных оценок областей достижимости. I. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1992, № 1, с. 90-100.

[41] Овсеевич А.И., Трущенков В.Л., Черноусько Ф.Л. Уравнения непрерывного гарантированного оценивания состояния динамических систем. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1984, №4, с. 94–101.

[42] Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л. Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем. *ПММ*, 1982, т. 46, вып. 5, с. 737–744.

[43] Панасюк А.И. Уравнения областей достижимости и их применение в задачах оптимального управления. *АиТ*, 1982, №5, с. 67–78.

[44] Панасюк А.И. Уравнение множеств достижимости. *Сибирский матем. журнал*, 1984, т. 25, №4, с. 143–154.

[45] Подчукаев В.А. К задаче определения возможных состояний нестационарной линейной системы. *АиТ*, 1976, №7, с. 187–189.

[46] Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* М.: Наука, 1983.

[47] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. *Робастная устойчивость и управление.* М.: Наука, 2002.

[48] Покотило В.Г. О новом методе для квази-оптимальной аппроксимации пересечения эллипсоидов. *Препринт 90–13*, Институт кибернетики, Киев, 1990.

[49] Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г. О задачах наблюдения в дискретных системах. *ПММ*, 1981, т. 45, вып. 1, с. 3–10.

[50] Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г. Минимаксный подход к оцениванию параметров линейной регрессии. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1983, №2, с. 94–102.

[51] Решетняк Ю.Н. Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания. *ПММ*, 1989, т. 53, вып. 2, с. 249–254.

[52] Рокитянский Д.Я. Оптимальные эллипсоидальные оценки множества достижимости линейных систем с неопределенной матрицей. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 1997, №4, с. 17–20.

[53] Сивергина И.Ф. Об эволюционных уравнениях в задаче оценивания траекторий систем с априорными квадратичными ограничениями на неопределенные параметры. *АиТ*, 1985, №1, с. 84–94.

[54] Сиротин А.Н., Формальский А.М. Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2002, №4, с. 5–16.

[55] Трущенков В.Л. Численное моделирование задач гарантированной фильтрации с помощью эллипсоидов. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1987, № 6, с. 170–176.

[56] Формальский А.М. Об угловых точках границ областей достижимости. *ПММ*, 1983, т. 47, вып. 4, с. 566–574.

[57] Хонин В.А. Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов. *Эволюционные системы в задачах оценивания*, Свердловск: Уральский научный центр АН СССР, 1985.

[58] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

[59] Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1980, I. № 3, с. 3–11; II. № 4, с. 3–11; III. № 5, с. 5-11.

[60] Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемой системы. *ПММ*, 1981, т. 45, вып. 1, с. 11–19.

[61] Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* М.: Наука, 1988.

[62] Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей. *ПММ*, 1996, т. 60, вып. 6, с. 940–950.

[63] Черноусько Ф.Л., Янгин А.А. Аппроксимация множеств достижимости при помощи пересечений и объединений эллипсоидов. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1987, № 4, с. 145–152.

[64] Шарый С.П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем. *Вычисл. технологии*, 1998, т. 3, №2, с. 67–114.

[65] Шарый С.П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем. *Вычисл. технологии*, 1999, т. 4, № 4, с. 82–110.

[66] Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston: Birkhäuser, 1990.

[67] Bai E.W., Nagpal K.M., Tempo R. Bounded-error parameter estimation: noise models and recursive algorithms. *Automatica*, 1996, **32**, No. 7, pp. 985–999.

[68] Bai E.W., Ye Y., Tempo R. Bounded-error parameter estimation: a sequential analytic center approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, **44**, No. 6, pp. 1107–1117.

[69] Becis-Aubry Y., Boutayeb M., Darouach M. An ellipsoidal state estimation algorithm for nonlinear systems subject to bounded disturbances. *Proc. 2003 European Control Conference, ECC'2003*, Cambridge, UK, September 1–4, 2003.

[70] Belforte G., Bona B., Cerone V. Parameter estimation algorithms for a set-membership description of uncertainty. *Automatica*, 1990, **26**, No. 5, pp. 887–898.

[71] Ben-Tal A., Nemirovski A. *Lectures on modern convex optimization.* Philadelphia: MPS–SIAM Publ., 2001.

[72] Berti S. The solution of an interval equation. *Mathematica*, 1969, **11**, No. 2, pp. 189–194.

[73] Bertsekas D.P., Rhodes I.B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1971, **16**, No. 2, pp. 117–128.

[74] Bertsekas D.P., Rhodes I.B. Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1973, **18**, No. 2, pp. 117–124.

[75] Bland R.G., Goldfarb D., Todd M.J. The ellipsoid method: a survey. *Oper. Res.*, 1981, **29**, No. 6, pp. 1039–1051.

[76] Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan A.V. *Linear matrix inequalities in system and control theory.* Philadelphia: SIAM Publ., 1994.

[77] Cerone V. Feasible parameter set for linear models with bounded errors in all variables. *Automatica*, 1993, **29**, No. 6, pp. 1551–1555.

[78] Chernousko F.L. *State estimation for dynamic systems.* Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.

[79] Chernousko F.L., Ovseevich A.I. Properties of the optimal ellipsoids approximating the reachable sets of uncertain systems. *Journ. Optim. Theory and Appl.*, 2004, **120**, No. 2, pp. 223–246.

[80] Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya. Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations. *Journ. Optim. Theory and Appl.*, 2000, **104**, No. 1, pp. 1-19.

[81] Cheung M.-F., Yurkovich S., Passino K.M. An optimal volume ellipsoid algorithm for parameter set estimation. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1993, **38**, No. 8, pp. 1292–1296.

[82] Chisci L., Garulli A., Zappa G. Recursive state bounding by parallelotopes. *Automatica*, 1996, **32**, No. 7, pp. 1049–1055.

[83] Clement T., Gentil S. Reformulation of parameter identification with unknown-but-bounded errors. *Math. and Comput. in Simulation*, 1988, **30**, No. 3, pp. 257–270.

[84] Cope J.E., Rust B.W. Bounds on solutions of linear systems with inaccurate data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1979, **16**, No. 6, pp. 950–963.

[85] Durieu C., Walter E., Polyak B.T. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding. *Journ. Optim. Theory and Appl.*, 2001, **111**, No. 2, pp. 273–303.

[86] El Ghaoui L. Inversion error, condition number, and approximate inverses of uncertain matrices. *Linear Algebra and Its Appl.*, 2002, **343-344**, pp. 171–193.

[87] El Ghaoui L., Calafiore G. Robust filtering for discrete-time systems with bounded noise and parameter uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2001, **46**, No. 7, pp. 1084–1089.

[88] El Ghaoui L., Lebret H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journ. Matrix Anal. and Appl.*, 1997, **18**, No. 4, pp. 1035–1064.

[89] Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating reachable sets for two-dimensional linear discrete systems. *Journ. Optim. Theory and Appl.*, 1988, **56**, pp. 67–88.

[90] Fogel E. System identification via membership set constrains with energy constrained noise. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1979, **24**, No. 5, pp. 752–757.

[91] Fogel E., Huang Y. On the value of information in system identification – bounded noise case. *Automatica*, 1982, **18**, No. 2, pp. 229–238.

[92] Forsythe G.E., Moler C.B. *Computer solution of linear algebraic systems.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1967.

[93] Garulli A., Tesi A., Vicino A. (Eds). *Robustness in identification and control.* London: Springer, 1999.

[94] Glover J.D., Schweppe F.C. Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1971, **16**, No. 5, pp. 411–423.

[95] Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix computations.* Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press, 1996.

[96] Hansen E.R. Bounding the solution of interval linear equations. *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1992, **29**, No. 5, pp. 1493–1503.

[97] Higham N.J. *Accuracy and stability of numerical algorithms.* Philadelphia: SIAM Publ., 1996.

[98] Jansson C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems. *Linear Algebra and Its Appl.*, 1997, **251**, pp. 321–340.

[99] Jaulin L. Reliable minimax parameter estimation. *Reliable Computing*, 2001, **7**, No. 3, pp. 231–246.

[100] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. *Applied interval analysis.* London: Springer–Verlag, 2001.

[101] Jaulin L., Walter E. Guaranteed robust nonlinear minimax estimation. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2002, **47**, No. 11, pp. 1857–1864.

[102] Kahan W. Circumscribing an ellipsoid about an inter-section of two ellipsoids. *Can. Math. Bull.*, 1968, **2**, No. 3, pp. 437–441.

[103] Kieffer M., Jaulin L., Walter E. Guaranteed recursive non-linear state bounding using interval analysis. *Int. J. Adap. Control and Signal Proc.*, 2002, **16**, No. 3, pp. 193–218.

[104] Kreinovich V., Lakeev A.V., Noskov S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard). *Interval Comput.*, 1993, **1**, pp. 6–14.

[105] Kuntsevich A.V., Kuntsevich V.M. Linear adaptive control for nonstationary systems under bounded noise. *Syst. and Contr. Letters*, 1997, **31**, No. 1, pp. 37–40.

[106] Kuntzevich V.M., Lychak M. *Guaranteed estimates, adaptation and robustness in control systems.* Berlin: Springer–Verlag, 1992.

[107] Kuo C.J., Deller J.R. Jr., Lin C.Y., Tsai Y.C. Set-theoretic estimation based on a priori knowledge of the noise distribution. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2000, **48**, No. 7, pp. 2150–2156.

[108] Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Boston: Birkhäuser, 1997.

[109] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal technique for reachability analysis: internal approximation. *Syst. and Contr. Letters*, 2000, **41**, pp. 201–211.

[110] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Reachability under uncertainty. *SIAM J. Contr. and Optim.*, 2002, **41**, No. 1, pp. 181-216.

[111] Kurzhanski A.B., Veliov V.M. (Eds). *Modeling techniques for uncertain systems.* Boston: Birkhäuser, 1994.

[112] Lesecq S., Barraud A. Une approche factorisée plus numériquement stable pour l'estimation ensembliste ellipsoïdale. *Journal européen des systèmes automatisés*, 2002, **36**, No. 4, pp. 506-518.

[113] Lin J.N. Determination of reachable set for a linear discrete system. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1970, **15**, No. 3, pp. 339–342.

[114] Maksarov D.G., Norton J.P. State bounding with ellipsoidal set description of the uncertainty. *Int. J. of Control*, 1996, **65**, No. 5, pp. 847–866.

[115] Maksarov D.G., Norton J.P. Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations. *Int. J. Adap. Control and Signal Proc.*, 2002, **16**, No. 6, pp. 411–434.

[116] Matasov A.I. *Estimators for uncertain dynamic systems.* Boston: Kluwer, 1999.

[117] Milanese M., Belforte G. Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors: Linear families of models and estimators. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1982, **27**, No. 2, pp. 408–414.

[118] Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. (Eds). *Bounding approaches to system identification.* N.Y.: Plenum Press, 1996.

[119] Milanese M., Tempo R., Vicino A. (Eds). *Robustness in identification and control.* N.Y.: Plenum Press, 1989.

[120] Milanese M., Vicino A. Estimation theory for non-linear models and set-membership uncertainty. *Automatica*, 1991, **27**, No. 2, pp. 403–408.

[121] Milanese M., Vicino A. Optimal estimation for dynamic systems with set-membership uncertainty: an overview. *Automatica*, 1991, **27**, No. 6, pp. 997–1009.

[122] Moore R.E. *Methods and applications of interval analysis.* Philadelphia: SIAM Publ., 1979.

[123] Moore R.E. Parameter sets for bounded-error data. *Math. and Comput. in Simulation*, 1992, **34**, No. 2, pp. 113–119.

[124] Nazin S.A. Asymptotic properties of ellipsoidal state estimation for linear discrete-time dynamic systems. *Abstracts of 2nd Int. Conf. on Control Problems*, Moscow, Russia, June 17–19, 2003, **1**, p. 61.

[125] Nazin S.A., Polyak B.T. Limiting behavior of bounding ellipsoids for state estimation. *Proc. 5th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems, NOLCOS'2001*, St.-Petersburg, Russia, July 4–6, 2001, pp. 585–589; *Nonlinear Control Systems 2001*, A. Kurzhanskii, A. Fradkov (Eds), Elsevier Science, 2002, **2**, pp. 553–558.

[126] Nazin S.A., Polyak B.T. Interval parameter estimation under model uncertainty. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2004, (accepted).

[127] Neumaier A. *Interval methods for systems of equations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[128] Norton J.P. Identification and application of bounded parameter models. *Automatica*, 1987, **23**, No. 4, pp. 497–507.

[129] Norton J.P. (Ed.) Special issues on bounded-error estimation, 1, 2. *Int. J. Adap. Control and Signal Proc.*, 1994, **8**, No. 1, pp. 1–118; 1995, **9**, No. 1, pp. 1-132.

[130] Norton J.P., Veres S.M. Developments in parameter bounding. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **161**, L. Gerencser, P.E. Caines (Eds), Berlin: Springer–Verlag, 1991, pp. 137–158.

[131] Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1965, **2**, No. 1, pp. 115–118.

[132] Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numer. Math.*, 1964, **6**, pp. 405–409.

[133] Oettli W., Prager W., Wilkinson J.H. Admissible solutions of linear systems with not sharply defined coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1965, **2**, No. 2, pp. 291–299.

[134] Ovseevich A.I. Limit behavior of ellipsoids bounding attainable sets. *Journ. Optim. Theory and Appl.*, 1995, **85**, No. 2. pp. 393–407.

[135] Pecsvaradi T., Narendra K.S. Reachable sets for linear dynamic systems. *Information and Control*, 1971, **19**, No. 4, pp. 319–344.

[136] Piet-Lahanier H., Walter E. Bounded-error tracking of time varying parameters. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1994, **39**, No. 8, pp. 1661–1664.

[137] Polyak B.T. Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization. *Journ. Optim. Theory and Appl.*, 1998, **99**, No. 3, pp. 553–583.

[138] Polyak B.T. Robust linear algebra and robust aperiodicity. *Directions in Mathematical System Theory and Optimization*, A. Rantzer, C. Byrnes (Eds), Berlin: Springer, 2003, pp. 249–260.

[139] Polyak B.T., Nazin S.A. Interval solutions for interval algebraic equations. *Proc. 4th IMACS Symp. Math. Modelling*, Vienna, Austria, February 5–7, 2003, pp. 973–980; *Math. and Comput. in Simulation*, 2004, (in press).

[140] Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E. Ellipsoidal technique under model uncertainty. *Proc. 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, July 21–26, 2002, pp. 1090–1095.

[141] Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E. Guaranteed ellipsoidal state estimation for uncertain MIMO models. *Proc. 13th IFAC Symp. on System Identification*, Rotterdam, Netherlands, August 27–29, 2003, pp. 1054–1059.

[142] Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 2004, **40**, No. 7, (to appear).

[143] Pronzato L., Walter E. Minimum-volume ellipsoids containing compact sets: application to parameter bounding. *Automatica*, 1994, **30**, No. 11, pp. 1731–1739.

[144] Rohn J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra and Its Appl.*, 1989, **126**, pp. 39–78.

[145] Rohn J. Overestimations in bounding solutions of perturbed linear equations. *Linear Algebra and Its Appl.*, 1997, **262**, pp. 55–65.

[146] Rokityanskii D.Ya. Perturbed linear mapping. *Int. J. Computer and Systems Sciences*, 1997, **36**, No. 1, pp. 110–117.

[147] Rump S.M. INTLAB — INTerval LABoratory. *Handbook on Computer Algebra: Foundations, Applications, Systems*, J. Grabmeier, E. Kaltofen, V. Weispfennig (Eds), Heidelberg: Springer-Verlag, Germany, 2001.

[148] Rust B.W., Burrus W.R. *Mathematical programming and the numerical solution of linear equations*. N.Y.: Amer. Elsevier, 1972.

[149] Savkin A.V., Petersen I.R. Robust state estimation and model validation for discrete-time uncertain systems with a deterministic description of noise and uncertainty. *Automatica*, 1998, **34**, No. 2, pp. 271–274.

[150] Schlaepfer F.M., Schweppe F.C. Continuous-time state estimation under disturbances bounded by convex sets. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1972, **17**, No. 2, pp. 197–205.

[151] Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1968, **13**, No. 1, pp. 22–28.

[152] Schweppe F.C. *Uncertain dynamic systems.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1973.

[153] Shary S.P. On optimal solution of interval linear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, **32**, No. 2, pp. 610–630.

[154] Shary S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems. *Reliable Computing*, 1999, **5**, No. 3, pp. 323–335.

[155] Usoro P.B., Schweppe F.C., Wormley D.N., Gould L.A. Ellipsoidal set-theoretic control synthesis. *J. Dyn. Syst. Measur. Contr.*, 1982, **104**, pp. 331–336.

[156] Veres S.M., Norton J.P. Structure selection for bounded-parameter models: consistency conditions and selection criterion. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1991, **36**, No. 4, pp. 474–481.

[157] Vinter R.B. Characterization of the reachable set for non-linear control systems. *SIAM Journ. Contr. and Optim.*, 1980, **18**, No. 6, pp. 599–610.

[158] Walter E. (Ed.) Special issue on parameter identification with error bound. *Math. and Comput. in Simulation*, 1990, **32**, No. 5-6, pp. 447–607.

[159] Walter E., Piet-Lahanier H. Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded-error models. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1989, **34**, No. 8, pp. 911–915.

[160] Walter E., Pronzato L. *Identification of parametric models from experimental data.* London: Springer–Verlag, 1997.

[161] Witsenhausen H.S. A minimax control problem for sampled linear systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1968, **13**, No. 1, pp. 5–21.

[162] Witsenhausen H.S. Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1968, **13**, No. 5, pp. 556–558.