

**ПЕТРИКЕВИЧ ЯНА ИГОРЕВНА**

**СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ  
ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ИНТЕРВАЛЬНЫМ ИСХОДНЫМ  
ДАНЫМ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

**Научный руководитель:**  
доктор технических наук,  
профессор В. Я. Карташов

**КЕМЕРОВО 2006**

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Неопределённость в задаче идентификации динамических объектов .....</b>	<b>12</b>
§1.1. Задача идентификации динамических объектов и систем .....	12
§1.2. Точечные методы структурно-параметрической идентификации.....	30
1.2.1. Взаимно однозначное соответствие между непрерывной и дискретной моделями динамического объекта.....	31
1.2.2. Принцип вариации шага дискретизации и эквивалентность дискретных моделей.....	32
1.2.3. Точечные методы структурно-параметрической идентификации ...	36
1.2.4. Методика идентификации стохастических объектов.....	43
1.2.5. Структурно-параметрическая идентификация нелинейного объекта, описываемого интегральным звеном с отсечкой .....	45
§1.3. Основные задачи и их взаимосвязь .....	49
<b>Выводы .....</b>	<b>56</b>
<b>Глава 2. Интервальные методы структурно-параметрической идентификации .....</b>	<b>57</b>
§2.1. Интервальные методы структурно-параметрической идентификации	58
2.1.1. Интервальный метод Висковатова .....	58
2.1.2. Интервальный модифицированный метод Висковатова.....	63
2.1.3. Интервальные оценки параметров непрерывной передаточной функции по известной интервальной дискретной модели.....	67
2.1.4. Принцип вариации шага дискретизации и эквивалентность интервальных дискретных моделей .....	68

§2.2. Примеры применения и сравнение интервального метода Висковатова и интервального модифицированного метода Висковатова. Чувствительность методов .....	73
Пример 2.1. Восстановление дискретной модели апериодического объекта 1-го порядка и сравнение интервального метода Висковатова и интервального модифицированного метода Висковатова .....	73
Пример 2.2. Принцип вариации шага дискретизации и эквивалентность интервальных дискретных моделей апериодического объекта 1-го порядка .....	82
Пример 2.3 Чувствительность интервального модифицированного метода Висковатова (на примере апериодического объекта 1-го порядка) .....	84
Выводы .....	88
<b>Глава 3. Особенности восстановления интервальных дискретных моделей высоких порядков .....</b>	<b>89</b>
§3.1. Вычисление нулей и полюсов интервальной дискретной передаточной функции .....	90
3.3.1. Решение интервального квадратного уравнения с помощью интервального дискриминанта .....	90
3.3.2. Численные методы локализации корней интервальных полиномов .....	101
§3.2. Интервальное восстановление модели апериодического объекта 2-го порядка .....	104
Пример 3.1. Интервальная SP-идентификация апериодического объекта 2-го порядка .....	104
Пример 3.2. Сравнение граничных функций и интервального расширения динамической характеристики .....	120
Выводы .....	125

<b>Глава 4. Решение тестовых и прикладных задач .....</b>	<b>126</b>
§4.1. Модельные исследования некоторых линейных объектов.....	127
Пример 4.1. Устойчивый объект с одним нулем и одним полюсом.....	127
Пример 4.2. Объект 2-го порядка со свойством колебательности .....	134
Пример 4.3. Объект 2-го порядка с чисто мнимыми полюсами (консервативный колебательный объект).....	146
Пример 4.4. Неустойчивый объект 1-го порядка .....	149
§4.2. Решение прикладных задач.....	162
Пример 4.5. Моделирование процесса отжима крошки.....	162
Пример 4.4. Построение оптимального интервального дискретного управления .....	168
Выводы .....	181
<b>Заключение .....</b>	<b>182</b>
<b>Библиография .....</b>	<b>183</b>
<b>Приложения.....</b>	<b>195</b>
Приложение 1. Основные сведения об аппарате непрерывных дробей ....	196
Приложение 2. Структурно-параметрическая идентификация интегрального звена с отсечкой .....	203
Приложение 3. Классическая и комплексная интервальные арифметики.....	213
Приложение 4. Примеры вычисления нулей интервальной квадратичной функции.....	218

## Введение

При решении многих прикладных задач приходится сталкиваться с неопределенностью в исходных данных. Как правило, она вызвана ошибками измерений, округления, приближенным представлением и распределенным характером самого исследуемого процесса и т. д. Учёт таких неопределенностей всегда был важен в тех разделах научно-прикладных исследований, которые в качестве исходных данных используют измерения, и в настоящее время их учёт остается актуальным.

Задача идентификации динамических объектов, особенно в структурно-параметрической постановке, является одной из основных и наиболее сложных задач технической кибернетики, решение которой в значительной степени зависит от экспериментальных данных.

Основная доля исследований приходится на задачи параметрической идентификации уже известной структуры. Можно отметить основополагающие работы отечественных ученых Я. З. Цыпкина [101, 102]; А. Н. Тихонова [92, 93]; Н. С. Райбмана [75, 76, 77, 91]; И. И. Перельмана [69]; Л. А. Растригина [78]; А. М. Дейча [21], В.А. Каминскаса [34] и др., и зарубежных К. Острема [65]; Р. Калмана [32]; П. Эйкхоффа [111]; Д. Гропа [19]; Л. Льюнга [57, 58, 121], Т. Содерстрема [121, 132, 133] и многих других.

Проблемы непараметрической идентификации рассматривались в работах Н. С. Райбмана [75, 76, 77, 91]; Дж. Бокса и Г. Дженкинса [9]; Льюнга Л. [57, 58, 121] и многих других. В них задача непараметрической идентификации решается, в основном, с помощью методов параметрической идентификации путём перебора математических моделей из фиксированного их класса.

На протяжении долгого времени неопределенность, присущая исходным данным, описывалась с помощью задания статистических характеристик ошибок измерений. Однако, проверка таких предположений и учёт влияния неопределенностей исходных данных на конечные результаты оставались

невозможными из-за отсутствия данных о погрешностях и их распределениях. Усилия таких ученых, как С.А. Айвазян [1, 2], Дж. Бокс и Г. Дженкинс [9], М. Дж. Кендалл и А. Стьюарт [48], Дж. Тьюки [95] и др. ставили эту проблему в центр внимания, что нашло свое отражение в бурном развитии прикладной статистики, использующей новые характеристики статистических данных (например, размах выборки).

В то же время проблема неопределенности исходных данных обусловила развитие математических исследований, методов и алгоритмов, которые являются частью интервального анализа. Значительный вклад в развитие этого направления внесли отечественные ученые Ю.И. Шокин [27, 33, 108, 131], С.П. Шарый [104, 105, 106, 130], А.В. Лакеев [53, 118, 119, 120], А.П. Вощинин [14, 15, 16], В.М. Белов [5, 6, 7, 8], Б.С. Добронев [12, 23], А.С. Нариньяни [62] и такие зарубежные ученые, как Р. Мур [124, 125, 126, 127], Г. Алефельд, Ю. Херцбергер, Г. Майер [4, 113, 122, 123], А. Ноймайер [128, 129], В. Крейнович [114, 118, 119], Р.Б. Кирфотт [117], Е. Хансен [115], Э. Каухер [116], Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри и Э. Вальтер [25] и др. К настоящему времени исследован обширный ряд моделей, в которых получены фундаментальные результаты.

Таким образом, требования практики – с одной стороны, и достижения интервального анализа – с другой, сделали возможным рассмотрение многих задач с позиций интервального подхода, причем интенсивность таких исследований прикладного характера все возрастает.

Большинство работ, посвященных анализу, синтезу и исследованию систем управления с интервальной неопределенностью [27, 29, 73, 85, 86, 97, 98, 99, 107, 134 и др.], основываются на представлении системы в терминах пространства состояний. В таких работах, как [6, 7, 8, 16, 64] авторы развивают методы анализа интервальных систем, среди которых можно упомянуть известный метод «центра неопределенности» (метод последовательных интервальных приближений).

В предлагаемой работе методы интервального анализа применяются к решению задачи структурно-параметрической идентификации линейных либо допускающих линеаризацию динамических объектов. В качестве развиваемого метода решения указанной задачи используется подход, основанный на применении теории непрерывных дробей. В качестве исходных данных используются представленные интервалами измерения, осуществляемые в дискретные равноотстоящие моменты времени, что обуславливает их дальнейшее использование в цифровых системах управления и мониторинга.

Исходный точечный метод структурно-параметрической идентификации с применением непрерывных дробей, использующий в качестве основной модели динамического объекта дискретные передаточные функции, был разработан и исследован в работах В.Я. Карташова [35, 37, 38, 39, 40, 41, 47], С.Г. Щекочихиной [109, 110], О.Н. Инденко [31, 40, 41], М.А. Новосельцевой [47, 63]. Математической теории непрерывных (цепных) дробей и ее приложениям посвящены работы таких ученых, как У. Джоунс и В. Трон [22], В. Я. Скоробогатько [84], А.Я. Хинчин [96], А. Н. Хованский [100] и др.

Работа выполнялась в соответствии с основным направлением научных исследований КемГУ «Разработка и внедрение специального математического обеспечения для автоматизированных систем управления, научно-исследовательских комплексов и локальных информационных систем и геоинформатика» (Единый заказ-наряд, инф. карта 03.2.00302213'', Постановление Учёного Совета КемГУ от 24.11.04 г.) и по плану Региональной научно-технической программы «Сибирь».

**Целью диссертационной работы** является разработка и исследование способов структурно-параметрической идентификации динамических систем по интервальным исходным данным для повышения достоверности оценки динамических характеристик объекта управления и мониторинга.

Особенностью работы является попытка учёта нескольких видов неопределённости – незнания структуры модели объекта, произвольности выбора шага дискретизации, неопределённости в исходных данных. Поэтому **идея работы** состоит в том, что дискретные измерения сигналов на входе и выходе объекта целесообразно представлять в виде интервалов, которые являются исходной информацией для восстановления структуры модели в виде дискретной передаточной функции и конечно-разностного уравнения. Идентификация модели производится путём использования теории непрерывных дробей. Привлечение методов интервального анализа дает возможность получить интервальные оценки параметров модели объекта, причем их ширина определяется как точностью исходных интервальных измерений, так и используемым шагом дискретизации.

#### **Задачи работы:**

1. Провести обзор подходов к проблеме восстановления структуры и оценивания параметров модели линейного (линеаризованного) динамического объекта.
2. Разработать способ структурно-параметрической идентификации линейного динамического объекта по интервальным измерениям входного и выходного сигналов объекта в дискретные моменты времени.
3. Исследовать влияние изменения шага дискретизации на структуру математической модели объекта и интервальные оценки параметров.
4. Исследовать эквивалентность дискретных моделей при изменении шага дискретизации с учётом интервальной неопределенности в исходных данных.

#### **Научные положения, защищаемые в работе:**

1. Интервальные оценки параметров не изменяют структуру модели и покрывают область значений точечных значений параметров. В этом смысле они являются аналогом эффективных оценок.

2. Восстановление объекта по интервальным исходным данным возможно при условии, что шаг дискретизации превосходит некоторое значение, обеспечивающее различимость полюсов и нулей дискретной передаточной функции объекта. Детализация выбора шага дискретизации определяется требованием достаточной суженности интервальных параметров модели.

3. Способ интервального расширения, сформулированный для согласованного  $Z$ -преобразования, обеспечивает соответствие между дискретной и непрерывной передаточными функциями.

4. Принцип эквивалентности дискретных моделей справедлив при условии различимости полюсов и нулей дискретной передаточной функции.

#### **Научная новизна:**

1. Предложен способ структурно-параметрической идентификации линейного динамического объекта по интервальным исходным данным, основанный на применении теории непрерывных дробей и интервального анализа.

2. Получено условие наибольшей суженности интервальной модели (условие оптимизации) и соответствующее правило выбора шага дискретизации.

3. Показано, что вложенность интервальных полюсов и нулей является критерием эквивалентности дискретных передаточных функций, полученных при различных значениях шага дискретизации.

4. Сформулированы условия различимости полюсов интервальной дискретной передаточной функции объекта второго порядка на основе способа вычисления корней интервального квадратного уравнения с учётом перемещения определяющей точки при изменении шага дискретизации.

#### **Методы исследования.**

В диссертационной работе используются методы теории автоматического управления, теории функций комплексного переменного, системного анализа,

интервального анализа, теории вероятностей и математической статистики, вычислительной математики и численного анализа, вычислительного моделирования на ЭВМ.

**Практическая ценность** работы заключается в том, что предложенные способы структурно-параметрической идентификации

- могут использоваться для автоматизации лабораторных исследований и анализов;
- применимы для диагностики состояния технических и технологических систем и процессов и для построения управления, в том числе оптимального по какому-либо критерию;
- позволяют расширить область применения методов идентификации на социальные, экономические, экологические и др. процессы и системы.
- рассчитаны на возможность применения измерительной аппаратуры различных классов точности.

**Обоснованность и достоверность научных положений и выводов**

- обеспечивается применением строгих математических методов моделирования;
- вытекает из использования фундаментальных условий и критериев соответствия моделей;
- подтверждается сопоставлением результатов тестовых и модельных исследований диссертационной работы с результатами, встречающимися в литературе;
- доказана прикладными исследованиями, согласующимися с реальными данными, и отвечающими требованиям практики.

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав и заключения. Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность выбранной темы, определены цель, задачи, объект и методы исследования,

научная новизна и практическая значимость работы, указаны положения, выносимые на защиту.

В первой главе проводится анализ постановок задачи идентификации с позиций наличия неопределённостей, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи; определены основные типы моделей, используемых при построении дискретных моделей линейных динамических объектов; введен в рассмотрение метод решения задачи структурно-параметрической идентификации, основанный на применении непрерывных дробей.

Во второй главе предлагаются интервальные варианты методов структурно-параметрической идентификации с использованием непрерывных дробей, учитывающие наличие неопределенности в исходных данных; по результатам восстановления модели тестового объекта низшего порядка производится сравнение методов.

В третьей главе производится дальнейшее развитие интервальных методов структурно-параметрической идентификации; рассматривается вопрос о восстановлении моделей объектов более высоких порядков; предлагается способ решения интервального уравнения и исследуются условия различимости его корней.

В четвертой главе представлены результаты модельных исследований на основе предлагаемого подхода; на примере конкретного технологического процесса решается задача идентификации; предлагается способ построения интервального оптимального дискретного управления.

В заключении изложены основные теоретические и практические выводы настоящего исследования.

Общий объем диссертации составляет 225 страниц; в работе содержится 21 таблица, 37 рисунков. Список литературы включает 134 наименования; приложения изложены на 30 страницах.

Основные результаты работы опубликованы в [43-46, 70-72].

## **Глава 1. Неопределённость в задаче идентификации динамических объектов**

В данной главе проводится анализ постановок задачи идентификации и определяются те виды неопределённостей, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи. Изложение носит обзорный характер. Решению этой задачи посвящено большое число публикаций, посвященных различным объектам, методам и алгоритмам идентификации. Поэтому обзор основан на представлении процесса решения задачи в виде обобщенной схемы, иллюстрирующей возникающие неопределённости и пути их устранения или уменьшения. Именно такой подход позволит сформулировать задачи диссертационной работы и выделить возможный подход к их решению.

### **§1.1. Задача идентификации динамических объектов и систем**

В задачах управления, диагностики и многих других важную роль играют математические (формализованные) зависимости, отражающие причинно-следственную взаимосвязь между входными воздействиями на объект и его выходными переменными (реакцией или откликом). Именно наличие такой модели объекта делает процесс проектирования и функционирования систем мониторинга и управления качественным и эффективным в плане достижения цели.

Следует отметить, что задача определения характеристик (идентификации) объекта была выделена в кибернетике в типовую задачу. Так, в [55] сформулированы основные задачи управления по пяти основным направлениям. Автор работы [55] с учётом важности и сложности решения задач расположил задачу идентификации на четвертом месте, после нее по сложности и актуальности идет только задача адаптивного управления. В то

время первоначальная постановка задачи формулировалась следующим образом (см. рис. 1.1):

Дано: 1) Статистические характеристики случайных внешних воздействий  $w$  и  $v$ ; 2) Физическое соотношение между  $z$  и  $x$ ,  $u$ ; 3) измеряются  $z$  и  $u$ .

Задача: Определить наилучшую в некотором смысле оценку характеристики объекта (математическое описание соотношения между  $x$  и  $w$ ,  $u$ ).

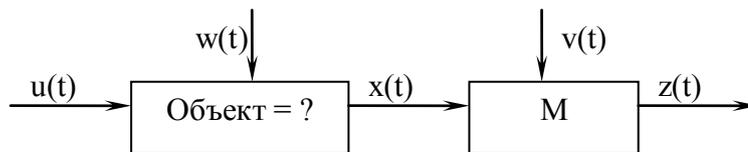


Рис. 1.1. Схема объекта идентификации

Обращает на себя внимание тот факт, что в данной формулировке очень много неопределённости. Смысловой аспект приведенной формулировки вроде бы понятен, но в то же время совершенно не раскрыты понятийные и познавательные особенности, методические и методологические основы этой задачи. Разобраться во всех формулировках задачи идентификации практически невозможно, поскольку каждый автор представляет свою трактовку этой задачи. Приведем лишь некоторые из них.

В известной работе [9] Дж. Бокс и Г. Дженкинс предлагают следующие этапы итеративного подхода к построению моделей:

- из взаимодействия теории и практики для достижения поставленной цели выбирается полезный класс моделей;
- для непосредственной подгонки к [экспериментальным] данным развиваются грубые методы идентификации подклассов этих моделей;
- пробная модель подгоняется к данным; оцениваются ее параметры (как правило, используются итеративные методы оценивания параметров);

– диагностические проверки позволяют выявить возможные дефекты подгонки и диагностировать их причины.

Если обнаружено несоответствие, итеративные методы идентификации, оценок и диагностической проверки повторяются до тех пор, пока не будет найдено подходящее представление модели.

В известной монографии [101] Я. З. Цыпкин определяет, что идентификация динамических объектов в общем случае состоит в определении их структуры и параметров по наблюдаемым данным – входному воздействию и выходной величине. Для решения этой задачи необходимо: 1) очертить класс объектов; 2) выбрать настраиваемую модель; 3) выбрать критерий качества идентификации – средние потери, которые бы характеризовали различие между выходными величинами объекта и настраиваемой модели; 4) сформировать алгоритм идентификации, который, используя доступные для наблюдения значения вход-выходных величин, изменял бы параметры настраиваемой модели так, чтобы средние потери с ростом [момента времени]  $n$  достигали минимума.

В более современных изданиях (например [94]) авторы под «идентификацией объектов» понимают определение на основе записей входных и выходных сигналов модели (внутри определяемого класса моделей), эквивалентной объекту при определенных тестовых воздействиях.

В данной работе не ставится цель детального анализа всех понятий идентификации и ее особенностей. Это может служить темой специального исследования в предположении, что идентификация возможна. Как справедливо отмечают авторы [94], для построения модели объекта используется вся имеющаяся информация об объекте. Воспользуемся схемой [94] использования информации в процессе идентификации, представленной на рис. 1.2., с целью выделения тех видов неопределённостей, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи.

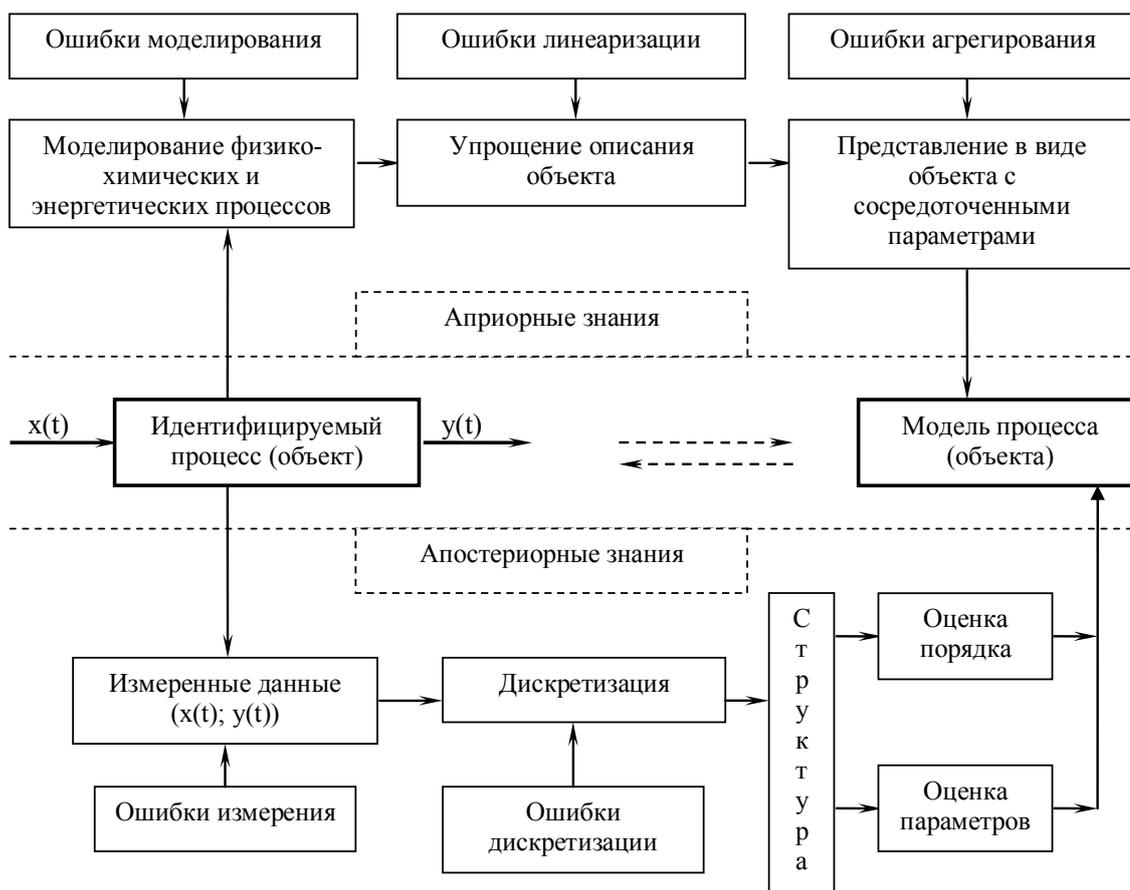


Рис. 1.2. Этапы процесса идентификации

Априорные знания основаны на возможности построения математических моделей с позиций системного анализа. На первых этапах это – представление объекта моделями «чёрного ящика», состава и структуры. Модель «чёрного ящика» позволяет выделить с позиций субъекта [68] существенные воздействия окружающей среды и выходные переменные, характеризующие состояние объекта. Внутреннюю неоднородность объекта представляют моделью состава, определяя его элементы и подсистемы, а также моделью структуры, указывая связи между элементами. Уже на данном этапе возникает источник неопределённости.

В дополнение к трудностям построения указанных системных моделей, зависящих от субъективных факторов, значительную роль начинает играть использование субъектом типовых описаний элементов и подсистем. В качестве таких типовых описаний можно указать модель идеального

вытеснения, модель идеального перемешивания, ячеечная модель, диффузионные модели 1-го и 2-го рода, стехеометрические уравнения химических и биохимических реакций, уравнения Кирхгофа и т.д. и т.п. [26]. Понятно, что использование тех или иных описаний для конкретного процесса осуществляется с точностью до констант. Для их определения нужны дополнительные мероприятия (лабораторные исследования, эксперименты на пилотных установках, информация из других источников и т.п.), которые вместе с пополнением информации об объекте усугубляют положение априорных исследований в связи с привносимой неопределённостью типовых моделей, упрощений, дополнений. В результате получают, фактически, столь сложное описание объекта в динамике, что использовать его для решения и применения в задачах управления представляется невозможным в режиме off-line либо в режиме on-line.

Далее начинается следующий этап – этап упрощения, который во многих источниках называют этапом линеаризации [79, 80, 94]. На данном этапе используются различные приемы: разложение зависимостей в ряд Тейлора с последующим использованием только его линейной части; имитационного моделирования и подбора более простой зависимости; полное игнорирование некоторых зависимостей и т. п. Все это приводит к появлению новых неопределённостей, неточностей.

Как правило, аналитическое моделирование приводит к математическим моделям распределенного типа. Например, к дифференциальным уравнениям в частных производных, в которых кроме времени присутствуют пространственные координаты. Если моделируемый процесс не является многостадийным, когда каждая стадия имеет управляющие воздействия, то информация вдоль пространственной переменной не является, как правило, используемой в системах управления. В подобных случаях переходят к этапу агрегирования [94], т. е. к представлению в сосредоточенной форме. Так появляется еще одна разновидность привносимой субъектом неопределённости.

В сосредоточенном описании для отражения распределенного характера процесса вводится время запаздывания для входного воздействия. Как правило, это время считается постоянной величиной и называется чистым (или транспортным) запаздыванием. На практике в системах управления зачастую возникают непреодолимые трудности с определением и использованием переменного времени запаздывания.

В результате всех проведенных априорных исследований или их части субъект со значительной степенью неопределённости делает вывод о классе используемых моделей функционирования моделей. Из вышесказанного следует, что такой выбор будет скорее ошибочным, чем правдоподобным. Конечно, если такое исследование все-таки является правдоподобным, то это существенно облегчает решение задачи идентификации. В то же время, как указывается в [79, 90, 94], чаще всего, особенно для сложных технологических процессов (химических, металлургических, тепловых) математические зависимости бывают вообще неизвестны, либо очень сложны, чтобы можно было их применять в системах управления.

В такой ситуации приходится проводить апостериорные исследования (рис. 1.2). Прежде чем перейти к системному анализу методов апостериорного анализа, следует ответить на следующие важные с методологической точки зрения вопросы:

- для каких целей строятся математические модели объектов, функционирующих в динамических режимах;
- какая роль отводится полученным моделям;
- на каких средствах будут реализованы полученные математические зависимости.

В любом динамическом объекте с течением времени происходят изменения. Эти изменения определяются свойствами объекта, которые отражаются в его переходных характеристиках, то есть реакциях объекта на некоторое входное воздействие. Таким образом, динамические режимы, и как

частный случай – переходные характеристики, отражают поведение объекта в сложившейся ситуации на основе причинно-следственной концепции системного анализа.

Можно констатировать, что существует вполне определенный класс моделей поведенческого характера. Целью создания таких моделей является отражение поведения объекта при внешних и внутренних изменениях условий их функционирования. Таким образом, модель такого вида (в дальнейшем будем называть ее функциональной) может быть использована для хранения динамических свойств объекта в компактной форме (как форма обратимого сжатия существенных свойств объекта), для имитации и генерации реакций объекта на различные внешние воздействия, для прогнозирования и возможного восстановления поведения объекта в предшествующие и будущие временные промежутки. Все это обусловило широкое применение таких моделей в системах управления (выбор целенаправленных воздействий), в системах диагностики (как эталон предыдущих свойств объекта), в системах мониторинга (как средства оценки и прогнозирования возникающих ситуаций) и т.д.

В данной работе рассматриваются только непрерывные и непрерывно-периодические объекты и системы технического, технологического характера.

Второй особенностью работы является тот факт, что указанные системы реализуются в основном на средствах цифровой техники. Именно современный уровень ее развития в плане объема хранимой информации, скорости ее обработки, отсутствие тренда ее характеристик и функциональная гибкость обусловили максимальные возможности использования ее в различных областях человеческой деятельности. В то же время существенной или принципиальной особенностью является дискретный характер обработки информации цифровой техникой. Таким образом, возникают вопросы о взаимодействии непрерывной и дискретной систем. В связи с этим в работе [67] отмечается, что описание с помощью дифференциальных уравнений является

естественным следствием использования известных законов природы при математическом моделировании объектов управления. С другой стороны, современная практика создания систем управления характеризуется тенденцией перехода к универсальным процедурам хранения и обработки информации с помощью ЭВМ. В качестве выхода из сложившейся противоречивой ситуации, как отмечается в [67], можно выбрать два пути:

а) ввести обработку с помощью дискретной техники, используя вместо найденных непрерывных законов их дискретную аппроксимацию по той или иной схеме численного интегрирования;

б) выработать дискретные законы управления, заменив исходное непрерывное описание дискретным.

Однако существуют осложняющие обстоятельства, связанные с использованием ЭВМ:

- на объект можно оказывать воздействие только в течение некоторых интервалов времени его работы;
- измерения могут производиться только в фиксированные моменты времени.

С учётом этого в данной работе предпочтение отдается второму пути математического моделирования непрерывного объекта управления. Возникает вопрос: какую роль при этом играет непрерывный случай? В [67], например, утверждается, что при таких обстоятельствах непрерывные законы управления вообще неприменимы.

В качестве входных воздействий при идентификации динамических процессов для дискретных моделей используются либо типовые воздействия (ступенчатые, импульсные), либо произвольного вида воздействия, вплоть до случайных последовательностей, в том числе и типа «белого шума». В данной работе за основу приняты указанные типовые воздействия.

Таким образом, в фиксированные моменты времени осуществляются измерения вход-выходных переменных. После получения данных возникают следующие возможные задачи идентификации.

1. Даны точные значения вход-выходных переменных  $(x(t), y(t))$ . Необходимо определить дискретную модель в форме разностного уравнения, в форме дискретной передаточной функции (ДПФ), модели в терминах пространства состояний, которые бы наилучшим в некотором смысле образом аппроксимировали свойства и динамические характеристики исходного непрерывного объекта.

При решении такой задачи возможны следующие варианты:

1А) Дополнительно известна структура модели –  $\text{str } F^M$ ; в данном случае требуется восстановить значения неизвестных параметров модели. В качестве неопределённостей в этой задаче выступают два фактора: 1) роль детерминированной процедуры – выбор периода дискретизации; 2) наличие неизвестных значений параметров модели.

1Б) Неизвестна  $\text{str } F^M$ , то есть в этом случае к двум ранее указанным типам неопределённостей добавляется еще один – неопределённость структуры.

В случае 1А задачу идентификации естественно называть задачей параметрической идентификации, тогда как задачу 1Б наиболее часто называют задачей непараметрической идентификации, или задачей структурной и параметрической идентификации. [89, 94].

Второй тип задач идентификации, который получил наибольшее распространение в теории и практике – это задачи следующего содержания.

2А) (вариант задачи параметрической идентификации): измеренные вход-выходные переменные  $x(t)$  и  $y(t)$  содержат некоторую погрешность измерения. Требуется определить модель динамического объекта при условии, что известна  $\text{str } F^M$ . Здесь, по сравнению с задачей 1А, добавляется еще один из типов неопределённостей – информационно неизвестная погрешность измерения.

2Б) (вариант задачи непараметрической идентификации): и здесь по сравнению с задачей 1Б добавляется четвертый тип неопределённостей – погрешность измерения.

Далее, прежде чем перейти к обсуждению способов решения указанных задач, необходимо сформулировать некоторые замечания о наиболее часто используемых предположениях относительно объекта управления.

Как правило, предполагается, что объект является линейным или допускающим линеаризацию. То есть рассматриваемый объект удовлетворяет принципу суперпозиции: если выходная величина объекта  $y(t)$  – это результат преобразования  $F^M$  входного воздействия  $x(t)$ , то есть  $y(t) = F^M(x(t))$ , то выполняются условия 1)  $F^M(ax(t)) = ay(t)$ ,  $a$  – некоторая вещественная константа; 2)  $F^M(x_1(t) + x_2(t)) = y_1(t) + y_2(t)$ . Факт линейности или нелинейности объекта может быть установлен либо экспериментальным путём, либо по уравнениям, описывающим процессы преобразования материальных, энергетических и информационных потоков (например, из известных физических законов в дифференциальной форме) [79]. Более того, изначально считается, что объект в динамическом отношении является устойчивым, т. е. если на входе действует ступенчатое воздействие, то объект выходит на установившийся (статический) режим. Такие объекты называются объектами с самовыравниванием. Иногда предполагаются дополнительные особенности, например, наличие транспортного запаздывания, неминимально-фазовости и др. Очевидно, что без каких-либо исходных предположений решить задачу практически невозможно, но при этом следует иметь в виду, что эти предположения должны быть каким-либо образом проверяемы, в противном случае это – дополнительный источник неопределённости.

Рассмотрим основные формы представления непрерывных и дискретных математических моделей непрерывных линейных динамических объектов с

сосредоточенными параметрами, которые нашли широкое распространение в научных исследованиях многих авторов [30, 50, 58, 87 и др].

Первоначальной формой непрерывной модели объекта, рассматриваемого стационарным на некотором временном интервале, является линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида:

$$b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 y(t) = a_m x^{(m)}(t) + \dots + a_0 x(t), \quad (1.1)$$

в котором  $x(t)$ ,  $y(t)$  – переменные, характеризующие изменения входного и выходного воздействия, причем из условия физической реализуемости следует, что  $m \leq n$ . В задачах управления как правило считается, что до момента  $t_0 = 0$  объект находится в состоянии покоя:  $x(t) = 0$ ;  $y(t) = 0$ .

Если в (1.1) вместо непрерывного времени перейти к рассмотрению функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , определенных только в равноотстоящих точках  $t_k = k\Delta t$ , где  $k$  – любое целое число, а  $\Delta t$  – период или шаг дискретизации, то в рассмотрение вводится дискретная математическая модель в форме линейного неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами [30]:

$$\hat{b}_n y[k] + \hat{b}_{n-1} y[k-1] + \dots + \hat{b}_0 y[k-n] = \hat{a}_m x[k] + \hat{a}_{m-1} x[k-1] + \dots + \hat{a}_0 x[k-m], \quad (1.2)$$

где  $y[k-i] = y((k-i)\Delta t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $x[k-j] = x((k-j)\Delta t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

При математическом моделировании систем управления, а также других систем, для которых определены модели состава [61], часто от поэлементного описания переходят к математической модели всей системы путём исключения промежуточных (внутренних) переменных. В подобных случаях широкое применение нашло взаимно однозначное интегральное преобразование Лапласа (или одностороннее преобразование Лапласа) [28, 59]. Применение преобразования Лапласа к (1.1) с учётом его свойств и нулевых начальных условий приводит к широко используемой в кибернетике форме непрерывной математической модели линейного объекта – передаточной функции объекта:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}, \quad m \leq n \quad (1.3)$$

Использование ЭВМ в процессе изучения, моделирования, управления системой предполагает наличие дискретной информации о значениях входных и выходных переменных, получаемой, как правило, через равные промежутки времени  $\Delta t$ . Поэтому модели, получаемые при решении практических задач, являются дискретными, зависящими от периода дискретизации  $\Delta t$ . Для дискретных по времени математических моделей разработан дискретный аналог преобразования Лапласа – аппарат Z-преобразования и его модификаций (обобщений), который позволяет ввести в рассмотрение дискретную передаточную функцию [49, 50, 66, 83, 87, 102]:

$$G(z) = \frac{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_m z^{-m}}{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \dots + \hat{b}_n z^{-n}}, \quad m \leq n \quad (1.4)$$

где  $z$  – переменная Z-преобразования.

Трактуя  $z^{-1}$  как оператор обратного сдвига:  $z^{-1} f(k\Delta t) = f((k-1)\Delta t)$  (при нулевых начальных условиях), осуществляется переход от дискретной передаточной функции к модели динамической характеристики в виде разностного уравнения с использованием предыдущих отсчетов.

Для моделирования непрерывного изменения выходной переменной линейного непрерывного объекта при его возмущенном движении при произвольном входном воздействии  $x(t)$  часто используется математическая модель в форме интеграла свертки (интеграла Дюамеля) [18, 19, 74]. Такая форма непрерывной математической модели получила широкое применение в связи с интенсивным решением задач управления в терминах пространства состояний [18, 88].

Существуют и другие формы представления, такие как, например, модели, описанные в терминах пространства состояний (внутренние модели), модели в частотном представлении и др., но в данной работе они не будут рассматриваться.

Теперь при рассмотрении задач идентификации типа 1А остановимся подробнее на одном из работоспособных подходах решения.

Пусть известна дискретная передаточная функция объекта вида (1.4) с неизвестными коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, b_0 = 1$ . Для простоты положим  $m = n$ .

Пусть на вход объекта подается импульсное воздействие вида

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} h, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases}$$

Тогда передаточная функция  $G(z)$  совпадает с представлением реакции объекта в форме весовой функции в операторном представлении. На выходе получены измеренные значения выходной переменной  $y(k\Delta t)$  в моменты  $t_k = t_{k-1} + \Delta t, i = 1, 2, \dots, \Delta t$  – фиксированный период дискретизации. Для этих значений можно записать Z-преобразование

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k\Delta t)z^{-k} \quad (1.5)$$

Тогда из соотношения  $G(z) = X(z)$  следует равенство

$$a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n} = (1 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + \dots), \quad (1.6)$$

где  $y_k = y(k\Delta t)$ .

Отсюда получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов дискретной передаточной функции. Естественно, предполагается существование решения системы  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ , которое полностью определяет математическую модель динамического процесса.

При этом возникает ряд неопределённостей, проверка истинности которых представляет достаточно сложную проблему. Во-первых, неизвестно, каким образом удастся записать истинную структуру модели  $\text{str } G(z)$ , влияет ли на нее вид входного воздействия и как это влияние учитывается в данной ситуации (известно, что непрерывная передаточная функция инвариантна относительно вида входного воздействия, что не выполняется в дискретном случае); непонятно, что происходит при изменении шага дискретизации. Во-вторых,

нельзя обойти стороной вопрос о решении системы – о его существовании, единственности и т. п.

Имеющаяся информация о данном подходе не позволяет сформулировать практически приемлемые утверждения и требуются дополнительные исследования. Но в то же время общая концепция такого подхода заслуживает внимания, так как она аналогична нахождению дробно-рациональных аппроксимаций Паде, которые в последнее время получили широкое распространение при решении практических задач [13].

В других методах наиболее часто применяется модель в форме разностного уравнения. Все типы неопределённостей в таком случае еще более усугубляются. Как указывается в [94], особенно острой является неединственность модели в виде разностного уравнения. Но все-таки основной неопределённостью остается незнание  $\text{str } F^M$ , так как в процессе эксплуатации динамических объектов могут произойти любые изменения их свойств, и каким образом их выявить – остается проблемой.

Поэтому более актуальным остается направление непараметрической идентификации. Дадим краткую характеристику методов решения задач типа 1Б. Для решения подобных задач используются методы, основанные на экспериментальном определении временных, частотных характеристик стационарных линейных динамических объектов [89]. На практике свойствами линейности и стационарности обладает незначительное количество объектов, поэтому применимость таких подходов ограничена. А с учётом того, что такое решение задачи связано со значительным объемом экспериментальных работ, эти способы мало пригодны для идентификации в реальном времени.

Сущность этих подходов состоит в следующем. Для частотного подхода определяются частотные характеристики динамического объекта. Эти характеристики получают путём проведения серии экспериментов: на вход объекта подают различные воздействия в форме гармонического (синусоидального) сигнала. После нанесения воздействия исследуется

установившийся режим изменения выходной переменной. По результатам экспериментальных исследований строится амплитудно-частотная и фазо-частотные характеристики объекта, которые позволяют восстановить математическую модель объекта.

Недостатками такого подхода является значительная продолжительность экспериментов. А к вышеуказанным неопределённостям добавляется выбор сетки частот, определяющей множество возбуждающих входных воздействий.

Примерно в таком же направлении осуществляется непараметрическая идентификация для определения временных характеристик. Для выбора математической модели в различных формах представления создавались целые альбомы таких частотных или временных характеристик, которые позволяли с учётом сходства с экспериментальными характеристиками объекта осуществлять приблизительный выбор структуры модели. После этого этапа решалась задача параметрической идентификации.

Задачи 2А и 2Б отличаются от предыдущих тем, что в апостериорных исследованиях добавляются погрешности измерений. Относительно этих погрешностей конкретной информации нет, они никак не идентифицируются, и в то же время их наличие приводит к очень важному выводу. Задача определения математической модели сводится к задаче аппроксимации в сглаживающей постановке, а поэтому все методы решения подобных задач практически пригодны для задачи идентификации.

Так как природа погрешности отдельно для конкретного объекта не исследуется, то удобно объявлять ее случайной, а следовательно, использовать для ее статистического описания аппарат теории вероятностей.

Таким образом, задача параметрической идентификации 2А опирается на известные в математической статистике методы: метод наименьших квадратов (МНК и его многочисленные модификации), метод максимального правдоподобия (ММП). Для характеристики этого направления воспользуемся предположениями этих методов. Так в классическом варианте предполагается,

что модель динамического объекта известна с точностью до значений неизвестных параметров:  $y^M(t) = F^M(x(t), \vec{a})$ , где  $\vec{a}$  – вектор параметров. Далее принимается модель наблюдения  $y^n(t_i) = y^M(t) + \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i$  – случайная величина, нормально распределенная с параметрами  $M(\varepsilon_i) = 0$  и  $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$  для любого из измерений, осуществляемых через равные промежутки времени.

Обоснованность нормального распределения опирается на центральную предельную теорему и фактически проверке не подвергается. Более того, соотношение  $M(\varepsilon_i) = 0$  означает, что не допускаются систематические погрешности. Это очень сильное предположение. Задача проверки наличия систематической погрешности измерения, как правило, является достаточно сложной и при решении практических задач встречается очень часто.

Наконец, предполагается, что ошибки  $\varepsilon_i$  являются независимыми случайными величинами. Практическое установление этого факта является также непреодолимым препятствием в определенности всех условий задачи. Многие исследователи пытались рассмотреть эту проблему, например, заменой классического предположения о «белизне» шума  $\varepsilon_i$  на автокоррелированную погрешность.

Для определения наилучших оценок неизвестных параметров необходимо задать меру близости математической модели к полученным экспериментальным данным. Так в МНК таким критерием является функция квадратов ошибок, минимальное значение которой и определяет оценки параметров. Итак, существует множество методов решения подобных задач, например, метод наименьших модулей, обобщенный МНК, взвешанный МНК, рекуррентный МНК и т. п. Так же как существует и множество различных алгоритмов решения подобных задач: от аналитических и численных методов до поисковых методов. Однако при этом основная проблема сохраняется – как ослабить или полностью уйти от тех неопределённостей, которые здесь встречаются: вид модели, модель случайной погрешности, роль шага

дискретизации, независимость и т.д. Все очерченные выше вопросы в такой же степени относятся и к ММП и его многочисленным модификациям.

Обсуждаемые методы легли в основу методов оценивания коэффициентов авторегрессионных моделей при идентификации линейных динамических объектов [9]. В соответствии с рассмотренными видами неопределённостей в задаче идентификации, сформулируем основные предположения подобных моделей:

- объект является устойчивым, управляемым, наблюдаемым, стационарным и линейным, определенного порядка;
- используется линейная по параметрам модель, вектор истинных значений параметров существует и единственен;
- на входе динамического объекта постоянно действует возбуждающий сигнал  $u(t)$ , некоррелированный с шумом на выходе системы, которая предполагается разомкнутой;
- шум (входной и выходной) – стационарные случайные сигналы с нулевым математическим ожиданием, некоррелированные между собой.

Очевидно, что такое количество видов неопределённостей не может оставить без внимания и поиск путей их устранения. Из многочисленных попыток в этом направлении приведем работу [81]. В ней предлагается принципиально новый подход к оцениванию неизвестных величин на основе экспериментальных данных. Сущность подхода, по утверждению автора [81], состоит в том, что в вычислительном отношении задача оценивания сводится к решению не переопределенной (как это делается во всех известных методах), а недоопределенной системы уравнений и пополнения последней еще одним уравнением, составленным с учётом априорной информации о вероятностно-статистических характеристиках ошибок измерения. Предлагаемый в [81] подход позволяет устранить все логические противоречия, имеющие место в исходных подходах к формулировке и решению подобной задачи, и

синтезировать как многие известные, так и принципиально новые методы ее решения.

В задачах непараметрической идентификации 2Б все вышеуказанные предположения сохраняются, а для определения структуры математической модели используются два подхода:

- на начальном этапе фиксируется класс структур моделей, а далее используется итерационный процесс решения параметрической идентификации до тех пор, пока критерий близости модели к экспериментальным данным не примет минимальное значение, в противном случае изменяется порядок модели [9, 101];
- применяются специально развитые и модифицированные методы определения порядка [94]: методы определения порядка на основе применения функций потерь; по некоррелированным остаткам, на основе наблюдений за поведением матрицы моментов, по анализу диаграмм нулей и полюсов дискретной передаточной функции.

Однако, как отмечается в [94], все эти подходы являются весьма приближенными, а их неточность определяется уже рассмотренными ранее предпосылками.

Итак, можно указать основные виды неопределённостей, характерные для задач идентификации:

- считается заданой структура математической модели с точностью до параметров, либо задан класс моделей;
- велико число различных предпосылок: устойчивость, стационарность, нормальное распределение, независимость и т. п.;
- непонятна роль процесса дискретизации в задачах идентификации;
- не определено понятие близости модели экспериментальным данным, не выявлено установление адекватности и эквивалентности дискретных моделей.

Естественно, рассматриваемая проблема еще более многогранна и сложна, но в данном разделе лишь кратко были освещены основные проблемные вопросы.

## **§1.2. Точечные методы структурно-параметрической идентификации**

В данном параграфе рассматривается подход к решению задачи структурно-параметрической идентификации, основанный на аппроксимации дискретной модели объекта непрерывными дробями. Первые исследования в этом направлении были проведены в [31, 35, 37, 38, 40, 41, 47, 109, 110]. В этих работах для разрабатываемой группы методов используется название «методы SP-идентификации», введенное впервые автором работы [37] для того, чтобы выделить данный подход из множества существующих, а также для удобства обозначения. Под «SP-идентификацией» понимается процесс решения задачи структурно-параметрической идентификации на основе предлагаемых в указанных источниках и в настоящем исследовании методов, использующий непрерывные дроби для восстановления модели объекта.

Указанный подход состоит из следующих взаимосвязанных этапов:

1) непрерывный объект, порождающий дискретные измерения вход-выходных переменных, предполагается линейным; в этом случае его модель в форме передаточной функции полностью определяется конечным числом параметров полиномов числителя и знаменателя. Таким образом, первый этап связан с установлением взаимно однозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями;

2) второй этап определяет условия эквивалентности дискретных моделей путём использования принципа вариации шага дискретизации;

3) третий этап связан с разработкой алгоритмов восстановления дискретной передаточной функции на основе теории непрерывных дробей.

### 1.2.1. Взаимно однозначное соответствие между непрерывной и дискретной моделями динамического объекта.

Нелинейность перехода от непрерывной модели объекта к дискретной посредством  $Z$ -преобразования обусловила многочисленные попытки его приближенного представления. Широкое применение в теории и на практике цифровых систем управления нашли методы перехода от непрерывного к дискретному представлению с помощью прямых и обратных разностей Эйлера, билинейного преобразования и их многочисленных модификаций (например, метод подстановки Тастина [88] и прочие). Сравнение этих методов и установление взаимно однозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями объекта было произведено в работах [37, 40, 41, 109, 110]. Как отмечает автор работы [110], перечисленные классические методы перехода к дискретному представлению достаточно эффективны при малых шагах дискретизации, в противном случае их применение ведет к потере точности и становится проблематичным. Так, например, в [110] показано, что применение обратных разностей Эйлера в НПФ с  $n$  полюсами возникает  $n$  дополнительных нулей.

Детальное исследование свойств согласованного  $Z$ -преобразования

$$z = e^{s\Delta t} \quad (1.7),$$

проведенное в работах [31, 35, 37, 40, 41, 110] с целью изучения возможностей его дальнейшего применения как способа перехода от непрерывной модели динамического объекта к дискретной модели, и наоборот, показало, что использование согласованного  $Z$ -преобразования (1.7) обеспечивает необходимое взаимно однозначное соответствие областей устойчивости линейных динамических объектов - полуплоскости  $s < 0$  и внутренности единичного круга  $|z| < 1$  и удовлетворяет всем требованиям дискретного моделирования.

Обратный переход от дискретной модели к непрерывной осуществляется с помощью многозначного обратного  $Z$ -преобразования:

$$s = \text{Ln } z = \frac{1}{\Delta t} \ln|z| + \frac{i}{\Delta t} \arg z, \quad (1.8)$$

для которого одним и тем же значениям  $z$  соответствует бесконечное множество значений  $s$  в областях однолиственности. Взаимно однозначное соответствие между  $z$ - и  $s$ -плоскостями обеспечивается представлением многозначного преобразования как однозначного, определенного на римановой поверхности, которая представляет собой бесконечное число  $z$ -плоскостей или «листов», соответствующих ветвям многозначного преобразования, соединенных между собой вдоль «разрезов» по отрицательной части действительной оси  $Ox$  (рис. 1.3).

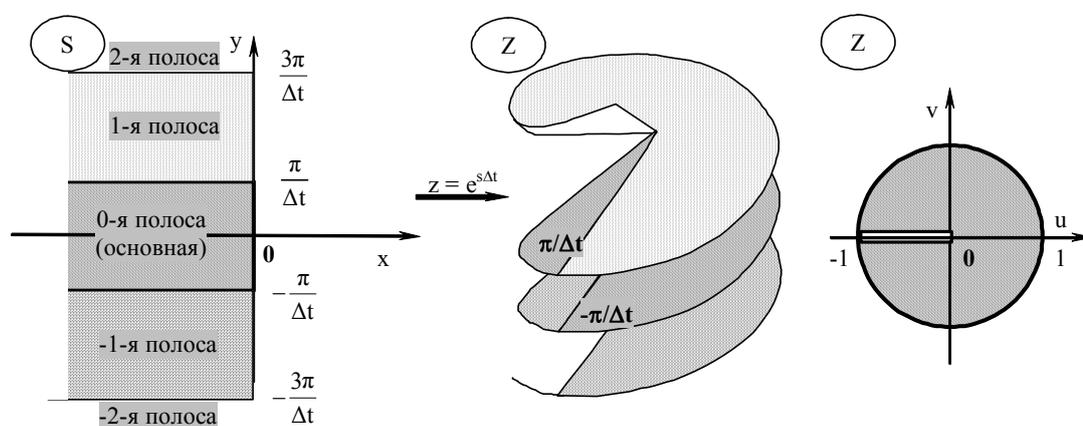


Рис. 1.3. Взаимно однозначное соответствие между  $s$ - и  $z$ -плоскостями

В связи с этими результатами далее в работе согласованное  $Z$ -преобразование является основным способом перехода от непрерывной модели к дискретной и обратно.

### 1.2.2. Принцип вариации шага дискретизации и эквивалентность дискретных моделей

Кратко изложим известные результаты исследований, связанных с влиянием вариации шага дискретизации на точность восстановления моделей по точечным измерениям [35, 40, 41, 110].

Известный метод SP-идентификации динамического объекта, метод В. Висковатова [35, 40, 41], предполагает ограничения на величину шага дискретизации.

С одной стороны, шаг дискретизации  $\Delta t$  не должен быть больше величины  $\Delta t_{\max}$ , определяющей нахождение всех полюсов и нулей непрерывной передаточной функции объекта в основной полосе  $s$ -плоскости  $\left\{s: -\frac{\pi}{\Delta t_{\max}} < \text{Im } s < \frac{\pi}{\Delta t_{\max}}\right\}$ . Такое ограничение сверху составляет основу SP-идентификации и подробно рассмотрено в [110].

С другой стороны, шаг дискретизации не должен быть слишком малым, так как в этом случае количество измерений переходной характеристики велико, значения выходной переменной близки по величине, поэтому увеличивается погрешность численных расчетов. Более того, в соответствии с модифицированным методом В.Висковатова наблюдается подмена на начальном этапе динамического процесса действительной модели объекта на приближенную модель меньшего порядка [35]. Это связано с тем, что в начальный период переходного процесса невыражены особенности объекта, а учёт массива всех измерений переходного процесса достаточно велик и приводит к значительному объему вычислений. Уменьшение периода дискретизации для каждой конкретной задачи идентификации может быть также ограничено техническими возможностями регистрирующей аппаратуры, в частности при использовании ЭВМ – техническими возможностями аналого-цифрового преобразователя, числом опрашиваемых датчиков и т. п.

Таким образом, существует такой шаг дискретизации  $\Delta t_{\min}$ , зависящий от структурных свойств объекта, при котором выбор шага дискретизации  $\Delta t < \Delta t_{\min}$  не позволяет решать задачу структурно-параметрической идентификации методами, основанными на применении непрерывных дробей [37, 110]. Итак, на множестве допустимых шагов дискретизации  $(0, \Delta t_{\max})$  существует непустое множество  $(\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , зависящее от структурных

свойств объекта и позволяющее при изменении  $\Delta t$  в его пределах восстановить структуру передаточной функции непрерывного объекта.

Принцип вариации шага дискретизации связан с установлением достаточных условий взаимно однозначности НПФ и ДПФ и порождает отношение эквивалентности дискретных моделей.

По полученной ДПФ, характеризующей фиксированный период дискретизации  $\Delta t_1 > \Delta t_{\min}$ , в общем случае определяем все действительные и пары комплексно-сопряженных полюсов и нулей, расположенных на нулевом листе римановой поверхности. Далее речь будет идти только о полюсах, однако все сказанное относится также и к нулям дискретной и непрерывной передаточных функций.

При уменьшении  $\Delta t$  образы полюсов в  $z$ -плоскости изменяют свое местоположение в соответствии с соотношениями [37, 110]:

$$|z_1| = |\bar{z}_1| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1; \quad \arg z_1 = -\arg \bar{z}_1 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0,$$

откуда следует, что полюса  $z_1$  и  $\bar{z}_1$  стремятся к точке  $(1, 0)$  (рис. 1.4). Если же НПФ объекта имеет действительные полюса, то при  $\Delta t \rightarrow 0$  они стремятся к точке  $(1, 0)$  по оси  $Ou$  (рис. 1.4). При приближении к этой точке теряются все индивидуальные характеристики объекта (апериодичность, инерционность, колебательность и т. д.).

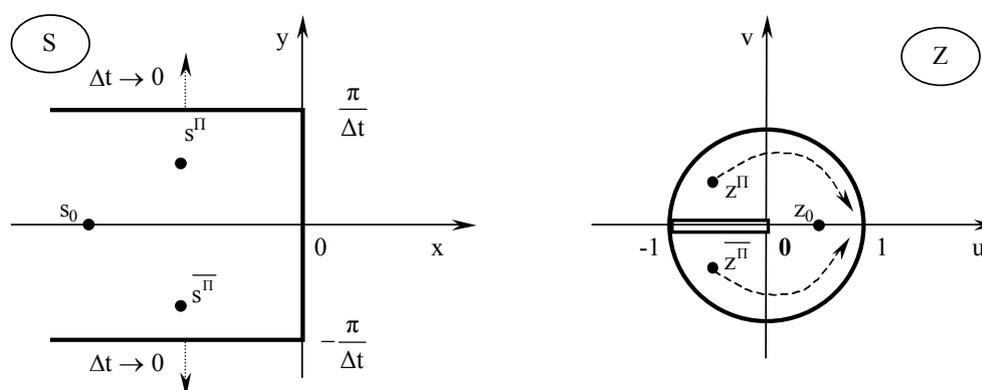


Рис. 1.4. Перемещение полюсов (нулей) при уменьшении шага  $\Delta t$

При отображении  $s = \frac{1}{\Delta t} \text{Ln } z$  [52] пара комплексно-сопряженных полюсов  $z_1$  и  $\bar{z}_1$ , лежащих в единичном круге, отображается с учётом однолиственности отображения в  $s$ -плоскость:

$$s_1 = \frac{1}{\Delta t_1} \ln|z_1| + \frac{i}{\Delta t_1} \arg z_1, \quad \bar{s}_1 = \frac{1}{\Delta t_1} \ln|\bar{z}_1| + \frac{i}{\Delta t_1} \arg \bar{z}_1.$$

При уменьшении  $\Delta t$  достигается такое значение шага дискретизации  $\Delta t < \Delta t_{\max}$ , при котором все  $s$ -полюса переместятся из дополнительных полуполос в основную полуполосу, где будут оставаться неподвижными при дальнейшем уменьшении значения  $\Delta t$ .

Если по результатам измерений для периода  $\Delta t$  получена ДПФ  $G(z)$ , имеющая действительный полюс  $z_0$ , лежащий на отрезке  $[0, 1]$  оси  $Oz$ , то при использовании однолистного отображения в  $s$ -плоскость получаем точку  $s_0$ :

$$s_0 = \frac{1}{\Delta t} \text{Ln } z_0 = \frac{1}{\Delta t} \ln|z_0| + \frac{i}{\Delta t} \arg z_0 = \frac{1}{\Delta t} \ln z_0.$$

Установить, являются ли данные действительные и комплексно-сопряженные значения  $s_1$  и  $\bar{s}_1$  истинными полюсами НПФ объекта, или являются лишь их проекциями в основную полуполосу, можно только произведя изменение (вариацию) шага дискретизации  $\Delta t$ .

В работе [37] был сделан следующий **вывод**: если при изменении шага дискретизации  $\Delta t$  прообразы конечного числа нулей и полюсов дискретной передаточной функции не перемещаются на  $s$ -плоскости, то эти прообразы являются соответственно нулями и полюсами непрерывной передаточной функции. В этом случае полученные дискретные передаточные функции являются эквивалентными. Если же дискретная передаточная функция имеет отрицательные вещественные нули и полюса, которых также конечное число, то при изменении  $\Delta t$  они отображаются на перемещающиеся границы основных полос, а следовательно, в непрерывной передаточной функции соответствующие им нули и полюса отсутствуют.

### 1.2.3. Точечные методы структурно-параметрической идентификации

#### *Метод Висковатова*

Рассматриваемый метод, основанный на известном алгоритме В. Висковатова [36, 96], позволяет строить дискретные модели линейных динамических объектов на основе точных измерений значений вход-выходных измерений. Применимость этого метода, основанного на аппроксимации дискретной передаточной функции (ДПФ) линейного динамического объекта непрерывными дробями, обоснована тем фактом, что формально дискретная передаточная функция линейного объекта определяется как отношение Z-преобразований выхода объекта  $Y(z)$  и его входа  $X(z)$  [30, 54, 66]:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} y(n\Delta t)z^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} x(n\Delta t)z^{-j}}. \quad (1.9)$$

Метод позволяет перейти от выражения, представляющего собой отношение конечных или бесконечных степенных рядов к непрерывной дроби, подходящие дроби которой будут являться дробно-рациональной аппроксимацией исходной ДПФ объекта. В **Приложении 1** кратко изложены основные определения и свойства аппарата непрерывных дробей, используемые в работе.

Первоначально метод В. Висковатова был развит в детерминированной постановке, когда неопределёнными являются лишь структура и параметры модели объекта, тогда как исходные данные – вход-выходные измерения известны точно и не несут в себе какой-либо неопределённости. В основу метода Висковатова положена следующая последовательность этапов [35, 37, 40, 41].

Пусть имеются отсчёты вход-выходных переменных  $x(t)$  и  $y(t)$  объекта в дискретные моменты времени  $n\Delta t$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Delta t$  – шаг дискретизации.

Для дробно-рациональной аппроксимации ДПФ  $G(z)$  пользуются представлением (1.9) в виде соответствующей непрерывной дроби (С-дроби). Для этого сначала рассчитывается идентифицирующая матрица [37]

Таблица 1.1. Общий вид идентифицирующей матрицы

	<i>0-й столбец</i>	<i>1-й столбец</i>	<i>2-й столбец</i>	...	<i>n-ый столбец</i>	...
<i>0-я строка</i>	$a_{00}$	$a_{01}$	$a_{02}$	...	$a_{0n}$	...
<i>1-я строка</i>	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	...
<i>2-я строка</i>	$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$	...
...	...	...	...	...	...	...
<i>m-я строка</i>	$a_{m0}$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	...
...	...	...	...	...	...	...

где элементами нулевой строки является последовательность дискретных значений входной величины:  $a_{0i} = x(i\Delta t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ; элементами первой строки является последовательность измеренных значений отклика объекта:  $a_{1j} = y(j\Delta t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , а следующие элементы матрицы рассчитываются последовательно по формуле

$$a_{mn} = a_{m-1,0} a_{m-2,n+1} - a_{m-2,0} a_{m-1,n+1}. \quad (1.10)$$

где  $m = 2, 3, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Если в  $k$ -ой строке ( $k = 1, 2, \dots$ ) матрицы (табл. 1.1) конечное число  $r$  первых элементов равны 0, то производится сдвиг влево всех элементов этой строки на  $r$  позиций (до появления в нулевом столбце элемента  $a_{kr} \neq 0$ ), и далее элементы матрицы определяются по соотношению (1.10) уже с учётом сдвига. Непрерывная дробь в  $k$ -ом звене будет иметь в частном числителе множитель  $z^{-(r+1)}$  вместо  $z^{-1}$ .

Вычисление элементов матрицы прекращается с появлением строки, все элементы которой равны нулю или близки к нему. Элементы нулевого столбца матрицы определяют непрерывную дробь вида:

$$G^*(z) = \frac{a_{10}z^{-1}}{a_{00} + \frac{a_{20}z^{-1}}{a_{10} + \frac{a_{30}z^{-1}}{a_{20} + \frac{a_{40}z^{-1}}{a_{30} + \dots}}}}. \quad (1.11)$$

Затем полученная непрерывная дробь (1.11) приводится к дробно-рациональному виду. Так получают дискретную передаточную функцию (ДПФ) в виде дробно-рационального выражения:

$$G^*(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_qz^{-q}}, \quad (1.12)$$

Для восстановления нулей и полюсов НПФ сначала определяют нули и полюса ДПФ, затем путём обратного Z-преобразования (1.8) переводят их в область непрерывной переменной  $s$ .

Далее производится проверка адекватности полученной ДПФ на основании принципа вариации шага дискретизации  $\Delta t$ . По этому же принципу устанавливается эквивалентность моделей, полученных при различных значениях  $\Delta t$ .

Используя интерпретацию  $z^{-1}$  как оператора обратного сдвига, получают дискретную модель объекта во временной области в виде конечно-разностного уравнения:

$$y(n) = \frac{1}{b_0} (a_0x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_px(n-p) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2) - \dots - b_qy(n-q)), \quad (1.13)$$

где обозначено  $x(i) = x(i\Delta t)$ ,  $y(i) = y(i\Delta t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

Выражение вида (1.13) позволяет рассчитать значения динамической характеристики в любой дискретный момент времени  $n\Delta t$ , в том числе и в будущем. Полученную модель динамической характеристики далее используют для сравнения поступающих реальных измерений с модельным, на основе чего проводится диагностика состояния и функционирования объекта [37].

### *Модифицированный метод Вискватова*

В работе [35] была предложена модификация метода Вискватова, позволяющая восстанавливать ДПФ с помощью соответствующей непрерывной дроби (С-дроби), т. е. непрерывной дроби с единичными частными знаменателями.

Так, аналогично методу Вискватова, по исходным вход-выходным измерениям расчетным путём определяется идентифицирующая матрица вида (табл. 1.1), однако ее элементы, в отличие от метода Вискватова, рассчитываются последовательно по формуле

$$a_{mn} = \frac{a_{m-2,n+1}}{a_{m-2,0}} - \frac{a_{m-1,n+1}}{a_{m-1,0}} \quad (1.14)$$

Вычисление элементов матрицы также прекращается с появлением строки, все элементы которой равны нулю (или близки к нулю). В случае появления конечного числа нулевых элементов в некоторой строке матрицы, аналогично методу Вискватова, осуществляется сдвиг элементов строки влево и в соответствующем частном числителе непрерывной дроби появляется дополнительный множитель. В [35, 36] показано, что идентифицирующая матрица (табл. 1.1) обладает теми же свойствами относительно появления нулевых элементов, что и в методе Вискватова.

В результате нулевой столбец полученной таким образом матрицы определяет следующую С-дробь:

$$G^*(z) = \frac{\frac{a_{10}}{a_{00}} z^{-1}}{1 + \frac{a_{20} z^{-1}}{1 + \frac{a_{30} z^{-1}}{1 + \frac{a_{40} z^{-1}}{1 + \dots}}}} \quad (1.15)$$

Сворачивая дробь, получают ДПФ в виде

$$G^*(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}, \quad (1.16)$$

Затем находят нули и полюса ДПФ и их прообразы в  $s$ -плоскости.

Путём вариации  $\Delta t$  устанавливают эквивалентность моделей, полученных при различных значениях периода дискретизации. По построенной ДПФ также получают дискретную модель объекта в виде конечно-разностного уравнения (1.13) с учётом  $b_0 = 1$ .

Критерием точности модели в методе Висковатова и его модификации является уменьшение относительной погрешности модельных величин  $y(n)$ , вычисляемых по формуле (1.13), относительно к точным (либо измеренным) значениям  $y(n\Delta t)$ :

$$\delta(y(n)) = \left| \frac{y(n\Delta t) - y(n)}{y(n\Delta t)} \right| \cdot 100\%$$

Сравнение точечных метода Висковатова и модифицированного метода Висковатова [36] показало, что в результате применения исходного варианта метода Висковатова в числителе и знаменателе ДПФ (1.12) появляется некоторая константа, которая в силу своей неоднозначности входит не только в ДПФ, но и в предыдущие подходящие дроби соответствующей дроби. Подходящие дроби могут рассматриваться, в зависимости от решаемой задачи, приближениями исходной функции, а, следовательно, появляющаяся константа  $C$  может оказывать влияние на погрешность аппроксимации.

На качественном уровне можно сформулировать следующую отличительную черту рассматриваемых методов: с вычислительной точки зрения модифицированный метод Висковатова и общее представление в виде (1.15) приводят к некоторому преимуществу. Более того, при решении вычислительных задач выражение (1.10) может привести к переполнению на вычислениях на ЭВМ [37].

В работах [31, 35, 37, 40, 41, 110] были показаны большие возможности применения метода Висковатова и его модификации к широкому кругу

линейных динамических объектов. Отметим основные достоинства этих методов:

- автоматическое определение порядка модели на основе исходных данных, то есть избегается перебор пробных моделей;
- возможность решения задачи идентификации для таких классов объектов, которые либо совсем исключаются из рассмотрения в традиционных методах непараметрической идентификации, либо достаточно сложны, и их идентификация требует дополнительных исследований: неустойчивые объекты, неминимально-фазовые объекты, объекты с постоянным и переменным запаздыванием и т. п.
- учитывается влияние шага дискретизации на результат восстановления модели объекта. Существует возможность его изменения (в том числе путём прореживания исходных данных) и получения при этом эквивалентных моделей.
- для построения модели может быть использована всего одна реализация процесса;
- простота используемого подхода в плане алгоритмической реализации на ЭВМ.

### **Пример 1.1 SP-идентификация объекта со свойством неминимально-фазовости.**

Данный подход решения задачи SP-идентификации по дискретным измерениям вход-выходных переменных позволяет formalизовать процесс получения математических моделей линейных объектов, в том числе со свойствами колебательности, неминимально-фазовости и с транспортным запаздыванием. Такие объекты достаточно часто встречаются в технологических процессах. Для иллюстрации модифицированного метода В.Висковатова рассмотрим модельный объект, обладающий свойством неминимально-фазовости и подробно рассмотренный в [30, 40, 41]. Именно

наличие нуля в непрерывной передаточной функции затрудняет решение задачи идентификации [101].

Пусть неминимально-фазовый объект имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{k(1 - T_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

в которой для определенности положим  $k = 1$ ,  $T_1 = 4$ ,  $T_2 = 10$ . На вход объекта подано ступенчатое воздействие  $x(t) = 1(t)$ .

Для сопоставления с известным решением [30, 40] выберем шаг дискретизации  $\Delta t = 4$ с. Не нарушая общности положим, что начальные условия – нулевые. Предположим, что измерены значения выходной переменной в моменты  $\{n\Delta t\}_0^\infty$ , которые являются исходной информацией для решения задачи структурно-параметрической идентификации:

$$y(0) = 0; y(4) = -0.0736; y(8) = 0.1320; y(12) = 0.3636; y(16) = 0.5533;$$

$$y(20) = 0.6932; y(24) = 0.7916; y(28) = 0.8593; y(32) = 0.9053; \dots$$

По данным измерениям вход-выходных переменных составляем идентифицирующую матрицу (табл. 1.1). Обращая внимание на то, что  $y(0) = 0$ , на основании сформулированного правила сдвинем нулевую строку на один элемент влево. Тогда применяя получаем следующую матрицу:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
-0.0736	0.1320	0.3636	0.5533	0.6932	0.7916	0.8593	0.9053	0.9360	0.9573	...
2.7935	5.9402	8.5177	10.4185	11.7554	12.6753	13.3003	13.7174	14.0068	...	
-3.9199	-7.9893	-11.2472	-13.6266	-15.2929	-16.4364	-17.2107	-17.7315	...		
0.0883	0.1799	0.2533	0.3068	0.3444	0.3706	0.3870	...			
0.0008	0.0006	0.0017	0.0010	0.0040	0.0050	...				

Так как последняя строка содержит элементы, величина которых близка к нулю, то далее расчеты не проводятся (на основе выявленных в [35, 37, 40, 41] свойств правильных С-дробей). В этом случае ДПФ объекта аппроксимируется следующей конечной правильной С-дробью:

$$G(z) = \frac{-0.0736 z^{-1}}{1 + \frac{2.7935 z^{-1}}{1 + \frac{-3.9199 z^{-1}}{1 + 0.0883 z^{-1}}}},$$

свернув которую в дробно-рациональную функцию, получим

$$G(z) = \frac{-0.0736 z^{-1} + 0.28201 z^{-2}}{1 - 1.381 z^{-1} + 0.2467 z^{-2}}. \quad (1.17)$$

ДПФ  $G(z)$  (1.17) имеет следующие нули и полюса:

$$z^H = 3.8317; z^H_1 = 0.3684; z^H_2 = 0.6698.$$

Применяя обратное Z-преобразование, получим

$$s^H = 0.336; s^H_1 = -0.2497; s^H_2 = -0.1002.$$

ДПФ  $G(z)$  (23) совпадает с известным результатом в [40, 41] с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Следует только заметить, что при достаточно большом шаге дискретизации  $\Delta t = 4c$  точно восстановлена структура ДПФ объекта  $G(s)$ , с заданной точностью определены ее полюса, и с некоторой погрешностью определено значение нуля. Отмечая сложность свойств объекта и идентификации (в общем случае) нулей ДПФ [66], можно сделать вывод о том, что данный пример показывает широкие возможности модифицированного метода Висковатова.

#### 1.2.4. Методика идентификации стохастических объектов

Позднее в работе [63] было показано, что использование модифицированного метода Висковатова и принципа вариации шага дискретизации позволяет получить модель линейного стохастического объекта. Метод SP-идентификации в такой задаче включает в себя проверку стационарности вход-выходных случайных процессов, при необходимости их стационаризацию, проверку однородности входного случайного процесса. Разработанная в [63] методика SP-идентификации стохастических объектов включает в себя следующие этапы.

**1 этап.** Разбиение данных измерений вход-выходных случайных процессов  $\{x(k\Delta t)\}_{k=1}^N$  и  $\{y(k\Delta t)\}_{k=1}^N$  на интервалы стационарности с помощью модифицированного инверсионного критерия [63]. Затем на каждом из полученных интервалов стационарности с помощью модифицированного метода Висковатова строится модель структурной функции процесса, по

которой выносится решение, подтверждающее стационарность или нестационарность данных на интервалах. Если на каких-то интервалах данные измерений вход-выходных случайных процессов нестационарны, то производится процедура стационаризации с помощью взятия разностей требуемого порядка.

**2 этап.** Проверка однородности по корреляционной функции стационарного входного сигнала на каждом из интервалов стационарности.

**3 этап.** Вычисление статистических характеристик вход-выходных стационарных случайных процессов на всех интервалах стационарности и однородности: корреляционной функции входного сигнала, взаимной корреляционной функции вход-выходных сигналов и интервала корреляции входного воздействия.

**4 этап.** Получение дискретной и непрерывной моделей идентифицируемого объекта на всех интервалах стационарности и однородности при помощи модифицированного метода Вискватова с использованием корреляционной и взаимной корреляционной функций вход-выходных сигналов. Если процедура стационаризации или входного и/или выходного сигналов не применялась, тогда полученная модель восстанавливает структуру и параметры ДПФ стохастического объекта. В противном случае, для получения ДПФ необходимо произвести обратные разностные преобразования.

**5 этап.** Реализация принципа вариации шага дискретизации в форме децимации значений корреляционной и взаимно-корреляционной функций на всех интервалах стационарности и однородности. После этого осуществляется возврат к этапу 4. Если непрерывные передаточные функции, полученные до и после децимации, совпадают, то на основании условия SP-идентифицируемости можно утверждать, что математическая модель объекта восстановлена достоверно. В противном случае необходимо уменьшить начальный шаг дискретизации технологических средств измерения и вернуться к этапу 1.

### 1.2.5. Структурно-параметрическая идентификация нелинейного объекта, описываемого интегральным звеном с отсечкой

В работах, в которых развивается и исследуется метод SP-идентификации на основе непрерывных дробей [31, 35, 37, 40, 41, 110] отмечается, что предложенный метод позволяет получать дискретные и восстанавливать непрерывные модели только линейных (либо линеаризованных) объектов. Это ограничение неразрывно связано с классом используемых при моделировании дробно-рациональных функций, которыми могут быть представлены линейные объекты или системы. Естественно возникает вопрос о применимости этого метода для идентификации нелинейных динамических объектов.

Существуют объекты или системы, отдельные элементы которых описываются типовыми линейными элементами (звеньями), но в сочетании, например, с элементами с транспортным запаздыванием они в целом не являются линейными. В [30, 50, 66] рассматривается объект-интегратор (или фиксатор, экстраполятор нулевого порядка), применяемый в восстанавливающих цепях. Примером такого типа объектов являются также транспортерные ленты и др. подобные объекты и процессы. При импульсном входном воздействии он автоматически устанавливается в нуль после каждого периода квантования  $T$ . При ступенчатом входном воздействии интегратор выходит на устоявшийся режим в заданный момент времени.

Непрерывная передаточная функция интегратора, который также называют интегральным звеном с отсечкой [37, 70, 72], имеет общий вид

$$G(s) = \frac{k}{T_s} (1 - e^{-sT}) \quad (1.18),$$

где  $k$  - статический коэффициент усиления,  $T$  - время переходного процесса (также время отсечки).

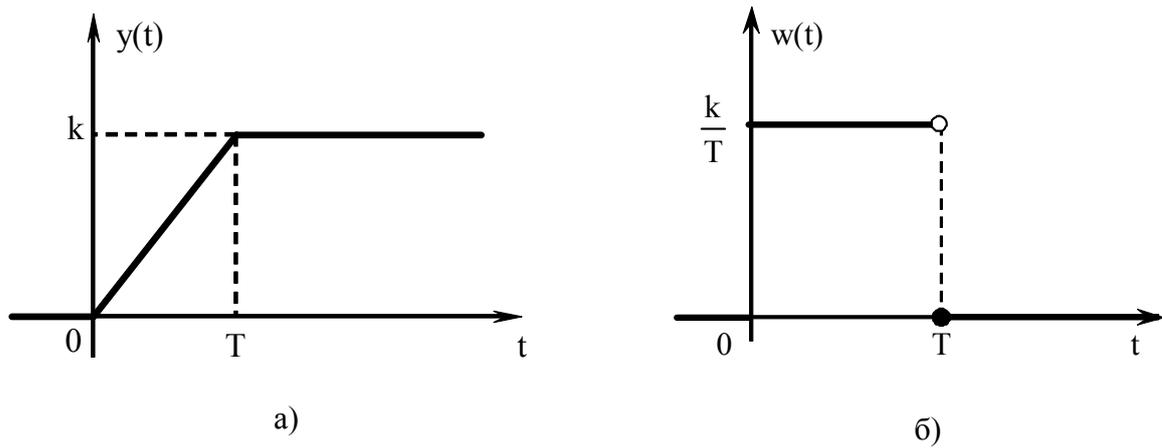


Рис. 1.5. а) переходная и б) импульсная характеристики интегрального звена с отсечкой

Объект представляет собой разность двух звеньев: интегрирующего и интегрирующего звена с запаздыванием. Интегрирующие свойства таких объектов проявляются только во время переходного процесса, а снятие входного воздействия приводит к возвращению выходной величины к ее исходному значению, т. е. данные объекты являются статическими.

Пусть известен диапазон изменения шага дискретизации  $\Delta t$ , и для различных значений  $\Delta t$  снимаются дискретные измерения динамических характеристик объекта. По ним построим дискретные модели переходной и импульсной характеристик объекта и получим оценки временного параметра  $T$  непрерывной передаточной функции объекта. Для решения задачи воспользуемся модифицированным методом Висковатова.

При построении дискретной модели удобно рассматривать два случая: 1) когда некоторый отсчет  $n\Delta t$  попадает в точку  $t = T$ , - так называемый "кратный" шаг дискретизации, и 2) когда никакой отсчет не попадает в точку  $t = T$ , - "некратный" шаг дискретизации  $\Delta t$ . Факт того, что шаг дискретизации  $\Delta t$  выбран кратным времени отсечки  $T$ , проверяется путём кратного изменения  $\Delta t$ , т. е. вариацией шага дискретизации.

В **Приложении 2** подробно и с числовыми примерами рассмотрены случаи кратного и некратного шага, для ступенчатого и импульсного входного

воздействия получен общий вид ДПФ и соответствующие дискретные переходная и импульсная характеристики. Исходя из общего вида ДПФ найдены оценки временного параметра  $T$ .

Здесь лишь кратко приведем результаты применения модифицированного метода Висковатова.

### 1. Реакция на ступенчатое входное воздействие.

1) В общем случае при кратном шаге  $\Delta t$  получены ДПФ объекта и дискретная переходная характеристика объекта в следующем виде:

$$G^*(z) = \frac{k\Delta t}{T} (z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(m-1)} + z^{-m}), \quad (1.19)$$

$$y^M(n) = \frac{k\Delta t}{T} (x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-m)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

Отсюда можно вывести общую формулу для оценки временного параметра  $T$ :

$$\hat{T} = m\Delta t. \quad (1.21)$$

В **Приложении 2** сформулировано утверждение об общем виде и длине идентифицирующей матрицы при кратном шаге дискретизации и ступенчатом входном сигнале.

2) Аналогично для случая некратного шага  $\Delta t$  получен общий вид ДПФ и дискретной переходной характеристики:

$$G^*(z) = \frac{k\Delta t}{T} \left( z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-m} + \frac{T - m \cdot \Delta t}{\Delta t} z^{-(m+1)} \right), \quad (1.22)$$

$$y^M(n) = \frac{k\Delta t}{T} \left( x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-m) + \frac{T - m \cdot \Delta t}{\Delta t} \cdot x(n-(m+1)) \right), \quad (1.23)$$

откуда по полученному коэффициенту  $A = \frac{T - m \cdot \Delta t}{\Delta t}$  при слагаемом  $x(n-(m+1))$

получаем оценку параметра  $T$  по формуле

$$\hat{T} = A\Delta t + m \cdot \Delta t. \quad (1.24)$$

Рассчитанные по формулам (1.20) и (1.23) значения дискретной переходной характеристики в точках отсчетов  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , точно совпадают с значениями действительной переходной характеристики в эти же моменты дискретизации. Следовательно, можно сделать вывод, что полученные модели являются точными. Это позволяет получить по формулам (1.21) и (1.24) достоверную оценку временного параметра  $T$ .

Очевидно, что формула (1.23) для  $y^M(n)$  при некратном шаге является обобщением случая кратного шага (1.20): если положить в ней  $\Delta t = T/m$ , то получим дискретную модель для кратного шага.

## 2. Реакция на импульсное входное воздействие.

Для импульсной характеристики в случае кратного шага ДПФ и дискретная импульсная характеристика принимают вид:

$$G^*(z) = \frac{k}{T} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(m-1)}), \quad (1.25)$$

$$w^M(n) = \frac{k}{T} (x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-(m-1))). \quad (1.26)$$

Отсюда также получаем оценку временного параметра  $T$ :

$$\hat{T} = m \cdot \Delta t. \quad (1.27)$$

При некратном шаге получены аналогичные соотношения для ДПФ и импульсной характеристики, но в этом случае невозможно указать общую формулу для оценки временного параметра  $T$ .

Отличительной особенностью дискретных моделей динамических характеристик данного объекта во всех случаях является использование в них лишь предыдущих и текущих значений входного воздействия и независимость модельных значений от предыдущих значений выходной переменной.

### § 1.3. Основные задачи работы и их взаимосвязь

В число задач при проведении экспериментальных исследований входят вопросы подготовки и получения информации. Этап получения измерительной информации, отражающий специфику предполагаемого метода ее решения, необходимо рассматривать с позиций следующих особенностей: 1) действительный (реальный) характер изменения во времени вход-выходных переменных идентифицируемого объекта; 2) характер регистрации изменений вход-выходных переменных при проведении экспериментальных исследований; 3) форма представления измеренной информации об изменении вход-выходных переменных непосредственно для решения задачи идентификации.

В последние десятилетия многие авторы обращают внимание на различного рода неопределённости и неточности исходных величин. Существуют различные подходы к представлению, анализу и обработке данных, обладающих каким-либо видом неопределённости, такие как вероятностно-статистические методы и методы на основе теории нечетких множеств.

Существует еще одно направление, которое в последнее время приобретает все большую популярность – интервальный анализ. Его применение позволяет представлять в простой форме измерения различных физических величин и параметры технических объектов. Интервальное представление дает возможность учитывать различные источники неопределённости, и при этом достаточно знать лишь граничные значения величин, определяющие интервалы возможных либо допустимых значений.

Обычно на объект действует множество внешних факторов, в результате чего возникает зашумленность данных. Применение вероятностных методов для обработки зашумленных значений зачастую затруднено в связи с непрерывным функционированием объекта и изменением как измеряемых вход-выходных величин, так и параметров самого объекта во времени.

Представление измерений в виде интервалов является наиболее естественным, поскольку измерительная аппаратура дает возможность оценить реальное значение величины лишь с некоторой точностью (в зависимости от класса точности используемых приборов), и к тому же применение интервалов не предполагает знания законов распределения. С другой стороны, при нормальном функционировании многих технических объектов допустимы изменения самой измеряемой величины в некоторых пределах, и такие отклонения не приводят к возникновению аварийных ситуаций; то есть сами процессы являются недетерминированными.

Кроме того, ряд существующих методов дискретизации и снятия измерений также предполагает их интервальное представление. В качестве примера можно привести способ нерегулярной групповой дискретизации, применяемый к динамическим объектам в процессе их непрерывного функционирования [37]. Использование этого способа предполагает, что в  $\Delta$ -окрестности момента отсчета  $t_n = n\Delta t$  (то есть в период времени  $[t_n - \Delta, t_n + \Delta]$ ) в случайные моменты времени производят группу из  $L$  измерений значений динамической характеристики процесса:  $y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^L$ . Таким образом в каждый момент снятия измерений группа отсчетов образует интервал  $\left[ \min_{i=1,L} \{y_n^i\}, \max_{i=1,L} \{y_n^i\} \right]$ . В [37] для получения оценки переходной характеристики  $y_n$  в момент отсчета  $t_n$  использовались алгоритмы перехода к точечным значениям: 1) середине интервала; 2) среднему арифметическому; 3) медианной (или робастной) оценке. При таком переходе к точечным оценкам проявляются простейшие фильтрующие свойства способа дискретизации [37], и теряется часть информации о процессе, заложенная в самой интервальной природе измеряемой величины.

Таким образом, представление измерений в виде интервалов порождается различными механизмами: погрешностью измерений, природой самого процесса, способами снятия и обработки измеренной информации и т.п.

Далее по полученным измерениям необходимо восстановить математическую модель объекта. В настоящей главе показано, что среди всего многообразия методов структурной и параметрической идентификации методы на основе метода В. Висковатова занимают особое положение ввиду своей универсальности, если рассматривать широкий класс линейных (линеаризованных) объектов с различными динамическими свойствами. Большие возможности этих методов были в последние годы достаточно глубоко исследованы [31, 37, 110].

Однако до сих пор при их исследовании и применении не затрагивался вопрос о более полном представлении исходных измерений в виде интервалов и о возможности восстановления по ним дискретной модели динамического объекта.

Обзор литературы показывает, что практически нет работ, посвященных проблеме структурно-параметрической идентификации объекта с учётом интервальной неопределённости исходных измерений, использующих передаточные функции в качестве основного представления модели объекта идентификации. То есть в настоящее время не существует эффективных методов восстановления дискретной модели линейного динамического объекта в терминах «вход-выход» по равноотстоящим интервально заданным измерениям вход-выходных переменных объекта. Так, в [11, 112] предложен метод идентификации как линейной, так и нелинейной части нелинейного объекта по интервальным дискретным вход-выходным измерениям, однако этот метод является в большей степени параметрическим, к тому же авторы не восстанавливают модель линейной части объекта в виде передаточной функции.

*Основная задача* в настоящей диссертационной работе заключается в следующем: обобщить и исследовать методы идентификации структуры и параметров дискретной модели линейного (линеаризованного) динамического объекта на основе теории непрерывных дробей на случай, когда исходные

равноотстоящие вход-выходные измерения представлены интервалами. Решение этой задачи позволит ответить на такие вопросы, как:

1) каким образом производится переход от последовательностей интервальных измерений к точной дискретной модели в форме дискретной передаточной функции, причем предлагаемый способ должен восстанавливать как порядок, так и интервальные оценки значения параметров дробно-рационального выражения для дискретной модели линейного объекта;

2) каким образом влияет изменение шага дискретизации на возможность восстановления интервальной дискретной модели объекта;

Решение указанной задачи основано на соответствии между интервальными непрерывной и дискретной моделью объекта при использовании интервального расширения согласованного  $Z$ -преобразования. Установление такого соответствия позволяет перенести область исследования в плоскость дискретной переменной  $z$ , т.е. взять за основу дискретные интервальные отсчеты вход-выходных переменных моделируемого объекта. По этим отсчетам производится дробно-рациональная аппроксимация дискретной передаточной функции объекта непрерывными дробями, причем вследствие интервальной природы исходных измерений параметры полученной дискретной модели объекта будут также являться интервалами. Отсюда возникает вопрос о соответствии интервальной и точечной моделей, то есть можно ли считать интервальную дискретную модель точной в плане восстановления ее структуры и точности интервальных оценок.

Вместе с тем при исследовании предлагаемого подхода возникают *дополнительные задачи*. В частности, определить, какое влияние оказывает изменение шага дискретизации на восстановление интервальной дискретной передаточной функции; возможно ли получение более узких интервальных оценок параметров дискретной модели объекта при изменении шага дискретизации; позволяет ли предлагаемый подход рассчитывать модельные

интервалы для выходных значений объекта и использовать их для диагностики состояния объекта.

Известно, что в точечном случае период дискретизации является основным параметром, изменение которого приводит к построению точной модели. Вопрос состоит в том, как влияет наличие интервальной неопределённости измерений на сохранение условия SP-идентифицируемости и как в этом случае определяется эквивалентность интервальных дискретных моделей, полученных при различных значениях периода дискретизации.

Следующей *дополнительной задачей*, связанной с переходом от полученной интервальной дискретной к модели непрерывной, является вычисление нулей и полюсов дискретной передаточной функции и их перевод в плоскость непрерывной переменной. Для объектов первого порядка решение интервального уравнения и получение интервальных нулей и полюсов не представляет сложностей. Но для объектов с двумя полюсами (нулями) необходим способ вычисления корней интервального квадратного характеристического уравнения, который позволял бы выделять как действительные, так и комплексные полюса (нули) дискретной передаточной функции, а затем по ним восстанавливать полюса и нули непрерывной передаточной функции с помощью согласованного Z-преобразования. Объекты более высоких порядков очень редко встречаются на практике, и при вычислении их нулей и полюсов необходимо применение интервальных модификаций численных методов, например, методов ньютоновского типа. Поэтому в работе необходимо по крайней мере обхорно привести наиболее известные методы локализации интервальных корней полиномов с интервальными коэффициентами.

Следующей *задачей* является проведение модельных и тестовых исследований с целью рассмотрения особенностей восстановления дискретных моделей, с которыми можно столкнуться при решении задачи структурно-параметрической идентификации различных типов линейных

(линеаризованных) объектов. Это такие вопросы как: выбор граничных функций в качестве основного способа представления интервальной динамической характеристики; чувствительность разрабатываемых интервальных методов; возможные виды подмены интервальной модели и несоответствие ее реальным данным; появление дополнительных слагаемых в дискретной модели, не имеющих точечных аналогов; влияние вида входного воздействия на восстановление модели объекта и т.п. Специфика аппарата непрерывных дробей, особенно в совмещении с классической интервальной арифметикой, такова, что невозможно производить теоретические выкладки и получать какие-либо зависимости в общем виде. Поэтому возникает необходимость в рассмотрении множества числовых примеров для того, чтобы затем на их основе произвести обобщение и вынести какие-либо рекомендации по применению предлагаемых методов.

Таким образом, практически все указанные выше задачи, предполагают осуществление значительного объема модельных исследований.

Еще одной *задачей* является применение полученных интервальных дискретных моделей для построения дискретного управления. Исследования в данном направлении приводят к завершению полного цикла от измерения и выбора представления исходных данных до получения достоверной математической модели объекта либо процесса и выработки на ее основе интервального дискретного управления.

Задачи, рассматриваемые в настоящей работе, должны охватывать как чисто интервальные, так и смешанные типы представления исходных данных. Таким образом, их можно разделить на следующие подвиды.

**Задача 1.** *Вырожденная интервальная задача* – частный случай интервальной задачи: вход-выходные величины объекта представлены последовательностями вещественных чисел  $x(n\Delta t)$  и  $y(n\Delta t)$  – измерений, являющимися исходными данными для процесса идентификации. Решением

такой задачи идентификации являются точечные модели дискретной передаточной функции  $G^*(z)$  и динамической характеристики  $y(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Этот случай, кратко описанный в Главе 1, §1.2, детально рассмотрен в работах [35, 37, 40, 41], в которых разработаны методы решения подобных задач.

**Задача 2.** Вход объекта представлен числовыми значениями измерений  $x(n\Delta t)$ , выход объекта – интервальными числами  $[y_{\min}(n\Delta t), y_{\max}(n\Delta t)]$ . Результатом решения задачи идентификации является дискретная передаточная функция с интервальными коэффициентами  $G^{\text{IR}}(z)$  и интервалы значений динамической характеристики в точках отсчета  $y(n) = [y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

**Задача 3.** Измерения входного сигнала представлены интервальными значениями  $[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)]$ , а измерения реакции объекта – вещественными числами  $y(n\Delta t)$ . Идентификация объекта по таким исходным данным приводит к получению интервальной модели в виде дискретной передаточной функции  $G^{\text{IR}}(z)$  и интервалов значений динамической характеристики объекта в точках отсчета:  $y(n)=[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

Задачи вида 2 и 3 часто встречаются на практике, например, при лабораторных исследованиях и экспресс-анализах. Эти задачи можно рассматривать как частные случаи более общей Задачи 4.

**Задача 4.** Измерения входа и выхода объекта – интервальные значения  $[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)]$  и  $[y_{\min}(n\Delta t), y_{\max}(n\Delta t)]$ . Применение способа SP-идентификации приводит к восстановлению дискретной передаточной функции объекта  $G^{\text{IR}}(z)$  с интервальными коэффициентами и получению интервалов значений динамической характеристики в точках отсчетов:  $y(n) = [y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

Таким образом, разрабатываемые в работе методы должны быть универсальными по отношению к представлению исходных данных.

## Выводы

В данной главе определены основные понятия и направления идентификации линейных динамических объектов. Существует множество методов как структурной, так и параметрической идентификации.

Особый интерес представляют методы SP-идентификации, основанные на аппроксимации дискретной передаточной функции объекта непрерывными дробями. Основными преимуществами этих методов является возможность построения достоверной модели по конечному числу первых измерений, автоматическое определение порядка модели, принципиальная возможность построения модели лишь по одной реализации динамической характеристики, а также учёт изменения периода дискретизации и установление при этом отношения эквивалентности между достоверными моделями объекта. В настоящей главе также описаны возможности использования методов с использованием непрерывных дробей для стохастических объектов и показана применимость метода SP-идентификации для одного нелинейного объекта.

Анализ литературы, посвященной задаче идентификации, показал, что в настоящее время проблеме интервальной неопределённости при решении задачи уделяется недостаточно внимания. Большая часть исследований направлена на построение интервальных моделей в пространстве состояний, при этом структура моделей заранее известна. Практически нет исследований, которые бы на основе интервальных измерений вход-выходных сигналов динамического объекта восстанавливали как структуру объекта, так и позволяли бы интервально оценить параметры его дискретной и непрерывной передаточных функций.

## Глава 2. Интервальные методы структурно-параметрической идентификации

Во второй главе разрабатываются интервальные методы SP-идентификации линейных динамических объектов.

В первом параграфе производится расширение точечных методов В. Висковатова и его модификации на случай интервально-заданных значений отсчетов входного воздействия и отклика объекта. Это позволяет получить дискретные модели объекта в виде интервальной передаточной функции и динамической характеристики в виде конечно-разностного уравнения с интервальными коэффициентами. При этом причинами интервального представления моделей могут выступать либо входные, либо выходные, либо и те и другие отсчеты. То есть предлагаемые методы охватывают все 3 подвиды интервальных задач. Затем на основе интервальных дискретных моделей производится восстановление структуры непрерывной передаточной функции и интервально оцениваются значения ее параметров. Далее в этом параграфе рассматривается принцип вариации шага дискретизации в интервальном случае и устанавливается эквивалентность интервальных моделей.

Во втором параграфе на примере одного из наиболее простых устойчивых объектов – апериодического 1-го порядка – показываются все этапы предлагаемых способов идентификации. Сначала приводятся точечные метод Висковатова и модифицированный метод Висковатова, а затем их интервальные варианты. Во втором примере для этого же объекта демонстрируется выполнение интервального принципа вариации шага дискретизации, определяющего эквивалентность интервальных моделей. В третьем примере ставится вопрос о чувствительности интервального модифицированного метода Висковатова к перемещению истинного полюса непрерывной передаточной функции.

## **§2.1. Интервальные методы структурно-параметрической идентификации**

### **2.1.1. Интервальный метод Висковатова**

Рассмотрим расширение метода Висковатова на область интервальных чисел. Интервальный метод структурно-параметрической идентификации предоставляет возможность учёта неточности исходных данных, поскольку в качестве входных переменных предлагаемых способов используются интервалы, внутри которых лежат измеренные значения вход-выходных переменных объекта. В качестве решения выдается не точечная модель – с вещественными коэффициентами, соответствующая реальной с некоторой степенью точности, а интервальная модель, включающая в себе все истинные оценки параметров изучаемого объекта для истинных значений вход-выходных переменных, множество которых ограничивается допускаемыми погрешностями измерительных приборов и др. помехами ограниченной амплитуды [82].

Далее под интервальной дискретной передаточной функцией (ИДПФ) объекта будем понимать ДПФ объекта, параметры которой представлены интервалами возможных значений. Интервальное конечно-разностное уравнение также отличается от точечного наличием интервальных коэффициентов. Интервальные параметры будем рассматривать как интервальные оценки точных значений соответствующих параметров.

В **Приложении 3** кратко приведены основные понятия, операции и свойства классической интервальной арифметики и интервального анализа, используемые в работе. Здесь не рассматриваются нестандартные интервальные арифметики, поскольку основной задачей является показать принципиальную возможность расширения существующих методов SP-идентификации динамических объектов (Глава 1, §1.2.) и дальнейшего применения полученных интервальных моделей. Не очень “хорошая” по ряду свойств классическая интервальная арифметика показала при таком подходе

вполне удовлетворительные результаты для линейных объектов невысоких (1-го и 2-го) порядков. По отношению к объектам более высоких порядков предлагаемые методы являются грубыми, поэтому в будущем необходимы дополнительные исследования в этом направлении. Можно предположить, что привлечение нестандартных и расширенных арифметик к решению задачи структурно-параметрической идентификации в будущем открывает широкие возможности для увеличения эффективности предложенных методов.

В качестве исходных данных для применения точечного метода Висковатова используются измеренные значения входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  воздействий в моменты отсчета  $n\Delta t$ , то есть величины  $x(n\Delta t)$  и  $y(n\Delta t)$ , где  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\Delta t$  – шаг дискретизации. В качестве входных переменных интервального метода Висковатова (ИМВ) используются интервалы  $[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)]$  и  $[y_{\min}(n\Delta t), y_{\max}(n\Delta t)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Считается, что шаг дискретизации можно варьировать в пределах некоторого диапазона, определяемого возможностями аппаратуры и свойствами самого объекта и содержащего допустимые значения  $(\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , при которых объект является идентифицируемым.

При построении исходных интервалов в зависимости от условий проведения измерений используются как метрологические характеристики используемой измерительной техники, так и статистические данные об уровне зашумления вход-выходных значений. Если проводятся несколько серий измерений величин  $x(n\Delta t)$  и  $y(n\Delta t)$  с фиксированным шагом дискретизации, то исходные интервалы строятся на основе минимальных и максимальных значений измерений в момент каждого отсчета, то есть  $[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)]$ ,  $[y_{\min}(n\Delta t), y_{\max}(n\Delta t)]$ . Если известна гарантированная точность измерений, зависящая от используемых средств измерения или других факторов, то есть известны величины  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ , то исходными интервалами являются  $[x(n\Delta t) - \varepsilon_x, x(n\Delta t) + \varepsilon_x]$  и  $[y(n\Delta t) - \varepsilon_y, y(n\Delta t) + \varepsilon_y]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Начальные исследования интервальных методов SP-идентификации были проведены в [43, 44, 45, 46, 70].

Аналогично точечному методу Висковатова (п. 1.2.3), строится идентифицирующая матрица (табл. 2.1), элементами которой являются интервалы:

Таблица 2.1. Общий вид интервальной идентифицирующей матрицы

$[a_{00}, b_{00}]$	$[a_{01}, b_{01}]$	$[a_{02}, b_{02}]$	...	$[a_{0n}, b_{0n}]$	$[a_{0n+1}, b_{0n+1}]$	...
$[a_{10}, b_{10}]$	$[a_{11}, b_{11}]$	$[a_{12}, b_{12}]$	...	$[a_{1n}, b_{1n}]$	$[a_{1n+1}, b_{1n+1}]$	...
$[a_{20}, b_{20}]$	$[a_{21}, b_{21}]$	$[a_{22}, b_{22}]$	...	$[a_{2n}, b_{2n}]$	$[a_{2n+1}, b_{2n+1}]$	...
$[a_{30}, b_{30}]$	$[a_{31}, b_{31}]$	$[a_{32}, b_{32}]$	...	$[a_{3n}, b_{3n}]$	$[a_{3n+1}, b_{3n+1}]$	...
...	...	...	...	...	...	...
$[a_{m-1,0}, b_{m-1,0}]$	$[a_{m-1,1}, b_{m-1,1}]$	$[a_{m-1,2}, b_{m-1,2}]$	...	$[a_{m-1,n}, b_{m-1,n}]$	$[a_{m-1,n+1}, b_{m-1,n+1}]$	...
$[a_{m0}, b_{m0}]$	$[a_{m1}, b_{m1}]$	$[a_{m2}, b_{m2}]$	...	$[a_{mn}, b_{mn}]$	$[a_{m,n+1}, b_{m,n+1}]$	...
...	...	...	...	...	...	...

где  $a_{0n} = x_{\min}(n\Delta t)$ ,  $b_{0n} = x_{\max}(n\Delta t)$ ,  $a_{1n} = y_{\min}(n\Delta t)$ ,  $b_{1n} = y_{\max}(n\Delta t)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  Здесь первые две строки определяются интервалами значений входного и выходного воздействий, а границы следующих элементов матрицы вычисляются последовательно из соотношения

$$[a_{mn}, b_{mn}] = [a_{m-2,0}, b_{m-2,0}] \cdot [a_{m-1,n+1}, b_{m-1,n+1}] - [a_{m-1,0}, b_{m-1,0}] \cdot [a_{m-2,n+1}, b_{m-2,n+1}], \quad (2.1)$$

$m = 2, 3, 4, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Вычисление интервальных элементов матрицы прекращается с появлением строки, состоящей из всех 0-содержащих интервалов.

Если в  $k$ -ой строке матрицы (табл. 2.1) первые  $r$  интервалов содержат в себе число 0, то производится сдвиг влево всех элементов этой строки на  $r$  позиций (до появления в нулевом столбце элемента-интервала, не содержащего в себе 0), и далее элементы матрицы определяются по соотношению (2.1) с учётом сдвига.

На основании многочисленных тестовых и модельных исследований можно отметить, что “нулевая” строка в идентифицирующей матрице с интервальными элементами для идентифицируемых объектов при допустимых значениях  $\Delta t$  появляется на том же месте, что и в точечном случае. Появление

«нулевой» строки однозначно определяет длину непрерывной дроби, то есть порядок дискретной модели.

Из элементов нулевого столбца составляется непрерывная дробь с интервальными коэффициентами:

$$G^{IR}(z) = \frac{[a_{10}, b_{10}]z^{-1}}{[a_{00}, b_{00}] + \frac{[a_{20}, b_{20}]z^{-1}}{[a_{10}, b_{10}] + \frac{[a_{30}, b_{30}]z^{-1}}{[a_{20}, b_{20}] + \frac{[a_{40}, b_{40}]z^{-1}}{[a_{30}, b_{30}] + \dots}}} \quad (2.2)$$

где  $z$  – переменная согласованного  $Z$ -преобразования  $z = e^{s\Delta t}$ .

Если в идентифицирующей матрице был произведен сдвиг  $k$ -ой строки влево на  $r$  элементов, то непрерывная дробь (2.2) в  $k$ -ом звене будет иметь в соответствующем частном числителе сомножитель  $z^{-(r+1)}$  вместо  $z^{-1}$ .

Полученная непрерывная дробь (2.2) преобразуется в интервальную дискретную передаточную функцию (ИДПФ) в виде дробно-рационального выражения с коэффициентами-интервалами при помощи правил интервальной арифметики. В результате получаем ИДПФ вида

$$G^{IR}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{p-1} z^{-(p-1)} + A_p z^{-p}}{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{q-1} z^{-(q-1)} + B_q z^{-q}}, \quad (2.3)$$

где  $A_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $i = \overline{0, p}$ ,  $B_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$ ,  $j = \overline{0, q}$ ,  $p \leq q$ .

Из ДПФ (2.3), интерпретируя  $z^{-1}$  как оператор обратного временного сдвига относительно текущего  $n$ -го отсчета:  $X(z)z^{-i} = x(n-i)$ ,  $Y(z)z^{-j} = y(n-j)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , производим переход к модели объекта в виде конечно-разностного уравнения с интервальными коэффициентами:

$$B_0 y(n) = A_0 x(n) + A_1 x(n-1) + \dots + A_p x(n-p) - B_1 y(n-1) - B_2 y(n-2) - \dots - B_q y(n-q), \quad (2.4)$$

где  $x(i) = x(i\Delta t)$ ,  $y(i) = y(i\Delta t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$

Следует отметить, что для конкретного типа объекта структура получаемых интервальной ДПФ (2.3) и дискретной динамической характеристики в виде конечно-разностного уравнения (2.4) совпадает со структурой точечных ДПФ и конечно-разностного уравнения, построенных по

точным значениям вход-выходных переменных, причем коэффициенты точечных моделей лежат в соответствующих интервальных коэффициентах, полученных интервальным методом Висковатова.

Интервально-значная функция  $y(n)$  (2.4) в каждый момент отсчета  $n$  представима в виде интервала с граничными вещественными функциями  $y_{\min}(n)$  и  $y_{\max}(n)$  [108]

$$y(n) = [y_{\min}(n), y_{\max}(n)].$$

В частности, при неотрицательных  $x(n), \dots, x(n-p), y(n-1), \dots, y(n-q)$  граничные функции имеют вид

$$y_{\min}(n) = \frac{1}{B_0} (\underline{a}_0 x(n) + \dots + \underline{a}_p x(n-p) + (-\bar{b}_1) y(n-1) + \dots + (-\bar{b}_q) y(n-q)),$$

$$y_{\max}(n) = \frac{1}{B_0} (\bar{a}_0 x(n) + \dots + \bar{a}_p x(n-p) + (-\underline{b}_1) y(n-1) + \dots + (-\underline{b}_q) y(n-q)), \quad (2.5)$$

$$B_0 = \min(\underline{b}_0, \bar{b}_0), \quad \bar{B}_0 = \max(\underline{b}_0, \bar{b}_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функции (2.5) ограничивают собой часть временной плоскости (рис. 2.1). Реальные значения измерений величины  $y(t)$  находятся внутри интервалов значений, рассчитанных для каждой точки снятия отсчета.

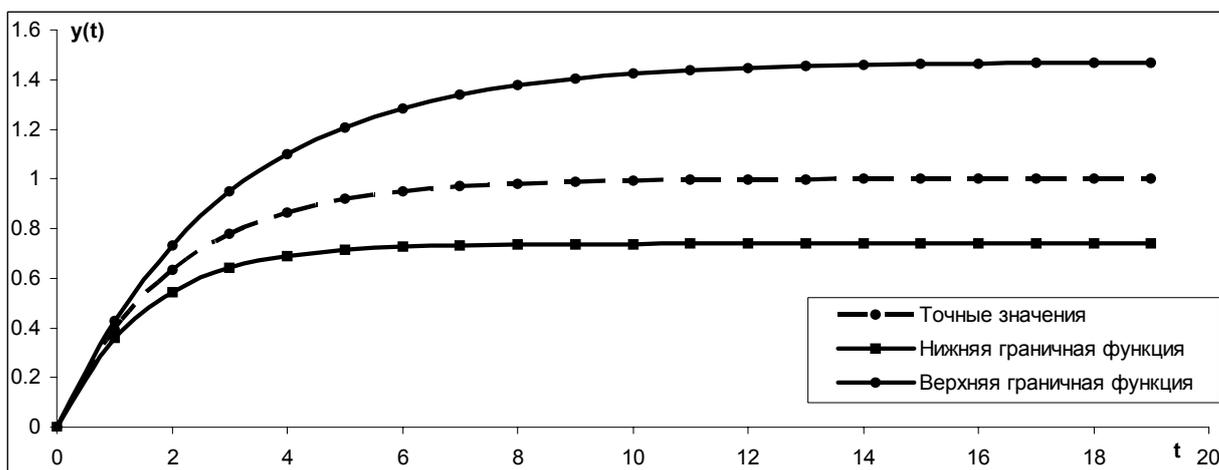


Рис. 2.1. Граничные функции  $y_{\min}(n)$  и  $y_{\max}(n)$  и точные значения  $y(n\Delta t)$  динамической характеристики

Таким образом, найдена интервальная ДПФ (2.3) изучаемого объекта, учитывающая неточность задания исходных данных. Полученную

интервальную модель (2.5) можно интерпретировать следующим образом: граничные функции определяют собой некоторое множество на временной плоскости. Это множество и представляет собой интервальную модель динамической характеристики. В него входят все модели, которые могли бы быть построены для всех вероятных значений неизвестных истинных изучаемых величин. Реальные измеренные и будущие значения, в том числе и модельные, динамической характеристики при нормальном функционировании объекта также лежат в модельных интервалах  $y(n)$ .

После построения интервальной модели необходимо проводить уточнение модели путём вариации шага дискретизации (этот вопрос будет подробно рассмотрен далее, в пункте 2.1.4).

### 2.1.2. Интервальный модифицированный метод Висковатова

Отличием интервального модифицированного метода Висковатова (ИММВ) от исходного варианта ИМВ, как и в точечном случае, является использование класса С-дробей для аппроксимации ДПФ объекта непрерывными дробями. В остальном эти два метода аналогичны.

#### Исходные данные:

1. Известно, что шаг дискретизации  $\Delta t$  можно изменять в некотором диапазоне значений;
2. При фиксированном значении  $\Delta t$  снимаются дискретные измерения вход-выходных величин, представленные интервалами  $[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)]$ ,  $[y_{\min}(n\Delta t), y_{\max}(n\Delta t)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Далее, аналогично методу Висковатова и его модификации, выполняется следующая последовательность действий.

На основе исходных интервалов расчетным путём определяется идентифицирующая матрица, имеющая такой же вид, как и в исходном интервальном методе Висковатова (табл. 2.1), содержащей в 0-ой строке интервалы измеренных входных значений:  $a_{0n} = x_{\min}(n\Delta t)$ ,  $b_{0n} = x_{\max}(n\Delta t)$ ; в 1-ой

строке – интервалы выходных значений:  $a_{1n} = y_{\min}(n\Delta t)$ ,  $b_{1n} = y_{\max}(n\Delta t)$ , а элементы следующих строк  $[a_{mn}, b_{mn}]$  последовательно определяются с помощью соотношения, аналогичного (1.14), которое в интервальном случае принимает вид (2.6):

$$[a_{mn}, b_{mn}] = \frac{[a_{m-2,n+1}, b_{m-2,n+1}]}{[a_{m-2,0}, b_{m-2,0}]} - \frac{[a_{m-1,n+1}, b_{m-1,n+1}]}{[a_{m-1,0}, b_{m-1,0}]} \quad (2.6)$$

$$m = 2, 3, 4, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

Правилом останова вычисления элементов матрицы (табл. 2.1.) является появление строки 0-содержащих интервалов. Появление такой строки однозначно определяет длину непрерывной дроби, то есть порядок дискретной модели.

Элементы нулевого столбца идентифицирующей матрицы порождают частные числители правильной С-дроби с интервальными коэффициентами:

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{\frac{[a_{10}, b_{10}]}{[a_{00}, b_{00}]} z^{-1}}{1 + \frac{[a_{20}, b_{20}]}{[a_{30}, b_{30}]} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \dots} \quad (2.7)$$

где  $z$  – переменная согласованного Z-преобразования  $z = e^{s\Delta t}$ .

Если в некоторой  $k$ -ой строке идентифицирующей матрицы (табл. 2.1.) конечное число  $r$  первых интервалов содержит в себе 0, то производится сдвиг влево всех элементов этой строки на  $r$  позиций до появления в нулевом столбце интервала, не содержащего в себе 0, и далее продолжается вычисление элементов матрицы по соотношению (2.6), но уже с учётом сдвига. При восстановлении правильной С-дроби (2.7) соответствующий  $k$ -ой строке числитель умножается на  $z^{-(r+1)}$ ; если же сдвиг не производится, то множитель в частном числителе равен  $z^{-1}$ .

**Замечание.** Существенным требованием является то, чтобы элемент  $[a_{00}, b_{00}]$  не являлся 0-содержащим. Если же  $0 \in [a_{00}, b_{00}]$ , что соответствует точечному случаю  $x(0) = 0$ , то производится сдвиг 1-ой строки на один элемент

влево, а в 1-ом частном знаменателе также появляется, согласно сформулированному выше правилу, дополнительный множитель  $z^{-1}$ .

Полученная непрерывная дробь сворачивается в интервальную дискретную передаточную функцию объекта:

$$G^{IR}(z) = \frac{A'_0 + A'_1 z^{-1} + A'_2 z^{-2} + \dots + A'_p z^{-p}}{1 + B'_1 z^{-1} + B'_2 z^{-2} + \dots + B'_q z^{-q}}, \quad (2.8)$$

где  $A'_i = [\underline{a}'_i, \overline{a}'_i]$ ,  $i = \overline{0, p}$ ;  $B'_j = [\underline{b}'_j, \overline{b}'_j]$ ,  $j = \overline{1, q}$ ,  $p \leq q$ , - интервальные коэффициенты числителя и знаменателя ИДПФ. Причем для идентифицируемого объекта интервальные коэффициенты содержат в себе истинные значения коэффициентов ДПФ.

Получив интервальную дискретную передаточную функцию объекта и интерпретируя  $z^{-1}$  как оператор обратного временного сдвига, совершается переход к дискретной модели в виде интервального конечно-разностного уравнения, которая позволяет восстанавливать интервальные значения модельного сигнала на выходе модели:

$$y(n) = \sum_{i=0}^m A'_i x(n-i) - \sum_{j=1}^n B'_j y(n-j), \quad (2.9)$$

где  $y(n)$  и  $y(n-j)$  – модельные значения отклика объекта в моменты времени  $n\Delta t$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ ,  $x(n-i)$  – значения дискретных отсчетов входного сигнала.

Для сокращения количества и сложности интервальных вычислений при вычислении будущих значений  $y(n)$  вместо интервальных значений входной величины предпочтительнее использовать точечные измеренные вещественные значения входа  $x(n) = x(n\Delta t)$ . Если имеются лишь интервалы  $[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)]$  то можно брать, например, середины интервалов

$$\text{mid}[x_{\min}(n\Delta t), x_{\max}(n\Delta t)] = \frac{x_{\min}(n\Delta t) + x_{\max}(n\Delta t)}{2}$$

или иные точечные оценки.

Такое допущение призвано сократить количество операций над интервалами и повысить точность интервальных моделей, а также оно позволяет представить полученное разностное уравнение двумя граничными разностными функциями с вещественными коэффициентами  $y_{\min}(n)$  и  $y_{\max}(n)$ , образующими интервалы вида:

$$y(n) = [y_{\min}(n), y_{\max}(n)], n = 0, 1, 2, \dots$$

Построенная интервальная модель трактуется следующим образом: все измеренные и ожидаемые значения выходных переменных лежат внутри формируемых интервалов  $y(n)$ . Если фактические значения выходной переменной систематически выходят за пределы построенных по первым измерениям интервалов, то можно говорить о том, что объект изменил свое поведение и свойства.

На рис. 2.2, аналогичном рис. 2.1, приведено взаимное расположение измеренных значений динамической характеристики и модельных интервалов, представленных граничными функциями. Полученные модели, как будет показано в Примере 2.1 данной главы, отличаются лишь шириной модельных интервалов.

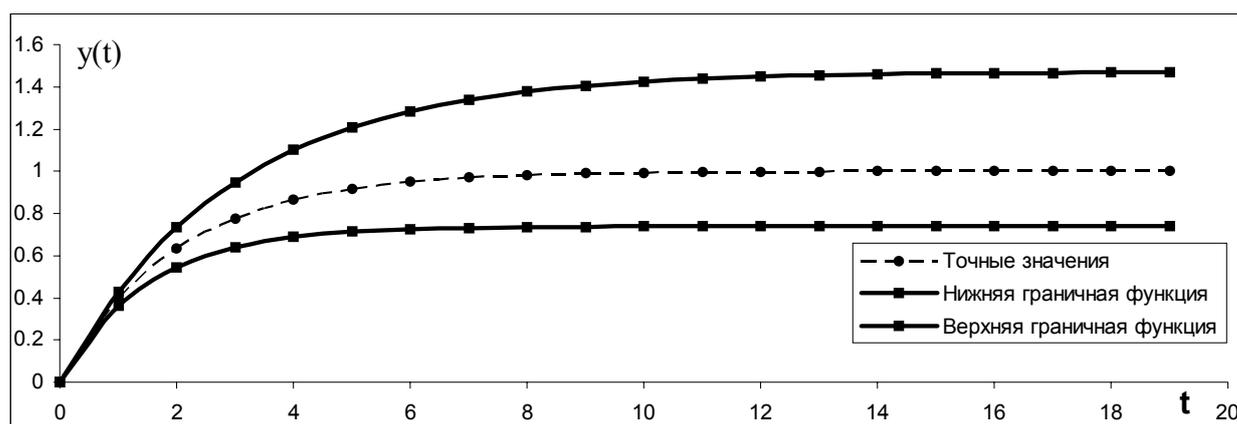


Рис. 2.2. Граничные функции  $y_{\min}(n)$  и  $y_{\max}(n)$  и точные значения  $y(n\Delta t)$  динамической характеристики

Важным замечанием является следующее: подобно свойствам интервального метода Висковатова, нулевая строка в идентифицирующей

матрице для интервального модифицированного метода Висковатова появляется на том же месте, что и для точечного модифицированного метода Висковатова, то есть длина дроби также равна длине дроби в точечном случае. Таким образом, структура получаемой модели точно соответствует структуре точечной модели.

Эквивалентность полученных интервальных моделей динамического объекта устанавливается вариацией шага дискретизации (п. 2.1.4).

**Замечание.** При стягивании интервальных данных к точным значениям (реальным или измеренным) вход-выходных переменных методы ИМВ и ИММВ полностью совпадают с исходными, точечными методом Висковатова и модифицированным методом Висковатова соответственно, то есть можно говорить о том, что они являются обобщением этих методов на случай интервально-заданных измерений.

### **2.1.3. Интервальные оценки параметров непрерывной передаточной функции по известной интервальной дискретной модели.**

Для вычисления интервальных оценок нулей и полюсов НПФ необходимо найти интервальные нули и полюса ИДПФ и перевести их с помощью естественного интервального расширения обратного  $Z$ -преобразования

$$S = \frac{1}{\Delta t} \ln |Z| + \frac{i}{\Delta t} \arg Z \quad (2.10)$$

в  $s$ -плоскость. В качестве интервального аналога числовой функции  $\text{Arg } z$  используется естественное интервальное расширение этой функции путём подстановки интервальных значений  $\text{Re } Z$  и  $\text{Im } Z$  вместо соответствующих вещественных значений.

После определения структуры НПФ необходимо также получить интервальную оценку коэффициента передачи  $K$ :

- если на вход объекта подавалось единичное ступенчатое воздействие, и объект устойчив, то надо воспользоваться теоремой о конечном значении Z-преобразования:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} Y(z) \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \{G(z)\} = K; \quad (2.11)$$

- если объект неустойчив, или  $x(t) \neq 1(t)$ , то необходимо
  - 1) найти из  $G(s)$  реакцию  $Y(s)$  объекта при данном  $X(s)$ ;
  - 2) получить оригинал  $y^M(t)$  с точностью до  $K$ ;
  - 3) рассчитать значение  $y^M(t)$  в некоторой точке  $n\Delta t$  с точностью до  $K$ ;
  - 4) приравнять  $y^M(n\Delta t)$  значению выхода, измеренного в этой точке и найти  $K$ .

**Замечание.** Коэффициент передачи точечной НПФ  $k$  определяет собой то постоянное значение, на которое выходит устойчивый объект в устоявшемся режиме. В интервальном случае, как далее будет показано на примерах, это свойство также сохраняется: ширина параметра  $K$  и ширина интервалов переходной характеристики в установившемся режиме совпадают. То есть интервальный коэффициент передачи  $K$  характеризует интервал значений отклика объекта в точках дискретных отсчетов в установившемся режиме, по сути – точность интервальных установившихся значений переходной характеристики. Если при малых  $\Delta t$  граничные функции неограниченно расходятся, то, соответственно, невозможно получить конечную оценку параметра  $K$ . В этом случае необходимо увеличение  $\Delta t$ .

#### **2.1.4. Принцип вариации шага дискретизации и эквивалентность интервальных дискретных моделей.**

Многочисленные проведенные модельные исследования методов ИМВ и ИММВ, а также сравнение с известными точечными результатами позволили выяснить, какую форму принимает принцип вариации шага дискретизации в случае интервальной неопределённости. Как и в точных методах, вариация периода дискретизации оказывается основным инструментом,

устанавливающим отношение эквивалентности между дискретными моделями, и влияющим на возможность восстановления интервальных нулей и полюсов дискретной и, соответственно, непрерывной передаточной функции объекта. Приведем результаты исследований влияния шага дискретизации на точность восстановления и эквивалентность моделей.

В случае интервально-заданных исходных измерений из ИДФФ, полученной для шага  $\Delta t_1$ , находим вещественно-значные и комплексно-сопряженные интервальные нули и полюса. Следует отметить, что за счет ненулевой ширины полюсов пределы диапазона допустимых значений ( $\Delta t_{\min}$ ,  $\Delta t_{\max}$ ) сужаются по сравнению с точечным случаем.

Аналогично точечным значениям, при уменьшении  $\Delta t$  происходит перемещение интервальных  $z$ -полюсов к точке  $(1, 0)$ . При попадании как вещественно-значных, так и комплексно-сопряженных интервальных полюсов в некоторую окрестность точки  $(1, 0)$ , зависящую также от ширины полюсов, они начинают перекрываться, что ведет к неопределённости, подмене модели и недостоверным оценкам параметров НПФ.

В то же время ширина интервальных  $z$ -полюсов изменяется с увеличением (или уменьшением)  $\Delta t$  в пределах диапазона допустимых значений ( $\Delta t_{\min}$ ,  $\Delta t_{\max}$ ), поэтому для получения более точных интервальных значений дискретных и непрерывных полюсов необходимо путём вариации  $\Delta t$  добиться максимальной суженности интервалов и их различимости.

На рис. 2.3 показан процесс перемещения вещественно-значных полюсов внутри единичной окружности и изменение ширины интервалов при вариации  $\Delta t$ . Для наглядного сравнения ширина интервалов отложена по оси ординат, то есть интервалы построены до квадратов.

Интервальное расширение функции  $\ln z$  позволяет найти прообразы комплексно-сопряженных интервальных полюсов  $Z_1$  и  $\bar{Z}_1$  в  $s$ -плоскости:

$$S_1 = \frac{1}{\Delta t_1} \ln|Z_1| + \frac{i}{\Delta t_1} \arg Z_1, \quad \bar{S}_1 = \frac{1}{\Delta t_1} \ln|\bar{Z}_1| + \frac{i}{\Delta t_1} \arg \bar{Z}_1.$$

Условием SP-идентифицируемости здесь также будет попадание интервальных полюсов  $S$  (аналогично – нулей) в основную полосу  $s$ -плоскости.

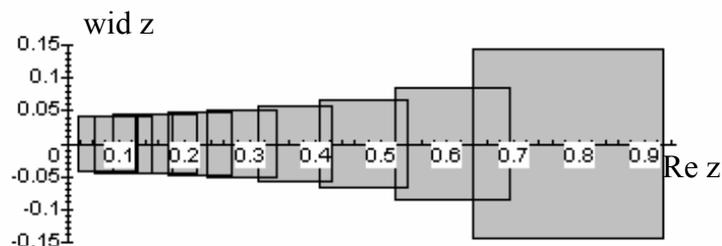


Рис. 2.3. Сужение и перемещение интервальных полюсов (нулей) при вариации шага  $\Delta t$

Условием сохранения положения вещественно-значных интервальных прообразов в  $s$ -плоскости является не полное совпадение, а вложенность интервалов. Это более мягкое по сравнению с точечным случаем требование связано с тем, что при изменении шага  $\Delta t$  происходит сужение и расширение интервалов. Как показывают многочисленные модельные исследования, существует такое значение  $\Delta t$  в пределах допустимого диапазона  $(\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , при котором достигается максимальное сужение интервальной дискретной модели и оценок параметров НПФ. К увеличению точности приводит, в большинстве случаев, увеличение  $\Delta t$  в этих пределах. При изменении  $\Delta t \in (\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$  соответствующие интервальные полюса в  $z$ -плоскости перемещаются внутри единичного круга (для устойчивых объектов), а в  $s$ -плоскости образуют последовательность вложенных интервалов, содержащих истинное значение полюса НПФ, и сужающуюся к нему. На рис. 2.4 изображена последовательность вложенных интервалов, соответствующая уточнению вещественно-значного полюса при изменении  $\Delta t$ . Каждый интервал здесь достроен до квадрата для наглядности представления.

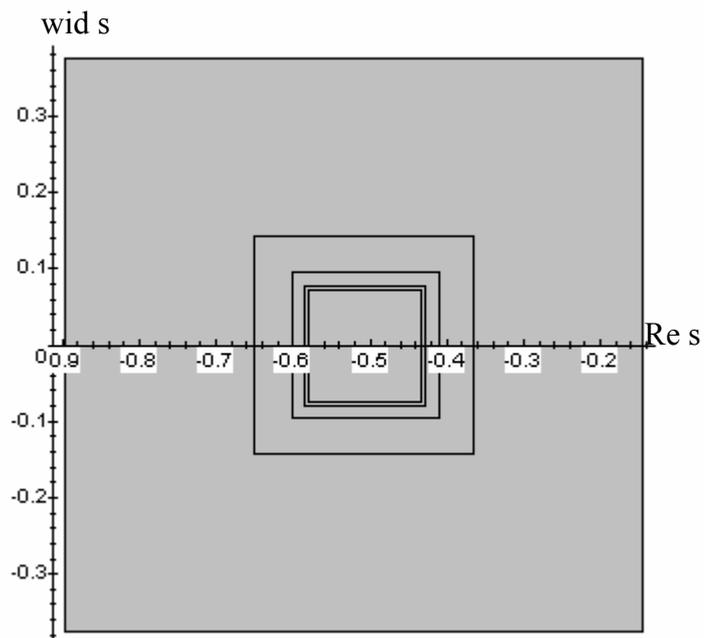


Рис. 2.4. Вложенные интервальные полюса, полученные для эквивалентных интервальных моделей

Если при каком-либо значении  $\Delta t > \Delta t_{\max}$  нарушается вложенность вещественных интервальных прообразов, то следует путём уменьшения  $\Delta t$  добиться попадания интервальных полюсов в основную полосу и получения эквивалентных моделей.

Для комплексных интервальных полюсов принцип вложенности может быть немного ослаблен до частичной вложенности. Например, действительные части комплексных полюсов могут быть полностью вложенными, но комплексные – все еще перемещаться, при этом также изменяясь в ширине. Однако в любом случае истинное значение комплексного полюса всегда будет находиться в пересечении всех комплексных интервалов, найденным из адекватных и эквивалентных моделей.

Итак, окончательно сформулируем **интервальный вариант принципа вариации шага дискретизации**:

- если при изменении шага дискретизации  $\Delta t$  конечное число полюсов (нулей) ИДПФ отображается в последовательность вложенных интервалов на  $s$ -плоскости, то эти точки являются интервальными полюсами (соответственно нулями) НПФ. В этом случае интервальные полюса (нули) стягиваются к истинным значениям полюсов (нулей), а соответствующие полученные ИДПФ считаются эквивалентными;
- если ИДПФ имеет конечное число строго отрицательных вещественно-значных интервальных полюсов (нулей), то их прообразы в НПФ отсутствуют;
- если часть полюсов (нулей) является вещественно-значными  $0$ -содержащими интервалами, либо интервалами, содержащими в себе значения границы устойчивости, то необходимо дальнейшее изменение периода дискретизации до тех пор, пока не будет установлено их действительное (неподвижное) расположение.

Таким образом, в интервальном случае, как и в точечном, вариация шага дискретизации позволяет установить достоверность и эквивалентность восстанавливаемой модели объекта на основе взаимно-однозначного соответствия между  $s$ - и  $z$ -плоскостями, которое достигается при использовании согласованного  $Z$ -преобразования.

## **§2.2. Примеры применения и сравнение интервального метода Висковатова и интервального модифицированного метода Висковатова. Чувствительность методов.**

В этом параграфе на примере апериодического объекта 1-го порядка будет продемонстрировано применение как исходных метода Висковатова и его модификации, так и интервальных вариантов метода Висковатова и модифицированного метода Висковатова. Таким образом, на каждом этапе можно будет произвести сравнение соответствующих точных и интервальных значений вычисляемых параметров. Далее во втором примере будет показано выполнение принципа вариации шага дискретизации для рассматриваемого объекта. В третьем примере также для апериодического объекта 1-го порядка приводится один из возможных путей исследования чувствительности ИММВ к незначительному перемещению полюса НПФ.

### **Пример 2.1. Восстановление дискретной модели апериодического объекта 1-го порядка и сравнение интервального метода Висковатова и интервального модифицированного метода Висковатова.**

В данном примере пройдем все этапы восстановления непрерывной модели по известным интервальным дискретным отсчетам. Для сравнения ИМВ и ИММВ между собой, а также сопоставления получаемых на каждом этапе интервальных результатов с точечными, рассмотрим один из наиболее простых линейных объектов. Возьмем в качестве непрерывной передаточной функции тестового объекта апериодический объект первого порядка

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (2.12)$$

где  $k$  – коэффициент передачи,  $T$  – постоянная времени, характеризующая инерционность объекта. Данная передаточная функция описывает работу таких технических объектов производства, как, например, барабанные мельницы, магнитный усилитель, генератор постоянного тока, механический спиральный

классификатор и др. [17, 24, 56]. При  $T > 0$  объект (2.12) является устойчивым и обладает свойством самовыравнивания, то есть с течением времени динамическая характеристика (переходная или импульсная) выходит на постоянное значение, определяемое коэффициентом  $k$ . Единственным полюсом НПФ является значение  $s^n = -\frac{1}{T}$ .

Положим для определенности  $k = 1$ ,  $T = 2$  с. Найдем отклик объекта на единичное ступенчатое воздействие  $x(t) = 1(t)$ , произведем дискретизацию с шагом  $\Delta t = 1.5$  с, построим точечную и интервальную ДПФ и переходные характеристики в виде конечно-разностного уравнения.

Для моделирования снятия измерений производим переход от НПФ во временную область, используя преобразование Лапласа:

$$y(t) = 1 - e^{-t/2}.$$

В точках отсчета переходная характеристика имеет вид

$$y(n\Delta t) = 1 - e^{-n\Delta t/2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом получим точные значения измерений переходной характеристики в точках отсчетов. Далее будем считать, что сами значения характеристики в точках отсчетов незашумлены, а интервальное представление исходных данных возникает в результате измерения значений вход-выходных переменных.

### ***1) Метод Висковатова.***

Рассчитаем коэффициенты точечной идентифицирующей матрицы Висковатова. Обращая внимание на то, что  $y(0) = 0$ , на основании сформулированного правила сдвинем нулевую строку на один элемент влево. Тогда применяя правило (1.10), получаем следующую матрицу:

1	1	1	1	...
0.528	0.777	0.895	0.950	...
-0.249236	-0.366967	-0.422579	...	...
0.000000	0.000000	...	...	...
...	...	...	...	...

**Замечание.** Все вычисления в этом примере и во всех последующих примерах как в точечных, так и интервальных случаях будут производиться с двойной точностью и округляться до 6 знаков после запятой. Это позволит в результате избежать быстрого накопления ошибок вычислений и округлений и получать более точные значения оценок.

Элементы нулевого столбца матрицы порождают непрерывную дробь

$$G_1^*(z) = \frac{0.528z^{-1}}{1 - \frac{0.249236z^{-1}}{0.528}}$$

Таким образом, дискретная передаточная функция (ДПФ) в виде дробно-рационального выражения имеет вид:

$$G_1^*(z) = \frac{0.528z^{-1}}{1 - 0.472038z^{-1}}$$

Используя  $z^{-1}$  как оператор обратного сдвига, получаем дискретную модель объекта в виде конечно-разностного уравнения:

$$y_1(n) = 0.528x(n-1) + 0.472038y(n-1), n = 0, 1, 2, \dots$$

## 2) Интервальный метод Висковатова.

На основе рассчитанных с шагом  $\Delta t = 1.5$  с точных значений переходной характеристики построим интервальную матрицу Висковатова, затем найдем ДПФ и переходную характеристику в виде конечно-разностного уравнения с интервальными коэффициентами, выделим граничные функции, интервально оценим значение полюса непрерывной модели по вычисленному значению интервального полюса ДПФ.

Зададим величины неопределённостей, моделируя ограниченную по амплитуде измерительную помеху:  $\varepsilon_x = 0.01$ ,  $\varepsilon_y = 0.01$ .

Идентифицирующая матрица, с учётом сдвига 1-ой строки влево на один элемент ( $y(0) = 0$ ), имеет вид:

[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	...
[0.52, 0.54]	[0.77, 0.79]	[0.89, 0.91]	[0.94, 0.96]	...	...
[-0.282281, -0.216191]	[-0.401190, -0.332745]	[-0.457358, -0.387801]	...	...	...
[-0.049879, 0.049902]	[-0.054613, 0.054648]	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Третья строка матрицы состоит из всех 0-содержащих интервалов, поэтому на этой строке вычисление коэффициентов матрицы прекращается.

Нулевой столбец матрицы порождает непрерывную дробь

$$G_1^{\text{R}}(z) = \frac{[0.52, 0.54]z^{-1}}{[0.99, 1.01] + \frac{[-0.282281, -0.216191]z^{-1}}{[0.518, 0.538]}}$$

После преобразований получаем ДПФ с интервальными коэффициентами:

$$G_1^{\text{R}}(z) = \frac{[0.52, 0.54]z^{-1}}{[0.99, 1.01] - [0.401842, 0.544944]z^{-1}}$$

Найдем полюс ИДПФ:

$$Z_1^{\text{R}} = [0.397863, 0.550448], \text{ wid } Z_1^{\text{R}} = 0.152585.$$

Интерпретируем оператор  $z^{-1}$  как обратный сдвиг во временной плоскости.

Конечно-разностное уравнение принимает отсюда вид

$$y_1^{\text{R}}(n) = [0.493443, 0.564047]x(n-1) + [0.398135, 0.550839]y(n-1)$$

Выделяя граничные функции, для  $n = 0, 1, 2, \dots$  получаем

$$y_{1\text{min}}(n) = 0.493443x(n-1) + 0.398135y(n-1),$$

$$y_{1\text{max}}(n) = 0.564047x(n-1) + 0.550839y(n-1).$$

Рассчитанные значения граничных функций  $y_{1\text{min}}(n)$ ,  $y_{1\text{max}}(n)$  и ширина получаемых интервалов  $\text{wid } y_1(n) = y_{1\text{max}}(n) - y_{1\text{min}}(n)$  представлены в табл. 2.2. На рис. 2.5 приведены точные значения отсчетов  $y(n\Delta t)$  и модельные интервалы  $[y_{\text{min}}(n), y_{\text{max}}(n)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

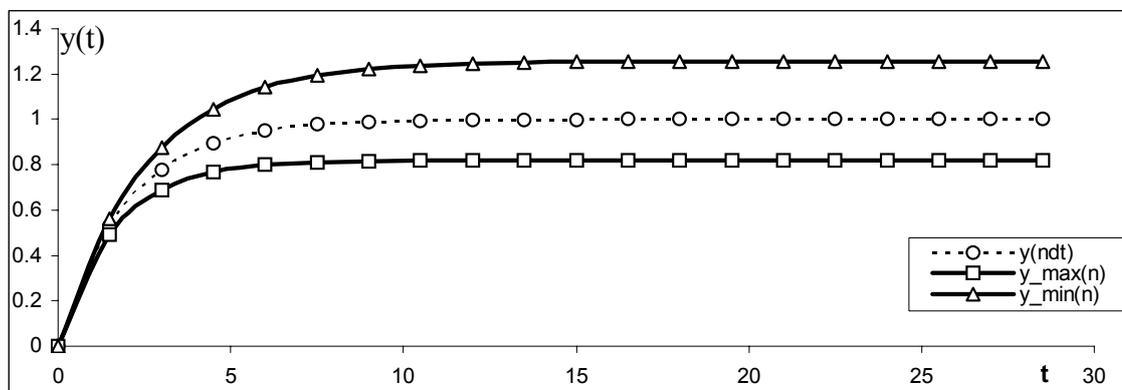


Рис. 2.5. Граничные функции переходной характеристики  $[y_{\text{min}}(n)$  и  $y_{\text{max}}(n)]$ , полученные интервальным методом Висковатова при  $\Delta t = 1.5$  с,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.01$ , и исходные точечные измерения  $y(n\Delta t)$

Теперь рассмотрим модифицированный метод Висковатова и его интервальное расширение для этого же тестового объекта, и сравним эти два метода.

### 3) Модифицированный метод Висковатова.

На основе тех же отсчетов, снятых с шагом дискретизации  $\Delta t = 1.5$  с, рассчитаем коэффициенты точечной матрицы Висковатова:

1	1	1	1	...
0.528	0.777	0.895	0.950	...
-0.472367	-0.695497	-0.800896	...	...
0.000000	0.000000	...	...	...
...	...	...	...	...

Элементы нулевого столбца порождают непрерывную дробь – ДПФ объекта в виде дробно-рационального выражения:

$$G_2^*(z) = \frac{0.528z^{-1}}{1 - 0.472367z^{-1}}$$

Используя  $z^{-1}$  как оператор обратного сдвига, получаем дискретную модель объекта в виде конечно-разностного уравнения:

$$y_2(n) = 0.528x(n - 1) + 0.472367y(n - 1), n = 0, 1, 2, \dots$$

### 2) Интервальный модифицированный метод Висковатова

Для сравнения с исходным методом Висковатова считаем, что точность измерений не изменилась:  $\varepsilon_x = 0.01$ ,  $\varepsilon_y = 0.01$ .

Тогда идентифицирующая матрица принимает следующий вид:

[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	...
[0.52, 0.54]	[0.77, 0.79]	[0.89, 0.91]	[0.94, 0.96]	...	...
[-0.539931, -0.406178]	[-0.767372, 0.093833]	[-0.874808, -0.728597]	...	...	...
[-0.462868, 1.751144]	[-0.508391, 0.398145]	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Третья строка матрицы состоит из интервалов, содержащих в себе число 0, поэтому на этой строке вычисление коэффициентов матрицы прекращается.

Нулевой столбец матрицы порождает непрерывную дробь

$$G_2^{\text{IR}}(z) = \frac{\frac{[0.52, 0.54]}{[0.99, 1.01]} z^{-1}}{1 + [-0.539931, -0.406178] z^{-1}}$$

После преобразований получаем ДПФ с интервальными коэффициентами:

$$G_2^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.514851, 0.545455] z^{-1}}{1 + [-0.539931, -0.406178] z^{-1}}.$$

Поллюсом ИДПФ является интервал

$$Z_2^{\text{II}} = [0.406178, 0.539931], \text{ wid } Z_2^{\text{II}} = 0.133753.$$

Отметим, что структура полученной ИДПФ совпадает с ИДПФ, построенной ранее методом Висковатова.

Конечно-разностное уравнение принимает вид

$$y_2^{\text{IR}}(n) = [0.514851, 0.545455]x(n-1) + [0.406178, 0.539931]y(n-1).$$

Выделяя граничные функции, получаем

$$y_{2\text{min}}(n) = 0.514851x(n-1) + 0.406178y(n-1),$$

$$y_{2\text{max}}(n) = 0.545455x(n-1) + 0.539931y(n-1),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

На рис. 2.6 представлены граничные функции, полученные с помощью ИММВ.

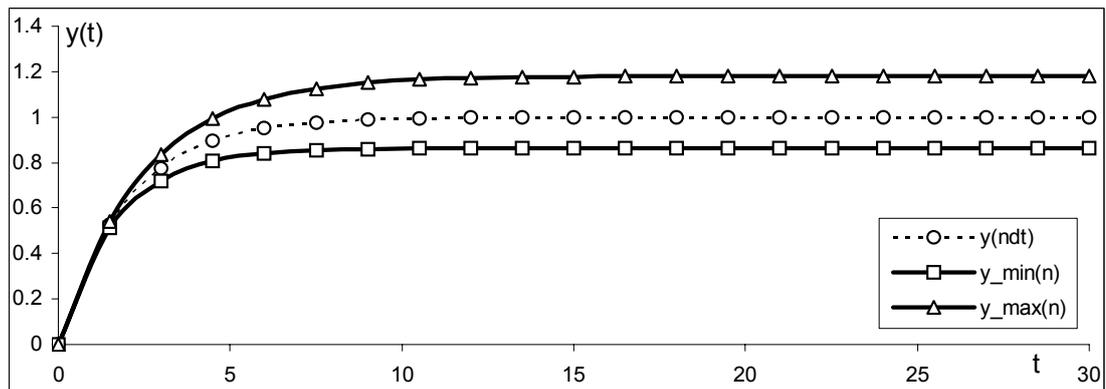


Рис. 2.6. Граничные функции переходной характеристики  $[y_{\text{min}}(n)$  и  $y_{\text{max}}(n)]$ , полученные интервальным модифицированным методом Висковатова при  $\Delta t = 1.5$  с,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.01$ , и исходные точечные измерения  $y(n\Delta t)$

Отметим, что оба метода позволяют получить оценки параметров ИДПФ и интервальной динамической характеристики в виде интервалов, содержащих точечные значения, соответствующие точно заданным исходным данным для

каждого из этих методов. При этом оценки параметров в ИММВ имеют меньшую ширину, нежели в ИМВ. Это связано с большим числом операций над интервалами в ИМВ, что приводит к расширению результирующих интервальных оценок.

Для сравнения результатов ИМВ и ИММВ приведем в табл. 2.2 рассчитанные значения граничных функций и ширину модельных интервалов  $y_1^{IR}(n)$  и  $y_2^{IR}(n)$ ,  $n = 0, \dots, 20$ .

Таблица 2.2. Сравнение интервалов, полученных ИМВ и ИММВ

n	nΔt	y(nΔt)	y <sub>1min</sub> (n)	y <sub>1max</sub> (n)	wid y <sub>1</sub> <sup>IR</sup> (n)	y <sub>2min</sub> (n)	y <sub>2max</sub> (n)	wid y <sub>2</sub> <sup>IR</sup> (n)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1.5	0.527633	0.493443	0.564047	0.070604	0.512508	0.543064	0.030556
2	3	0.776870	0.689900	0.874746	0.184846	0.720678	0.836281	0.115603
3	4.5	0.894601	0.768117	1.045891	0.277774	0.805232	0.994599	0.189366
4	6	0.950213	0.799257	1.140164	0.340907	0.839576	1.080079	0.240503
5	7.5	0.976482	0.811656	1.192094	0.380438	0.853526	1.126233	0.272707
6	9	0.988891	0.816592	1.220699	0.404107	0.859192	1.151153	0.291960
7	10.5	0.994752	0.818557	1.236455	0.417898	0.861494	1.164608	0.303114
8	12	0.997521	0.819339	1.245135	0.425795	0.862429	1.171872	0.309444
9	13.5	0.998829	0.819651	1.249915	0.430264	0.862808	1.175795	0.312987
10	15	0.999447	0.819775	1.252549	0.432774	0.862962	1.177913	0.314950
11	16.5	0.999739	0.819824	1.254000	0.434175	0.863025	1.179056	0.316031
12	18	0.999877	0.819844	1.254799	0.434955	0.863051	1.179674	0.316623
13	19.5	0.999942	0.819852	1.255239	0.435387	0.863061	1.180007	0.316946
14	21	0.999972	0.819855	1.255481	0.435626	0.863065	1.180187	0.317122
15	22.5	0.999987	0.819856	1.255615	0.435759	0.863067	1.180284	0.317217
16	24	0.999994	0.819857	1.255688	0.435832	0.863067	1.180337	0.317269
17	25.5	0.999997	0.819857	1.255729	0.435872	0.863068	1.180365	0.317297
18	27	0.999999	0.819857	1.255751	0.435894	0.863068	1.180380	0.317312
19	28.5	0.999999	0.819857	1.255764	0.435907	0.863068	1.180388	0.317320
20	30	1.000000	0.819857	1.255770	0.435913	0.863068	1.180393	0.317325

Очевидно, что при заданном шаге дискретизации модельные интервалы, полученные ИММВ, в каждой точке отсчета имеют меньшую ширину, чем интервалы, полученные ИМВ. Таким образом, интервальная модель, полученная в результате применения ИММВ, является более точной в смысле ширины модельных интервалов  $y(n)$ .

Для полного восстановления непрерывной модели необходимо найти оценки ее нулей, полюсов и коэффициента передачи. Рассматриваемый объект

имеет один полюс и не имеет нулей. Так, переводя с помощью обратного  $Z$ -преобразования интервальные полюса ИДПФ  $G_1^{\text{IR}}(z)$  и  $G_2^{\text{IR}}(z)$  в  $s$ -плоскость, получаем

$$S_1^{\text{II}} = [-0.614431, -0.398015], \text{ wid } S_1^{\text{II}} = 0.216416;$$

$$S_2^{\text{II}} = [-0.600643, -0.410876], \text{ wid } S_2^{\text{II}} = 0.189767.$$

Сравнение интервальных восстановленных полюсов с истинным значением полюса НПФ  $s^{\text{II}} = -0.5$  показывает, что  $s^{\text{II}} \in S_1^{\text{II}}$  и  $s^{\text{II}} \in S_2^{\text{II}}$ , однако полюс  $S_2^{\text{II}}$  является более точной интервальной оценкой в смысле уменьшения ширины интервала.

Последним этапом найдем интервалы для коэффициента передачи  $k$ . Так как на вход объекта подавалось ступенчатое воздействие, и объект является устойчивым, то согласно выражению (2.11) находим

$$K_1 = [0.855041, 1.213330], \text{ wid } K_1 = 0.358289;$$

$$K_2 = [0.866980, 1.185594], \text{ wid } K_2 = 0.318614.$$

Как и в случае вычисления полюсов, интервал  $K_2$ , полученный из ИММВ, дает более точное интервальное значение оценки истинного значения коэффициента НПФ ( $k = 1$ ).

Таким образом, восстановленные НПФ (с интервальными параметрами) для рассмотренных шагов дискретизации принимают вид:

$$G_1^{\text{IR}}(s) = \frac{[0.855041, 1.213330]}{s + [0.398015, 0.614431]}$$

$$G_2^{\text{IR}}(s) = \frac{[0.866980, 1.185594]}{s + [0.410876, 0.600643]}.$$

Итак, действительно применение ИММВ (случай  $G_2^{\text{IR}}(s)$ ) приводит к получению более точных оценок параметров.

По результатам моделирования можно грубо выделить примерные значения шага  $\Delta t$  (табл. 2.3), начиная с которых граничные функции,

построенные для объекта с НПФ  $G(s) = \frac{1}{2s + 1}$ , начинают устанавливаться на постоянный уровень при различных значениях интервальной неопределённости  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  (интервалы построены по незашумленным значениям входа и выхода, условие идентифицируемости для данного объекта при малых значениях  $\Delta t$  выполняется):

Таблица 2.3. Время установления граничных функций

$\varepsilon_x \backslash \varepsilon_y$	$\pm 0$	$\pm 0.001$	$\pm 0.01$	$\pm 0.1$
$\pm 0$	0.1 с	0.2 с	0.5 с	1.8 с
$\pm 0.001$	0.1 с	0.3 с	0.6 с	1.9 с
$\pm 0.01$	0.2 с	0.4 с	0.7 с	2.0 с
$\pm 0.1$	0.7 с	0.8 с	1.0 с	2.4 с

По данным этой таблицы можно сделать вывод о том, что на скорость установления граничных функций большее влияние оказывает точность измерения выходной величины, тогда как точность измерения входа объекта незначительно влияет на скорость выхода граничных функций в установившийся режим.

Итак, в случае апериодического объекта 1-го порядка ИММВ дает более точные интервальные оценки полюсов и коэффициента передачи, чем ИМВ. Расширение интервалов в ИМВ происходит из-за большего количества интервальных вычислений, приводящих к огрублению интервальных коэффициентов и параметров.

Модифицированный метод обладает рядом преимуществ с точки зрения сложности и точности интервальных вычислений. Поэтому далее в работе предпочтение будет отдаваться именно интервальному модифицированному методу Висковатова.

### Пример 2.2. Принцип вариации шага дискретизации и эквивалентность дискретных моделей апериодического объекта 1-го порядка

Теперь на этом же тестовом объекте (апериодическом 1-го порядка) покажем действие принципа вариации шага дискретизации, а также процесс уточнения интервальной модели. Проследим за перемещением интервальных полюсов в  $z$ - и  $s$ -плоскости при построении модели с помощью ИММВ для различных значений  $\Delta t$ . В табл. 2.4 приведены некоторые найденные интервальные полюса ДПФ и восстановленные полюса НПФ, интервальный коэффициент передачи НПФ и ширина этих интервальных параметров, а также максимальная ширина между граничными функциями переходной характеристики (при установлении их на постоянное значение):

Таблица 2.4. Изменение положения и ширины интервальных параметров дискретной и непрерывной моделей при вариации  $\Delta t$

$\Delta t$	0.4 с	0.5 с	1 с	2 с	3 с	3.5 с	4 с
$Z^n$	[0.651159, 1.003112]	[0.638408, 0.930175]	[0.521726, 0.694305]	[0.310801, 0.425743]	[0.174675, 0.271922]	[0.127577, 0.220208]	[0.090720, 0.180122]
wid $Z^n$	0.351953	0.291767	0.172579	0.114941	0.097247	0.092631	0.089402
$S^n$	[-1.072504, 0.007767]	[-0.897555, -0.144765]	[-0.650613, -0.364844]	[-0.584300, -0.426960]	[-0.581609, -0.434080]	[-0.588296, -0.432338]	[-0.599994, -0.428531]
wid $S^n$	1.080271	0.752791	0.285769	0.157341	0.147529	0.155958	0.171464
$K$	-	[0.578299, 3.344582]	[0.793839, 1.333174]	[0.893735, 1.129471]	[0.919974, 1.091666]	[0.926322, 1.083203]	[0.930629, 1.077599]
wid $K$	-	2.766283	0.539336	0.235736	0.171692	0.156881	0.146969
max $y(n)$	-	2.766283	0.539312	0.235736	0.171692	0.156881	0.146969

Прочерки при  $\Delta t = 0.4$  с означают, что при этом шаге дискретизации не происходит установление граничных функций на постоянные значения, ширина модельных интервалов  $y(n)$  неограниченно возрастает с возрастанием числа отсчетов  $n\Delta t$ .

Сравнение значений в табл. 2.4 позволяет сделать вывод о том, что полюс  $Z^n$  с уменьшением  $\Delta t$  действительно перемещается к точке  $(1, 0)$ , и при некоторых малых  $\Delta t$  (в таблице – 0.4 с) начинает пересекать единичную окружность, выходя за пределы области устойчивости. Соответствующее

интервальное значение полюса НПФ  $S^n$  также захватывает часть области неустойчивости ( $\text{Re } s > 0$ ). При увеличении  $\Delta t$  происходит сужение полюса  $Z^n$  и его перемещение вдоль оси к началу координат. При  $\Delta t = 6$  с свойства модели и точность интервальных оценок еще сохраняются. Но, например, уже при  $\Delta t \geq 6.5$  с полюс  $Z^n$  частично попадает на разрез и затем с дальнейшим увеличением  $\Delta t$  остается  $\theta$ -содержащим интервалом – это означает, что интервал попадает на границу основной полосы и затем выходит за ее пределы. Следовательно, модель при таких значениях  $\Delta t$  является неадекватной, поскольку не происходит идентификация полюса НПФ.

Соответствующие значения полюса  $S^n$  с возрастанием  $\Delta t$  сначала сужаются и являются вложенными интервалами, стремящимися к фиксированной точке – истинному полюсу ДПФ. Однако, начиная с некоторого  $\Delta t$ , ширина интервального полюса снова возрастает (в таблице начиная с  $\Delta t = 3$  с).

Таким образом, для рассматриваемого объекта можно грубо выделить примерный диапазон значений шага дискретизации  $\Delta t \in [0.5, 6]$ , при которых получаем адекватные эквивалентные модели, отличающиеся лишь точностью восстановления интервальных параметров НПФ (в смысле получения наибольшего сужения интервальных параметров).

В пункте 2.1.3. уже говорилось о связи между интервальным коэффициентом передачи  $K$  и шириной интервалов, образуемых граничными функциями переходной характеристики в точках отсчетов. Действительно, из таблицы видно, что ширина этих двух параметров совпадает. Таким образом можно использовать параметр  $K$  для оценки точности полученной интервальной переходной характеристики сразу после восстановления НПФ, не переходя к интервальному конечно-разностному уравнению и не дожидаясь его установления на постоянное значение (что иногда требует значительных временных затрат).

### Пример 2.3 Чувствительность интервального модифицированного метода Висковатова (на примере апериодического объекта 1-го порядка)

Дальнейшие исследования в области интервальной SP-идентификации приводят к следующим задачам:

- а) изучение чувствительности метода к изменению параметров математической модели;
- б) изучение потенциальной возможности получения одновременно максимальной суженности и различимости динамических характеристик объектов с близкими значениями параметров.

Для исследования чувствительности интервального представления ДПФ рассмотрим два устойчивых апериодических динамических объекта 1-го порядка с различными, но близкими (с некоторой точностью) значениями полюсов:

$$G_1(s) = \frac{k}{T_1 s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{k}{T_2 s + 1}.$$

С другой стороны, НПФ  $G_1(s)$  и  $G_2(s)$  можно рассматривать как один и тот же объект, у которого произошло перемещение полюса: полюс  $s_1 = -1/T_1$  изменил значение на близкое к нему  $s_1 = -1/T_2$ . Учтем, что в каждом случае восстановление соответствующих ДПФ и НПФ происходит при некоторых «допустимых» шагах дискретизации  $\Delta t \in [\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max}]$ , определяемых динамическими свойствами конкретного объекта идентификации.

На первом этапе для НПФ  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  путём имитационного моделирования определяем  $\Delta t_1 \in [\Delta t_{1\min}, \Delta t_{1\max}]$ ,  $\Delta t_2 \in [\Delta t_{2\min}, \Delta t_{2\max}]$ . Теоретические и модельные исследования интервальной SP-идентификации такого рода объектов позволяют сформулировать следующее утверждение:

#### Утверждение 2.1.

- а) максимальное сужение интервальных значений полюсов дискретных и непрерывных ПФ достигается при выборе максимального значения периода дискретизации  $\Delta t$  в допустимом диапазоне  $[\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max}]$ ;

б) при  $[\Delta t_{1\min}, \Delta t_{1\max}] \cap [\Delta t_{2\min}, \Delta t_{2\max}] \neq \emptyset$  существует такой интервал значений шагов дискретизации, при которых интервальные полюса  $S_1 = [s_{11}, s_{12}]$  для ПФ  $G_1(s)$  и  $S_2 = [s_{21}, s_{22}]$  для  $G_2(s)$  перестают перекрываться, то есть расстояние между интервалами  $\rho = s_{21} - s_{12} > 0$ ;

в) существует такой период дискретизации  $\Delta t_0$ , принадлежащий пересечению допустимых временных интервалов, при котором достигается максимальное разделение интервальных полюсов, то есть  $\rho_{\max} = \max_{\rho > 0} \rho$ .

Сформулированные положения позволяют оценить изменения динамических характеристик рассматриваемых объектов, и тем самым определяют чувствительность способа структурно-параметрической идентификации при интервальных исходных данных, полученных в дискретные моменты времени.

Для иллюстрации приведенных положений рассмотрим два апериодических объекта с временными параметрами  $T_1 = 2$  с и  $T_2 = 2.5$  с, то есть в точечном варианте полюса  $s_1 = -0.5$  и  $s_2 = -0.4$  незначительно с точки зрения практики отличаются друг от друга. Путём имитационного моделирования определим (приблизительно) допустимые диапазоны периодов дискретизации:  $[\Delta t_{1\min}, \Delta t_{1\max}] \cap [\Delta t_{2\min}, \Delta t_{2\max}] = [0.1$  с,  $7.6$  с].

Результаты имитационного моделирования в кратком изложении можно сформулировать следующим образом:

1. Если период дискретизации  $\Delta t \in [0.2$  с,  $0.8$  с], то полюса  $[s_{11}, s_{12}]$  и  $[s_{21}, s_{22}]$  перекрываются ( $\rho < 0$ ), и однозначно утверждать о различии переходных характеристик невозможно.
2. Если  $\Delta t \in [0.9$  с,  $5.6$  с], то интервальные полюса разделяются ( $\rho > 0$ ), причем при  $\Delta t = 2.5$  с они отстоят друг от друга на максимальное расстояние  $\rho_{\max}$ , то есть наблюдается максимальная различимость моделей и их динамических характеристик.

3. Если  $\Delta t \in [5.7 \text{ с}, 7.6 \text{ с}]$ , то наблюдается сближение интервальных полюсов и их последующее перекрывание, то есть снова возникает неопределённость. При  $\Delta t = 7.6 \text{ с}$  ширина интервальных полюсов и динамической характеристики минимальна.
4. При  $\Delta t = 7.7 \text{ с}$  происходит изменение структуры ПФ, т. е. наблюдается эффект подмены порядков моделей, и при таком значении  $\Delta t$  невозможно получить адекватную модель объекта, соответствующую исходным данным. На рис. 2.7 приведены результаты моделирования.

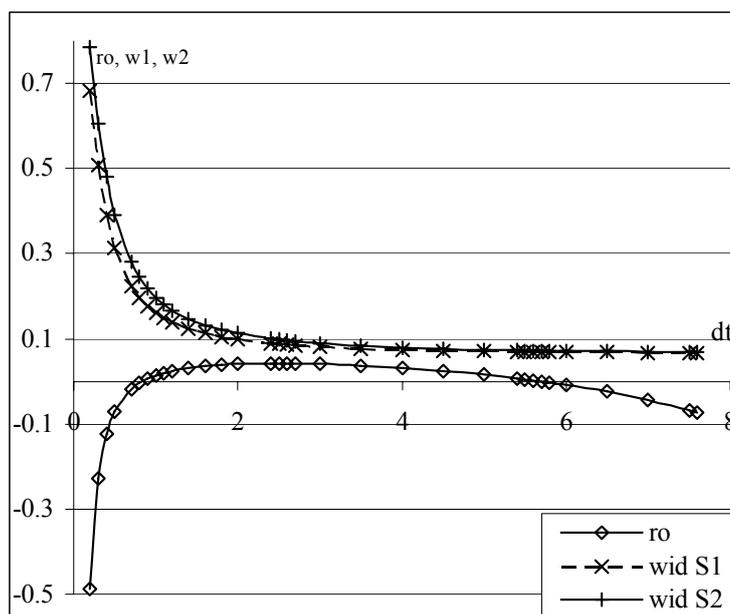


Рис. 2.7. Результаты моделирования для апериодического объекта 1-го порядка:  $ro$  – степень различимости интервалов:  $\rho = s_{21} - s_{12}$ ;  $wid S_1 = s_{12} - s_{11}$ ;  $wid S_2 = s_{22} - s_{21}$

Если рассматривать данные объекты как различные и независимые друг от друга, то на основе полученных значений можно утверждать о существовании таких оптимальных периодов дискретизации  $\Delta t$ , при которых одновременно достигаются и высокая степень различимости полюсов передаточных функций, и максимальное сужение их интервальных представлений. То есть при заданной точности исходных данных возможно получение двух различающихся моделей для объектов с близкими (с некоторой точностью) значениями параметров.

Если же рассматривать заданные передаточные функции как один объект с изменившимся значением полюса, то разделение полюсов говорит о том, что для этого объекта при незначительном перемещении полюса некоторые допустимые значения периода  $\Delta t$  приводят к получению двух различных интервальных ДПФ. Если же при выбранном  $\Delta t$  полное разделение полюсов не происходит, то и в этом случае эти модели не являются эквивалентными. Однако, при некоторых значениях  $\Delta t$  интервальные полюса обеих передаточных функций все же имеют непустое пересечение. Этот факт является дополнительной неопределённостью в интерпретации результатов: считать ли это пересечение показателем того, что все-таки произошла идентификация одного и того же объекта, либо считать наложение полюсов случайным совпадением, связанным со свойствами метода идентификации, представления в виде интервальных чисел и т.д.

В данной работе не проводятся более полные теоретические и практические исследования, посвященные ограничениям на шаг дискретизации для различных типов линейных динамических объектов и не исследуется проблема выбора оптимальных значений  $\Delta t$ , поскольку, по мнению автора, эти задачи требуют отдельного тщательного теоретического и практического рассмотрения.

## Выводы

Предложенный в работе метод интервальной SP-идентификации позволяет с учётом интервального представления исходных измерений получать достоверные дискретные модели в виде дискретной передаточной функции с интервальными коэффициентами и конечно-разностного уравнения, представимого граничными функциями и описывающего его реакцию на фиксированное входное воздействие. Используемый аппарат непрерывных дробей однозначно определяет порядок модели при заданном значении шага дискретизации.

Основным параметром, влияющим на возможность полного восстановления модели, на получение достоверных интервальных оценок параметров объекта и модельных интервалов для значений динамической характеристики, является период дискретизации. Восстановленные параметры ИДФ позволяют найти интервальные оценки параметров исходной НПФ объекта, причем их ширина зависит от заданного шага дискретизации. Установленный принцип вариации шага дискретизации позволяет сформулировать условия интервальной SP-идентифицируемости, что позволяет установить эквивалентность дискретных передаточных функций при различных значениях шага дискретизации.

Рассмотрение аperiodического объекта 1-го порядка дает возможность на простом примере проследить за всеми этапами восстановления дискретной модели объекта и установить их взаимосвязь с соответствующими этапами исходного точечного метода SP-идентификации. С точки зрения чувствительности к изменениям параметров объекта в процессе функционирования метод является грубым, робастным, поскольку получаемые интервальные оценки являются грубыми, и в ряде случаев (в зависимости от шага дискретизации и расположения истинных нулей и полюсов объекта) возникает неопределённость в вынесении решения об изменении параметров объекта.

### **Глава 3. Особенности восстановления интервальных дискретных моделей объектов высоких порядков**

В этой главе исследуется ряд особенностей применения способа интервальной SP-идентификации. Поскольку аппарат непрерывных дробей является в большей степени алгоритмическим [22, 84, 96, 100], то, как правило, не представляется возможным проводить теоретические исследования в общем виде. Поэтому основная часть изложения ведется посредством демонстрации на конкретных примерах, по результатам которых и другим проведенным многочисленным тестовым исследованиям будут выноситься выводы и обобщения. В первом параграфе предложен способ решения интервального квадратного уравнения второго порядка, применение которого к объектам высоких порядков позволяет найти интервальные нули и полюса ДПФ и затем перейти к оценкам параметров НПФ. Для вычисления интервальных корней полиномов более высокого порядка используются численные методы, поэтому далее в этом же параграфе обзорно приведены простейший метод деления пополам и короткошаговый итерационный метод ньютоновского типа. Во втором параграфе на примере апериодического объекта 2-го порядка будет показан процесс вычисления полюсов ИДПФ и полного восстановления НПФ объекта. Здесь же будет продемонстрировано влияние изменения вида входного воздействия на структуру и точность получаемой модели этого объекта, показано действие принципа вариации шага дискретизации и изменение при этом точности интервальных результатов. В последнем примере параграфа для того же апериодического объекта будет показано преимущество использования граничных функций.

### §3.1. Вычисление нулей и полюсов интервальной дискретной передаточной функции

#### 3.1.1. Решение интервального квадратного уравнения с помощью интервального дискриминанта

Рассмотрим в общем виде особенности нахождения интервальных полюсов объекта второго порядка. Основными задачами при исследовании данного класса объектов идентификации являются:

а) возможность вычисления двух интервальных полюсов, вещественных или комплексных, и получение для различных истинных полюсов максимальной степени различимости их интервальных оценок;

б) получение максимального сужения различных интервальных полюсов при их разделении.

При интервальных исходных данных, полученных в равноотстоящие дискретные моменты времени  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  из диапазона допустимых значений  $(\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , метод интервальной структурно-параметрической идентификации приводит к ИДПФ вида

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{P_m(z)}{1 + [b_1, b_2]z^{-1} + [c_1, c_2]z^{-2}}, \quad (3.1)$$

где  $P_m(z)$  – полином некоторой степени  $m \leq 2$  для нахождения нулей ИДПФ.

Характеристический полином для нахождения интервальных полюсов имеет следующий вид:

$$F(z) = z^2 + [b_1, b_2]z + [c_1, c_2] \quad (3.2)$$

причем для устойчивого объекта  $|z| < 1$ , а значения и ширина интервальных коэффициентов зависят от  $\Delta t$ .

Таким образом, для определения полюсов объекта (3.1) необходимы способы локализации нулей квадратичной функции с интервальными коэффициентами, что сводится к решению интервального квадратного уравнения.

**Замечание.** Далее рассматривается только случай приведенного квадратного уравнения, поскольку применение модифицированного метода Вискватова, основанного на использовании правильных  $S$ -дробей, приводит к полиномам в числителе и знаменателе ДПФ, в которых коэффициент при старшей степени всегда равен 1.

Среди существующих работ по решению интервальных уравнений можно отметить [51], в которой один из разделов посвящен решению квадратного уравнения с интервальными коэффициентами. Предложенный в [51] подход обладает рядом особенностей, из-за которых он неприменим к решению рассматриваемой в настоящей работе задаче идентификации: 1) решения уравнения не зависят от дополнительных параметров; 3) не рассматривается случай комплексных корней, так как дискриминант считается неотрицательным; 2) для нахождения интервального решения используется расширенная интервальная арифметика (Каухера).

При структурно-параметрической идентификации объекта 2-го порядка одной из наиболее важных проблем является учёт влияния изменения шага дискретизации на получаемые оценки параметров модели. Решения квадратного характеристического уравнения в этом случае неявно зависят от дополнительного параметра – выбранного шага дискретизации  $\Delta t$ . При его изменении получают набор эквивалентных ИДПФ, имеющих различные полюса, по которым вычисляются достоверные оценки полюсов непрерывной передаточной функции.

Поэтому в данной работе решение интервального квадратного уравнения в большей степени связано с вопросом о восстановлении и различимости полюсов (аналогично – нулей) дробно-рациональной ИДПФ. Кроме того, предлагаемый ниже способ нахождения корней может быть использован для нахождения комплексных корней интервального квадратного уравнения, а все

операции над интервалами выполняются по правилам классической интервальной арифметики.

Обозначим  $B = [b_1, b_2]$ ,  $C = [c_1, c_2]$ . Тогда нули интервальной функции  $F(z)$  находятся из уравнения, имеющего исходный вид

$$z^2 + Bz + C = 0 \quad (3.3)$$

то есть рассматривается расширение числового квадратного уравнения по множеству параметров. Согласно [108],  $F(z)$  представима граничными функциями:

$$F(z) = [f_{\min}(z), f_{\max}(z)], \quad (3.4)$$

ветви которых зависят от знака переменной  $z$ . В общем виде график интервальной параболы, соответствующей такому представлению, имеет следующий вид, показанный на рис. 3.1.

Здесь прямоугольником  $P=P_1P_2P_3P_4$  отмечено множество, ограничиваемое вершинами нижней ( $P_1$ ) и верхней ( $P_3$ ) граничных функций. Однако, множество вершин всех парабол вида  $f(z) = z^2 + bz + c$  таких, что  $b \in [b_1, b_2]$ ,  $c \in [c_1, c_2]$  является лишь подмножеством отмеченной области. То есть в  $P_1P_2P_3P_4$  существует множество точек, которым не соответствует ни одна парабола с параметрами из интервалов  $B$  и  $C$ . В частности, это «крайние» точки  $P_2$  и  $P_4$ .

Нулем функции  $F(z)$  (3.2) является отрезок оси абсцисс  $Oz$ , отсекаемый интервальной параболой, описываемой этой функцией.

Другой отличительной особенностью такого расширения квадратичной функции является то, что уравнения ветвей граничных функций имеют различный вид при  $z < 0$  и  $z \geq 0$ .

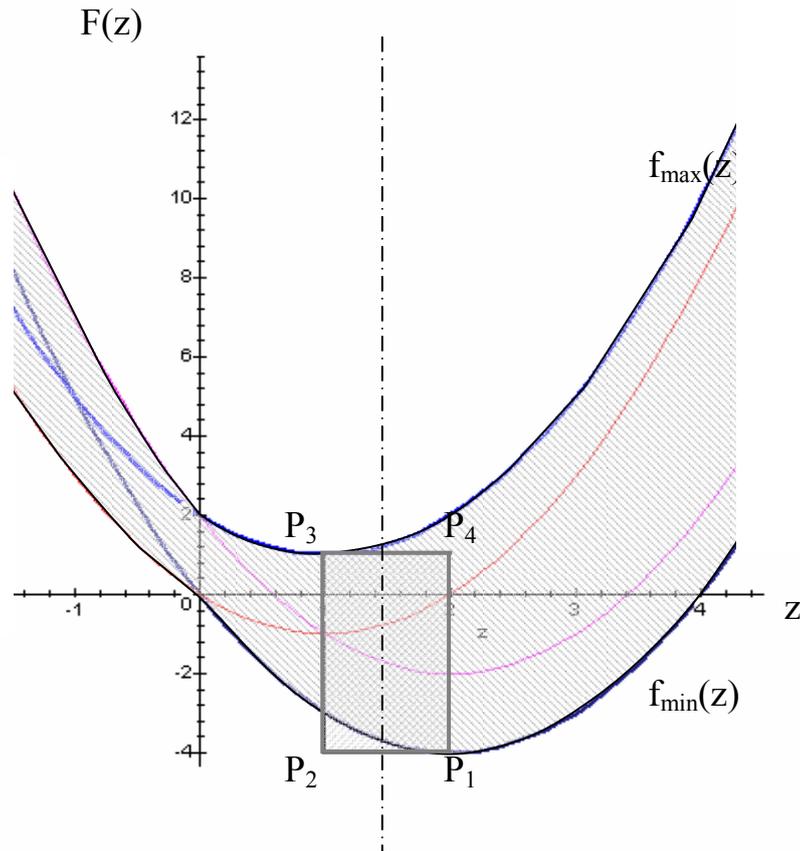


Рис. 3.1. Общий вид интервальной параболы

В качестве способа нахождения нулей функции (3.2) рассмотрим расширение известного метода вычисления дискриминанта квадратичной функции на множество интервальных чисел. Тогда интервальный дискриминант имеет вид

$$D = B^2 - 4C = [D_1, D_2], \quad (3.5)$$

причем его границы и ширина зависят от  $\Delta t$ . Возможны следующие значения интервального дискриминанта  $D$ , определяющие взаимное расположение интервальных полюсов – корней уравнения (3.3):

1. При  $D > 0$  интервальные полюса вещественны и различны.
2. При  $0 \in D$  – полюса частично перекрываются или полностью совпадают, что вызывает неопределённость в существовании двух различных полюсов.
3. При  $D < 0$  полюса являются сопряженными комплексно-значными интервалами.

Для вычисления интервальных значений полюсов  $Z_1, Z_2$  можно использовать интервальное расширение метода нахождения корней вещественной квадратичной функции:

$$Z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2}, \quad (3.6)$$

учитывая свойство монотонности вещественной функции  $\sqrt{x}$  и применяя правила интервальной арифметики, получаем значения

$$Z_{1,2} = \begin{cases} \left[ \frac{-b_2}{2}, \frac{-b_1}{2} \right] \pm \left[ \frac{\sqrt{D_1}}{2}, \frac{\sqrt{D_2}}{2} \right], & \text{если } D > 0, \\ \left[ \frac{-b_2}{2}, \frac{-b_1}{2} \right] \pm i \left[ \frac{\sqrt{-D_2}}{2}, \frac{\sqrt{-D_1}}{2} \right], & \text{если } D < 0; \end{cases} \quad i^2 = -1. \quad (3.7)$$

Если  $0 \in D$ , то расширение известного выражения

$$Z_{1,2} = \frac{-B}{2} = \left[ \frac{-b_2}{2}, \frac{-b_1}{2} \right]$$

дает в качестве решения интервального уравнения множество точек оси  $Oz$ , лежащих в границах прямоугольника  $P$ , ограничивающего множество вершин интервальной параболы. Очевидно, что полученный интервал является лишь подмножеством реального интервала – корня уравнения. Для уточнения решения необходимо найти нули функции по формуле (3.7):

$$Z_1 = [z_{1\min}, z_{1\max}] + i [\operatorname{Im} z_{1\min}, \operatorname{Im} z_{1\max}],$$

$$Z_2 = [z_{2\min}, z_{2\max}] + i [\operatorname{Im} z_{2\min}, \operatorname{Im} z_{2\max}].$$

Так как  $D_1 \leq 0 \leq D_2$ , то  $0 \in [\operatorname{Im} z_{1\min}, \operatorname{Im} z_{1\max}]$  и  $0 \in [\operatorname{Im} z_{2\min}, \operatorname{Im} z_{2\max}]$ , причем в каждом из этих интервалов число 0 будет одной из границ интервалов. Затем производится объединение действительных частей полученных интервалов:  $Z = \operatorname{Re} Z_1 \cup \operatorname{Re} Z_2$ , в результате получаем один вещественно-значный интервал

$$Z = [z_{1\min}, z_{2\max}],$$

который и будет являться нулем функции (3.2).

Появление комплексных нулей здесь связано с тем, что интервал-дискриминант (3.5) содержит в себе не только число 0, но и отрицательные

и/или положительные значения. То есть часть квадратичных функций с вещественными параметрами, принадлежащими интервалам-параметрам функции  $F(z)$ , имеет лишь комплексные нули, тогда как другая часть вещественных функций имеет вещественные нули (различные или совпадающие). Но исходя из того, что квадратное уравнение может иметь либо только комплексные, либо только вещественные корни, получаем, что в целом интервальная парабола в такой ситуации имеет вещественные нули. Поэтому в качестве нуля функции  $F(z)$  рассматривается именно указанное решение.

Отметим, что корни, полученные из выражения (3.7), имеют одинаковую ширину, несмотря на то, что корни исходного уравнения (3.3) имеют разную ширину (видно из рис. 3.1). Но полученные интервальные корни содержат в себе истинные нули интервальной квадратичной функции (3.2).

Еще одним достоинством такого способа вычисления корней интервального квадратного уравнения является получение интервальных значений минимально возможной ширины (с точностью до ошибок округления).

Итак, представление (3.4) имеет ряд преимуществ и недостатков. Укажем основные из них.

#### **Достоинства:**

1. Простота исходного представления  $F(z)$ . Причем применение интервального модифицированного метода Висковатова автоматически приводит к решению именно приведенного квадратного уравнения.
2. Несложная процедура выделения граничных функций.

#### **Недостатки:**

1. «Несимметричность» параболы, являющаяся следствием несимметричности реального множества вершин парабол относительно оси симметрии прямоугольника  $P$  (рис. 3.1).

2. Разные выражения для нижних (верхних) граничных функций при  $z < 0$  и  $z \geq 0$ , что осложняет процедуру вычисления корней.
3. Корни уравнения (3.2) имеют, согласно рис. 3.1, разную ширину.
4. В некоторых случаях при  $D > 0$  интервальные корни являются пересекающимися интервалами, что можно трактовать как объединение интервалов, то есть один корень. Либо рассматривать оба интервала как различные корни, но тогда их пересечение является областью неопределённости.

Для устранения разногласия между формально различной шириной получаемых интервалов и одинаковой шириной корней, вычисляемых в выражении (3.7), а также для симметричного представления интервальной параболы предпочтительно пользоваться представлением  $F(z)$ , получающимся выделением полного квадрата следующим образом:

$$F^*(z) = z^2 + 2 \cdot \left[ \frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2} \right] + \left[ \frac{b_1^2}{4}, \frac{b_2^2}{4} \right] - \left[ \frac{b_1^2}{4}, \frac{b_2^2}{4} \right] + [c_1, c_2],$$

откуда

$$F^*(z) = \left( z - \left[ \frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2} \right] \right)^2 + \left[ -\frac{D_2}{4}, -\frac{D_1}{4} \right]. \quad (3.8)$$

То есть к данному представлению можно привести исходную функцию, вычислив ее интервальный дискриминант.

**Замечание.** Известно, что в классической интервальной арифметике разность  $Z - Z \neq 0$ , однако в данном случае недостающий интервал добавляется и вычитается формально, при этом границы интервалов, образуемых вершинами граничных парабол, не изменяются.

Из такого представления очевидно, что множеством вершин интервальной параболы является прямоугольник – прямое произведение интервалов

$$P = \left[ -\frac{b_2}{2}, -\frac{b_1}{2} \right] \times \left[ -\frac{D_2}{4}, -\frac{D_1}{4} \right],$$

которое совпадает с множеством, ограничиваемым вершинами нижней и верхней граничной функции интервальной параболы в первоначальном представлении  $F(z)$  (3.2). Но, в отличие от предыдущего случая (3.2), при представлении (3.8) каждая точка прямоугольника  $P$ , включая его границы, является вершиной некоторой параболы с коэффициентами из (3.8). В результате интервальная парабола принимает симметричный относительно своей оси симметрии вид. Благодаря этому интервальные корни уравнения имеют одинаковую ширину.

Графически множеству значений интервальной функции (3.8) соответствует заштрихованная область на рис. 3.2:

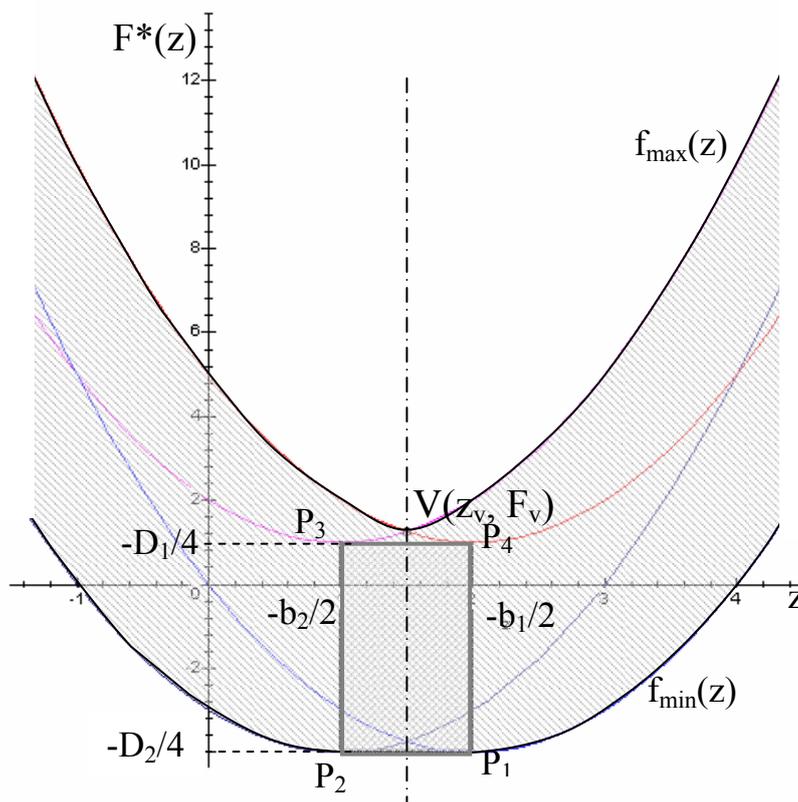


Рис. 3.2. «Симметричная» интервальная парабола

Очевидно, что в данном случае количество и вид корней уравнения определяются не только расположением множества вершин  $P$  относительно оси  $Oz$ , то есть не только знаком дискриминанта  $D$ , но и знаком ординаты  $F_v$  точки  $V$ , которую далее для удобства будем называть «определяющей».

Найдем координаты определяющей точки:

$$z_v = -\frac{b_1 + b_2}{4}, \quad F_v = \left(\frac{b_2 - b_1}{4}\right)^2 - \frac{D_1}{4}. \quad (3.9)$$

Отсюда следует также, что  $F_v > -D_1/4$  при  $b_1 \neq b_2$ .

**Утверждение 3.1.** Для существования двух различных вещественно-значных интервальных корней уравнения (3.3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $F_v \leq 0$ . При  $F_v = 0$  интервалы будут иметь общую точку, являющуюся границей для каждого из этих корней.

Итак, возможны следующие варианты расположения точки  $V$  и прямоугольника  $P$ , определяющие количество и вид интервальных корней параболы (3.8):

- 1) если  $D < 0$ , что автоматически означает  $F_v > 0$ , то уравнение (3.3) имеет два сопряженных комплексно-значных интервальных корня  $Z_1, Z_2$ ;
- 2) если  $0 \in D$  и  $F_v > 0$ , то уравнение имеет один кратный интервальный корень  $Z = [z_{\min}, z_{\max}]$ ;
- 3) если  $D > 0$  и  $F_v > 0$ , то уравнение имеет один кратный интервальный корень  $Z = [z_{\min}, z_{\max}]$ , образуемый двумя пересекающимися интервальными корнями  $Z_1, Z_2$ ;
- 4) если  $F_v = 0$ , откуда следует  $D > 0$ , то уравнение (3.3) имеет два интервальных корня с общей точкой:  $Z_1 = [z_{1\min}, z_v]$ ,  $Z_2 = [z_v, z_{2\max}]$ , где  $z_v$  – абсцисса определяющей точки  $V$ :  $z_v = -\frac{b_1 + b_2}{4}$ ;
- 5) если  $D > 0$  и  $F_v < 0$ , то уравнение имеет два различных вещественных интервальных корня  $Z_1 = [z_{1\min}, z_{1\max}]$ ,  $Z_2 = [z_{2\min}, z_{2\max}]$ .

Во всех этих случаях вычисление корней уравнения проводится по формулам (3.5)-(3.7) с учётом ранее указанной особенности нахождения корней при  $0 \in D$ .

Итак, следует отметить следующие **достоинства** представления (3.8):

1. Наглядность представления  $F^*(z)$  для выделения множества вершин параболы.
2. «Симметричность» параболы относительно своей оси.
3. Корни уравнения (3.3) имеют одинаковую ширину.
4. Выражения для граничных функций не меняется при  $z < 0$  и  $z \geq 0$ .

В то же время, существуют некоторые **недостатки**:

1. Сложное представление граничными функциями.
2. Обратный переход от (3.8) к (3.2) изменяет значение свободного члена  $C$ , то есть преобразование – выделение полного квадрата является в данном случае не взаимно-однозначным.
3. Определение координат точки  $V$  и учёт влияния ее расположение на количество и вид интервальных корней уравнения.

В **Приложении 4** предложенный способ вычисления нулей интервальной квадратичной функции проиллюстрирован числовыми примерами с учётом различных значений дискриминанта и ординаты определяющей точки; рассмотрены все перечисленные выше случаи взаимного расположения нулей функции.

### **Частные случаи.**

- 1) При  $b_1 \rightarrow b$  и  $b_2 \rightarrow b$  интервальная квадратичная функция принимает вид

$$F(z) = z^2 + bz + [c_1, c_2],$$

где интервальным является только свободный член.

В этом случае представление в виде граничных функций, предложенное в [108], совпадает представлением, основанном на выделении полного квадрата. Множество вершин парабол с точечными коэффициентами из  $F(z)$  является отрезком с координатами граничных вершин  $(b, -D_1/4)$  и  $(b, -D_2/4)$  (рис. 3.3).

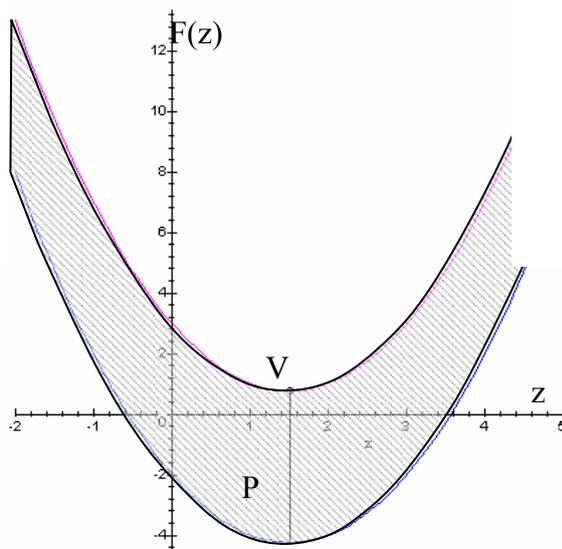


Рис. 3.3. Частный случай интервальной параболы

Ордината определяющей точки совпадает с вершиной верхней граничной функции:

$$F_v = -\frac{D_1}{4}$$

Следовательно, расположение корней зависит только от знака интервального дискриминанта (3.5).

2) При  $c_1 \rightarrow c$  и  $c_2 \rightarrow c$  получаем функцию вида

$$F(z) = z^2 + [b_1, b_2]z + c,$$

и этот случай сводится к общему, когда оба коэффициента  $B$  и  $C$  являются интервалами. Вычисление корней производится по общим формулам с учётом знака интервального дискриминанта и положения определяющей точки  $V$  относительно оси абсцисс  $Oz$ .

Итак, можно сделать вывод о том, что для определения вида и взаимного расположения интервальных нулей в общем случае недостаточно знать знак дискриминанта. Решающую роль здесь играет положение определяющей точки

$V$  с координатами (3.9). Разделение нулей функции происходит лишь в случае  $F_v \leq 0$ , причем нули функции при  $F_v = 0$  имеют одну общую граничную точку

$$z_v = -\frac{b_1 + b_2}{4}.$$

При вариации шага дискретизации в полиномах в ИДПФ изменяются значения и ширина интервальных коэффициентов, что приводит к изменению интервала  $D$  и перемещению прямоугольника  $P$  и определяющей точки относительно оси абсцисс. Причем в интервале допустимых значений  $\Delta t \in (\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$  существует такое значение шага  $\Delta t$ , при котором определяющая точка имеет наименьшее значение ординаты, что приводит к более точному определению интервальных вещественно-значных нулей и полюсов ИДПФ и, при достаточной точности исходных измерений, – к разделению интервальных полюсов (нулей) ИДПФ.

Таким образом, вариацией шага дискретизации устанавливается количество и вид интервальных полюсов (нулей) и производится их уточнение.

### 3.1.2. Численные методы локализации корней интервальных полиномов

Известно множество методов вычисления интервальных нулей функции  $f(z)$ . В [4, 33, 108] рассматриваются численные интервальные методы (и их модификации), в том числе и для вычисления корней интервальных полиномов. Например, можно отметить методы деления локализующих интервалов, методы ньютоновского типа, квадратично сходящиеся и методы более высоких порядков, интерполяционные методы и др.

Одной из простейших процедур поиска интервальных корней является деление первоначального локализующего интервала [4]. Для ее осуществления требуется только существование интервального расширения данной функции  $f(z)$  на интервале  $Z^{(0)}$ . Чтобы найти более точные локализующие интервалы в  $Z^{(0)}$  необходимо разделить исходный интервал некоторой точкой  $m(Z^{(0)})$  пополам на интервалы  $X^{(0)}$  и  $Y^{(0)}$  такие, что

$$Z^{(0)} = X^{(0)} \cup Y^{(0)} = [x_1^{(0)}, m(Z^{(0)})] \cup [m(Z^{(0)}), x_2^{(0)}].$$

Обычно в качестве такой точки выбирают середину интервала:

$$m(Z^{(0)}) = \frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2}.$$

Если  $0 \in f(X^{(0)})$ , то подынтервал  $X^{(0)}$  может содержать нуль функции  $f$ , и для этого подынтервала следует повторить процедуру деления пополам. Такое же условие проверяют для второго подынтервала,  $Y^{(0)}$ , и если  $0 \in f(Y^{(0)})$ , то процедура деления пополам повторяется также для этого подынтервала. Если же  $0 \notin f(X^{(0)})$  или  $0 \notin f(Y^{(0)})$ , то соответствующий подынтервал не может содержать нуль функции  $f$ , и в дальнейших вычислениях он не участвует.

Таким образом порождается последовательность подынтервалов, содержащихся в  $Z^{(0)}$  и «подозрительных на наличие нуля функции  $f$ ». Ширина получаемых подынтервалов на каждом шаге уменьшается вдвое, а следовательно – стремится к нулю. Так постепенно вычисляемые подынтервалы сходятся к нулям функции  $f$  в интервале  $Z^{(0)}$ .

Для предотвращения накопления большого количества «подозрительных» подынтервалов, в [4] предлагается следующая модификация. На каждом шаге исследуется либо только правая половина интервала (либо только левая). Если на некотором шаге для правого подынтервала  $V_2 \subset Z^{(0)}$  получают  $0 \notin f(V_2)$ , то процедура деления повторяется снова, но теперь начиная с левого интервала  $V_1 \subset Z^{(0)}$  (соответственно – с правого). Таким образом, последовательно вычисляются отдельные нули функции  $f$  в порядке справа налево (соответственно слева направо) и не сталкиваются с проблемой хранения большого количества «подозрительных» интервалов.

В качестве одного из способов решения задачи одновременной локализации вещественных (и комплексных) корней интервальных полиномов в [4], среди прочих методов, приводится короткошаговый итерационный метод ньютоновского типа, на котором здесь остановимся подробнее и опишем его суть.

**Замечание.** Следует отметить, что в [4] изложение ведется относительно полиномов с вещественными (точечными) коэффициентами, а интервальное представление полинома возникает благодаря интервальной переменной. Однако это ограничение не является принципиальным, и далее мы будем считать, что коэффициенты полинома также являются интервалами. Это расширение ограничений, конечно, отразится на точности вычисляемых корней полинома, но не повлияет на работоспособность метода.

Итак, дан многочлен с интервальными коэффициентами

$$P(z) = A^{(n)}z^n + A^{(n-1)}z^{n-1} + \dots + A^{(1)},$$

где коэффициенты  $A^{(i)} = [a_1^{(i)}, a_2^{(i)}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . (В случае характеристического полинома ДПФ  $z$  – переменная дискретного  $Z$ -преобразования). Предполагаем, что  $A^{(n)} = 1$  – этот случай возникает естественным образом при использовании интервального модифицированного метода Висковатова.

Далее полагается, что полином  $P(z)$  имеет  $n$  простых вещественных корней  $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)})$ . Считается, что для всех корней известны первоначальные попарно непересекающиеся локализирующие интервалы  $Z^{(0,j)}$ :

$$\xi^{(j)} \in Z^{(0,j)} = [z_1^{(0,j)}, z_2^{(0,j)}], j = 1, \dots, n;$$

$$Z^{(0,i)} \cap Z^{(0,j)} = \emptyset, i = 1, \dots, n, i \neq j$$

(первоначальные интервалы можно выделить, например, методом деления пополам или другим известным методом, вплоть до анализа графического представления рассматриваемого полинома на некотором интервале).

Строится короткошаговая итерационная схема:

$$Z^{(k+1,i)} = \left\{ z^{(k,i)} - \frac{P(z^{(k,i)})}{\prod_{j=1}^{i-1} (z^{(k,i)} - Z^{(k+1,j)}) \prod_{j=i+1}^n (z^{(k,i)} - Z^{(k,j)})} \right\} \cap Z^{(k,i)},$$

$$i = 1, \dots, n; k \geq 0,$$

где на каждом шаге выбирается точка

$$z^{(k,i)} = \frac{1}{2}(z_1^{(k,i)} + z_2^{(k,i)}),$$

и вычисляется интервал  $Z^{(k+1, i)}$  такой, что

$$\xi^{(i)} \in Z^{(k+1, i)} \subseteq Z^{(0, i)}.$$

В этой схеме для нахождения нового локализирующего интервала  $Z^{(k+1, i)}$  используются последние, уже найденные значения остальных локализирующих интервалов  $Z^{(k+1, j)}$ ,  $j \neq i$ .

Выбор на каждом шаге середины интервала  $Z^{(k, i)}$  приводит к уменьшению ширины локализирующего интервала на каждом шаге итерации. При этом последовательность приближений  $\{Z^{(k, i)}\}_{k=0}^{\infty}$  стабилизируется за конечное число шагов на интервале  $[\xi_1^i, \xi_2^i]$  [4].

Как отмечается в [4], приведенную итерационную схему несложно обобщить на случай кратных корней. Аналогичным образом производится обобщение метода на случай комплексных корней полинома.

### **§3.2. Интервальное восстановление модели аперiodического объекта 2-го порядка**

#### **Пример 3.1. Интервальная SP-идентификация аперiodического объекта 2-го порядка.**

Некоторыми отличительными свойствами аперiodического объекта 2-го порядка являются устойчивость и инерционность. Эти свойства определяются наличием двух отрицательных вещественных полюсов. Целью данного примера является не только пройти все этапы решения задачи идентификации, но и показать на конкретном примере процесс решения интервального квадратного уравнения и выделения интервальных полюсов ИДПФ, их разделения, перемещения и сужения при изменении шага дискретизации. Помимо этого рассмотрим и сравним результаты восстановления объекта при нанесении различных входных сигналов: импульсного и ступенчатого.

Итак, пусть объект идентификации является аперiodическим объектом 2-го порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}. \quad (3.10)$$

Среди технических объектов такой зависимостью описываются, например, парогенератор электростанции, ленточный весоизмеритель [56] и т. д.

При идентификации подобных объектов возникают проблемы, связанные с определением полюсов ДПФ. Для числовых характеристических полиномов существуют методы их решения. Но в интервальном случае решение характеристического уравнения сопряжено с рядом сложностей. Основной из них является то, что, за счет потери точности и постоянном расширении интервалов при выполнении интервальных операций возникает возможность перекрывания интервальных полюсов, их слияние в один полюс даже в том случае, когда исходная точная модель имеет два достаточно далеко отстоящих различных полюса.

Другой проблемой является точность исходных данных. Как показали многочисленные модельные исследования, объекты 2-го и более высоких порядков требуют очень высокой точности исходных интервальных данных. Например, если коэффициент передачи НПФ (3.10)  $k = 1$ , и максимальная амплитуда динамической характеристики также равна 1, то удовлетворительные результаты моделирования достигаются лишь при значениях  $x(n\Delta t) \pm 0.001$ ,  $\pm 0.0001$  и  $y(n\Delta t) \pm 0.0001$  и меньше. Были проведены попытки уменьшить погрешность вычислений и ширину интервальных элементов в идентифицирующей матрице, однако наиболее перспективным представляется применение неклассических интервальных операций. Но в данной работе они не рассматриваются, все вычисления проводятся в рамках классической интервальной арифметики.

Помимо этого, на точность результатов здесь значительно влияет выбор входного воздействия. Например, в ряде случаев (при различных сочетаниях параметров исходной НПФ) возникает ситуация, когда при использовании ступенчатого воздействия нет такого шага  $\Delta t$  из допустимого диапазона, при

котором происходит разделение интервальных полюсов ДПФ. Но в случае нанесения импульсного воздействия разделение происходит при любом допустимом  $\Delta t$ .

Рассмотрим на конкретном примере влияние  $\Delta t$  и вида воздействия на интервальную модель апериодического объекта 2-го порядка с НПФ (3.10).

### 1. Реакция объекта на импульсное воздействие.

Если на вход объекта подается импульсный сигнал:

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

то на выходе объекта формируется сигнал

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{k}{T_1 - T_2} \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right), & t \geq 0. \end{cases}$$

Положим  $T_1 = 0.5$  с,  $T_2 = 2$  с,  $k = 1$ , тогда

$$w(t) = 0.666667e^{-0.5t} - 0.666667e^{-2t}.$$

Рассмотрим случай неточно измеренных значений входного и выходного сигналов. Пусть интервалы входных и выходных значений определяются величинами  $\varepsilon_x = 0.0001$  и  $\varepsilon_y = 0.0001$ .

При заданной точности удовлетворительные результаты интервального моделирования достигаются уже начиная с  $\Delta t = 0.4$  с. При таком шаге дискретизации точно восстанавливается порядок дискретной модели, и граничные функции “стягиваются” к точной непрерывной импульсной характеристике. Путём вариации  $\Delta t$  при моделировании был выделен диапазон допустимых значений  $[0.4$  с,  $1.4$  с]. Начиная с  $\Delta t = 1.5$  с происходит подмена модели – нулевая строка в идентифицирующей матрице появляется на строку выше, что приводит к неверному определению – уменьшению порядка ИДПФ.

Произведем измерение входа  $x(t)$  и выхода  $y(t)$  с шагом дискретизации  $\Delta t = 0.8$  с. Поскольку все значения входной величины  $x(n\Delta t)$  должны быть

неотрицательными, то нижняя граница входных интервалов при импульсном воздействии остается равной 0. Получаем следующую идентифицирующую матрицу:

[0.9999, 1.0001]	[0.0000, 0.0001]	[0.0000, 0.0001]	[0.0000, 0.0001]	...
[0.3122, 0.3124]	[0.2723, 0.2725]	[0.1952, 0.1954]	[0.1334, 0.1336]	...
[-0.872816, -0.871517]	[-0.625947, -0.624806]	[-0.427923, -0.426909]	[-0.288613, -0.287688]	...
[0.153390, 0.156966]	[0.133897, 0.136831]	[0.095847, 0.098314]	[0.065298, 0.067444]	...
[-0.176193, -0.134807]	[-0.151824, -0.119616]	[-0.110080, -0.084837]	...	...
[-0.273199, 0.213151]	[-0.205951, 0.159437]	...	...	...
...	...	...	...	...

Все элементы пятой строки матрицы – это 0-содержащие интервалы, поэтому вычисление следующих строк матрицы на этой строке прекращается. В 1-ой строке производится сдвиг влево на 1 элемент, что обусловлено начальным значением  $y(0) = 0$ , и первый частный числитель дроби имеет множитель  $z^{-1}$ . Так получаем ИДПФ

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.312151, 0.312414]z^{-1} + [-0.007118, 0.006923]z^{-2}}{1 + [-0.895619, -0.849359]z^{-1} + [0.117487, 0.153784]z^{-2}}$$

Ее особенностью является появление коэффициента при  $z^{-2}$  в числителе, который в точечном случае отсутствует [35, 37, 40, 41]. Сравнение с результатами моделирования импульсной характеристики рассматриваемого звена показывает, что это слагаемое является фиктивным, поскольку

- а) интервал является 0-содержащим, что вносит дополнительную неопределённость при дальнейшей интерпретации результатов. Все коэффициенты ДПФ должны быть строго положительными либо строго отрицательными ;
- б) границы интервала лежат в окрестности нуля и при изменении  $\Delta t$  стремятся к числу 0.

То есть такой коэффициент является практически нулевым, и его не следует учитывать в ИДПФ, которая окончательно принимает вид

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.312151, 0.312414]z^{-1}}{1 + [-0.895619, -0.849359]z^{-1} + [0.117487, 0.153784]z^{-2}}.$$

Решим характеристическое уравнение с помощью интервального дискриминанта. При выбранном  $\Delta t$  дискриминант является положительным интервалом:

$$D = [0.106275, 0.332186] > 0,$$

и определяющая точка (3.9) лежит ниже оси абсцисс:  $F_v = -0.0264351 < 0$ . Следовательно, интервальное квадратное уравнение имеет два различных корня – полюса ИДПФ:

$$Z_1^n = [0.136501, 0.284810], Z_2^n = [0.587678, 0.735987], \\ \text{wid } Z_{1,2}^n = 0.148309.$$

Их прообразами в  $s$ -плоскости являются интервалы

$$S_1^n = [-2.489275, -1.569914], \text{wid } S_1^n = 0.919361; \\ S_2^n = [-0.664470, -0.383178], \text{wid } S_2^n = 0.281292.$$

Очевидно, что значения действительных полюсов  $s_1^n = -2$  и  $s_2^n = -0.5$  лежат в полученных интервалах  $S_1^n$  и  $S_2^n$  соответственно. То есть можно говорить о том, что получены адекватные интервальные оценки полюсов.

Для идентификации коэффициента передачи необходимо сначала найти импульсную характеристику с интервальными коэффициентами с точностью до неизвестного  $k$ , а затем составить и решить уравнение относительно  $k$ , используя какое-либо из имеющихся интервальных измерений  $w(n\Delta t)$ .

$$w(t) = \frac{K}{S_1^n - S_2^n} (e^{S_1^n t} - e^{S_2^n t})$$

Возьмем первое ненулевое измерение:  $n = 1$ , тогда при  $1\Delta t = 0.8$  с

$$[0.3122, 0.3124] = \frac{K}{[-2.106097, -0.905445]} (e^{0.8[-2.489275, -1.569914]} - e^{0.8[-0.664470, -0.383178]}).$$

Учитывая монотонность функции  $e^t$ , получаем

$$K = \frac{[0.3122, 0.3124] [-2.106097, -0.905445]}{[-0.599486, -0.302868]} = [0.471510, 2.172260], \\ \text{wid } K = 1.700750.$$

Очевидно, что  $k = 1 \in K$ . Следовательно, при заданном шаге дискретизации происходит полное восстановление вида передаточной функции и ее полюсов и коэффициента передачи.

Теперь перейдем во временную область, где получаем интервальную дискретную модель импульсной характеристики:

$$w(n) = [0.312151, 0.312414]x(n-1) + [0.849359, 0.895619]w(n-1) + [-0.153784, -0.117487]w(n-2),$$

откуда граничные функции принимают значения

$$w_{\min}(n) = 0.312151x(n-1) + 0.849359w(n-1) - 0.153784w(n-2),$$

$$w_{\max}(n) = 0.312414x(n-1) + 0.895619w(n-1) - 0.117487w(n-2),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

В табл. 3.1 приведены точные значения выходной величины  $w(n\Delta t)$ , измеренные с шагом дискретизации  $\Delta t = 0.8$  с; а также рассчитанные границы модельных интервалов  $w(n) = [w_{\min}(n), w_{\max}(n)]$  и ширина модельных интервалов  $w(n)$ .

Таблица 3.1. Рассчитанные в точках отсчета значения граничных функций и ширина модельных интервалов

<b>nΔt</b>	<b>w(nΔt)</b>	<b>w<sub>min</sub>(n)</b>	<b>w<sub>max</sub>(n)</b>	<b>wid w(n)</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0.8</b>	0.312282	0.312151	0.312414	0.000262
<b>1.6</b>	0.272378	0.265128	0.279803	0.014675
<b>2.4</b>	0.195310	0.177185	0.213893	0.036708
<b>3.2</b>	0.133490	0.109721	0.158693	0.048972
<b>4</b>	0.090000	0.065945	0.116999	0.051055
<b>4.8</b>	0.060433	0.039137	0.086142	0.047005
<b>5.6</b>	0.040531	0.023100	0.063405	0.040304
<b>6.4</b>	0.027173	0.013602	0.046666	0.033064
<b>7.2</b>	0.018215	0.008000	0.034346	0.026345
<b>8</b>	0.012210	0.004703	0.025278	0.020575
<b>8.8</b>	0.008185	0.002765	0.018604	0.015840
<b>9.6</b>	0.005486	0.001625	0.013693	0.012068
<b>10.4</b>	0.003678	0.000955	0.010078	0.009123
<b>11.2</b>	0.002465	0.000561	0.007417	0.006856

Продолжение табл. 3.1.

<b>12</b>	0.001653	0.000330	0.005459	0.005129
<b>12.8</b>	0.001108	0.000194	0.004018	0.003824
<b>13.6</b>	0.000743	0.000114	0.002957	0.002843
<b>14.4</b>	0.000498	0.000067	0.002176	0.002109
<b>15.2</b>	0.000334	0.000039	0.001602	0.001562
<b>16</b>	0.000224	0.000023	0.001179	0.001156
<b>16.8</b>	0.000150	0.000014	0.000868	0.000854
<b>17.6</b>	0.000100	0.000008	0.000639	0.000631
<b>18.4</b>	0.000067	0.000005	0.000470	0.000465
<b>19.2</b>	0.000045	0.000003	0.000346	0.000343
<b>20</b>	0.000030	0.000002	0.000255	0.000253
<b>max wid y(n)</b>				0.051055

Граничные функции в начале процесса постепенно расширяются, достигая максимального значения ширины интервала

$$\max \text{wid } w(n) = 0.051055$$

в момент времени  $t = 5\Delta t = 4$  с, а затем снова сужаются, достигая в конце концов установление на значение  $w(n) = [0, 0]$  при  $n = 46, 47, \dots$  (рис. 3.4).

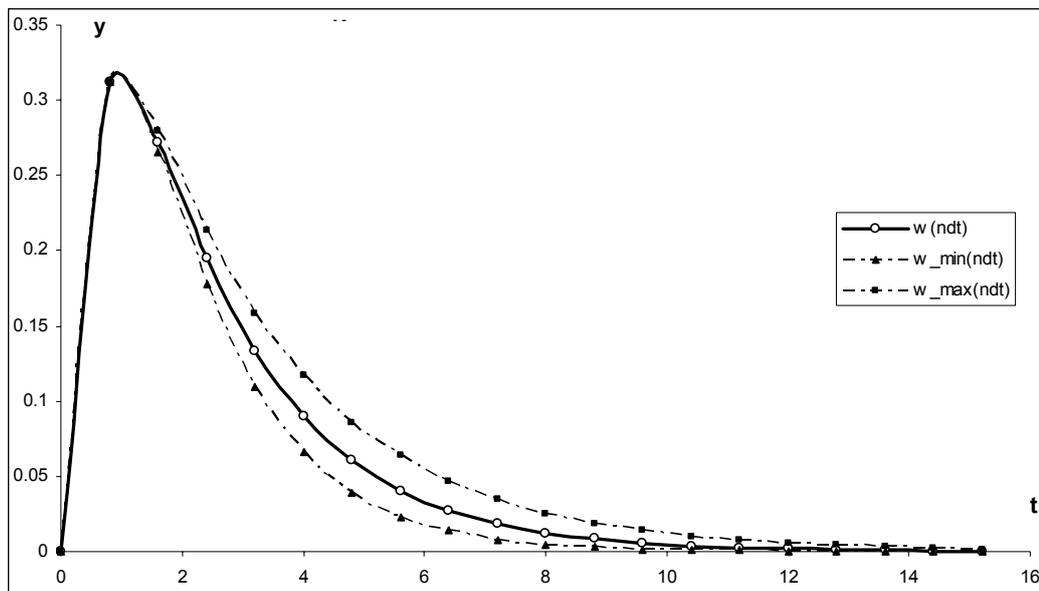


Рис. 3.4. Интервальная импульсная характеристика  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$

и точные измерения при  $\Delta t = 0.8$  с

Построение дискретной модели осуществлялось лишь по нескольким первым измеренным значениям, однако из рис. 3.4 видно, что все поступающие позднее измеренные значения выходной величины попадают в модельные

интервалы  $w(n)$ . То есть модель адекватно отображает реакцию объекта на импульсное воздействие (при условии неизменности действительной структуры и параметров объекта во время его функционирования).

Установим, соответствуют ли полученные интервальные полюса НПФ реальным, произведя изменение  $\Delta t$ . Если при уменьшении или увеличении  $\Delta t$  положение полученных полюсов не изменится (произойдет вложение интервалов), то найденные значения будем считать адекватными.

Например, зададим шаг  $\Delta t = 1.2$  с. После вычисления элементов идентифицирующей матрицы и сворачивания непрерывной дроби получаем ИДПФ

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.305265, 0.305526]z^{-1}}{1 + [-0.677638, -0.603701]z^{-1} + [0.028442, 0.072729]z^{-2}}.$$

Интервальный дискриминант характеристического уравнения

$$D = [0.073539, 0.345426]$$

положителен, а определяющая точка имеет ординату

$$F_v = -0.0180431 < 0,$$

то есть ИДПФ имеет два различных интервальных полюса:

$$Z^{\Pi}_1 = [0.007986, 0.203229], Z^{\Pi}_2 = [0.437441, 0.632684],$$

$$\text{wid } Z^{\Pi}_{1,2} = 0.195243.$$

Прообразами в  $s$ -плоскости являются интервальные полюса

$$S^{\Pi}_1 = [-4.025064, -1.327852], \text{wid } S^{\Pi}_1 = 2.697212;$$

$$S^{\Pi}_2 = [-0.689012, -0.381488], \text{wid } S^{\Pi}_2 = 0.307524.$$

Как видим, произошло расширение интервальных оценок полюсов  $S^{\Pi}_1$  и  $S^{\Pi}_2$  по сравнению с полученными  $\Delta t = 0.8$  с. Но, тем не менее, сохранилась вложенность соответствующих интервальных значений, что говорит о неподвижности определяемых полюсов в  $s$ -плоскости.

Составим уравнение для определения коэффициента передачи  $k$ , используя для этого измерение  $w(1\Delta t) = [0.3053, 0.3055]$  и решим его, получив значение

$$K = [0.312208, 4.752524], \text{wid } K = 4.440317.$$

Ширина интервала-оценки  $K$  также увеличилась, при этом сохранилась вложенность интервалов для различных значений  $\Delta t$ .

Таким образом, можно утверждать об эквивалентности моделей, полученных при  $\Delta t = 0.8$  с и  $\Delta t = 1$  с, поскольку при варьировании шага дискретизации изменилась лишь точность оценок полюсов и коэффициента передачи НПФ.

Итак, при импульсном входном воздействии был восстановлен порядок модели и найдены ее интервальные параметры. Если в процессе функционирования рассматриваемого объекта изменится его структура или параметры, то некоторые (или все) измеренные значения выхода  $y(n\Delta t)$  перестанут попадать в модельные интервалы, и граничные функции уже не будут отражать реальный ход процесса.

## 2. Реакция объекта на ступенчатое воздействие.

Рассмотрим отклик этого же объекта на ступенчатый сигнал  $x(t) = 1(t)$ .

Тогда переходная характеристика имеет вид:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k \left( 1 + \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_2 - T_1} - \frac{T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_2 - T_1} \right), & t \geq 0. \end{cases}$$

что в нашем случае при  $T_1 = 0.5$  с,  $T_2 = 2$  с,  $k = 1$  дает выражение вида

$$y(t) = 1 - 1.33333e^{-0.50000t} + 0.33333e^{-2t}.$$

В отличие от импульсной характеристики, удовлетворительные результаты достигаются, начиная с  $\Delta t = 0.7$  с, когда граничные функции начинают устанавливаться после переходного процесса на постоянное значение. Однако, как будет показано ниже, разделение интервальных полюсов ИДПФ и восстановление полюсов НПФ происходит при бóльших значениях шага дискретизации. При  $\Delta t = 1.5$  с уже происходит подмена модели, связанная с преждевременным появлением строки 0-содержащих интервалов и,

соответственно, уменьшением длины соответствующей непрерывной дроби. То есть можно выделить (приблизительно) диапазон допустимых значений  $\Delta t \in [0.7 \text{ с}, 1.4 \text{ с}]$ , который частично совпадает с диапазоном, полученным для импульсной характеристики.

Протабулируем функцию  $y(t)$  с шагом дискретизации  $\Delta t = 0.8 \text{ с}$  и зададим величины, определяющие исходные интервалы  $\varepsilon_x = 0.0001$  и  $\varepsilon_y = 0.0001$ . Задав такие значения мы сможем далее произвести сравнение восстановленных интервальных моделей и оценок со значениями, полученными выше при нанесении импульсного воздействия.

Построим идентифицирующую матрицу, с учётом сдвига на 1 элемент в 1-ой строке (при  $y(0) = 0$ ):

[0.9999, 1.0001]	[0.9999, 1.0001]	[0.9999, 1.0001]	[0.9999, 1.0001]	[0.9999, 1.0001]	...
[0.1734, 0.1736]	[0.4144, 0.4146]	[0.6011, 0.6013]	[0.7313, 0.7315]	[0.8196, 0.8198]	...
[-1.390566, -1.386261]	[-2.466847, -2.461302]	[-3.217587, -3.211178]	[-3.726737, -3.719741]	...	...
[0.606964, 0.620365]	[1.140447, 1.157387]	[1.523040, 1.542403]	...	...	...
[-0.136846, -0.058850]	[-0.231919, -0.134015]	...	...	...	...
[-2.102489, 0.927540]	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Соответствующая непрерывная дробь после сворачивания образует ИДПФ

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.173421, 0.173656]z^{-1} + [0.081528, 0.097511]z^{-2}}{1 + [-0.920448, -0.824746]z^{-1} + [0.081582, 0.190294]z^{-2}}$$

В отличие от ИДПФ в случае импульсного входного сигнала, эта ИДПФ имеет один нуль, который, однако, лежит на разрезе  $z$ -плоскости и не имеет прообраза в  $s$ -плоскости.

**Замечание.** Ряд авторов [30, 66, 88] отмечают тенденцию к появлению фиктивных нулей в  $z$ -плоскости. Вопрос о причине появления дополнительного нуля в дискретной передаточной функции объекта был решен в работе [37].

Интервальный дискриминант при выбранном  $\Delta t$  содержит в себе 0:

$$D = [-0.080970, 0.520898],$$

а определяющая точка  $F_v = 0.0208149 > 0$  – лежит выше оси  $Oz$ , то есть решением интервального характеристического уравнения является один интервальный полюс кратности 2:

$$Z_{1,2}^n = [0.051506, 0.821091], \text{ wid } Z_{1,2}^n = 0.769585.$$

Его прообразом в  $s$ -плоскости является интервальный полюс кратности 2

$$S_{1,2}^n = [-3.707571, -0.246402], \text{ wid } S_{1,2}^n = 3.461170;$$

Как мы видим, этот интервал содержит в себе оба значения истинных полюсов исходной НПФ  $s_1^n = -2$ ,  $s_2^n = -0.5$ .

Произведем восстановление коэффициента передачи:

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} G^{\text{IR}}(z) = [0.697445, 1.682871], \text{ wid } K = 0.985426.$$

Итак, можно сделать вывод о том, что выбранный шаг дискретизации не позволяет произвести полное восстановление структуры НПФ: идентифицируется лишь порядок НПФ, но при этом происходит подмена модели. Вместо исходной структуры НПФ вида

$$G^{\text{IR}}(s) = \frac{K}{(s - S_1^n)(s - S_2^n)}$$

получена НПФ (с интервальными параметрами)

$$G^{\text{IR}}(s) = \frac{K}{(s - S^n)^2}.$$

Несмотря на это соответствующие граничные функции во временной плоскости определяют достоверные, хотя и сравнительно широкие по отношению к точечным значениям, интервалы в точках отсчетов  $n\Delta t$  (рис. 3.5).

Максимальная ширина интервалов

$$\max_{n \in N} [\text{wid } y(n)] = \max_{n \in N} [y_{\text{max}}(n) - y_{\text{min}}(n)] \approx 0.985426$$

достигается в установившемся режиме.

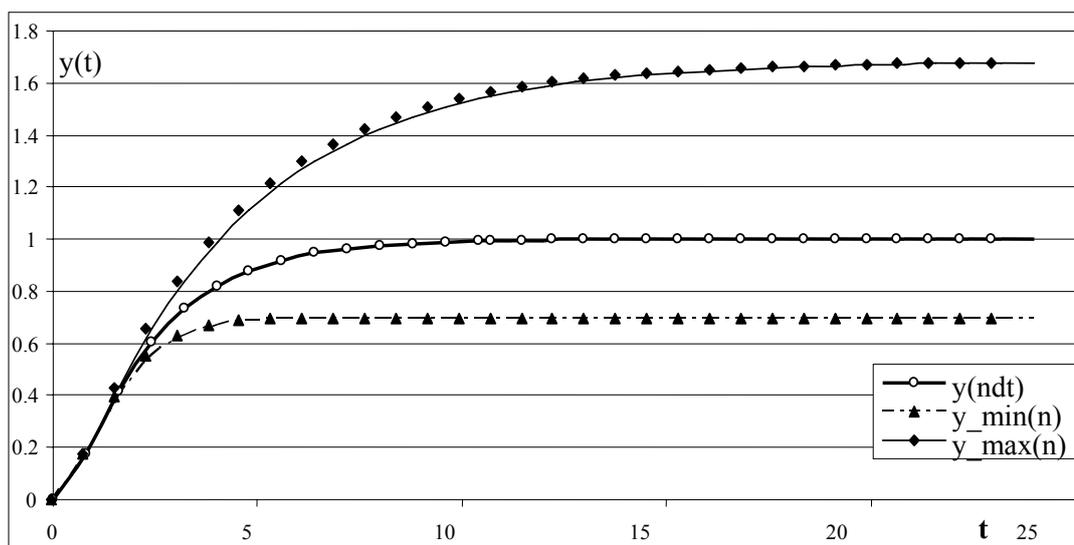


Рис. 3.5. Интервальная дискретная переходная характеристика  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$  при  $\Delta t = 0.8$  с и точные измеренные значения  $y(n\Delta t)$

Произведем увеличение шага дискретизации и проследим за точностью идентификации структуры и параметров НПФ.

При  $\Delta t = 1$  с после построения идентифицирующей матрицы и сворачивания непрерывной дроби получаем ИДПФ

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.236281, 0.236528]z^{-1} + [0.094561, 0.112934]z^{-2}}{1 + [-0.782346, -0.701994]z^{-1} + [0.042815, 0.122166]z^{-2}}$$

с двумя различными интервальными полюсами

$$Z_1^n = [0.019032, 0.359030], Z_2^n = [0.383140, 0.723138],$$

$$\text{wid } Z_{1,2}^n = 0.339998.$$

и их прообразами в плоскости непрерывной переменной  $s$

$$S_1^n = [-3.961636, -1.024349], \text{wid } S_1^n = 2.937287;$$

$$S_2^n = [-0.959354, -0.324155], \text{wid } S_2^n = 0.635200.$$

Ноль ИДПФ является фиктивным и не имеет прообраза в  $s$ -плоскости.

Очевидно, что при  $\Delta t = 1$  с произошло разделение полюсов, причем оба  $s$ -полюса являются отрицательными, что говорит об устойчивости идентифицируемого объекта. Таким образом, при таком шаге дискретизации структура ДПФ и НПФ полностью идентифицирована.

Коэффициент передачи восстановленной НПФ оценивается интервалом

$$K = [0.787397, 1.341664], \text{wid } K = 0.554267,$$

и является более точной оценкой в смысле ширины интервала по сравнению с полученной при  $\Delta t = 0.8$  с.

Граничные функции определяют во временной плоскости модельные интервалы  $y(n)$ , представленные на рис. 3.6.

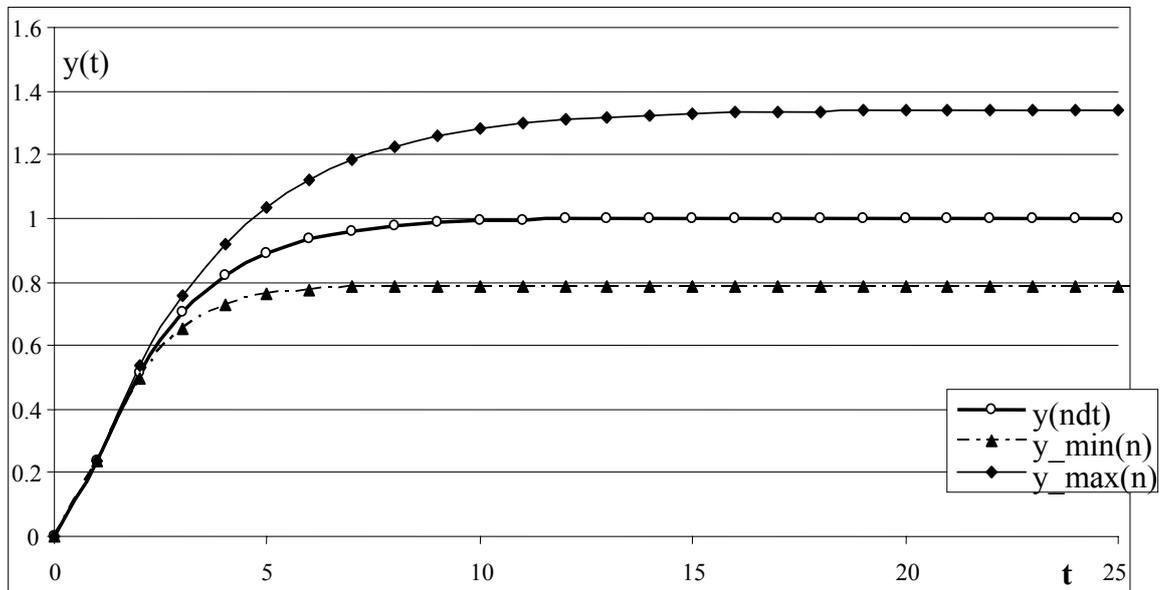


Рис. 3.6. Интервальная дискретная переходная характеристика  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$  при  $\Delta t = 1$  с и точные измеренные значения  $y(n\Delta t)$

Найдем максимальную ширину модельных интервалов переходной характеристики в точках отсчетов в установившемся режиме:

$$\max \text{wid } y(n) = 0.554267.$$

Это означает, что во временной плоскости также произошло уточнение интервальных оценок по сравнению с меньшим шагом  $\Delta t$ .

Далее, как и в случае импульсной характеристики, зададим  $\Delta t = 1.2$  с.

ИДПФ объекта описывается функцией

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.298361, 0.298620]z^{-1} + [0.100881, 0.122488]z^{-2}}{1 + [-0.677064, -0.602581]z^{-1} + [0.017882, 0.082355]z^{-2}}.$$

с двумя полюсами

$$Z_1^n = [-0.009712, 0.246769], Z_2^n = [0.393054, 0.649534],$$

$$\text{wid } Z_{1,2}^n = 0.256481.$$

Однако эти результаты нельзя считать удовлетворительным, поскольку  $0 \in Z_1^n$ , и этот полюс частично (но незначительно) захватывает разрез в  $z$ -плоскости. То есть возникает дополнительная неопределённость, поскольку для существования прообразов в  $s$ -плоскости вещественно-значные интервальные полюса должны быть строго положительными.

В данном случае левая граница полюса  $Z_1^n$  отрицательна, но лежит в окрестности нуля. Поскольку при вычислении  $s$ -полюса в формуле (2.10) используется абсолютная величина  $|Z|$ , то заменим значение левой границы на ее абсолютную величину – в данном случае это не приведет к значительному огрублению оценки при таком относительно малом значении. Отсюда получаем интервальные оценки полюсов восстановленной НПФ, содержащие в себе истинные полюса НПФ:

$$S_1^n = [-3.862016, -1.166086], \text{ wid } S_1^n = 2.695930;$$

$$S_2^n = [-0.778175, -0.359583], \text{ wid } S_2^n = 0.418591.$$

Даже при частичном накрывании разреза  $z$ -полюсом и при сделанном некотором отступлении от процедуры перевода его в  $s$ -плоскость, эти оценки являются более точными по сравнению с построенными при  $\Delta t = 1$  с.

Граничные функции также определяют во временной плоскости более точную (суженную) интервальную переходную характеристику:

$$\max \text{ wid } y(n) = 0.403440.$$

Коэффициент передачи восстановленной НПФ представляется интервалом

$$K = [0.832143, 1.235583], \text{ wid } K = 0.403440.$$

При последующем увеличении шага дискретизации в пределах, для которых порядок ИДПФ идентифицируется верно, происходит все большее перемещение полюса  $Z_1^n$  на разрез. Так, при  $\Delta t = 1.4$  с ИДПФ также имеет два интервальных полюса и не имеет нулей, то есть полностью восстанавливается структура НПФ, но  $Z_1^n = [-0.033054, 0.202007]$  – захватывает часть разреза в  $z$ -плоскости. То есть реальный диапазон допустимых значений  $\Delta t$ , при которых

не только длина идентифицирующей матрицы и порядок ИДПФ совпадают с точечными результатами, но и достоверно идентифицируется положение полюсов в  $z$ - и  $s$ -плоскостях, на самом деле еще уже за счет ненулевой ширины интервальных полюсов.

Хотя при этом граничные функции, выделенные из ИДПФ с  $0$ -содержащим полюсом, определяют достоверные оценки значений переходной (или иной) характеристики, в том числе и более точные по сравнению с меньшими значениями  $\Delta t$ , при которых оба интервальных полюса лежат вне разреза.

То есть восстановление полюсов и переход к интервальной динамической характеристике являются в некотором смысле не связанными процессами: невозможность однозначного восстановления параметров НПФ не всегда означает невозможность построения адекватных модельных интервалов (в точках отсчетов) во временной области.

**Замечание.** Конечно, можно использовать абсолютное значение отрицательной границы при вычислении вычисления полюсов в  $s$ -плоскости, как это было сделано выше (при условии, что отрицательное значение лежит в окрестности  $0$ ), однако это является отступлением от общей теории и в общем случае является нарушением в процессе идентификации. Поэтому далее будем считать получение  $0$ -содержащих  $z$ -полюсов неадекватными оценками, и в таких случаях говорить о неудовлетворительной идентификации объектов.

Сравним результаты идентификации объекта при нанесении импульсного и ступенчатого воздействий при  $\Delta t_1 = 0.8$  с и  $\Delta t_2 = 1.2$  с (то есть шагах, близких к границам допустимых диапазонов), и при промежуточном значении  $\Delta t = 1$  с, и выясним, влияет ли вид входного воздействия на интервальную идентификацию данного тестового объекта. В сводной табл. 3.2 сравним точность интервальных оценок параметров НПФ и максимальную ширину модельных интервалов динамических характеристик в точках отсчетов.

Таблица 3.2. Сравнение точности восстановления параметров объекта при импульсном и ступенчатом входных сигналах

	$x(t) = \delta(t)$	$x(t) = 1(t)$
$\Delta t = 0.8 \text{ с}$		
<b>wid <math>Z_1^n</math></b>	0.148309	0.769585
<b>wid <math>Z_2^n</math></b>		
	[z-полюса разделяются, лежат вне разреза]	[z-полюса не разделяются, кратный полюс лежит вне разреза]
<b>wid <math>S_1^n</math></b>	0.919361	3.461170
<b>wid <math>S_2^n</math></b>	0.281292	
	[s-полюса различны и строго отрицательны]	[s-полюса совпадают, строго отрицательны]
<b>wid K</b>	1.700750	0.985426
<b>max wid y(n)</b>	0.051055	$\approx 0.985426$
$\Delta t = 1 \text{ с}$		
<b>wid <math>Z_1^n</math></b>	0.158882	0.339998
<b>wid <math>Z_2^n</math></b>		
	[z-полюса разделяются, лежат вне разреза]	[z-полюса разделяются, оба лежат вне разреза]
<b>wid <math>S_1^n</math></b>	1.230423	2.937287
<b>wid <math>S_2^n</math></b>	0.267544	0.635200
	[s-полюса строго отрицательны]	[s-полюса строго отрицательны]
<b>wid K</b>	2.069525	0.554267
<b>max wid y(n)</b>	0.044230	0.554267
$\Delta t = 1.2 \text{ с}$		
<b>wid <math>Z_1^n</math></b>	0.195243	0.256481
<b>wid <math>Z_2^n</math></b>		
	[z-полюса разделяются, лежат вне разреза]	[z-полюса разделяются, $Z_1^n$ захватывает часть разреза]
<b>wid <math>S_1^n</math></b>	2.697212	2.695930
<b>wid <math>S_2^n</math></b>	0.307524	0.418591
	[s-полюса строго отрицательны]	[s-полюса строго отрицательны]
<b>wid K</b>	4.440317	0.403440
<b>max wid y(n)</b>	0.042934	0.403440

Из анализа данных табл. 3.2 можно сделать вывод, подтверждающий сделанные ранее замечания о том, что вид входного воздействия на апериодический объект 2-го порядка влияет на диапазон значений  $\Delta t$ , при которых происходит достоверная идентификация непрерывной модели объекта. Помимо этого вид входного сигнала влияет на точность восстановления

интервальных полюсов объекта и на ширину модельных интервалов соответствующей дискретной динамической характеристики.

Данные табл. 3.2 при  $x(t) = 1(t)$  подтверждают также вывод (Глава 2, п. 2.1.3) о том, что коэффициент  $K$  определяет ширину интервальной дискретной переходной характеристики в установившемся режиме.

Итак, из данного примера видно, что в ряде случаев – для некоторых объектов с порядком полюсов более 1 (в том числе и для рассмотренного апериодического 2 порядка) и/или при определенных сочетаниях а) параметров исходных моделей, б) точности интервальных данных и в) шага дискретизации, – среди допустимых значений  $\Delta t \in (\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , при которых достоверно идентифицируется порядок (структура) ИДПФ и НПФ, выделяется некоторый поддиапазон значений  $(\Delta t'_{\min}, \Delta t'_{\max}) \subseteq (\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , при которых граничные конечно-разностные уравнения определяют во временной плоскости адекватные интервальные оценки значений динамической характеристики, а также устанавливаются с течением времени на постоянные значения для объектов с самовывравниванием. И существует еще один поддиапазон  $(\Delta t'_{\min}, \Delta t'_{\max}) \subseteq (\Delta t^*_{\min}, \Delta t^*_{\max})$  значений, при которых возможно также получение и уточнение адекватных оценок параметров исходной НПФ.

### **Пример 3.2. Сравнение граничных функций и интервального расширения динамической характеристики.**

При построении адекватных дискретных моделей динамических характеристик наиболее желательным является свойство наибольшей интервальной суженности. При этом модельные интервалы должны представлять гарантированные оценки истинных и ожидаемых будущих значений отсчетов процесса.

В задачах, когда известны точечные измерения входного воздействия, либо применяются какие-либо оценки этих значений на основе интервальных данных (например, используются середины интервалов), наиболее простым

представлением модельных интервальных отсчетов выходной переменной являются граничные функции. При их выделении необходимо учитывать монотонность и знаки слагаемых, входящих в конечно-разностное уравнение.

Если нет возможности применения точечных оценок входных переменных, то процедура выделения граничных функций усложняется, поскольку в этом случае значительно увеличивается количество интервальных арифметических операций. Тогда используется естественное интервальное расширение динамической характеристики, представленной в виде конечно-разностного уравнения. Однако при этом нарушается условие наибольшей суженности. Ширина интервалов зависит также от шага дискретизации, и при интервальном расширении диапазон значений  $\Delta t$ , при которых происходит установление интервального расширения, значительно уже, чем при использовании граничных функций.

Так, для рассматриваемого в Примере 3.1. апериодического объекта

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s+1)(2s+1)}$$

при различных  $\Delta t$  получены эквивалентные дискретные модели. Соответствующие им разностные уравнения дают достоверные интервальные оценки значений отсчетов переходной и импульсной характеристик. Сравним ширину интервалов, образующихся граничными функциями и естественным интервальным расширением в каждой точке дискретного отсчета выходной переменной.

При  $\Delta t = 0.8$  с и точности  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.0001$  получена следующая интервальная дискретная модель переходной характеристики:

$$y(n) = [0.173421, 0.173656]x(n-1) + [0.081528, 0.097511]x(n-2) + [0.824746, 0.920448]y(n-1) + [-0.190294, -0.081582]y(n-2), n = 0, 1, 2, \dots$$

1. Если в качестве значений  $x(n)$  использовать точечные данные, например, середины интервалов (в этом примере они совпадают с моделируемыми «измеренными» значениями), то получаем граничные функции

$$y_{\min}(n) = 0.173421x(n-1) + 0.081528x(n-2) + 0.824746y(n-1) - 0.190294y(n-2),$$

$$y_{\max}(n) = 0.173656x(n-1) + 0.097511x(n-2) + 0.920448y(n-1) - 0.081582y(n-2),$$

где  $x(n) = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y(-1) = y(-2) = \dots = 0$ . Верхняя и нижняя граничные функции дают точечные значения – оценки соответствующих границ модельных интервалов.

2. Если в качестве  $x(n)$  используются данные интервальные значения, то, подставляя их в  $y(n)$ , на выходе сразу получаем интервалы  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ .

Итак, при  $\Delta t = 0.8$  с получаем следующие границы и ширину интервалов (табл. 3.3):

Таблица 3.3. Сравнение рассчитанных значений граничных функций и интервального расширения переходной характеристики

Отсчеты	Точные значения	Граничные функции			Интервальное расширение		
		$n\Delta t$	$y(n\Delta t)$	$y_{\min}(n)$	$y_{\max}(n)$	wid $y(n)$	$y_{\text{инт}}(n)$
0 с	0	0	0	0	0	0	0
0.8 с	0.173539	0.173421	0.173656	0.000235	[0.173404, 0.173674]	0.000269	
1.6 с	0.414482	0.397978	0.431008	0.033030	[0.397939, 0.431051]	0.033113	
2.4 с	0.601151	0.550180	0.653720	0.103541	[0.550073, 0.653808]	0.103734	
3.2 с	0.731358	0.632975	0.837720	0.204745	[0.626569, 0.840526]	0.213957	
4.0 с	0.819665	0.672298	0.988913	0.316616	[0.647268, 0.999978]	0.352710	
4.8 с	0.879065	0.688973	1.113068	0.424095	[0.628809, 1.140506]	0.511696	
5.6 с	0.918924	0.695243	1.215011	0.519768	[0.583242, 1.268165]	0.684923	
6.4 с	0.945651	0.697241	1.298715	0.601474	[0.518920, 1.387175]	0.868255	
7.2 с	0.963569	0.697696	1.367444	0.669749	[0.441577, 1.500435]	1.058858	
8.0 с	0.975579	0.697691	1.423877	0.726187	[0.355142, 1.609932]	1.254790	
8.8 с	0.983630	0.697600	1.470214	0.772614	[0.262303, 1.717029]	1.454726	
9.6 с	0.989027	0.697526	1.508260	0.810734	[0.164897, 1.822657]	1.657760	
10.4 с	0.992645	0.697482	1.539500	0.842017	[0.064182, 1.927457]	1.863274	
...	...	...	...	...	...	...	
16.0 с	0.999553	0.697445	1.646797	0.949352	[-0.856733, 2.810687]	3.667420	
...	...	...	...	...	...	...	
20.0 с	0.999939	0.697445	1.669408	0.971963	[-1.944785, 3.894840]	5.839625	
...	...	...	...	...	...	...	
24.0 с	0.999992	0.697445	1.677847	0.980402	[-3.649569, 5.599300]	9.248870	
...	...	...	...	...	...	...	

То есть при заданном  $\Delta t$  граничные функции с течением времени устанавливаются на постоянные значения, в то время как интервальное расширение переходной характеристики представляет собой

последовательность неограниченно расширяющихся интервалов. И в каждый момент отсчета  $n\Delta t$  граничные функции дают более узкие интервалы, содержащие истинные значения.

Путём увеличения  $\Delta t$  достигается постепенное сужение интервального расширения и его установление на постоянные значения. При этом получаем следующую картину процесса сужения модельных интервалов (рис. 3.7):

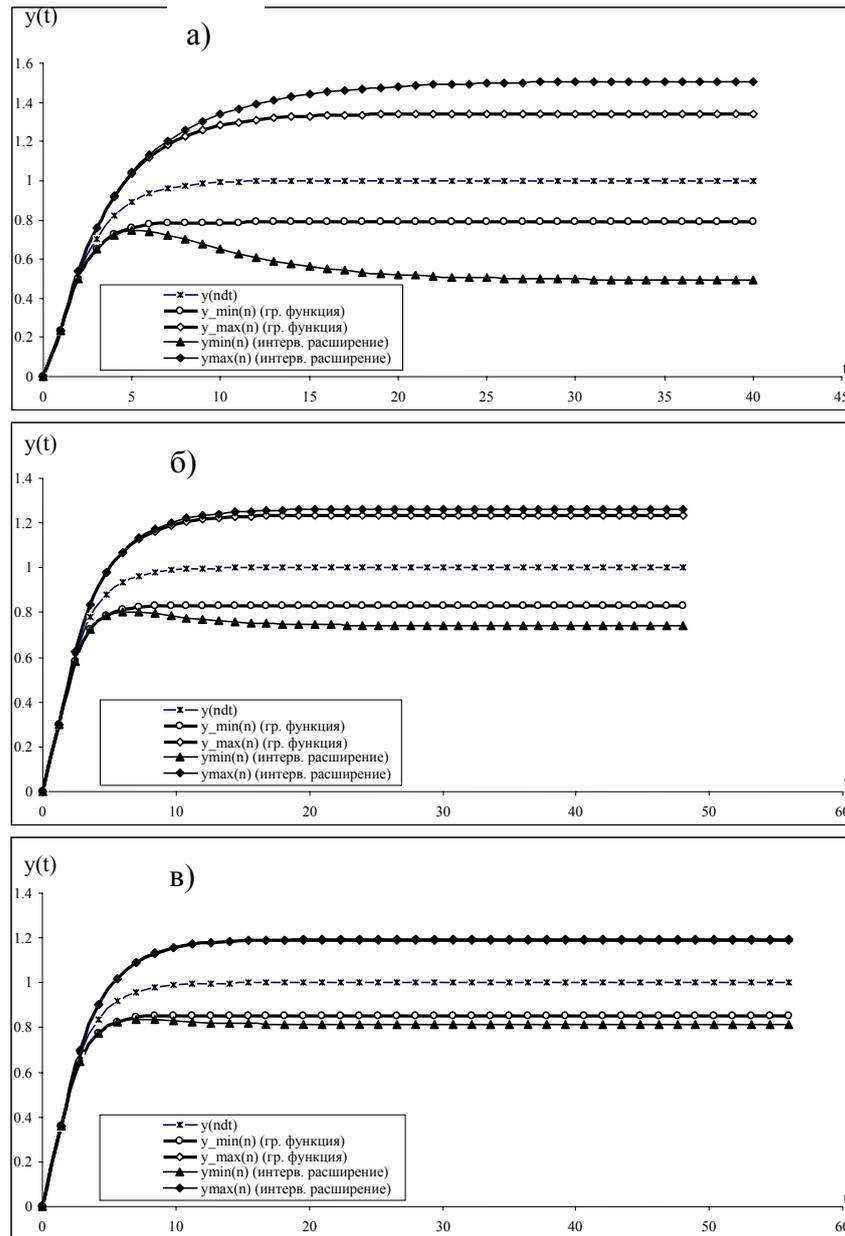


Рис. 3.7. Сравнение граничных функций и интервального расширения переходной характеристики. Сужение модельных интервалов при возрастании  $\Delta t$ :

а)  $\Delta t = 1$  с; б) 1.2 с; в) 1.4 с

Таким образом, при увеличении периода дискретизации естественное интервальное расширение переходной характеристики стягивается к граничным функциям. При максимальном допустимом  $\Delta t$  данные интервальные представления переходной характеристики апериодического объекта 2-го порядка практически совпадают. Аналогичные результаты получаем при нанесении импульсного воздействия.

Сравнение двух интервальных представлений для других типов линейных объектов показало, что подобный вывод верен как для переходной, так и импульсной характеристики линейного объекта.

Итак, в плане получения более точной модели предпочтительнее использование граничных функций. Если же это технически невозможно или нежелателен переход к точечным оценкам исходных измерений, то строится интервальное расширение динамической характеристики, и путём изменения периода дискретизации достигается его максимальное сужение.

## Выводы

Разработан способ решения интервального квадратного уравнения с помощью дискриминанта, позволяющий вычислять нули и полюса часто встречающихся на практике объектов 2-го порядка. Рассмотренные расширения интервальной квадратичной функции позволяют сделать вывод о том, что только интервального дискриминанта недостаточно для вынесения решения о количестве и виде интервальных корней уравнения. Решающую роль здесь играет так называемая определяющая точка, характеризующая положение интервальной параболы относительно оси абсцисс и определяющая число и вид ее нулей.

На примере переходной и импульсной характеристик аperiodического объекта 2-го порядка продемонстрирован процесс восстановления полюсов ИДФ и соответствующих им полюсов НПФ. Отмечается, что разделение полюсов и увеличение точности интервальных оценок достигается при изменении шага дискретизации. Однако в силу того, что метод является робастным, полное разделение интервальных полюсов возможно лишь тогда, когда полюса исходной НПФ в достаточной степени различны. Проведенные практические исследования также показали преимущества использования граничных функций для интервального представления динамической характеристики объекта.

Обзорно приведенные методы локализации нулей полинома – метод деления пополам и короткошаговая итерационная схема (метод ньютоновского типа) позволяют вычислять локализирующие интервалы для нулей и полюсов объектов более высоких порядков, что открывает широкие перспективы в дальнейших исследованиях задачи структурно-параметрической идентификации.

## Глава 4. Решение тестовых и прикладных задач

Данная глава раскрывает возможности и показывает работоспособность предложенного подхода для решения задачи интервальной структурно-параметрической идентификации тестовых объектов и реальных процессов, имеющих различные функциональные свойства. Во всех примерах используется модифицированный метод Висковатова, хотя может также быть использован метод Висковатова.

В первом параграфе на тестовых линейных динамических объектах, наиболее часто встречаются при идентификации технических и иных объектов и систем, показаны различные особенности интервальной идентификации, с которыми можно столкнуться при решении практических задач: влияние вида входного воздействия на восстановление непрерывной модели объекта; выполнение принципа вариации шага дискретизации и построение эквивалентных интервальных дискретных моделей; влияние точности исходных данных на восстановление непрерывной модели; различные виды подмены модели; появление фиктивных нулей в ИДПФ и т.д. При проведении тестовых исследований ограничимся небольшим порядком передаточных функций, так как многие технологические объекты, как отмечает ряд авторов в [3, 67, 102], описываются передаточными функциями до третьего, реже – четвертого порядка. В первом параграфе покажем возможности восстановления и уточнения моделей объектов, имеющих нули в НПФ, объектов с колебательностью, неустойчивых объектов. Причем исследование неустойчивого тестового объекта проводилось для случая зашумленных данных. В качестве входных сигналов использовались наиболее часто встречающиеся при цифровом управлении и легко осуществимые на практике воздействия: ступенчатое и импульсное воздействие.

Второй параграф данной главы посвящен некоторым прикладным задачам, решаемым на основе предложенных способов идентификации. В первой части на примере реального технологического процесса отжима и

измерения влажности крошки показаны возможности интервальной идентификации объектов с транспортным запаздыванием. Второй пример показывает возможности построения оптимального дискретного управления на основе моделей, полученных в результате решения задачи интервальной структурно-параметрической идентификации.

## § 4.1. Модельные исследования некоторых линейных объектов

### Пример 4.1. Устойчивый объект с одним нулем и одним полюсом.

Рассмотрим объект, имеющий эксцесс нулей и полюсов, равный 0. Пусть объект имеет один нуль и один полюс и задается НПФ вида

$$G(s) = k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}.$$

Как отмечается в [37], восстановление нулей возможно лишь при малых значениях периода дискретизации из допустимого диапазона. Рассмотрим на конкретном примере, как будет происходить восстановление нулей и полюсов ПФ в интервальном случае.

Рассмотрим корректирующее устройство переменного тока фазозапаздывающего типа, заданное передаточной функцией вида

$$G(s) = \frac{3 \cdot (0.5s + 1)}{2s + 1}. \quad (4.1)$$

Считаем, что на его вход поступает сигнал  $x(t) = 1(t)$ . Тогда переходная характеристика объекта имеет вид:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 3 - 2.25e^{-0.5t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Произведем измерение входа  $x(t)$  и выхода  $y(t)$  с шагом дискретизации  $\Delta t = 1.5$  с. Считаем, что интервальная неточность здесь появляется в результате измерения  $x(t)$  и  $y(t)$  некоторым прибором, и  $x(n\Delta t)$  и  $y(n\Delta t)$  известны с точностью до 0.001.

На основе полученных значений рассчитаем идентифицирующую матрицу:

[0.999, 1.001]	[0.999, 1.001]	[0.999, 1.001]	[0.999, 1.001]	...
[0.749, 0.751]	[1.936, 1.938]	[2.497, 2.499]	[2.762, 2.764]	...
[-1.589682, -1.576128]	[-2.338389, -2.322841]	[-2.692054, -2.675564]	[-2.859113, -2.842178]	...
[1.094500, 1.126485]	[1.616825, 1.653310]	[1.863554, 1.902165]	...	...
[-0.049364, 0.048346]	[-0.054849, 0.053709]	...	...	...
...	...	...	...	...

Все элементы четвертой строки матрицы содержат в себе число 0, поэтому вычисление следующих строк матрицы на этой строке прекращается.

Нулевой столбец матрицы порождает непрерывную дробь:

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{\frac{[0.749, 0.751]}{[0.999, 1.001]}}{1 + \frac{[-1.589682, -1.576128]z^{-1}}{1 + [1.094500, 1.126485]z^{-1}}}$$

Правила интервальной арифметики позволяют преобразовать непрерывную дробь к дробно-рациональному выражению:

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.748252, 0.751752] + [0.818961, 0.846837]z^{-1}}{1 + [-0.495182, -0.449642]z^{-1}}$$

Таким образом, получена интервальная дискретная передаточная функция объекта в виде дробно-рационального выражения.

Поскольку на вход объекта подается единичное ступенчатое воздействие, то найдем оценку коэффициента передачи

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} G^{\text{IR}}(z) = [2.847626, 3.166664], \text{ wid } K = 0.319038.$$

Найдем интервальные нуль и полюс ИДПФ:

$$Z^{\text{n}} = -\frac{[0.818961, 0.846837]}{[0.748252, 0.751752]} = [-1.131755, -1.089404], \text{ wid } Z^{\text{n}} = 0.042350;$$

$$Z^{\text{п}} = [0.449642, 0.495182], \text{ wid } Z^{\text{п}} = 0.045540.$$

Преобразованием полюса в s-плоскости является интервал

$$S^{\text{n}} = [-0.532869, -0.468553], \text{ wid } S^{\text{n}} = 0.064315.$$

Очевидно, что истинный полюс  $s^{\Pi} = -0.5 \in S^{\Pi}$  и попадает в основную полосу  $\{\text{Re } s \leq 0, -\pi/1.5 < \text{Im } s < \pi/1.5\}$ , то есть получена адекватная интервальная оценка  $S^{\Pi}$  значения полюса НПФ (4.1).

Заметим, что полученный интервальный нуль является вещественным и отрицательным, то есть располагается на разрезе в  $z$ -плоскости, что сигнализирует об отсутствии соответствующего нуля в НПФ (4.1).

Численные эксперименты, проведенные на тестовых объектах в [35] показали, что погрешность в восстановлении нуля гораздо меньше влияет на результаты дискретного моделирования, чем наличие погрешности восстановления полюсов.

Покажем это построив конечно-разностное уравнение для расчета дискретной модели переходной характеристики:

$$y(n) = [0.748252, 0.751752]x(n) + [0.818961, 0.846837]x(n-1) + \\ + [0.449642, 0.495182]y(n-1), n = 0, 1, 2, \dots$$

Выделим граничные функции:

$$y_{\min}(n) = 0.748252x(n) + 0.818961x(n-1) + 0.449642y(n-1),$$

$$y_{\max}(n) = 0.751752x(n) + 0.846837x(n-1) + 0.495182y(n-1),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Отообразим на графике измеренные значения переходной характеристики и смоделированные граничные функции. На рис. 4.1 видно, что измеренные значения  $y(n\Delta t)$  лежат внутри модельных интервалов  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ .

Проследим за перемещением нулей и полюсов в  $z$ -плоскости и их прообразов в  $s$ -плоскости при изменении  $\Delta t$ .

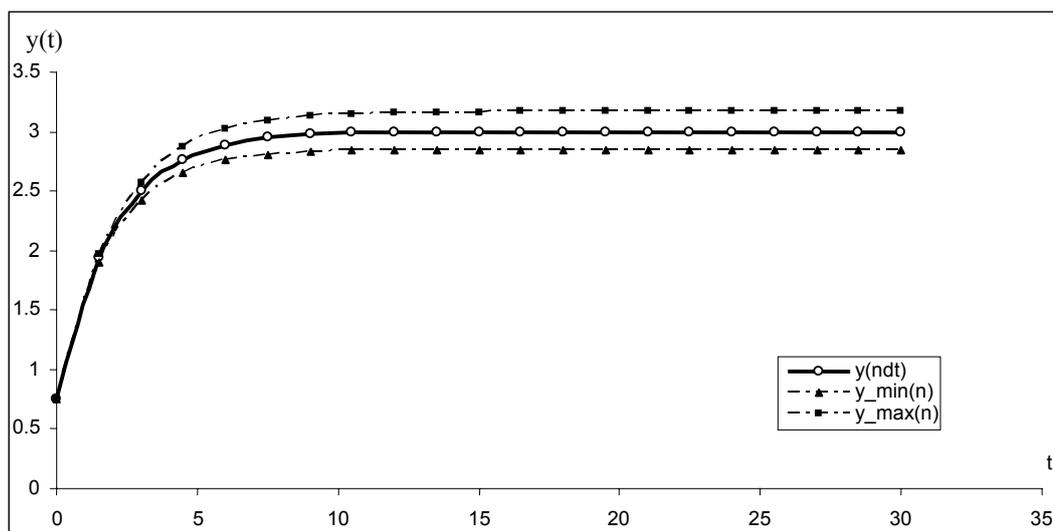


Рис. 4.1. Граничные функции интервальной переходной характеристики  
и точные значения измерений при  $\Delta t = 1.5$  с

В табл. 4.1 для различных шагов  $\Delta t$  приведены значения интервальных нулей и полюсов ИДПФ и их прообразов в  $s$ -плоскости, интервальные оценки коэффициента передачи, а также ширина получаемых интервалов и максимальная ширина модельных интервалов  $y(n) = [y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$  в установившемся режиме.

Таблица 4.1. Значения интервальных параметров  
ИДПФ и НПФ при различных значениях  $\Delta t$

$\Delta t$	0.2 с	0.4 с	0.8 с	1.5 с	2 с	3 с	4 с
$Z^n$	[0.567285, 0.672750]	[0.243906, 0.306205]	[-0.341252, -0.296198]	[-1.131755, -1.089404]	[-1.550342, -1.506736]	[-2.130870, -2.084225]	[-2.483201, -2.434265]
wid $Z^n$	0.105465	0.062299	0.045054	0.105675	0.043606	0.046645	0.048937
$S^n$	[-1.981910, -2.834466]	[-2.958751, -3.527427]	[-1.520910, -1.343919]	[0.037557, 0.101028]	[0.204973, 0.219238]	[0.244799, 0.252177]	[0.222411, 0.227387]
wid $S^n$	0.852556	0.568676	0.176991	0.042350	0.014265	0.007378	0.004976
$Z^n$	[0.845086, 0.966434]	[0.781189, 0.856839]	[0.643395, 0.697445]	[0.449642, 0.495182]	[0.346048, 0.389778]	[0.201892, 0.244415]	[0.114235, 0.156475]
wid $Z^n$	0.121347	0.075650	0.054050	0.045540	0.043730	0.042523	0.042240
$S^n$	[-0.841582, -0.170713]	[-0.617344, -0.386262]	[-0.551245, -0.450414]	[-0.532869, -0.468553]	[-0.530589, -0.471089]	[-0.533340, -0.469629]	[-0.542375, -0.463715]
wid $S^n$	0.670868	0.231082	0.100832	0.064315	0.059500	0.063712	0.078659
$K$	[1.565460, 9.750228]	[2.367625, 3.976292]	[2.722674, 3.328634]	[2.847626, 3.166664]	[2.876270, 3.132955]	[2.900700, 3.105117]	[2.910720, 3.093933]
wid $K$	8.184768	1.608667	0.605961	0.319038	0.256685	0.204416	0.183213
max wid $y(n)$	-	$\approx 1.609$	0.605961	0.319038	0.256685	0.204416	0.183213

Прочерк при  $\Delta t = 0.2$  с означает, что граничные функции неограниченно расходятся, расширяя модельные интервалы.

По данным таблицы можно сделать следующие наблюдения:

- 1) При малых шагах  $\Delta t$  (0.2 с и 0.4 с) нули ИДПФ  $Z^n$  лежат внутри единичного круга, являются положительными и имеют интервальные прообразы  $S^n$  в основной полосе  $s$ -плоскости. Причем интервальные оценки не соответствуют истинному значению нуля ДПФ. Затем при увеличении  $\Delta t$  нули в  $z$ -плоскости перемещаются вдоль разреза в сторону уменьшения значений, при этом выходя за пределы единичного круга. При этом нули в  $s$ -плоскости имеют неотрицательные значения. То есть, согласно [35, 40, 41] в  $s$ -плоскости нули при этих значениях  $\Delta t$  также не восстановлены.
- 2) С увеличением  $\Delta t$  происходит перемещение интервальных полюсов  $Z^n$  к началу координат и их сужение. При возрастании  $\Delta t$  интервальные оценки истинного полюса  $s^n$  уточняются, а затем ширина интервалов снова начинает увеличиваться. При дальнейшем увеличении  $\Delta t$  полюса  $Z^n$  перемещаются на разрезе  $z$ -плоскости, что не позволяет их идентифицировать.
- 3) Ширина интервальных значений  $K$  уменьшается с возрастанием  $\Delta t$ .
- 4) Граничные функции с увеличением  $\Delta t$  стягиваются к истинным значениям выхода  $y(n\Delta t)$ , ширина интервалов  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$  уменьшается до некоторого предела.

Покажем на графиках скорость сужения интервальных  $z$ -полюсов,  $s$ -полюсов (рис. 4.2 а, б) и коэффициентов передачи  $K$  (рис. 4.3 а) для тех значений  $\Delta t$ , при которых интервальные полюса НДФ дают адекватную оценку истинных значений полюсов. При больших или меньших значениях  $\Delta t$  происходит подмена модели, и в этих случаях невозможно восстановить структуру или получить адекватные оценки параметров модели.

Для иллюстрации последнего пункта изобразим графически уменьшение максимальной ширины модельных интервалов  $y(n)$  в установившемся режиме (рис. 4.3 б).

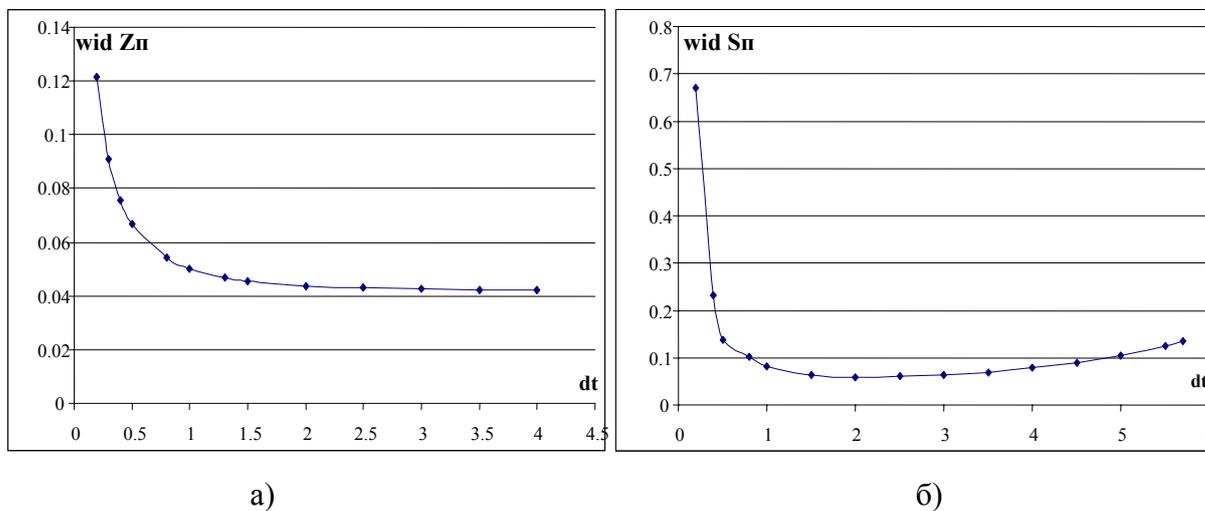


Рис. 4.2. а) изменение ширины интервальных z-полюсов с увеличением шага  $\Delta t$ ;  
б) изменение ширины интервальных s-полюсов с увеличением шага  $\Delta t$

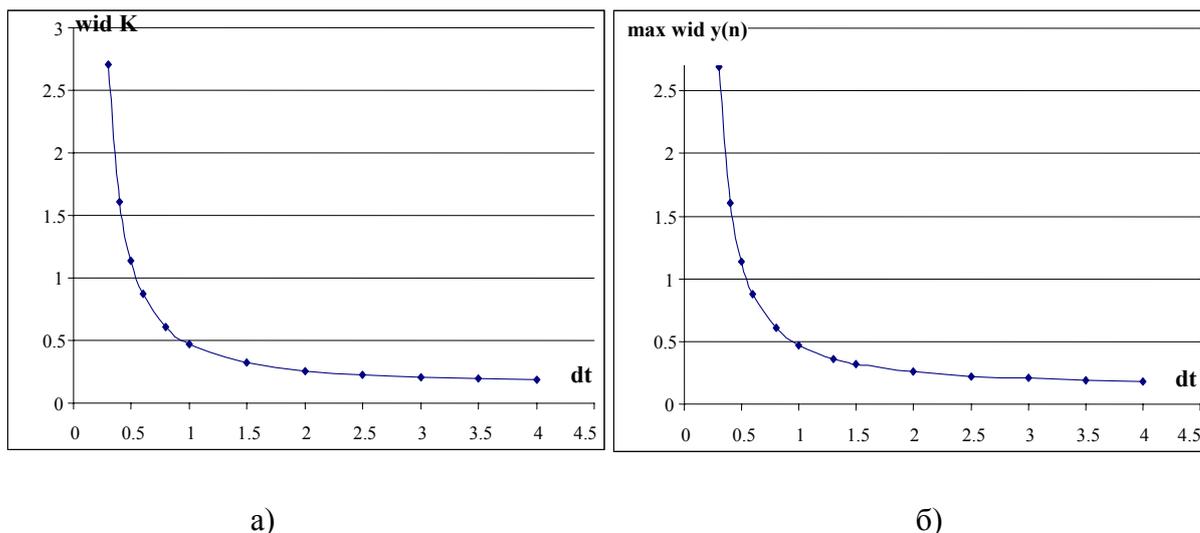


Рис. 4.3. а) сужение интервальной оценки коэффициента передачи;  
б) сужение граничных функций динамической характеристики при возрастании  $\Delta t$

Сравнение графиков а) и б) на рис. 4.2 показывает, что в то время как ширина z-полюсов экспоненциально уменьшается, полюса в s-плоскости сначала также сужаются экспоненциально, а затем снова расширяются. Максимальное сужение, то есть максимальная точность оценки  $s^{\Pi}$ , достигаются при некотором  $\Delta t \in (1.5 \text{ с}, 2.5 \text{ с})$ . Очевидно, что максимальная  $\text{wid } y(n)$  тоже уменьшается экспоненциально (рис. 4.3 б).

Теперь покажем влияние точности исходных измерений на точность интервальной модели. Построим ИДПФ и оценим параметры НПФ. Для сравнения точности модели с полученными выше результатами (при точности 0.001 для входа и выхода объекта) зафиксируем шаг дискретизации, например,  $\Delta t = 3$  с. При этом шаге модели, полученные выше, близки к максимальному сужению.

Сначала считаем, что измерения  $x(n\Delta t)$  известны с точностью до 0.01, а  $y(n\Delta t)$  – с точностью 0.001. Затем зададим точность входных измерений равной 0.001 и выхода – 0.01, и в конце концов положим, что все исходные измерения известны с точностью до 0.01. После применения ИММВ получаем интервальные значения полюса и коэффициента передачи НПФ, которые приведены в сравнительной табл. 4.2:

Таблица 4.2. Точность восстановления параметров ИДПФ и НПФ в зависимости от исходной точности интервальных данных

$\Delta t = 3$ с		$Z^n$	wid $Z^n$	$S^n$	wid $S^n$	$K$	wid $K$	max wid $y(n)$
1.	$\varepsilon_x = 0.001$ $\varepsilon_y = 0.001$	[0.201892, 0.244415]	0.042523	[-0.533340, -0.469629]	0.063712	[2.900700, 3.105117]	0.204416	0.204416
2.	$\varepsilon_x = 0.01$ $\varepsilon_y = 0.001$	[0.166784, 0.279665]	0.112881	[-0.597019, -0.424721]	0.172298	[2.738190, 3.304481]	0.566291	0.566291
3.	$\varepsilon_x = 0.001$ $\varepsilon_y = 0.01$	[0.047138, 0.402126]	0.354988	[-1.018227, -0.303663]	0.714563	[2.318964, 4.102977]	1.784013	1.784013
4.	$\varepsilon_x = 0.01$ $\varepsilon_y = 0.01$	[0.012775, 0.438206]	0.425431	[-1.453424, -0.275022]	1.178402	[2.204738, 4.428265]	2.223527	2.223527

По данным таблицы видно, что при уменьшении точности входа или выхода ширина всех интервальных оценок возрастает. Также как и одновременное уменьшение точности исходных данных ведет к расширению модельных интервалов. Причем ухудшение точности только измерений выхода (в таблице – 3 случай) гораздо больше влияет на ухудшение интервальной модели по сравнению с 1-м случаем, чем увеличение точности только измерений входа (2 случай в таблице). По-видимому, это связано все с тем же фактом, отмечавшимся выше, что точность восстановления нулей ПФ, а

следовательно, и точность исходных измерений входного воздействия, мало влияет на точность моделей, а отличие от полюсов (связанных с выходными величинами).

Таким образом показано, что действительно на основе более точных исходных данных мы получаем более точную интервальную модель (в смысле ширины ее интервальных оценок).

Итак, можно сделать вывод о том, что хотя при малых шагах и производится учёт наличия нуля в НПФ (4.1), но его интервальная идентификация затруднена. Однако это практически не влияет на точность модельных значений динамической характеристики  $y(n)$ , поскольку основное влияние на точность модельных значений выхода объекта оказывает точность интервального восстановления полюсов. Существует такое значение шага дискретизации, при котором модельные интервалы достигают максимального сужения. Сужение интервальных оценок параметров НПФ с увеличением шага дискретизации  $\Delta t$  в допустимых пределах происходит со скоростью экспоненты. Точность интервальной модели (ширина интервальных оценок ее параметров) в большей степени зависит от точности исходных измерений отклика объекта, нежели входного воздействия.

#### **Пример 4.2. Объект 2-го порядка со свойством колебательности**

Особый практический интерес представляет идентификация объектов 2-го (или в общем случае более высокого порядка), обладающих свойством колебательности [88]. Сложность дискретного моделирования таких объектов связана с тем, что они имеют комплексно-сопряженные полюса, и в случае интервальных исходных данных идентификация колебательных объектов приводит к использованию интервальной комплексной арифметики. В процессе идентификации (как точечной, так и интервальной) в зависимости от значений шага дискретизации свойство колебательности может сохраняться либо быть утеряно в результате подмены модели.

Рассмотрим простейший тестовый динамический объект 2-го порядка с колебательностью, передаточная функции которого представлена соотношением

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где  $k$  - коэффициент передачи,  $\xi$  - коэффициент демпфирования (затухания),  $T$  - постоянная времени. Данная функция имеет комплексно-сопряженные полюса

$$s_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot i,$$

где  $i^2 = -1$ .

Учитывая, что  $T > 0$ , а  $0 < \xi < 1$ , оба полюса расположены в левой полуплоскости  $s$ -плоскости, что определяет устойчивость тестового объекта. Переходная характеристика таких объектов при  $t \geq 0$  описывается временной функцией:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right], & t \geq 0. \end{cases}$$

Положим для определенности  $k = 1$ ,  $T = 2$ ,  $\xi = 0.25$ . Тогда НПФ объекта имеет вид

$$G(s) = \frac{1}{4s^2 + s + 1}. \quad (4.2)$$

Полюсами в непрерывной  $s$ -плоскости являются  $s_{1,2} = -0.125000 \pm 0.484123i$ . На вход объекта подадим ступенчатое воздействие  $x(t) = 1(t)$ . Моделируем снятие измерений с заданным шагом дискретизации, считая при этом, что интервальная неопределённость измерений обусловлена в большей мере погрешностью измерительной аппаратуры. Считаем, что значения входа и выхода объекта измерены с погрешностями  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.001$ .

Построим дискретные модели и оценки параметров НПФ при различных значениях  $\Delta t$ .

Пусть  $\Delta t = 1.5$  с. Идентифицирующая матрица имеет вид

[0.999, 1.001]	[0.999, 1.001]	[0.999, 1.001]	[0.999, 1.001]	...
[0.237, 0.239]	[0.742, 0.744]	[1.204, 1.206]	[1.430, 1.432]	...
[-2.139646, - 2.101019]	[-4.089148, - 4.034206]	[-5.042666, - 4.979745]	[-4.884920, - 4.823319]	...
[1.156752, 1.252192]	[2.636104, 2.759781]	[3.656723, 3.786407]	...	...
[-0.500345, - 0.158922]	[-0.945939, - 0.520152]	...	...	...
[-3.847022, 1.346215]	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Отметим, что длина непрерывной дроби, построенной по элементам нулевого столбца матрицы, соответствует длине непрерывной дроби для колебательного звена в точечном случае.

ДПФ объекта после сворачивания непрерывной дроби принимает вид

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.236750, 0.239226]z^{-1} + [0.179862, 0.236237]z^{-2}}{1 + [-1.483239, -1.007749]z^{-1} + [0.333899, 1.070562]z^{-2}}$$

Действительно, порядок полученной дискретной модели ИДПФ совпадает с порядком точечной ДПФ [40].

Далее для восстановления НПФ объекта необходимо найти нули и полюса ИДПФ.

Найдем нуль ДПФ:

$$Z^n = [-0.997830, -0.751847].$$

Так как единственный нуль ДПФ лежит на разрезе  $z$ -плоскости, то в НПФ нули отсутствуют.

Для вычисления полюсов ИДПФ воспользуемся методом решения интервального квадратного уравнения (Гл. 3, п. 3.1.1).

Вычисление интервального дискриминанта характеристического уравнения дает значение

$$D = [-3.266689, 0.864402],$$

то есть при выбранном шаге дискретизации ИДПФ дискриминант является 0-содержащим интервал. Вычислим интервальные полюса по формулам (3.3.7):

$$Z_1^n = [0.039009, 0.741620] - [0, 0.903700]i,$$

$$Z_2^n = [0.503875, 1.206486] + [0, 0.903700]i,$$

$$\text{wid } Z_1^n = \text{wid } Z_2^n = 1.606311.$$

Представим значения  $Z_1^n$  и  $Z_2^n$  в виде прямоугольников на комплексной плоскости (рис. 4.4).

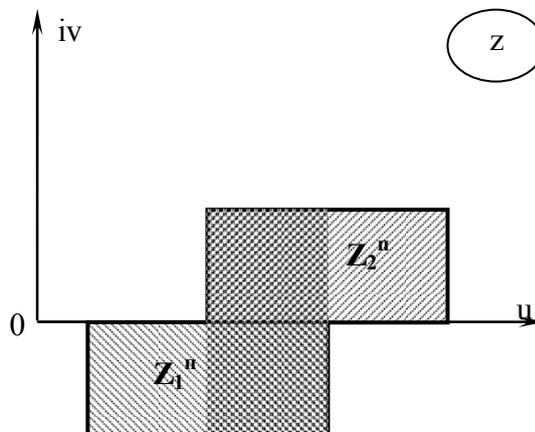


Рис. 4.4. Вычисленные комплексные полюса ИДПФ

Очевидно, что полученные интервальные полюса являются комплексно-сопряженными лишь частично (на рисунке отмечено двойной штриховкой), остальные комплексные значения являются фиктивными, то есть колебательность объекта сохраняется не при всех значениях параметров из полученных интервалов. При этом формально объект имеет одновременно как вещественные, так и комплексные полюса, что является парадоксом. Следовательно, при  $\Delta t = 1.5$  с произошла подмена модели, и нельзя говорить об адекватности восстановления модели, поскольку полученные результаты не поддаются однозначной интерпретации.

Так, например, согласно приведенной в п. 3.1.1. методике, характеристическое уравнение имеет один кратный вещественный корень, и для его получения необходимо произвести объединение вещественных значений полученных интервалов:

$$Z_{1,2}^n = [0.039009, 1.206486], \text{ wid } Z_{1,2}^n = 1.167477.$$

Такая интерпретация решения уравнения приводит к получению непрерывной модели объекта с двумя вещественными кратными полюсами. Кроме того, интервальный полюс содержит значения  $\{z \in Z_{1,2}^n : |z| \geq 1\}$ , соответствующие неустойчивому поведению объекта.

С другой стороны, появление множества комплексно-сопряженных полюсов в решении характеристического уравнения указывает на то, что частично сохраняется свойство колебательности рассматриваемого объекта.

Перейдем от ИДПФ  $G^{IR}(z)$  к модели динамической характеристики объекта во временной области в виде конечно-разностного уравнения и представим его граничными функциями, то получим следующее:

$$y(n) = [0.236750, 0.239226]x(n-1) + [0.179862, 0.236237]x(n-2) + \\ + [1.007749, 1.483239]y(n-1) - [0.333899, 1.070562]y(n-2), \\ y_{\min}(n) = 0.236750x(n-1) + 0.179862x(n-2) + 1.007749y(n-1) - 1.070562y(n-2), \\ y_{\max}(n) = 0.239226x(n-1) + 0.236237x(n-2) + 1.483239y(n-1) - 0.333899y(n-2), \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

На плоскости граничные функции и истинные значения переходной характеристики имеют следующий вид (рис. 4.5):

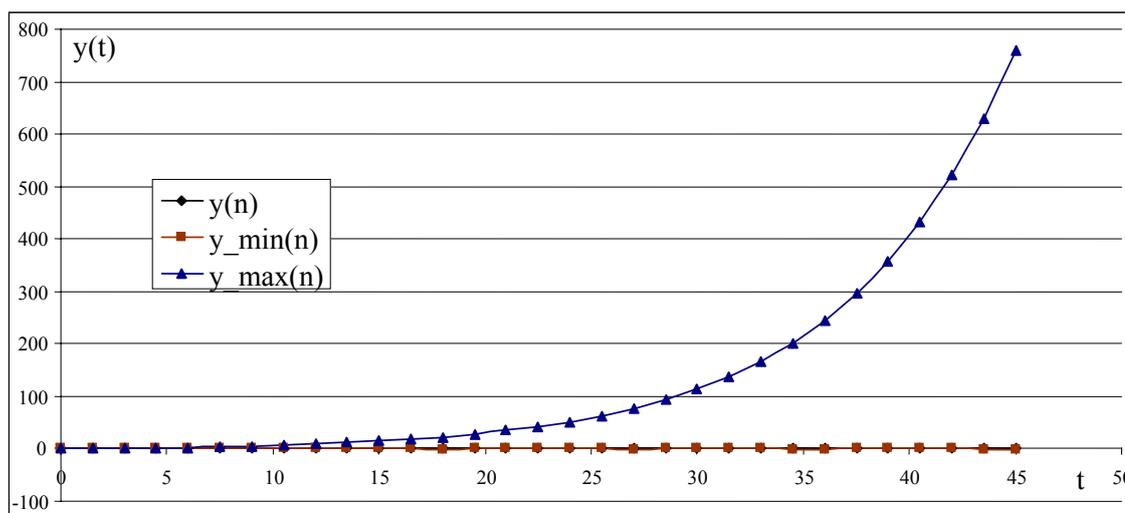


Рис. 4.5. Возрастающая верхняя граничная функция  $y_{\max}(n)$  переходной характеристики, нижняя граничная функция  $y_{\min}(n)$  и точные значения измерений  $y(n)$  при  $\Delta t = 1.5$  с

Очевидно, что интервальные значения переходной характеристики неограниченно расширяются вследствие того, что интервальный  $z$ -полюс содержит в себе значения из области неустойчивости  $|z| > 1$ , в то время как истинная переходная характеристика объекта выходит со временем в установившийся режим. То есть при выбранном  $\Delta t$  полученная интервальная

модель не соответствует исходным данным, и необходимо изменение шага дискретизации для получения адекватной интервальной модели.

При увеличении значения шага дискретизации до  $\Delta t = 1.7$  с происходит уточнение модели. ИДПФ принимает вид

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.295800, 0.298394]z^{-1} + [0.230306, 0.281497]z^{-2}}{1 + [-1.283369, -0.922696]z^{-1} + [0.406422, 0.917564]z^{-2}}$$

Интервальный дискриминант характеристического уравнения смещается в направлении отрицательных значений:

$$D = [-2.818885, 0.021349].$$

Полюса ИДПФ так же сужаются, не выходя за пределы области устойчивости  $|z| < 1$ :

$$Z_1^n = [0.388293, 0.641685] - [0, 0.839480]i$$

$$Z_2^n = [0.461348, 0.714740] + [0, 0.839480]i$$

$$\text{wid } Z_1^n = \text{wid } Z_2^n = 1.092872$$

При таком шаге дискретизации также происходит подмена модели, поскольку решением характеристического уравнения является не пара комплексно-сопряженных интервальных чисел, а множество «смешанных» вещественных и комплексных интервалов.

Интервальное конечно-разностное уравнение и граничные функции принимают значения

$$y(n) = [0.295800, 0.298394]x(n-1) + [0.230306, 0.281497]x(n-2) + [0.922696, 1.283369]y(n-1) - [0.406422, 0.917564]y(n-2),$$

$$y_{\min}(n) = 0.295800x(n-1) + 0.230306x(n-2) + 0.922696y(n-1) - 0.917564y(n-2),$$

$$y_{\max}(n) = 0.298394x(n-1) + 0.281497x(n-2) + 1.283369y(n-1) - 0.406422y(n-2),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

На рис. 4.6 приведены модельные значения граничных функций и истинные значения отсчетов переходной характеристики.

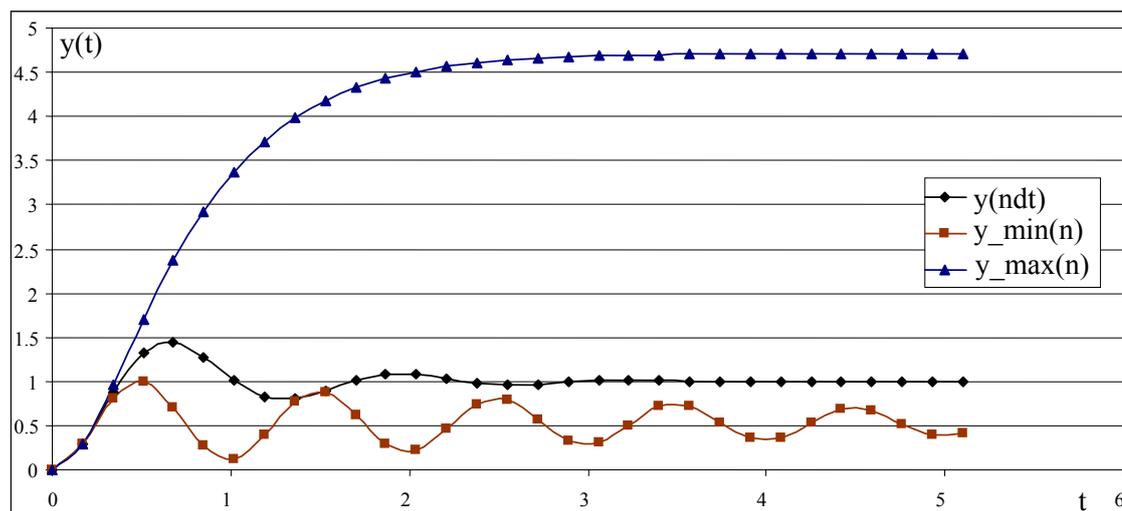


Рис. 4.6. Граничные функции интервальной дискретной переходной характеристики  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$  и точные значения  $y(n\Delta t)$  при  $\Delta t = 1.7$  с

Здесь заметно влияние подмены модели, произошедшей из-за того, что  $0 \in D$ . Так, верхняя граничная функция соответствует положительным значениям интервального дискриминанта  $D$ , определяющего положение нижней границы интервальной параболы. То есть  $y_{\max}(n)$  отражает моделируемый процесс как поведение аperiodического объекта 2-го порядка, имеющего два различных вещественных корня. Нижняя граничная функция  $y_{\min}(n)$  соответствует отрицательным значениям дискриминанта и описывает поведение моделируемого объекта как колебательного. То есть здесь происходит учёт тех комплексных значений интервальный полюсов ДПФ, которые отбрасываются при формальном решении характеристического уравнения.

Тем не менее, хотя истинные значения отсчетов переходной характеристики лежат внутри модельных интервалов:

$$y(n) \in [y_{\min}(n), y_{\max}(n)], n = 0, 1, 2, \dots,$$

полученную модель так же нельзя считать адекватной в связи с неоднозначностью полученных результатов вычисления полюсов.

Возникает предположение о том, что дальнейшее увеличение  $\Delta t$  приведет к смещению интервального дискриминанта в область отрицательных чисел, что означает появление интервальных комплексно-сопряженных полюсов ИДПФ и их перемещению внутри единичного круга  $|z| < 1$ .

Уже при  $\Delta t = 1.75$  с решение характеристического уравнения, полученного из ИДПФ

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.311213, 0.313838]z^{-1} + [0.243173, 0.293068]z^{-2}}{1 + [-1.235991, -0.897901]z^{-1} + [0.418843, 0.886726]z^{-2}},$$

позволяет выделить полюса ИДПФ

$$Z_{1,2}^{\text{II}} = [0.448951, 0.617995] \pm [0.192158, 0.827750]i, \text{ wid } Z_{1,2} = 0.804637,$$

то есть произошло смещение их значений в чисто комплексную область, что означает полное сохранение колебательности объекта в полученной дискретной модели.

Прообразами полюсов в  $s$ -плоскости являются интервалы

$$S_{1,2}^{\text{II}} = [-0.409561, 0.018552] \pm [0.172263, 0.613615]i, \text{ wid } S_{1,2}^{\text{II}} = 0.869465.$$

Сравнение с истинными значениями полюсов исходной НПФ показывает, что

$$s_1^{\text{II}} \in S_1^{\text{II}} \text{ и } s_2^{\text{II}} \in S_2^{\text{II}}.$$

На рис. 4.7 изображены граничные функции и истинные значения отсчетов переходной характеристики:

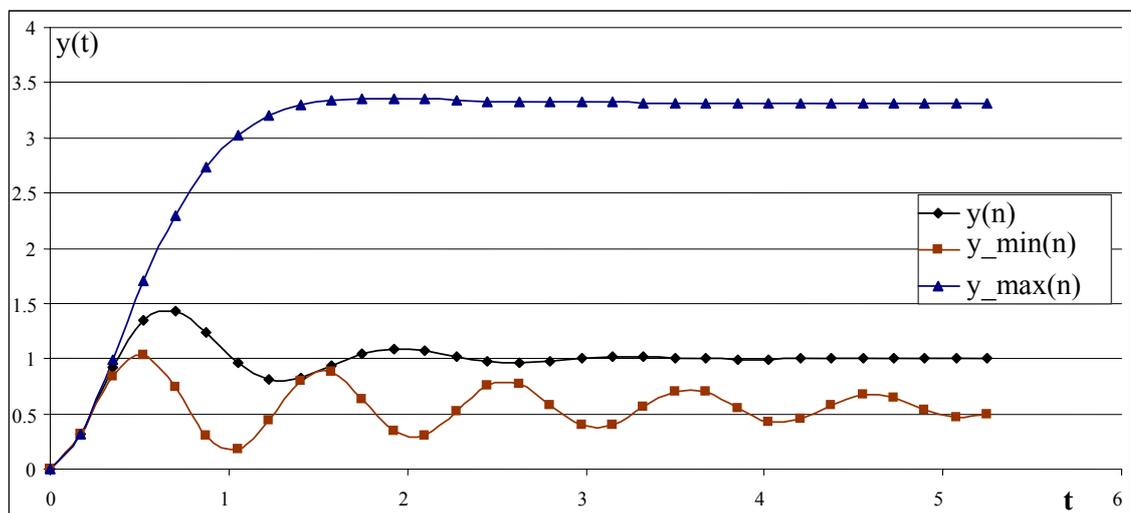


Рис. 4.7. Граничные функции интервальной дискретной переходной характеристики

$[y_{\text{min}}(n), y_{\text{max}}(n)]$  и точные значения  $y(n\Delta t)$  при  $\Delta t = 1.75$  с

Здесь верхняя граничная функция уже обладает колебательностью, пока не явно выраженной. Но ширина интервалов  $[y_{\text{min}}(n), y_{\text{max}}(n)]$  остается большой

относительно истинных значений характеристики, то есть точность полученной интервальной модели неудовлетворительна, и требуется сужение интервальной модели.

Также поскольку  $\text{Re } S_1^n$  и  $\text{Re } S_2^n$  включают в себя значения из области неустойчивости  $\{s: \text{Re } s \geq 0\}$ , необходимо дальнейшее увеличение  $\Delta t$  для того, чтобы еще больше сузить и переместить полюса в  $z$ -плоскости внутри единичного круга. Это приведет к уточнению  $s$ -полюсов и их перемещению в область устойчивости (либо неустойчивости для неустойчивого объекта).

При  $\Delta t = 2$  с получаем ИДПФ

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.391554, 0.394339]z^{-1} + [0.308362, 0.351841]z^{-2}}{1 + [-1.009550, -0.759278]z^{-1} + [0.457829, 0.762515]z^{-2}}$$

с полюсами

$$Z_{1,2}^n = [0.379639, 0.504775] \pm [0.450590, 0.786377]i, \text{ wid } Z_{1,2}^n = 0.460923.$$

Очевидно, что произошло уменьшение ширины интервалов и их перемещение внутри единичного круга, что означает сохранение свойства устойчивости исходного объекта как в  $z$ -, так и в  $s$ -плоскости:

$$S_{1,2}^n = [-0.264494, -0.033901] \pm [0.364371, 0.560514]i, \text{ wid } S_{1,2}^n = 0.426736,$$

$$s_1^n \in S_1^n, s_2^n \in S_2^n.$$

Оценим интервально коэффициент передачи НПФ  $k$ :

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} G^{\text{IR}}(z) = [0.697658, 1.664546], \text{ wid } K = 0.966888, k \in K.$$

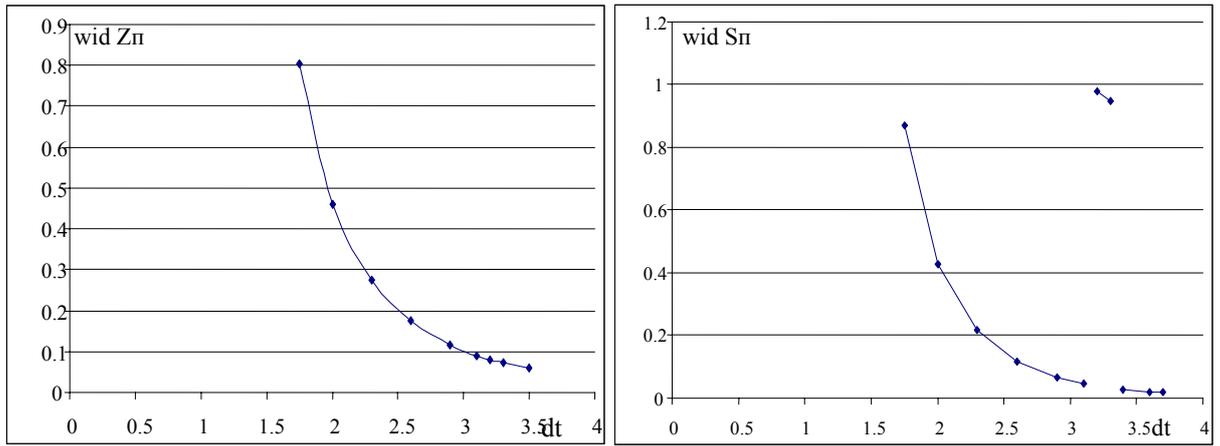
Проследим за дальнейшим изменением точности дискретной модели и интервальных оценок параметров при увеличении шага дискретизации. Покажем в табл. 4.3 процесс сужения модельных значений.

Таблица 4.3. Интервальные оценки восстановленных полюсов  
ИДФ и НПФ и параметров интервальной модели

$\Delta t$	1.75 с	2 с	2.3 с	2.6 с	2.9 с	3.1 с	3.2 с
<b>Re <math>Z^n</math></b>	[0.448951, 0.617995]	[0.379639, 0.504775]	[0.286137, 0.377172]	[0.187607, 0.256576]	[0.088596, 0.142843]	[0.024033, 0.071146]	[-0.007533, 0.036731]
<b>Im <math>Z^n</math></b>	[0.192158, 0.827750]	[0.450590, 0.786377]	[0.573721, 0.758668]	[0.631931, 0.738544]	[0.654231, 0.716422]	[0.654995, 0.698083]	[0.651864, 0.687663]
<b>wid <math>Z^n</math></b>	0.804637	0.460924	0.275982	0.175582	0.116439	0.090201	0.080062
<b>Re <math>S^n</math></b>	[-0.409561, 0.018552]	[-0.264494, -0.033901]	[-0.193280, -0.072068]	[-0.160285, -0.094654]	[-0.143175, -0.108274]	[-0.136276, -0.114274]	[-0.133704, -0.116572]
<b>Im <math>S^n</math></b>	[0.172263, 0.613615]	[0.364371, 0.560514]	[0.430098, 0.526146]	[0.455813, 0.508475]	[0.467528, 0.499227]	[0.471806, 0.495607]	[0.473284, -0.487451]
<b>wid <math>S^n</math></b>	0.869465	0.426736	0.217259	0.118293	0.066600	0.045802	0.977866
<b>K</b>	[0.560651, 3.319105]	[0.697658, 1.664546]	[0.811144, 1.282087]	[0.880792, 1.149477]	[0.922311, 1.089140]	[0.940236, 1.066212]	[0.946928, 1.058004]
<b>wid K</b>	2.758454	0.966888	0.470943	0.268685	0.166829	0.125975	0.111076
<b>max wid <math>y(n)</math></b>	3.044989	1.498119	0.771304	0.465135	0.272772	0.208653	0.189116

По приведенным данным можно сделать следующие выводы.

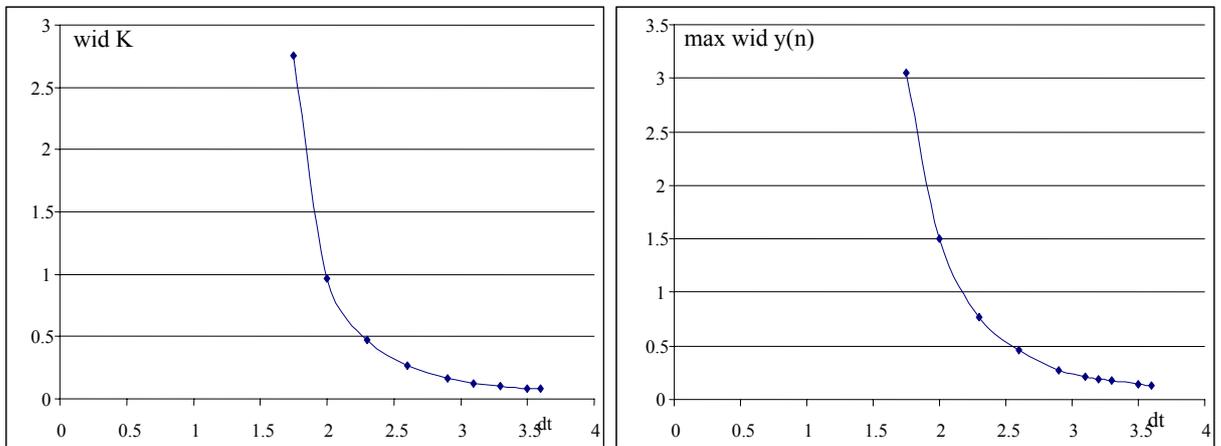
1. При малых значениях  $\Delta t$  происходит подмена модели или интервальные значения полюсов в  $s$ -плоскости частично попадают в область неустойчивости  $\text{Re } s \geq 0$ .
2. С увеличением  $\Delta t$  происходит перемещение  $z$ -полюсов внутри единичного круга и смещение их прообразов в область устойчивости. Сужение интервальных полюсов в  $z$ -плоскости, оценки  $K$  коэффициента передачи  $k$  и модельных интервалов  $y(n)$ , образуемых граничными функциями, происходит со скоростью экспоненты (рис. 4.8-4.9)
3. При  $\Delta t > 3.1$  с интервал  $\text{Im } S^n$  перемещается в отрицательную полуплоскость. В связи с этим сначала происходит резкий скачок в  $\text{wid } S^n$ , что связано со свойствами интервальной арифметики (здесь выполняется вычисление ширины  $0$ -содержащего интервала), затем ширина интервала  $S^n$ , где  $\text{Im } S^n < 0$  продолжает уменьшаться экспоненциально (рис. 4.8 б).



а)

б)

Рис. 4.8. а) Сужение полюсов дискретной передаточной функции с возрастанием  $\Delta t$ ;  
 б) сужение полюсов непрерывной передаточной функции при увеличении  $\Delta t$



а)

б)

Рис.4.9. а) Уточнение интервальной оценки коэффициента передачи  $K$  при изменении  $\Delta t$ ;  
 б) сужение граничных функций с возрастанием  $\Delta t$

Поскольку с возрастанием  $\Delta t$  происходит уточнение модели, то частота и амплитуда колебаний граничных функций становятся все ближе к частоте и амплитуде колебаний истинной переходной характеристики, и граничные функции с увеличением шага дискретизации все точнее отражают особенности процесса (рис. 4.10).

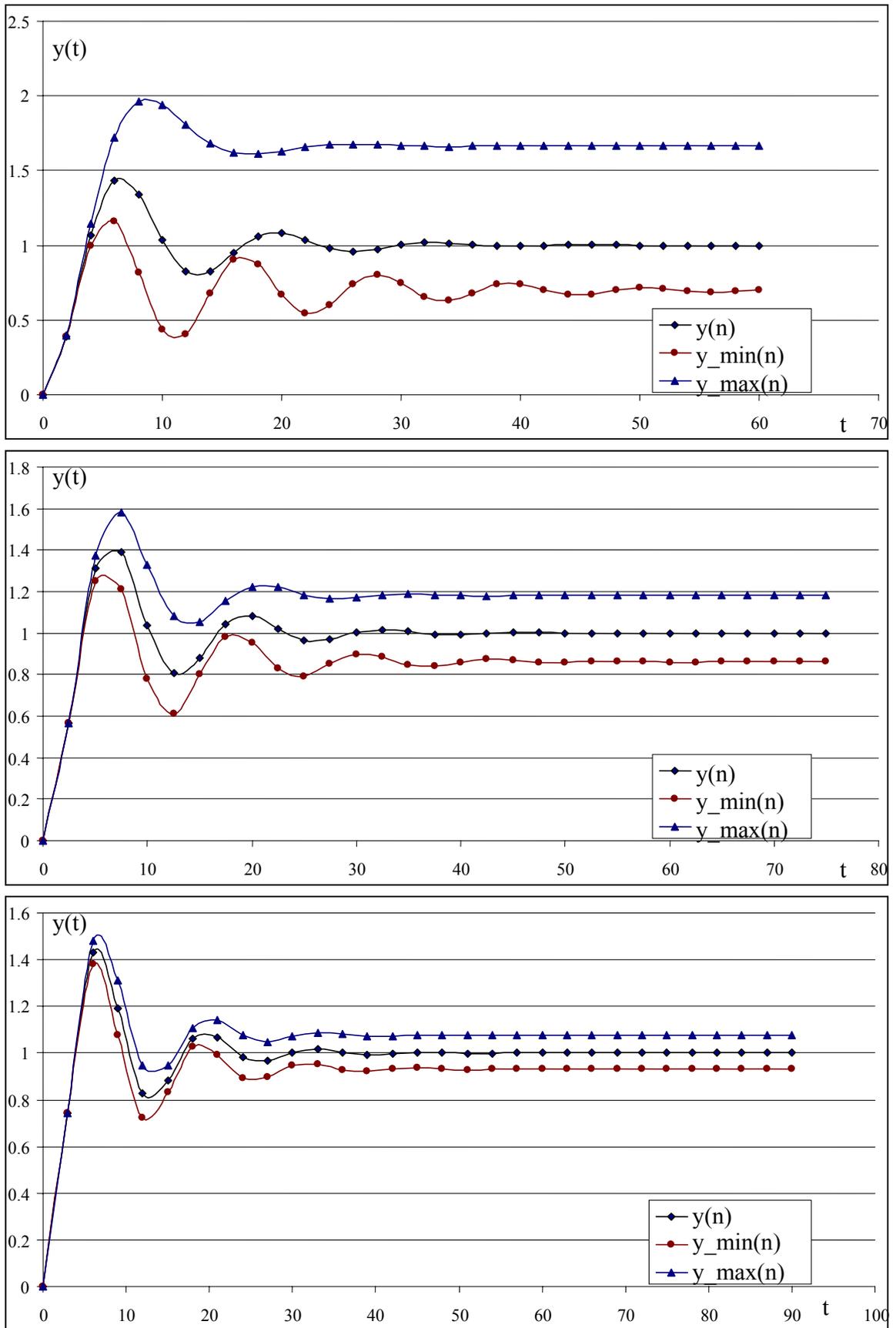


Рис. 4.10. Увеличение точности интервальной модели дискретной переходной характеристики при увеличении шага  $\Delta t$ : а)  $\Delta t = 2$  с; б)  $\Delta t = 2.5$  с; в)  $\Delta t = 3$  с

Эквивалентность моделей в случае колебательного объекта следует понимать как частичную либо полную вложенность комплексных интервалов: либо только действительных, либо действительных и мнимых частей комплексных полюсов при возрастании  $\Delta t$ . Так, для рассмотренного объекта при  $\Delta t_1 > \Delta t_2$  выполняются вложения

$$\operatorname{Re} Z_1^n \subset \operatorname{Re} Z_2^n \text{ и } \operatorname{Re} S_1^n \subset \operatorname{Re} S_2^n.$$

**Пример 4.3. Объект 2-го порядка с чисто мнимыми полюсами (консервативный колебательный объект).**

Особенностью типового консервативного колебательного объекта является наличие двух сопряженных чисто комплексных полюсов. На поведении объекта в динамике это сказывается тем, что колебания объекта не затухают со временем, а имеют постоянную амплитуду и частоту и совершаются относительно некоторого постоянного значения, определяемого параметрами объекта и входного воздействия. Такого рода зависимостями описываются различные периодические, циклические процессы.

В точечном случае SP-идентификация не вызывает проблем. Метод Висковатова и модифицированный метод Висковатова точно восстанавливают модель подобного объекта и его реакцию на подаваемое входное воздействие.

При интервальной неопределённости данных основной проблемой может оказаться принципиальная возможность получения и оценивания чисто мнимых полюсов при различной точности исходных интервальных данных. Использование предложенных в данной работе методов интервальной SP-идентификации приводит к интересным результатам, лишней раз подтверждающих работоспособность и разносторонность этих методов.

Здесь лишь кратко приведем ключевые моменты, отличительные особенности, возникающие на различных этапах идентификации консервативного колебательного объекта, поскольку он является частным

случаем более общего класса объектов с колебательностью (пример 4.1.2), и все этапы процесса его идентификации аналогичны.

Передаточная функция рассматриваемого объекта задается соотношением

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}, \quad (4.3)$$

получающимся из НПФ объекта 2-го порядка с колебательностью при  $\xi = 0$ .

Рассмотрим кратко случай, когда на вход объекта подается единичное ступенчатое воздействие  $x(t) = 1(t)$ . Реакция объекта описывается функцией

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ k \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{T}\right) \right), & t \geq 0. \end{cases}$$

Положим для определенности  $k = 1$ ;  $T = 2$  с. Тогда полюса объекта имеют значения  $s_{1,2}^n = \pm 0.5i$ , где  $i^2 = -1$  – мнимая единица, а переходная характеристика при  $t \geq 0$  описывается соотношением

$$y(t) = 1 - \cos(0.5t).$$

Зададим точность интервальных исходных данных  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.001$  и шаг дискретизации  $\Delta t = 2$  с.

После построения идентифицирующей матрицы и сворачивания непрерывной дроби получаем интервальную ДПФ

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.458239, 0.461159]z^{-1} + [0.442017, 0.476500]z^{-2}}{1 + [-1.180556, -0.982348]z^{-1} + [0.862980, 1.141657]z^{-2}},$$

по виду знаменателя которой сразу видно, что полюса этой ИДПФ не являются чисто мнимыми комплексно-сопряженными полюсами. Действительно, решение интервального квадратного уравнения приводит к следующим значениям:

$$Z_{1,2}^n = [0.491174, 0.590278] \pm [0.717323, 0.948897]i, \text{ wid } Z_{1,2}^n = 0.330677.$$

Но больше волнует вопрос о том, какие значения соответствуют им в  $s$ -плоскости и насколько они отличаются от истинных точечных полюсов НПФ.

Переходя в  $s$ -плоскость, получаем

$$S_{1,2}^n = [-0.069993, 0.055552] \pm [0.441127, 0.546574]i, \text{ wid } S_{1,2}^n = 0.230992.$$

То есть действительная часть полюсов  $\text{Re } S_{1,2}^n$  является 0-содержащим интервалом, что несет в себе неопределённость – следует ли считать это значение адекватной оценкой либо подменой в результате ошибок моделирования, недопустимого  $\Delta t$  или недостаточной точности? Проверить правильность восстановления и изменить точность интервальной оценки можно путём изменения  $\Delta t$ . Так, задав  $\Delta t = 3$  с, получаем значения

$$S_{1,2}^n = [-0.004413, 0.004346] \pm [0.494786, 0.505070]i, \text{ wid } S_{1,2}^n = 0.019042.$$

И в самом деле,  $\text{Re } S_{1,2}^n$  не только сохранила положение, но и уменьшилось в ширине. Причем обе границы при последующем увеличении шага дискретизации стягиваются к 0. То есть практически действительную часть полюсов можно считать нулевой. А мнимая часть является адекватной оценкой истинных полюсов, сохраняющей положение и уточняемой при вариации шага дискретизации.

Теперь посмотрим, что произойдет с полюсами ИДПФ и НПФ при ухудшении точности исходных данных, например, выходных отсчетов. Как уже отмечалось, точность выходных данных сильнее влияет на точность результатов по сравнению с точностью входных значений. Увеличим ширину интервалов выходных отсчетов, задав  $\varepsilon_y = 0.01$ , и оставим прежним значение  $\varepsilon_x = 0.001$ .

ИДПФ объекта при таких исходных значениях и  $\Delta t = 3$  с

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.918344, 0.940203]z^{-1} + [0.899814, 0.951800]z^{-2}}{1 + [-0.351860, 0.061661]z^{-1} + [0.855201, 1.158643]z^{-2}}$$

имеет в знаменателе 0-содержащий коэффициент (при  $z^{-1}$ ), причем при увеличении  $\Delta t$  это его свойство сохраняется. С такой ситуацией уже пришлось столкнуться в Примере 3.1. И, согласно сделанным там замечаниям, это слагаемое считается фиктивным и удаляется из рассмотрения. То есть ИДПФ при заданной точности и  $\Delta t$  имеет чисто мнимые полюса. Их перевод в плоскость непрерывной переменной позволяет получить оценки полюсов НПФ:

$$S_{1,2}^n = [-0.032022, 0.028802] \pm [0.459796, 0.514050]i, \text{ wid } S_{1,2}^n = 0.115078.$$

И здесь также наблюдается стягивание границ действительной части полюсов к числу 0. При этом мнимые значения дают адекватную оценку истинных полюсов НПФ.

Итак, применение ИММВ дает возможность идентифицировать чисто мнимые полюса объекта с колебательностью. При этом необходимо проследивать изменение появляющихся фиктивных значений в ИДПФ и положение интервальных оценок полюсов восстанавливаемой НПФ при изменении шага дискретизации.

Итак, применение ИММВ к колебательным объектам как с комплексно-сопряженными, так и чисто комплексными полюсами позволяет построить адекватную дискретную модель в виде ИДПФ и интервальной динамической характеристики, а также восстановить структуру непрерывной модели и найти адекватные интервальные оценки ее параметров. При этом точность восстановления модели зависит от шага дискретизации. Увеличение  $\Delta t$  в некоторых пределах, в которых объект является интервально-идентифицируемым, приводит к значительному уточнению интервальной модели. Однако, при больших значениях  $\Delta t$  теряется информация об особенностях переходного процесса, отмечающихся в начале отклика объекта на поступление входного воздействия.

#### **Пример 4.4. Неустойчивый объект 1-го порядка.**

Как правило, при решении задач идентификации предполагается, что объект функционирует в устойчивом режиме. Однако для практических задач, в которых требуется распознать аварийные, предаварийные и другие нерегламентированные ситуации, очень важным является возможность метода получать математические модели таких режимов.

Возьмем в качестве объекта идентификации объект первого порядка с непрерывной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{k}{Ts - 1}. \quad (4.4)$$

Данная непрерывная модель применяется для описания объектов при неустойчивом их функционировании, а также для описания различных аварийных состояний объектов и систем [37]. Классические методы идентификации не позволяют строить адекватные дискретные модели и восстанавливать структуру и параметры неустойчивых объектов. Покажем применимость ИММВ к такого рода объектам.

Положим  $k = 1$ ,  $T = 3$  с; тогда полюс НПФ  $s^n = \frac{1}{3} \approx 0,333333$ .

### 1. Реакция объекта на ступенчатое воздействие.

В качестве входного воздействия зафиксируем единичное ступенчатое воздействие  $x(t) = 1(t)$ . Тогда реакция объекта имеет вид:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ k(e^{\frac{t}{T}} - 1), & t \geq 0. \end{cases}$$

что в нашем случае при  $t \geq 0$  дает выражение

$$y(t) = e^{\frac{t}{3}} - 1.$$

Протабулируем реакцию с шагом дискретизации  $\Delta t = 1$  с. Считаем, что было произведено 5 серий измерений моделируемой величины. Зашумим детерминированный сигнал с помощью аддитивного гауссовского шума, имитируя измерительную помеху. Тогда каждое измерение  $y_i(n\Delta t)$  представляется в виде

$$y_i(n\Delta t) = y(n\Delta t) + a_i(n),$$

где  $a_i(n)$  – последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием.

Проведем генерацию значений нормальной случайной величины по известной формуле, которую нетрудно получить из центральной предельной теоремы [10]

$$N = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6, \quad (4.5)$$

где  $r_j$  - значения равномерно распределенной в интервале  $[0, 1]$  случайной величины, получаемой с помощью датчика случайных чисел. Данная нормальная случайная величина имеет математическое ожидание  $M(n) = 0$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma = 1$ .

Для того, чтобы сложение ее значений со значениями детерминированного сигнала в точках отсчета давало однопроцентное зашумление, необходимо изменить ее среднеквадратическое отклонение.

Пусть вероятность отклонения зашумленного сигнала не более, чем на 1% от максимума детерминированных значений при устойчивом функционировании, т. е. не более чем на 0.01, равна 0.99.

Тогда согласно неравенству Чебышева [10]

$$0 < 1 - \frac{\sigma^2}{0.01^2} \leq P(|(y + N) - y| < 0.01),$$

где  $\sigma$  - среднеквадратическое отклонение искомой случайной величины. Итак,

$$0 < 1 - \frac{\sigma^2}{0.01^2} \leq 0.99,$$

откуда  $0.001 < \sigma \leq 0.01$ .

Таким образом, отсчеты сигнала, имитирующего экспериментальные данные, будут иметь вид

$$y_i(n\Delta t) = y(n\Delta t) + 0.01 * N_i,$$

где  $y(n\Delta t)$  - отсчеты детерминированного сигнала, взятые с шагом  $\Delta t = 1$  с,  $n_i$  - значения нормальной случайной величины, генерируемые по формуле (4.5).

В табл. 4.4 приведены значения пяти последовательностей сгенерированных нормальных величин.

В табл. 4.5 приведены серии  $y_1(n)$ ,  $y_2(n)$ , ...,  $y_5(n)$  зашумленных значений моделируемой величины, измеренных с шагом дискретизации  $\Delta t = 1$  с, а также минимальное и максимальное значение в каждый момент снятия отсчета.

Таблица 4.4. Последовательности случайных величин – модель «белого шума»

$n\Delta t$	$a_1(n)$	$a_2(n)$	$a_3(n)$	$a_4(n)$	$a_5(n)$
1	0.011758	0.002521	-0.001050	-0.003272	-0.008477
2	-0.005634	0.001918	0.019965	-0.009474	-0.002191
3	0.002354	0.008280	-0.012579	-0.003288	-0.016061
4	-0.014426	-0.017423	-0.000564	-0.003487	-0.005919
5	-0.010792	0.011231	0.011135	-0.000687	0.001241
6	-0.000220	-0.001606	0.003691	-0.004215	0.018232
7	-0.025853	-0.015559	-0.000315	-0.001471	-0.006316
8	-0.004433	-0.007807	0.006190	0.012596	-0.023296
9	-0.010033	-0.005187	0.017438	-0.000585	-0.019551
10	-0.000279	-0.002583	-0.011191	0.013278	-0.008138
11	0.015262	-0.015362	-0.004917	-0.012937	0.018639
12	-0.006051	0.004202	-0.004648	0.014218	0.019595
13	0.001640	-0.005460	0.004534	0.005918	0.005186
14	0.006530	-0.005234	-0.006374	0.013464	0.007390
15	-0.005411	0.000561	-0.009470	-0.009260	-0.000540
16	0.021350	0.015216	0.015973	-0.018415	0.007021
17	0.001844	-0.017891	0.004530	-0.006407	0.006625
18	-0.006166	-0.014087	-0.015269	-0.018371	0.005912
19	-0.004487	-0.017763	0.003519	0.017231	0.005803

Таблица 4.5. Серии зашумленных измерений и образуемые интервалы в точках отсчета

$n\Delta t$	$y_1(n)$	$y_2(n)$	$y_3(n)$	$y_4(n)$	$y_5(n)$	$\min y_i(n)$	$\max y_i(n)$
0	$\approx 0$	$\approx 0$					
1	0.407371	0.398134	0.394563	0.392341	0.387135	0.387135	0.407371
2	0.942100	0.949652	0.967699	0.938260	0.945543	0.938260	0.967699
3	1.720636	1.726562	1.705703	1.714994	1.702221	1.702221	1.726562
4	2.779242	2.776245	2.793104	2.790181	2.787749	2.776245	2.793104
5	4.283698	4.305721	4.305625	4.293803	4.295731	4.283698	4.305721
6	6.388836	6.387450	6.392747	6.384841	6.407288	6.384841	6.407288
7	9.286406	9.296699	9.311943	9.310787	9.305943	9.286406	9.311943
8	13.387483	13.384109	13.398106	13.404512	13.368620	13.368620	13.404512
9	19.075504	19.080350	19.102975	19.084952	19.065986	19.065986	19.102975
10	27.031346	27.029042	27.020434	27.044903	27.023487	27.020434	27.044903
11	38.136546	38.105922	38.116367	38.108347	38.139923	38.105922	38.139923
12	53.592099	53.602352	53.593502	53.612368	53.617745	53.592099	53.617745
13	75.199497	75.192396	75.202391	75.203775	75.203043	75.192396	75.203775
14	105.349206	105.337441	105.336302	105.356140	105.350065	105.336302	105.356140
15	147.407749	147.413720	147.403689	147.403899	147.412619	147.403689	147.413720
16	206.148599	206.142465	206.143222	206.108834	206.134270	206.108834	206.148599
17	288.071206	288.051471	288.073892	288.062955	288.075988	288.051471	288.075988
18	402.422627	402.414706	402.413525	402.410422	402.434705	402.410422	402.434705
19	562.025750	562.012474	562.033756	562.047468	562.036040	562.012474	562.047468

На основе интервалов  $[\min y_i(n), \max y_i(n)]$ ,  $i = 1, \dots, 5$  (табл. 4.5), построим идентифицирующую матрицу, сдвинув элементы 1-ой строки влево (поскольку

$y(0) = 0$ ). Будем считать, что значения входных величин  $x(n)$  известны с точностью  $\varepsilon_x = 0.01$ .

[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	...
[0.387135, 0.407371]	[0.938260, 0.967699]	[1.702221, 1.726562]	[2.776245, 2.793104]	...
[-1.519443, -1.283006]	[-3.479644, -3.158352]	[-6.234605, -5.794830]	...	...
[-0.408894, 0.421017]	[-0.680817, 0.646058]	...	...	...
...	...	...	...	...

Третья строка матрицы состоит из 0-содержащих интервалов, поэтому процесс вычисления коэффициентов на ней прекращается.

Сдвиг 1-ой строки влево на 1 элемент влево ( $y(0) = 0$ ) соответствует умножению числителя дробно-рациональной дискретной передаточной функции на  $z^{-1}$ , в результате чего, свернув дробь

$$G_1^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.387135, 0.407371]z^{-1}}{1 + [0.99, 1.01] + [-1.519443, -1.283006]z^{-1}},$$

получаем ИДПФ

$$G_1^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.383302, 0.411486]z^{-1} + [-0.156730, 0.173242]z^{-2}}{1 - [1.283006, 1.519443]z^{-1}}.$$

В числителе дроби появляется дополнительное слагаемое  $[-0.156730, 0.173242]z^{-2}$ , которое не имеет аналога в точечном варианте метода. Но так как коэффициент при  $z^{-2}$  является 0-содержащим интервалом, то это слагаемое считается фиктивным и далее не будет приниматься во внимание.

**Замечание.** Аналогичная ситуация возникала при рассмотрении импульсной характеристики апериодического объекта 2-го порядка (Глава 3, Пример 3.1).

Полюсом  $G_1^{\text{IR}}$  является интервал

$$Z_1^{\text{II}} = [1.283006, 1.519443], \text{ wid } Z_1^{\text{II}} = 0.236437,$$

нулей нет. Таким образом, восстановлен порядок модели. Преобраз полюса  $z^{\text{II}}$  в  $s$ -плоскости:

$$S_1^{\text{II}} = [0.249206, 0.418344], \text{ wid } S_1^{\text{II}} = 0.169138,$$

$$s^{\text{II}} \in S_1^{\text{II}}.$$

Очевидно, что истинный  $s^{\text{п}} = 0.333333$  лежит в полученном интервале  $S^{\text{п}}_1$ . Таким образом, найдена интервальная оценка неизвестного полюса исходной НПФ.

Теперь найдем оценку  $K$  коэффициента передачи  $k$ . Поскольку объект является неустойчивым, то коэффициент передачи нужно восстанавливать методом неопределенных коэффициентов, используя восстановленную структуру НПФ и уже найденную оценку непрерывного полюса  $S^{\text{п}}_1$ .

Восстановленная передаточная функция имеет вид

$$G_1^{\text{IR}}(s) = \frac{K_1}{s - S_1^{\text{п}}} = \frac{K_1}{s - [0.249206, 0.418344]},$$

Откуда после обратного преобразования Лапласа получаем переходную характеристику объекта с неизвестным коэффициентом. Так как известно, что при  $\Delta t = 1$  с измерение  $y(1\Delta t) = [0.387135, 0.407371]$ , то

$$K_1 = \frac{[0.387135, 0.407371]}{(e^{[0.249206, 0.418344]} - 1)}.$$

Используя свойство монотонности функции  $e^t$  и правила классической интервальной арифметики, найдем интервальное значение параметра  $K$ :

$$K_1 = [0.745288, 1.439441], \text{ wid } K_1 = 0.694153,$$

$$k \in K_1.$$

**Замечание.** Поскольку в классической интервальной арифметике деление необратно умножению, то в результате проведенных вычислений оценка коэффициента  $k$  несколько огрубляется. Тем не менее, полученный интервал содержит в себе истинное значение коэффициента  $k = 1$ .

Таким образом, восстановленная НПФ с интервальными параметрами имеет вид

$$G_1^{\text{IR}}(s) = \frac{[0.745288, 1.439441]}{s - [0.249206, 0.418344]}.$$

По известной ИДПФ найдем также интервальную модель переходной характеристики в виде конечно-разностного уравнения:

$$y(n) = [0.383302, 0.411486]x(n-1) + [1.238006, 1.519443]y(n-1).$$

Выделяем граничные функции:

$$y_{\min}(n) = 0.383302x(n-1) + 1.238006y(n-1),$$

$$y_{\max}(n) = 0.411486x(n-1) + 1.519443y(n-1),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

На рис. 4.11 приведены точные значения отсчетов переходной характеристики  $y(n)$  с шагом дискретизации  $\Delta t = 1$  с, серии зашумленных измерений  $y_1(n)$ ,  $y_2(n)$ , ...,  $y_5(n)$  (на рисунке при выбранном масштабе они практически совпадают), значения модельных интервалов  $[y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ ,  $n = 0, 1, \dots, 19$ .

В качестве значений  $x(n)$  выбраны точечные значения – середины соответствующих интервалов. В нашем случае получим все  $x(n) = 1$ ,  $n = 0, 1, 2,$

....

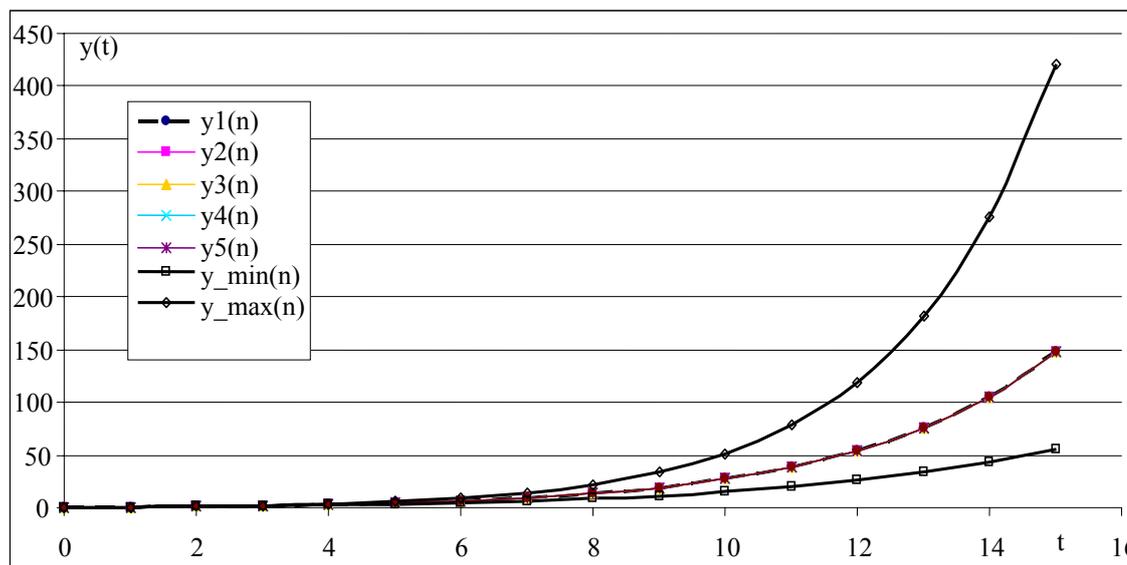


Рис. 4.11. Исходные серии зашумленных измерений и интервальная дискретная переходная характеристика неустойчивого объекта при  $\Delta t = 1$  с

Произведем кратное увеличение шага дискретизации. Выберем  $\Delta t = 2$  сек, и из уже известных исходных данных, измеренных с  $\Delta t = 1$  сек, для построения дискретной модели будем брать измерения, соответствующие удвоенному значению шага (прореживание измерений). Затем сравним полученные при разных значениях  $\Delta t$  модели и их параметры.

Зашумленные значения измерений при  $\Delta t = 2$  сек приведены в табл. 4.6:

Таблица 4.6. Прореженные зашумленные измерения  
и образуемые ими интервалы в точках отсчета

$n\Delta t$	$y_1(n)$	$y_2(n)$	$y_3(n)$	$y_4(n)$	$y_5(n)$	$\min y_i(n)$	$\max y_i(n)$
0	$\approx 0$	$\approx 0$					
2	0.942100	0.949652	0.967699	0.938260	0.945543	0.938260	0.967699
4	2.779242	2.776245	2.793104	2.790181	2.787749	2.776245	2.793104
6	6.388836	6.387450	6.392747	6.384841	6.407288	6.384841	6.407288
8	13.387483	13.384109	13.398106	13.404512	13.368620	13.368620	13.404512
10	27.031346	27.029042	27.020434	27.044903	27.023487	27.020434	27.044903
12	53.592099	53.602352	53.593502	53.612368	53.617745	53.592099	53.617745
14	105.349206	105.337441	105.336302	105.356140	105.350065	105.336302	105.356140
16	206.148599	206.142465	206.143222	206.108834	206.134270	206.108834	206.148599
18	402.422627	402.414706	402.413525	402.410422	402.434705	402.410422	402.434705

Идентифицирующая матрица, составленная по полученным интервалам:

[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	[0.99, 1.01]	...
[0.938260, 0.967699]	[2.776245, 2.793104]	[6.384841, 6.407288]	[13.368620, 13.404512]	...
[-1.996700, -1.848712]	[-5.848707, -5.577760]	[-13.306368, -12.794651]	...	...
[-0.294752, 0.183408]	[-0.599680, 0.421005]	...	...	...
...	...	...	...	...

ИДПФ объекта принимает вид

$$G_2^R(z) = \frac{[0.928970, 0.977474]z^{-1}}{1 - [1.848712, 1.996700]z^{-1}}.$$

Полюсом  $G_2^R(z)$  является интервал

$$Z_2^R = [1.848712, 1.996700], \text{ wid } Z_2^R = 0.147988,$$

нулей ИДПФ не имеет. Таким образом, восстановлен порядок модели.

Прообраз полюса  $Z^R$  в  $s$ -плоскости:

$$S_2^R = [0.307245, 0.345748], \text{ wid } S_2^R = 0.038503,$$

Очевидно, что  $s^R = 0.333333 \in S_2^R$ .

Сравнение с полюсом  $S_1^R$ , полученным для меньшего  $\Delta t$ , показывает, что  $S_2^R \subset S_1^R$ , что, как было показано в Главе 3, является более слабым, интервальным аналогом эквивалентности моделей при вариации шага дискретизации.

Таким образом, найдена интервальная оценка неизвестного полюса НПФ, причем эта оценка является более точной по сравнению с полученной ранее при  $\Delta t = 1$  с. То есть при увеличении шага дискретизации произошло сужение интервальной модели, причем ширина интервалов уменьшается экспоненциально с возрастанием  $\Delta t$ .

Коэффициент передачи  $k$ , вычисленный с использованием измерения в момент времени  $1\Delta t = 2$  с, оценивается интервалом

$$K_2 = \frac{[0.938260, 0.967699]}{(e^{2[0.307245, 0.345748]} - 1)} = [0.941366, 1.140195],$$

$$\text{wid } K_2 = 0.198829, k \in K_2.$$

Сравнение оценок коэффициента передачи при  $\Delta t = 1$  с и  $\Delta t = 2$  с показывает, что  $K_2 \subset K_1$ . То есть с увеличением шага дискретизации при построении дискретной модели произошло уточнение интервальной оценки параметра  $k$  НПФ.

Восстановленная НПФ с интервальными параметрами при выбранном шаге дискретизации имеет окончательно вид

$$G_2^{\text{IR}}(s) = \frac{[0.941366, 1.140195]}{s - [0.307245, 0.345748]}.$$

Интервальная модель переходной характеристики в виде конечно-разностного уравнения, построенная по ИДПФ объекта, принимает вид

$$y_2(n) = [0.928970, 0.977474]x(n-1) + [1.848712, 1.996700]y(n-1),$$

Выделяем граничные функции (рис. 4.12):

$$y_{2\min}(n) = 0.928970x(n-1) + 1.848712y(n-1),$$

$$y_{2\max}(n) = 0.977474x(n-1) + 1.996700y(n-1),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку структура модели, построенной при  $\Delta t = 1$  с и  $\Delta t = 2$  с, совпадает, и полюса  $S_2^n \subset S_1^n$ , то можно сделать вывод о том, что условие идентифицируемости при вариации шага дискретизации выполняется, и построенные интервальные дискретные модели соответствуют исходным данным.

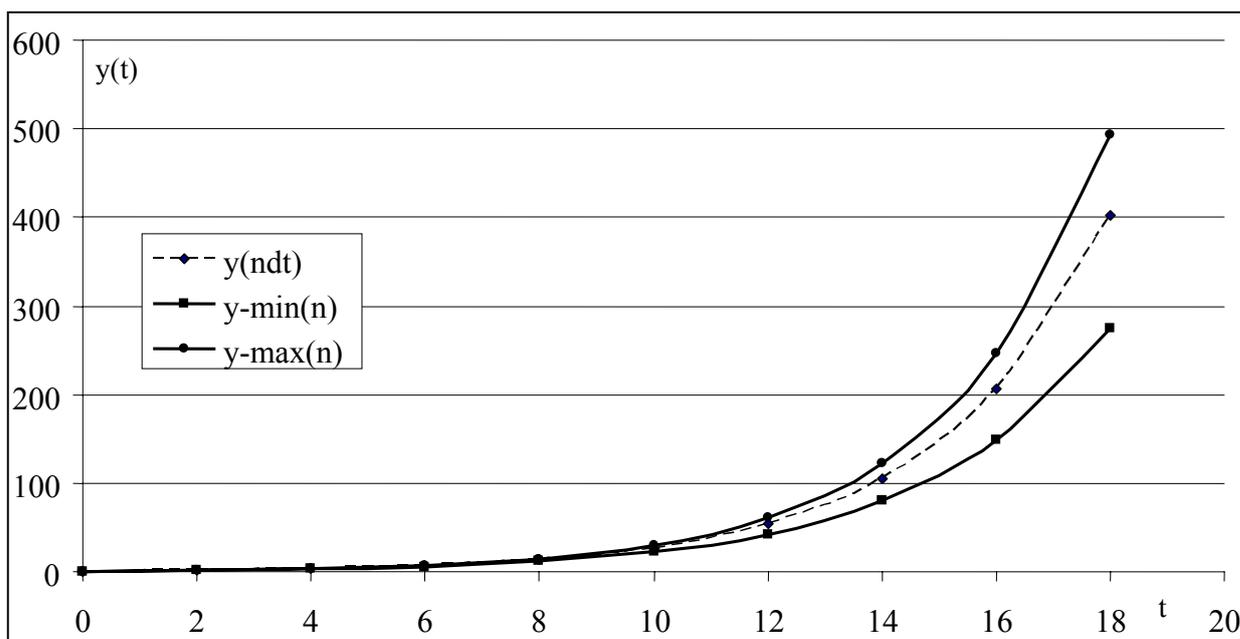


Рис. 4.12. Значения измерений и интервальная переходная характеристика при  $\Delta t = 2$  с

Таким образом, получены достоверные интервальные дискретные модели объекта в виде ДПФ, конечно-разностного уравнения и граничных функций; восстановлен порядок модели; получена интервальная оценка полюса непрерывной модели при различных значениях шага дискретизации.

## 2. Реакция объекта на импульсное воздействие.

Теперь рассмотрим влияние изменения вида входного воздействия на структуру и параметры интервальной дискретной модели неустойчивого объекта.

Пусть на вход объекта подается единичное импульсное воздействие

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases}$$

Тогда реакция объекта описывается функцией

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}}, & t \geq 0. \end{cases}$$

то есть при  $T = 3$  с и  $t \geq 0$  импульсная характеристика объекта имеет вид

$$w(t) = 0.333333e^{0.333333t}$$

Зададим  $\Delta t = 1$  сек. Как и в рассмотренном выше случае переходной характеристики считаем, что было проведено 5 серий измерений, в результате чего получены зашумленные значения импульсной характеристики  $y_1(n), \dots, y_5(n)$ . Для зашумления данных используем сгенерированные ранее случайные величины  $a_1(n), \dots, a_5(n)$  (табл. 4.4). Отметим, что  $w(0) \neq 0$ , то есть в соответствующей строке идентифицирующей матрицы не производится сдвиг элементов, и в числителе ДПФ нет дополнительного множителя  $z^{-1}$ .

Значения входной величины считаем известными с точностью до 0.01. Однако, при построении интервалов включим в них только значения  $x(n\Delta t) \geq 0$ , поскольку в теории автоматических систем рассматриваются неотрицательные входные воздействия.

Так, получаем идентифицирующую матрицу

[0.99, 1.01]	[0.00, 0.01]	[0.00, 0.01]	[0.00, 0.01]	...
[0.324856, 0.345092]	[0.455730, 0.485169]	[0.633184, 0.657525]	[0.888671, 0.905530]	...
[-1.493490, -1.310504]	[-2.024049, -1.824727]	[-2.787480, -2.565073]	...	...
[-0.223875, 0.271702]	[-0.292200, 0.306546]	...	...	...
...	...	...	...	...

Откуда ИДПФ объекта принимает вид

$$G_3^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.321640, 0.348578]}{1 - [1.310504, 1.493490]z^{-1}}$$

Найдем полюс ИДПФ:

$$Z_3^{\text{п}} = [1.310504, 1.493490], \text{wid } Z_3^{\text{п}} = 0.182985.$$

Прообразом полюса в s-плоскости является интервал

$$S_3^{\text{п}} = [0.270412, 0.401115], \text{wid } S_3^{\text{п}} = 0.130703, s^{\text{п}} \in S_3^{\text{п}}.$$

Получим интервальное значение коэффициента передачи, которое в случае импульсной характеристики вычисляется с помощью восстановленного полюса НПФ и преобразования Лапласа. Порядок и полюс НПФ уже идентифицированы, то есть НПФ с неизвестным коэффициентом передачи, соответствующая ИДПФ  $G_3^{\text{IR}}$ , имеет вид

$$G_3^{\text{IR}}(s) = \frac{K}{s - [0.270412, 0.401115]}.$$

Преобразование Лапласа от этой ИНПФ приводит к выражению

$$w^{\text{IR}}(t) = K_3 [0.270412, 0.401115] e^{[0.270412, 0.401115]t},$$

откуда можно найти оценку  $K$ , приравнявая значение  $w^{\text{IR}}(n\Delta t)$  в момент снятия  $n$ -го отсчета и известное измеренное зашумленное значение характеристики в момент времени  $n\Delta t$ . Например, при  $n = 0$  было получено интервальное измерение  $w^{\text{IR}}(0) = [0.324856, 0.345092]$ . Отсюда

$$K_3 [0.270412, 0.401115] e^0 = [0.324856, 0.345092],$$

следовательно,

$$K_3 = \frac{[0.324856, 0.345092]}{[0.270412, 0.401115]} = [0.809882, 1.276171],$$

$$\text{wid } K_3 = 0.466289, k \in K_3.$$

Получаем НПФ с интервальными параметрами

$$G_3^{\text{IR}}(s) = \frac{[0.809882, 1.276171]}{s - [0.270412, 0.401115]}.$$

Кратное увеличение шага дискретизации до  $\Delta t = 2$  с позволяет на основе уже имеющихся, снятых с  $\Delta t = 1$  с измерений путём выбора из них каждого второго получить следующие ИДПФ и оценки параметров НПФ при зафиксированном импульсном воздействии:

$$G_4^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.321640, 0.348578]}{1 - [1.824727, 2.024049]z^{-1}}$$

$$Z_4^{\text{II}} = [1.824727, 2.024049], \text{wid } Z_4^{\text{II}} = 0.199322.$$

$$S_4^{\text{II}} = [0.300715, 0.352550], \text{wid } S_4^{\text{II}} = 0.051835,$$

$$s^{\text{II}} \in S_4^{\text{II}}.$$

Для вычисления коэффициента передачи  $K_4$  используем отсчет  $w^{\text{IR}}(0) = [0.324856, 0.345092]$ . Получаем

$$K_4 = \frac{[0.324856, 0.345092]}{[0.300715, 0.352550]} = [0.921447, 1.147572].$$

Отсюда восстановленная НПФ принимает окончательный вид

$$G_4^{\text{IR}}(s) = \frac{[0.921447, 1.147572]}{s - [0.300715, 0.352550]}.$$

Для сравнения точности оценок полюса, полученных при рассмотренных входных воздействиях и шагах дискретизации, составим табл. 4.7:

Таблица 4.7. Сравнение точности интервальных оценок полюса НПФ при различных входных сигналах для рассмотренных  $\Delta t$

	$\Delta t = 1 \text{ с}$	$\Delta t = 2 \text{ с}$
$x(t) = 1(t)$	$S^{\text{п}} = [0.249206, 0.418344]$	$S^{\text{п}} = [0.307245, 0.345748]$
<b>wid <math>S^{\text{п}}</math></b>	0.169138	0.038503
$x(t) = \delta(t)$	$S^{\text{п}} = [0.270412, 0.401115]$	$S^{\text{п}} = [0.300715, 0.352550]$
<b>wid <math>S^{\text{п}}</math></b>	0.130703	0.051835

Анализ табл. 4.7 позволяет отметить, что вид входного воздействия в нашем примере лишь незначительно повлиял на точность адекватных интервальных оценок полюса (при фиксированном  $\Delta t = 1 \text{ с}$ ). То есть практически вид входного воздействия не оказывает решающего значения при восстановлении НПФ неустойчивого объекта.

При увеличении шага дискретизации, как видно из таблицы, произошло существенное уточнение интервального полюса. Выполняется условие идентифицируемости и принцип вариации, поскольку полученные интервалы при фиксированном входном воздействии образуют при изменении  $\Delta t$  вложенную структуру. Это говорит об эквивалентности и достоверности полученных моделей и их оценок. Последующее увеличение шага дискретизации приводит к большему сужению оценок параметров ИДФ и НПФ и модельных интервалов динамической характеристики во временной плоскости. Следует также отметить, что данный объект отличается тем, что он позволяет использовать достаточно большие значения  $\Delta t$  и при этом получать настолько узкие интервальные оценки, что их можно считать практически точечными. Например, при  $\Delta t = 10 \text{ с}$  ширина интервальной оценки полюса НПФ при нанесении ступенчатого входного воздействия равна 0.000224, при нанесении импульсного воздействия – равна 0.006395, и эти величины стремятся к 0 при еще большем увеличении  $\Delta t$ .

## § 4.2. Решение прикладных задач

### Пример 4.5. Моделирование процесса отжима крошки

В качестве примера построения дискретной модели, по которой определяется значение выходной переменной на определенный промежуток времени вперед, рассмотрим преобразующий канал «число оборотов отжимного аппарата – влажность крошки на выходе фазы отжима» [37, 39]. Измерение влажности крошки осуществляется центральной заводской лабораторией в соответствии с отраслевым стандартом путём отбора проб из пробоотборника фазы отжима и проведением выпаривания в специальных сушильных печах. Как правило, отбирается несколько проб, и измерение влажности считается достоверным, если разность значений влажности между параллельными отборами не превышает 0.02%. В условиях нормального функционирования технологического процесса отбор проб и определение влажности крошки осуществляется с большим периодом дискретных измерений, однако по распоряжению главного технолога производства по мере необходимости осуществляется измерения влажности в нерегулярные моменты времени.

Для исследования динамических характеристик указанного канала были осуществлены отборы проб с периодом 5 мин после нанесения входного воздействия. В каждый момент времени отбиралось 5 параллельных проб. Число оборотов отжимного аппарата в соответствии с утвержденной на производстве методикой исследования изменялось на  $\pm 1$ об/мин. По результатам проведенных экспериментов получены данные по значениям влажности крошки в отклонениях от номинального режима (он считался как бы нулевым). Результаты эксперимента одной реализации приведены в табл. 4.8.

Таблица 4.8. Данные по влажности крошки

Время	Измерения пяти проб (%)	Минимальное измер. значение влажности	Максимальное измер. значение влажности
0	$\approx 0$	0	0
5 мин	$\approx 0$	0	0
10 мин	$\approx 0$	0	0
15 мин	0.41; 0.42; 0.40; 0.40; 0.41	0.40	0.42
20 мин	0.56; 0.57; 0.56; 0.58; 0.58	0.56	0.58
25 мин	0.63; 0.62; 0.64; 0.64; 0.64	0.62	0.64
30 мин	0.68; 0.66; 0.66; 0.67; 0.68	0.66	0.68
35 мин	0.68; 0.67; 0.67; 0.69; 0.69	0.67	0.69
40 мин	0.69; 0.70; 0.70; 0.68; 0.69	0.68	0.70

Попробуем решить данную задачу для точечных измерений влажности крошки. Рассмотрим в качестве сравнения идентификацию через срединные и граничные значения измерения влажности крошки в процессе отжима. Тогда получим следующие идентифицирующие матрицы:

а) для минимальных значений влажности:

1	1	1	1	1	1
0.4	0.56	0.62	0.66	0.67	0.68
-0.4	-0.55	-0.65	-0.675	-0.7	...
0.025	-0.075	-0.0375	-0.075	...	...

б) для срединных значений влажности:

1	1	1	1	1	1
0.41	0.57	0.64	0.67	0.68	0.69
-0.39	-0.56	-0.63	-0.66	-0.68	...
-0.05	-0.06	-0.05	-0.09	...	...
0.083	0.5	-0.25	...	...	...

в) для максимальных значений влажности:

1	1	1	1	1	1
0.42	0.58	0.64	0.68	0.69	0.70
-0.381	-0.524	-0.62	-0.643	-0.67	...
-0.006	-0.101	-0.07	-0.107	...	...
18.375	13.125	...	...	...	...

Уже при визуальном анализе возникает неоднозначность в рассмотрении свойств линеаризованного динамического объекта:

1. отсутствие четкого правила останова: во всех трех случаях сложно однозначно выявить нулевую строку;
2. нулевая строка связана с порядком передаточной функции; во всех трех случаях этот порядок неоднозначен и они неравны между собой;
3. в данном случае очень тяжело осуществить автоматизацию процесса идентификации, т.е. нужен дополнительный анализ специалиста;
4. процесс осуществляется 3 раза, что ведет к увеличению времени определения динамических свойств объекта и связано с перебором пробных моделей и их параметров.

Интервальная идентифицирующая матрица принимает следующий вид при увеличении числа оборотов отжимного аппарата на 1 об/мин:

1	1	1	1	1	1
[0.4, 0.42]	[0.56, 0.58]	[0.62, 0.64]	[0.66, 0.68]	[0.67, 0.69]	[0.68, 0.7]
[-0.45, -0.34]	[-0.6, -0.48]	[-0.7, -0.57]	[-0.73, -0.6]	[-0.75, -0.62]	...
[-0.52, 0.38]	[-0.58, 0.33]	[-0.58, 0.36]	[-0.61, 0.35]	...	...

Как следует из идентифицирующей матрицы, последняя строка состоит из интервальных нулей, следовательно осуществляем останов и переходим к построению непрерывной дроби с учётом сдвига второй строки на три элемента (до появления на первом месте второй строки ненулевого элемента). Это связано с транспортным запаздыванием управляющего воздействия.

Получаем дискретную передаточную функцию в виде непрерывной дроби:

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.4, 0.42]z^{-3}}{1 + [-0.45, -0.34]z^{-1}}.$$

Таким образом, получаем дискретную модель процесса отжима смеси с учётом транспортного запаздывания ( $\Delta t = 5$  мин.):

$$y(n) = [0.4, 0.42]x(n - 3) + [0.34, 0.45]y(n - 1),$$

которая позволяет осуществить интервальный прогноз на промежуток времени  $\Delta t = 5$  мин.

Полюс ИДПФ:

$$Z_1^n = [0.34, 0.45], \text{ wid } Z_1^n = 0.11$$

Найдем интервальную оценку полюса неизвестной НПФ:

$$S_1^n = [-0.22, -0.16], \text{ wid } S_1^n = 0.06$$

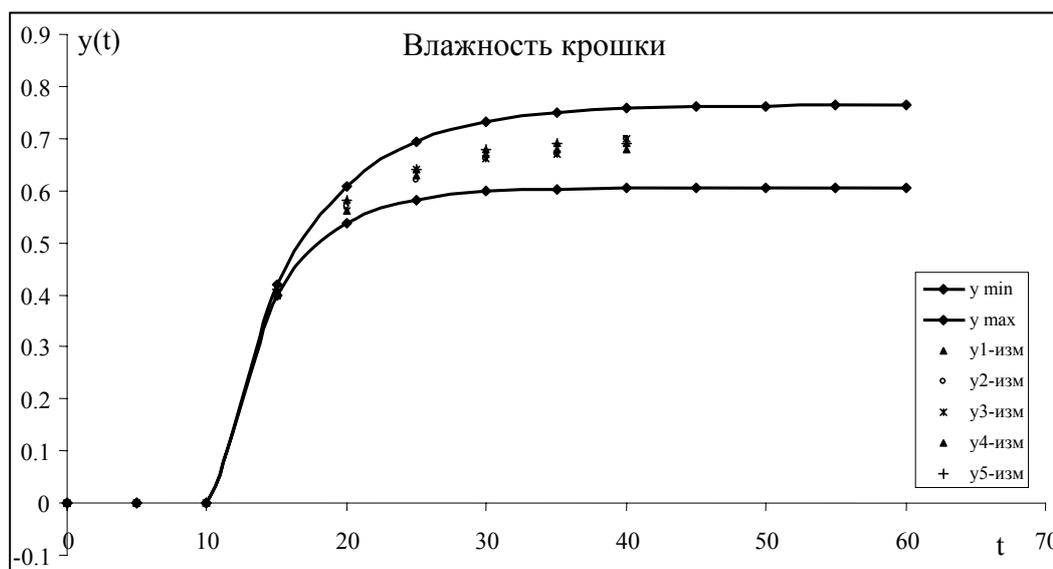


Рис. 4.13. Измеренные значения влажности крошки и граничные функции для прогнозных значений

Таким образом, можно утверждать, что данный способ полностью произвел идентификацию динамических характеристик объекта, допускающего линеаризацию.

Теперь произведем вариацию шага  $\Delta t$  путём кратного увеличения исходного значения  $\Delta t = 5$  мин. Выберем  $\Delta t = 10$  мин и построим дискретную интервальную модель по уже известным измерениям влажности, соответствующим данному шагу дискретизации.

Так, получаем идентифицирующую матрицу

1	1	1	1
[0.56, 0.58]	[0.66, 0.68]	[0.68, 0.70]	...
[-0.21, -0.14]	[-0.25, -0.17]	...	
[-0.67, 0.41]	...	...	

Последняя строка состоит из 0-содержащих интервалов, следовательно осуществляем останов и переходим к построению непрерывной дроби с учётом сдвига первой строки на два элемента.

Получаем ИДПФ следующего вида:

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.56, 0.58]z^{-2}}{1 + [-0.21, -0.14]z^{-1}}.$$

Таким образом, получаем дискретную модель процесса отжима смеси с учётом транспортного запаздывания при  $\Delta t = 10$  мин:

$$\tilde{y}(n) = [0.56, 0.58]\tilde{x}(n-2) + [0.14, 0.21]\tilde{y}(n-1),$$

которая позволяет осуществить интервальный прогноз на промежуток времени  $\Delta t = 10$  мин.

В табл. 4.9 приведены граничные измеренные  $[y_{\text{изм}}^{\text{min}}(n\Delta t), y_{\text{изм}}^{\text{max}}(n\Delta t)]$  и модельные граничные значения влажности крошки  $y_{\text{min}}(n)$ , измеренной с  $\Delta t = 5$  мин (интервалы  $y(n)$ ) и  $\Delta t = 10$  мин (интервалы  $\tilde{y}(n)$ ). Начиная с  $t = 45$  мин в табл. 4.9 приведены только прогнозные значения влажности.

Таблица 4.9. Измеренные и модельные граничные функции

ndt	$x(n\Delta t)$	$y_{\text{изм}}^{\min}(n\Delta t)$	$y_{\text{изм}}^{\max}(n\Delta t)$	$y_{\min}(n)$	$y_{\max}(n)$	$\tilde{y}_{\min}(n)$	$\tilde{y}_{\max}(n)$
0	1	0	0	0	0	0	0
5 мин	1	0	0	0	0		
10 мин	1	0	0	0	0	0	0
15 мин	1	0.40	0.42	0.40	0.42		
20 мин	1	0.56	0.58	0.54	0.61	0.56	0.58
25 мин	1	0.62	0.64	0.58	0.69		
30 мин	1	0.66	0.68	0.60	0.73	0.64	0.70
35 мин	1	0.67	0.69	0.60	0.75		
40 мин	1	0.68	0.70	0.61	0.76	0.65	0.73
45 мин	1	-	-	0.61	0.76		
50 мин	1	-	-	0.61	0.76	0.65	0.73
55 мин	1	-	-	0.61	0.76		
60 мин	1	-	-	0.61	0.76	0.65	0.73

Очевидно, что структура модели при  $\Delta t = 10$  мин совпадает со структурой модели, полученной при  $\Delta t = 5$  мин, с учётом транспортного запаздывания.

Далее сравним прообразы интервальных полюсов ДПФ в непрерывной плоскости и сравним полученные оценки полюсов НПФ.

Интервальный полюс ДПФ:

$$Z_2^n = [0.14, 0.21], \text{ wid } Z_2^n = 0.07.$$

Отсюда получаем интервальную оценку полюса НПФ

$$S_2^n = [-0.20, -0.16], \text{ wid } S_2^n = 0.04.$$

Очевидно, что  $S_1^n \subset S_2^n$ , следовательно можно сделать вывод о том, что выполняется условие идентифицируемости при вариации шага дискретизации, и полученные интервальные модели соответствуют исходным данным и позволяют получить достоверные интервальные прогнозы будущих значений измерений на заданный промежуток времени. Кроме того, увеличение шага дискретизации привело к уточнению интервальной модели.

Данный пример, осуществленный на реальном объекте, показывает сущность интервальной обработки информации, дискретной передаточной функции и дискретной модели, осуществляющей прогноз на период времени  $\Delta t$ . В этой задаче вообще нет точечных значений, все осуществляется только в интервальных измерениях. Результаты прогноза при сравнении с реальными

измерениями весьма удовлетворительны, так как оценка влажности сверху не отличается от требований отраслевых стандартов. В то же время точность модели можно повысить за счет повышения точности вычислений и увеличения  $\Delta t$  (например, вместо 5 мин брать 10 мин).

#### **Пример 4.6. Построение оптимального интервального дискретного управления.**

В данном пункте приведем один из примеров применения интервальной дискретной модели объекта, полученной предлагаемым в работе способом SP-идентификации.

Рассмотрим один из возможных подходов к построению алгоритма оптимального дискретного управления по известной ДПФ объекта, и произведем его обобщение на случай ДПФ с интервальными параметрами.

При разработке алгоритмов управляющих устройств дискретного действия, в том числе с применением управляющих ЭВМ, большой интерес представляет использованию теории полиномиальных ( $\pi$ -) уравнений [13, 42, 60]. Этот математический аппарат обладает простотой при решении многих задач оптимизации управления, универсальностью к разнообразию динамических свойств объектов управления, в том числе и таких, как неустойчивость, и, как правило, приводит к построению работоспособных систем управления.

**Определение.** Полиномиальным линейным уравнением второго порядка называется функциональное уравнение, в котором неизвестными функциями являются полиномы:

$$a\theta + b\pi = c, \quad (4.6)$$

где  $a, b, c$  – заданные,  $a\theta$  и  $b\pi$  – неизвестные полиномы, причем полиномы  $a$  и  $b$  не имеют общих делителей в виде полиномов первой степени и выше (т.е. являются взаимно-простыми). Решением  $\pi$ -уравнения называется набор полиномов  $\theta$  и  $\pi$ , ему удовлетворяющий.

**Определение.** Целое число  $n$ , являющееся степенью полинома

$$a(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \text{ от переменной } z^{-1} (a_n \neq 0), \text{ обозначается как } n = \deg a.$$

Полиномиальные уравнения являются неопределенными уравнениями, которые имеют множество решений, среди которых существуют так называемые минимальные решения, имеющие минимальные степени. Они представляют большой интерес для теории оптимального управления, позволяя получать минимальные по длительности переходные процессы, минимальные ошибки, минимальные по объему программы и т.д.

**Определение.** Уравнение (4.6) является правильным, если

$$\deg c < \deg a + \deg b,$$

Для правильного уравнения его минимальное решение получается при следующем выборе степеней неизвестных полиномов:

$$\deg \theta = \deg b - 1 \text{ и } \deg \pi = \deg a - 1.$$

Если полиномы  $a$  и  $b$  – взаимно просты, то минимальное решение существует и является единственным.

Если  $\pi$ -уравнение (4.6) является неправильным, то есть

$$\deg c \geq \deg a + \deg b,$$

то оно имеет два минимальных решения со следующими степенями входящих в него полиномов

$$\deg \theta_0 = \deg b - 1, \deg \pi^0 = \deg c - \deg b,$$

$$\deg \theta^0 = \deg c - \deg a, \deg \pi_0 = \deg a - 1.$$

Существенной чертой подхода к построению оптимального управления на основе  $\pi$ -уравнений является выполнение двух условий: 1) линейность объектов управления; 2) знание математической модели объекта управления в форме рациональной дискретной передаточной функции [13]. В настоящей работе оба этих условия выполняются.

Как уже отмечалось, для объектов, допускающих линейризованное представление их динамических характеристик, ИДПФ представляет собой дробно-рациональную функцию, в которой коэффициенты полиномов числителя и знаменателя являются интервальными числами. Такое представление ДПФ приводит к возникновению интервальных  $\pi$ -уравнений, а следовательно, алгоритм оптимального управления также содержит интервальную неопределённость.

Задача синтеза управления в простейшем случае заключается в следующем (рис. 4.14): найти управление  $u(t)$ , которое придает поведению объекта  $y(t)$  желаемый характер  $x(t)$  [13].

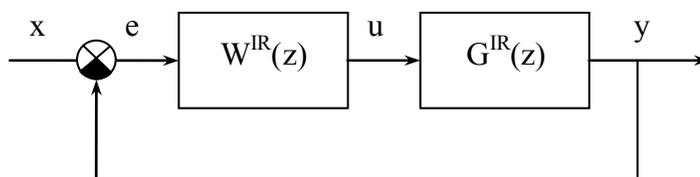


Рис. 4.14. Структурная схема объекта управления с регулятором

В такой системе информация о действительном состоянии управляемого объекта с ИДПФ  $G^{IR}(z)$  подается на вход управляющего устройства  $W(z)$  через сигнал ошибки, или рассогласования  $e = x - y$ .

Пусть желаемый процесс движения системы имеет изображение, полученное после применения  $Z$ -преобразования, в виде правильной рациональной функции  $X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ , где  $A(z)$  и  $B(z)$  — заданные полиномы от дискретной переменной  $z$ , причем  $\deg A < \deg B$ . Будем искать управление  $U$  объектом, имеющим передаточную функцию  $G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , где  $P(z)$  и  $Q(z)$  — известные полиномы.

Рассмотрим примеры построения оптимального дискретного управления объектами по известным интервальным ДПФ. Предлагаемые далее способы

являются лишь одним из возможных подходов к построению интервального дискретного управления и призваны продемонстрировать возможности практического применения интервальных дискретных моделей, полученных в результате использования разрабатываемых в данной работе способов решения задачи идентификации по интервальным исходным измерениям.

В качестве критерия оптимальности будем рассматривать быстродействие системы при ступенчатом входном воздействии  $x(t) = 1(t)$ , имеющем изображение в виде дробно-рациональной функции  $X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$  [13].

### 1. Интервальное оптимальное дискретное управление аperiodическим объектом 1-го порядка.

В Пример 2.1 (Глава 2), была получена ИДПФ, которая в общем виде для этого типа объектов представляется соотношением

$$G^{IR}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{[p', p'']z^{-1}}{1 + [q', q'']z^{-1}},$$

$$[p', p''] > 0, [q', q''] < 0$$

#### Способ 1.

На основе полученной ИДПФ составляется  $\pi$ -уравнение:

$$P\theta + B\pi = A,$$

которое в нашем случае является правильным. Следовательно, искомые полиномы  $\theta(z)$  и  $\pi(z)$  имеют минимальные степени

$$\deg \theta(z) = \deg B - 1 = 0,$$

$$\deg \pi(z) = \deg P - 1 = 0.$$

То есть в нашем случае получаем интервальное  $\pi$ -уравнение вида

$$[\theta', \theta''] [p', p''] z^{-1} + (1 - z^{-1}) [\pi', \pi''] = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z^{-1}$ , получаем решение:

$$\theta(z) = [\theta', \theta''] = \frac{1}{[p', p'']} = \left[ \frac{1}{p''}, \frac{1}{p'} \right],$$

$$\pi(z) = 1.$$

Тогда, согласно теории [13], ДПФ регулятора с соответствующей программой интервального управления имеет вид:

$$W^{\text{IR}}(z) = \frac{Q\theta}{B\pi} = \frac{\left[ \frac{1}{p''}, \frac{1}{p'} \right] (1 + [q', q''] z^{-1})}{1 - z^{-1}}.$$

Найденный регулятор  $W^{\text{IR}}(z)$  дает кратчайший переходный процесс длительности [13]

$$t_{\min} = \deg P(z) \Delta t = 1 \Delta t,$$

то есть установление реакции объекта происходит через один такт.

Так как передаточные функции объекта  $G^{\text{IR}}(z)$  и регулятора  $W^{\text{IR}}(z)$  связаны с изображениями сигналов соотношениями

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad W^{\text{IR}}(z) = \frac{U(z)}{E(z)},$$

и рассогласование определяется разностью

$$e = x - y,$$

то используя  $z^{-1}$  как оператор обратного сдвига, перейдем к разностным уравнениям, позволяющим рассчитать значения выхода объекта  $y(n)$ , рассогласования  $e(n)$  и управляющего сигнала  $u(n)$  в дискретные моменты времени  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$y(n) = [p', p'']u(n-1) - [q', q'']y(n-1),$$

$$e(n) = x(n) - y(n),$$

$$u(n) = u(n-1) + \left[ \frac{1}{p''}, \frac{1}{p'} \right] e(n) + \left[ \frac{q'}{p'}, \frac{q''}{p''} \right] e(n-1),$$

с учётом того, что  $[p', p''] > 0$ ,  $[q', q''] < 0$ .

Для объекта с НПФ  $G(s) = \frac{1}{2s+1}$  при  $\Delta t = 1.5$  сек и ширине интервальных измерений  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.01$  метод ИММВ восстановил ИДПФ объекта:

$$G^{IR}(z) = \frac{[0.514851, 0.545455]z^{-1}}{1 + [-0.539931, -0.406178]z^{-1}}.$$

Построим программу регулятора для получения кратчайшего переходного процесса:

$$W^{IR}(z) = \frac{[1.833332, 1.942310] - [0.744659, 1.048713]z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Во временной области получаем конечно-разностные уравнения,

$$y(n) = [0.514851, 0.545455]u(n-1) + [0.406178, 0.539931]y(n-1),$$

$$e(n) = x(n) - y(n),$$

$$u(n) = u(n-1) + [1.833332, 1.942310]e(n) - [0.744659, 1.048713]e(n-1).$$

Однако, расчет дискретных значений управляющего воздействия по этим уравнениям затруднен из-за необходимости выполнения арифметических операций над интервалами, что приводит к расширению интервальных значений управляющей величины  $u(n)$  на каждом такте.

## Способ 2.

Другой возможный вариант построения оптимального по быстродействию управления связан с первоначальным выделением граничных разностных уравнений из полученной ИДПФ объекта, а затем – построению точечного оптимального управления для каждого из них. Идея заключается в том, что точечные программы управления, полученные для граничных динамических характеристик, будут также являться «граничными».

Для рассматриваемого апериодического объекта граничные конечно-разностные уравнения имеют вид:

$$y_{\min}(n) = 0.514851x(n-1) + 0.406178y(n-1),$$

$$y_{\max}(n) = 0.545455x(n-1) + 0.539931y(n-1).$$

Им соответствуют точечные ДПФ, на которые разбивается известная ИДПФ:

$$G_1^{\text{IR}}(z) = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{0.514851z^{-1}}{1-0.406178z^{-1}} = \frac{p'z^{-1}}{1+q''z^{-1}},$$

$$G_2^{\text{IR}}(z) = \frac{P_2(z)}{Q_2(z)} = \frac{0.545455z^{-1}}{1-0.539931z^{-1}} = \frac{p''z^{-1}}{1+q'z^{-1}}.$$

Для каждой из них построим оптимальное по быстродействию управление. Для этого необходимо решить два  $\pi$ -уравнения, в которых искомые полиномы имеют минимальные степени  $\deg \theta(z) = 0, \deg \pi(z) = 0$ :

$$p' \theta_1 z^{-1} + (1 - z^{-1})\pi_1 = 1,$$

$$p'' \theta_2 z^{-1} + (1 - z^{-1})\pi_2 = 1.$$

Их решением являются следующие полиномы:

$$\theta_1(z) = \frac{1}{p'}, \theta_2(z) = \frac{1}{p''}, \pi_1(z) = \pi_2(z) = 1.$$

Отсюда получаем «граничные» программы оптимального управления, причем нижней границе исходного конечно-разностного уравнения  $y_1(n)$  будет соответствовать верхняя граница  $W_1^{\text{IR}}(z)$  программы управления, а верхней границе конечно-разностного уравнения  $y_2(n)$  – нижняя граница программы управления  $W_2^{\text{IR}}(z)$ :

$$W_1^{\text{IR}}(z) = \frac{Q_1 \theta_1}{B \pi_1} = \frac{\frac{1}{p'}(1 + q''z^{-1})}{1 - z^{-1}}, \quad W_2^{\text{IR}}(z) = \frac{Q_2 \theta_2}{B \pi_2} = \frac{\frac{1}{p''}(1 + q'z^{-1})}{1 - z^{-1}}.$$

Во временной плоскости получаем граничные конечно-разностные уравнения, соответствующие полученным «граничным» ДПФ регулятора  $W_1^{\text{IR}}(z)$  и  $W_2^{\text{IR}}(z)$ :

$$y_1(n) = p'u_1(n-1) - q''y_1(n-1),$$

$$e_1(n) = x(n) - y_1(n),$$

$$u_1(n) = u_1(n-1) + \frac{1}{p'}e_1(n) + \frac{q''}{p'}e_1(n-1)$$

$$y_2(n) = p''u_2(n-1) - q'y_2(n-1),$$

$$e_2(n) = x(n) - y_2(n),$$

$$u_2(n) = u_2(n-1) + \frac{1}{p''}e_2(n) + \frac{q'}{p''}e_2(n-1).$$

Для нашего примера апериодического объекта получаем следующие соотношения:

$$W_1^{\text{IR}}(z) = \frac{Q_1\theta_1}{B\pi_1} = \frac{1.942310 - 0.788923z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad W_2^{\text{IR}}(z) = \frac{Q_2\theta_2}{B\pi_2} = \frac{1.833332 - 0.989873z^{-1}}{1 - z^{-1}};$$

$$y_1(n) = 0.514851u_1(n-1) + 0.406178y_1(n-1),$$

$$e_1(n) = x(n) - y_1(n),$$

$$u_1(n) = u_1(n-1) + 1.942310e_1(n) - 0.788923e_1(n-1),$$

$$y_2(n) = 0.545455u_2(n-1) + 0.539931y_2(n-1),$$

$$e_2(n) = x(n) - y_2(n),$$

$$u_2(n) = u_2(n-1) + 1.833332e_2(n) - 0.989873e_2(n-1).$$

Таким образом, получена программа управляющего устройства, обеспечивающего получение кратчайшего переходного процесса за минимальное время  $t_{\min} = 1\Delta t = 1.5$  с (табл. 4.10):

Таблица 4.10. Граничные функции интервального оптимального управления и динамической характеристики

$n\Delta t$	$x(n)$	$y_1(n)$	$e_1(n)$	$u_1(n)$	$y_2(n)$	$e_2(n)$	$u_2(n)$
<b>0</b>	1	0	1	1.942310	0	1	1.833332
<b>1.5</b>	1	1	0	1.153387	1	0	0.843459
<b>3</b>	1	1	0	1.153386	1	0	0.843459
...	...	...	...	...	...	...	...

Здесь границы полученного управления в каждый дискретный момент времени  $n\Delta t$  образуют интервалы  $[u_2(n), u_1(n)]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 4.15). Значение управления  $\tilde{u}(n) \in [u_2(n), u_1(n)]$  будет являться управляющим для некоторого «внутреннего» конечно-разностного уравнения  $[\tilde{y}_{\min}(n), \tilde{y}_{\max}(n)] \subset [y_{\min}(n), y_{\max}(n)]$ , имеющего точечные параметры из интервалов-параметров соответствующего интервального конечно-разностного уравнения.

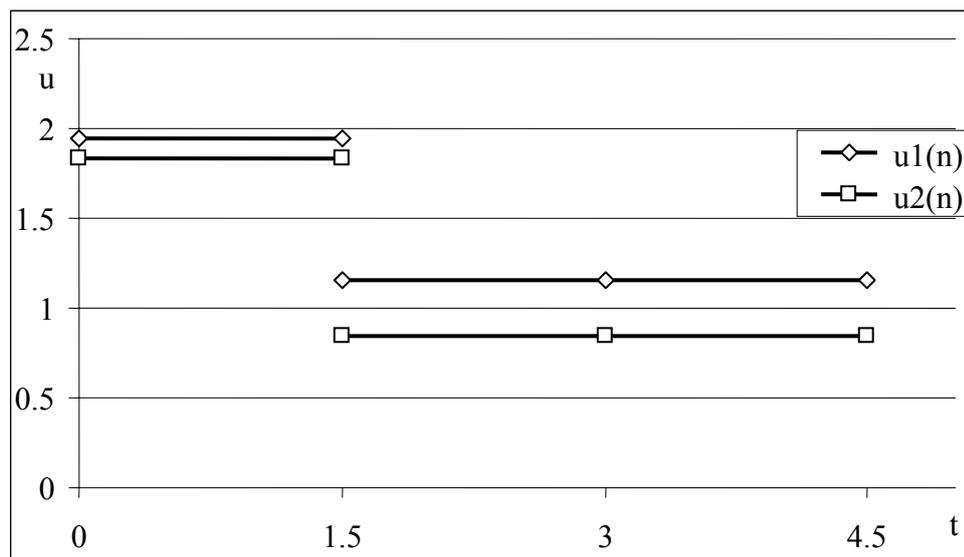


Рис. 4.15. Граничные функции оптимального по быстродействию интервального управления  $u(n) = [u_2(n), u_1(n)]$

Отметим одну из особенностей полученного интервального оптимального управления: оно приводит процесс, первоначально обладающий интервальной неопределённостью, к точечному установившемуся режиму динамической характеристики  $y(n)$  (табл. 4.10).

Для сравнения интервальных результатов с точечным случаем построим оптимальное управление по точной ДПФ рассматриваемого объекта:

$$G_1^*(z) = \frac{0.528z^{-1}}{1 - 0.472038z^{-1}}.$$

Полиномиальное уравнение принимает вид

$$0.528 \theta z^{-1} + (1 - z^{-1})\pi = 1,$$

где минимальные степени полиномов  $\theta = \theta(z)$  и  $\pi = \pi(z)$  также как и в интервальном случае равны 0. Отсюда  $\theta = 1/p = 1.893939$ ,  $\pi = 1$ , следовательно, ДПФ регулятора принимает вид

$$W^{\text{IR}}(z) = \frac{Q\theta}{B\pi} = \frac{1.893939 - 0.894011z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Очевидно, что параметры регулятора, построенного по точным значениям вход-выходных измерений лежат в интервалах-оценках, полученных

способами 1 и 2 при предположении, что исходные данные заданы интервально. В табл. 4.11 приведены дискретные значения управляющего воздействия, рассогласования и выходного сигнала для случая точных измерений.

Таблица 4.11. Дискретные значения интервального оптимального управления и выхода объекта

$n\Delta t$	$x(n)$	$y(n)$	$e(n)$	$u(n)$
0	1	0	1	1.893939
1.5	1	1	0	0.999928
3	1	1	0	0.999928
...	...	...	...	...

Действительно, при точных исходных данных дискретные значения управляющего воздействия  $u(n)$  попадают в полученные выше интервальные значения  $[u_2(n), u_1(n)]$ , то есть данные интервалы являются достоверными интервальными оценками точных значений.

Сравнение обоих способов показывает, что построение оптимального управления отдельно для каждого из граничных разностных уравнений приводит к получению более узких оценок параметров регулятора по сравнению с интервальными вычислениями из способа 1. Таким образом, в данном случае подход на основе граничных функций более предпочтителен в связи с сокращением количества операций над интервалами, а следовательно, и уменьшением интервальной неопределённости.

Так как исходные граничные функции стягиваются к точным значениям выходной величины  $y(n\Delta t)$  при изменении периода дискретизации, то и управляющие интервалы при этом также будут сужаться.

## 2. Интервальное оптимальное дискретное управление по быстродействию для объекта 2-го порядка со свойством колебательности.

Приведем основные результаты построения оптимального по быстродействию управления для рассмотренного в Примере 4.2 колебательного объекта [71]. При исходных данных с интервальной шириной  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.001$  и  $\Delta t = 2.5$  с была восстановлена ИДПФ объекта:

$$G^{\text{IR}}(z) = \frac{[0.563612, 0.566742]z^{-1} + [0.437804, 0.469352]z^{-2}}{1 + [-0.592060, -0.441395]z^{-1} + [0.468764, 0.603920]z^{-2}}.$$

Для построения оптимального управления необходимо выделить граничные функции и затем найти соответствующие им ДПФ с точечными коэффициентами:

$$G_1^{\text{IR}}(z) = \frac{0.563612z^{-1} + 0.437804z^{-2}}{1 - 0.441395z^{-1} + 0.603920z^{-2}},$$

$$G_2^{\text{IR}}(z) = \frac{0.566742z^{-1} + 0.469352z^{-2}}{1 - 0.592060z^{-1} + 0.468764z^{-2}}.$$

Составим  $\pi$ -уравнения

$$P_1\theta_1 + B\pi_1 = A,$$

$$P_1\theta_2 + B\pi_2 = A,$$

которые являются правильными. Следовательно, полиномы  $\theta(z)$  и  $\pi(z)$  имеют минимальные степени

$$\deg \theta(z) = \deg B - 1 = 0,$$

$$\deg \pi(z) = \deg P - 1 = 1.$$

Решая  $\pi$ -уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= 0.998586, \quad \pi_1(z) = 1 + 0.4371849z^{-1}; \\ \theta_2(z) &= 0.9651634, \quad \pi_2(z) = 1 + 0.4530014z^{-1}. \end{aligned}$$

После построения «граничных» ДПФ регулятора выделяем конечно-разностные уравнения:

$$y_1(n) = 0.441395y_1(n-1) - 0.60392y_1(n-2) + 0.563612u_1(n-1) + 0.437804u_1(n-2),$$

$$\begin{aligned} u_2(n) &= 0.562815u_2(n-1) + 0.4371849u_2(n-2) + 0.998586e_2(n) - \\ &- 0.44077e_2(n-1) + 0.603066e_2(n-2), \end{aligned}$$

$$y_2(n) = 0.59206y_2(n-1) - 0.468764y_2(n-2) + 0.566742u_2(n-1) + 0.469352u(n-2),$$

$$u_2(n) = 0.546999u_2(n-1) + 0.4530014u_2(n-2) + 0.965163e_2(n) - \\ - 0.57143e_2(n-1) + 0.452434e_2(n-2).$$

Дискретные значения выхода объекта, управляющего воздействия и значений ошибки представлены в табл. 4.12.

Таблица 4.12. Граничные функции интервального оптимального управления и динамической характеристики

$n\Delta t$	$x(n)$	$y_1(n)$	$e_1(n)$	$u_1(n)$	$y_2(n)$	$e_2(n)$	$u_2(n)$
0		1	0.9985860	0	1	0.9651634	0
2.5		0.437185	0.5578151	0.5628151	0.453001	0.3937288	0.5469986
5		0	1.1608812	1	0	0.8461626	1
7.5		0	1.1608812	1	0	0.8461626	1
10		0	1.1608812	1	0	0.8461626	1
...	...	...	...	...	...	...	...

Полученная программа управления обеспечивает получение кратчайшего переходного процесса за минимальное время  $t_{\min} = \deg P(z)\Delta t = 5$  с. Действительно, в этот момент происходит установление выходного воздействия  $y(n)$  на желаемое значение. Причем и в этом случае интервальное управление также сводит интервальную динамическую характеристику  $y(n)$  к точечной (табл. 4.12). Интервалы управляющих величин  $[u_2(n), u_1(n)]$  отображены на рис. 4.16.

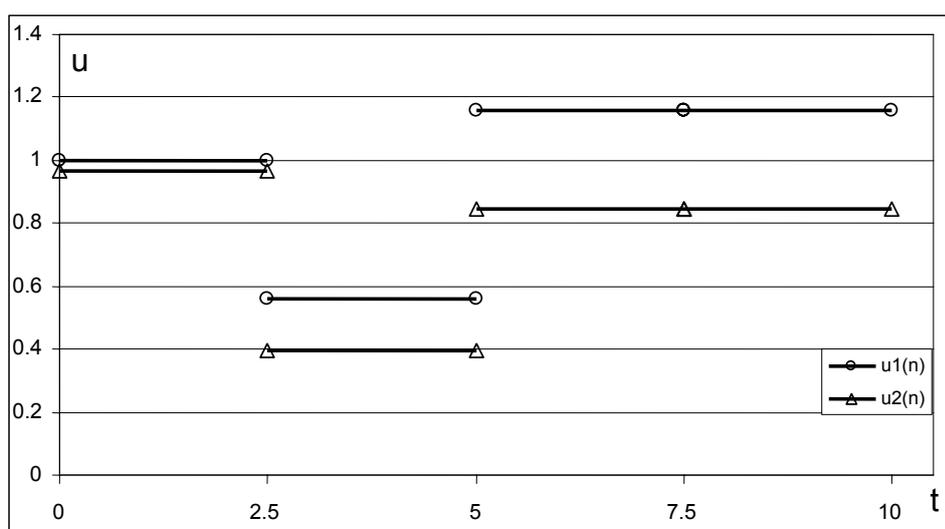


Рис. 4.16. Граничные функции оптимального по быстрдействию интервального управления  $u(n) = [u_2(n), u_1(n)]$

Сужение интервального управления достигается путём изменения  $\Delta t$ , что происходит в связи с уточнением интервальных оценок дискретной модели объекта при вариации шага дискретизации и их стягивании к точечным значениям.

Итак, для объектов с интервальной неопределённостью исходных данных при решении задачи оптимального управления полученные управления также представляются в интервальном виде. Теория полиномиальных уравнений имеет широкие возможности для решения задач оптимального дискретного управления объектами, в том числе и с интервальной неопределённостью в исходных данных. Дальнейшие исследования в этом направлении являются, по мнению автора настоящей работы, достаточно перспективными.

## Выводы

В четвертой главе показано, что интервальный метод структурно-параметрической идентификации может быть успешно применен к линейным объектам невысокого порядка. На тестовых объектах пройдены все этапы решения задачи интервальной структурно-параметрической идентификации некоторых неаперiodических классов объектов, обладающих различными динамическими свойствами: объекта с нулем в НПФ, неустойчивого и колебательного объекта при различных входных воздействиях. При построении интервальной дискретной модели каждого из них возникают различные особенности интервального метода SP-идентификации, с которыми исследователь может также столкнуться при восстановлении дискретных моделей других типов линейных объектов. Для каждого из тестовых объектов проверено выполнение принципа вариации шага дискретизации, что устанавливает эквивалентность получаемых моделей.

Пример построения модели технологического процесса отжима крошки показывает применимость предлагаемого подхода к решению практических задач. Указанный процесс описывается зависимостью с транспортным запаздыванием, что учитывается также в дискретных интервальных моделях, таким образом доказывая широкие возможности метода идентификации.

Восстановленные интервальные дискретные модели в дальнейшем могут быть использованы для построения управления объектом, в том числе оптимального по какому-либо критерию. В последнем параграфе настоящей главы реализуется подход к построению оптимального по быстродействию управления, основанный на применении теории полиномиальных уравнений, что в сочетании с решением задачи интервальной идентификации позволяет в результате пройти все этапы от измерения вход-выходных значений объекта до выработки оптимального дискретного управления в интервальном виде.

## Заключение

1. Способ структурно-параметрической идентификации на основе непрерывных дробей применим для исследования динамических объектов, сигналы на входе и выходе которых обладают интервальной неопределённостью. Достоинствами подхода являются простота реализации с вычислительной точки зрения; применимость к широкому классу линейных, а также к некоторым типам нелинейных объектов, естественный критерий определения порядка и параметров моделей – появление «нулевой» строки в идентифицирующей матрице, эффективность, неитерационность и т.д.

2. Основным параметром, обеспечивающим идентифицируемость модели, является шаг дискретизации  $\Delta t$ . Изменением шага дискретизации в установленных пределах ( $\Delta t_{\min}$ ,  $\Delta t_{\max}$ ) достигается наибольшая суженность интервальной модели.

3. Применение метода на основе непрерывных дробей обеспечивает эквивалентность интервальных дискретных моделей при изменении шага дискретизации. Оценки полюсов и нулей непрерывной передаточной функции при этом образуют последовательность вложенных интервалов:  $S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset S^k$  при  $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \dots > \Delta t_k$ . Результат проиллюстрирован для объектов со свойствами инерционности (апериодичности), колебательности, неустойчивости и объекта с нулем в передаточной функции.

4. Предложенный способ решения интервального квадратного уравнения и сформулированные условия различимости корней уравнения позволяют восстановить структуру и оценить параметры непрерывной модели по известной дискретной модели объекта 2-го порядка.

5. На примере практической задачи моделирования процесса отжима крошки произведено построение интервальной модели объекта с транспортным запаздыванием. Предложен подход к построению интервального оптимального дискретного управления на основе применения теории полиномиальных уравнений.

## Библиография

1. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. – М.: Металлургия, 1968.
2. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 488 с.
3. Александровский Н.М., Егоров С.В., Кузин Р.Е. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами/под ред. Александровского Н.М. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.
4. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
5. Белов В. М., Карбаинов Ю. А., Унгер Ф. Г., В. П. Смагин. Интервальный подход в задачах обработки эмпирической информации / Препринт, ТНЦ СО РАН. – Томск, 1999. – 38 с.
6. Белов В.М., Суханов В.А. Метод центра неопределённости и его приложения к задачам обработки экспериментальной информации. 3-я Конфер. науч.-учеб. центра «Применение физико-химических методов исследования в науке и технике». Ч.1. – М.: УДН им. П. Лумумбы, 1990. – с. 110.
7. Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. Применение метода центра неопределённости в кондуктометрии. 3-я Всесоюз. Конфер. «Электрохимические методы анализа». – Томск, 1989. – с. 403-404.
8. Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределённости. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995. – 144 с.
9. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. // Выпуск 1. – М.: Мир, 1974. – 408 с.
10. Боровков А. А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1986. – 432 с.
11. Бочков А. Ф., Нгуен Вьет Зунг Идентификация нелинейных динамических объектов по интервальным экспериментальным данным / Сб. научных трудов №2 «Приборы и устройства автоматики, вычислительной техники, электроники и оптоэлектроники». / Смоленск, 1992. – стр. 44-54.

12. Быков В.И., Добронев Б.С. К интервальному анализу уравнений химической кинетики. Математические проблемы химической кинетики. – Новосибирск, Наука, 1989. – с.226-232.
13. Волгин Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
14. Вошинин А.П. Интервальный анализ: развитие и перспективы // Заводская Лаборатория. – 2002. – №1. – С. 118-126.
15. Вошинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатической ошибке // Заводская Лаборатория. – 1990. – Т. 56, №7. – С. 76-81.
16. Вошинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределённости. – М.: София: МЭИ (СССР); Техника (НРБ), 1989.
17. Вылегжанин В. Н., Витковский Э. И., Потапов В. П. Адаптивное управление подземной технологией добычи угля. – Новосибирск: Наука, 1987. – 231с.
18. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов с приложением работы Д. Кайзера “Цифровые фильтры”. – М.: Сов. радио, 1973. –526 с.
19. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
20. Данилов В.Л. и др. Математический анализ, функции, пределы, ряды, цепные дроби/Справочная математическая библиотека. – М.:Физматгиз,1961. – 440с.
21. Дейч А. Методы идентификации динамических систем. – М.: Наука, 1985. – 207 с.
22. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
23. Добронев Б.С., Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. – Новосибирск, наука, 1990. – 208 с.
24. Докукин А. В. и др. Статистическая динамика горных машин/А. В. Докукин, Ю. Д. Красников, З. Я. Хургин. – М. : Машиностроение, 1978. – 239 с.
25. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

26. Закгейм А.Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов. Математическое описание процессов.– М.: Химия, 1973.–224 с.
27. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292-295.
28. Иванов В. А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования/Учебное пособие для вузов. Под ред. Б. К. Чемоданова. – М : Высшая школа, 1971. – 808 с.
29. Ивлев Р.С., Соколова С.П. Построение векторного управления многомерным интервально заданным объектом // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 3-13.
30. Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
31. Инденко О. Н. Диагностирование состояния динамических объектов с использованием моделирования характеристик непрерывными дробями / Кандидатская диссертация. – Кемерово, 1996. – 137с.
32. Калман Р.Е. Идентификация систем с шумами / Успехи математических наук. – 1985, т.40, № 4(244). – с.27-41.
33. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.
34. Каминскас В. А. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям. – Вильнюс: Мокслас, 1982. – 245 с.
35. Карташов В. Я. Анализ и исследование аппроксимационных свойств непрерывных дробей при решении задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов / Препринт № 22. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 40 с.
36. Карташов В. Я. Непрерывные дроби (определения и свойства). Учебное пособие. – Кемерово, Кемеровский госуниверситет. – 1999. – 88 с.
37. Карташов В. Я. Цифровые системы контроля с идентификацией динамических свойств и характеристик сложных объектов/Докторская диссертация. – Кемерово: КемГУ, 1997. – 478 с.

38. Карташов В. Я., Инденко О. Н., Щекочихина С. Г. Структурная адаптация дискретных математических моделей линейных динамических объектов к изменению вида входного воздействия/Деп. статья № 1526-В99 -ВИНИТИ, 1999.- 24с.
39. Карташов В. Я., Столетов А. В. Применение интервального анализа в задачах структурно-параметрической идентификации // Труды V Всероссийской научно-практической конференции «Системы автоматизации в образовании, науке и производстве AS'2005» / Новокузнецк, 12-14 апреля 2005.
40. Карташов В.Я., Инденко О.Н., Александров А.В. Аппроксимация дискретной передаточной функции линейного объекта непрерывными дробями по дискретным измерениям вход-выходных переменных/Препринт № 16. – Барнаул, 1996. – 32 с.
41. Карташов В.Я., Инденко О.Н., Александров А.В. Влияние периода дискретизации на структурно-параметрическое соответствие между непрерывной и дискретной по времени моделями линейного динамического объекта/Препринт № 15. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 1996. – 36 с.
42. Карташов В.Я., Махарева О.А., Сахнин Д.Ю. Цифровые алгоритмы оптимального управления системами с интервальной неопределённостью //Сборник докладов Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM'2003. – С.-Петербург, изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2003.
43. Карташов В.Я., Петрикевич Я.И. Интервальная идентификация апериодического объекта при импульсном воздействии // Сборник трудов 6-й Всероссийской конференции: «Краевые задачи и математическое моделирование», Новокузнецк, 2003. – Т. 2.
44. Карташов В.Я., Петрикевич Я.И., Ансол С.П. Интервальная структурно-параметрическая идентификация динамических объектов // Сборник докладов Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM'2003. – С.-Петербург, изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2003.

45. Карташов В.Я., Петрикевич Я.И., Ансол С.П. Способ идентификации линейризованного динамического объекта / Патент №2256950. – М.: Бюл. №20, 2005.
46. Карташов В.Я., Петрикевич Я.И., Столетов А.В. Распознавание динамических характеристик систем с интервальной неопределённостью // Сборник докладов Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM'2004. – С.-Петербург, изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2004.
47. Карташов В.Я., Щекочихина С.Г., Новосельцева М.А. Параметрическая идентификация динамических процессов при наличии помех измерения/В сборнике тезисов докладов Научно-практической конференции “Взаимодействие научно-образовательных, промышленных, предпринимательских и административных структур. Правовые и экономические аспекты”. – Новокузнецк, 1999. – 2с.
48. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976.
49. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
50. Куо Б., Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
51. Куприянова Л.В. Нахождение внутренних оценок множеств решений уравнений с интервальными коэффициентами // Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук/ Санкт-Петербургский государственный университет. – С.-Петербург, 2000.
52. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
53. Лакеев А.В., Носков С.И. О множестве решений интервального уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074-1084.
54. Лебедев А. Н. Решетчатые функции в автоматическом управлении и цифровом моделировании /Деп. Статья № 2883. – ВИНТИ, 1983. – 124 с.

55. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. – 176 с.
56. Лукас В. А. Основы теории автоматического управления. – М.: "Недра", 1983. – 376 с.
57. Льюнг Л. О точности модели в идентификации систем // Известия АН. Техническая кибернетика, № 6. – М.: Наука, 1992. – с.55-64.
58. Льюнг Л. О. Идентификация систем. Теория для пользователя – М.: Наука, 1991. – 432с.
59. Макаров И. М., Менский Е. М. Линейные автоматические системы. – М.: Машиностроение, 1982. – 464 с.
60. Махарева О.А., Сахнин Д.Ю. Проектирование оптимальных цифровых алгоритмов управления с интервальной неопределённостью данных // Вестник КемГУ. Серия Математика. Вып. 1(17). – Кемерово, 2004. – с. 68-72.
61. Михайлов Ф. А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
62. Нариньяни А. С. Не-факторы: неточность и недоопределенность – различие и взаимосвязь. – Известия Академии наук. Теория и системы управления, 2000, №5. – с.44-56.
63. Новосельцева М.А. Идентификация моделей совмещенных случайных процессов для систем контроля горной техники // Дисс. канд. тех. наук / Кемерово: КемГУ, 2001.
64. Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённости // Известия АГУ. – 1998. – № 1. – С. 35-38.
65. Острем К., Болин Т. Цифровая идентификация динамических систем на основе данных о нормальном режиме работы/В кн.:Теория самонастраивающихся систем управления. Труды 11 Международного симпозиума ИФАК по самонастраивающимся системам. – М.: Наука, 1969. – с.99 -116.
66. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

67. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления / Учебное пособие. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
68. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ / Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
69. Перельман И.И. Оперативная идентификация объектов управления. – М.: Энергоиздат, 1982.
70. Петрикевич Я. И. Структурно-параметрическая идентификация нелинейного объекта, описываемого интегральным звеном с отсечкой / Сборник трудов Областной научной конференции «Молодые ученые Кузбассу. Взгляд в XXI век» Математические, химические, физико-технические науки. – Кемерово: РИО СМУ Кузбасса, 2001.
71. Петрикевич Я. И., Махарева О. А., Сахнин Д. Ю. Интервальная SP-идентификация и управление объектом второго порядка / Недра Кузбасса. Инновации: труды V Всероссийской научно-практической конференции. – Кемерово: ИНТ, 2006. – 252 с.
72. Петрикевич Я. И., Щекочихина С.Г. Структурно-параметрическая идентификация нелинейных динамических объектов на примере интегрального звена с отсечкой // Материалы междунар. науч.-практ. конф. «Моделирование. Теория, методы и средства», г. Новочеркасск, 2001 г.: В 8 ч. / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2001. – Ч. 7.
73. Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю. О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Вычислительные технологии. – 2004, т. 9, №1. – с. 75-85.
74. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
75. Райбман Н.С. Идентификация объектов управления (обзор)//Автоматика и телемеханика, 1979. – N 6. – с. 80 - 93.
76. Райбман Н.С. Что такое идентификация? – М.: Наука, 1970.

77. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процессов производства. – М.: Энергия, 1975.
78. Растринин Л.А., Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. – М.: Энергия, 1987. – 216с.
79. Рей У. Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983. – 368 с.
80. Ротач В. Я. Теория автоматического управления / Учебник для студентов ВУЗов. – М.: Изд-во МЭИ, 2004. – 400 с.
81. Светлаков А. А. Нетрадиционный синтез методов оценивания величин на основе экспериментальных измерений. / Автоматизация проектирования, идентификация и управление в сложных системах. – Томск: Изд-во НТЛ, 1997. – 264 с.
82. Селиванов М. Н., Фридман А. Э., Кудряшова Ж. Ф. Качество измерений: Метрологическая справочная книга. – Л.: Лениздат, 1987.
83. Сиберт У. М. Цепи, сигналы, системы. (В 2-х частях). – М.: Мир, 1988. –510 с.
84. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
85. Смагина Е.М., Моисеев А.Н. Слежение за полиномиальным сигналом в интервальной динамической системе // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3, №1. – С. 67-74.
86. Смагина Е.М., Моисеев А.Н., Моисеева С.П. Методы вычисления коэффициентов интервального характеристического полинома интервальных матриц // Вычислительные технологии. –1997. – Т.2, № 1.– С. 52-61.
87. Смит Джон М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей.- М.: Машиностроение, 1980. – 271 с.
88. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования/Учебное пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
89. Справочник по теории автоматического управления // Под ред. А. А. Красовского: – М. Наука. Гл. Ред. Физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.

90. Сургучев Г. Д. Математическое моделирование сталеплавильных процессов. – М.: Металлургия, 1978. – 224 с.
91. Типовые линейные модели объектов управления /Под ред. Н.С.Райбмана. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
92. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
93. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов экспериментов /Учебное пособие - М.: Изд-во Московского госуниверситета , 1988. - 174с.
94. Толчеев В. О., Ягодкина Т. В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем / Учебное пособие. – М.: Изд-во МЭИ, 1997. – 108 с.
95. Тьюки Дж. Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ. – М.: Мир, 1981. – 695 с.
96. Хинчин А. Я. Цепные дроби. – М.-Л.: Научно-техническое издательство НК ТП СССР, 1935. – 104с.
97. Хлебалин Н.А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта управления: Дисс. на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Саратов: Саратов. политехн. инст-т, 1984.
98. Хлебалин Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. – Саратов: Саратов. политехн. инст-т, 1988. – С. 83-88.
99. Хлебалин Н.А., Шокин Ю.А. Интервальный вариант метода модального управления // Доклады АН. – 1991. – Т.316, №4. – С. 846-850.
100. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехиздат, 1956. – 203 с.
101. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. – М.: Наука, 1995. – 336 с.
102. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 351 с.

103. Шарая И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // Вычислительные технологии. – 1997. – Т. 2, №1. – С. 71-83.
104. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – №3. – С. 51-61.
105. Шарый С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Фундаментальная и Прикладная математика. – 2002. – Том 8, вып. 2. – С. 567-610.
106. Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределённостью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные Технологии. – 1995. – Т. 4, №13. – С. 64-80.
107. Шашихин В.Н. Оптимизация интервальных систем // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №1. – С. 94-103.
108. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981.
109. Щекочихина С. Г. Дробно-рациональная аппроксимация передаточных функций динамических объектов при импульсном входном воздействии/В сборнике тезисов докладов 3-ей Всероссийской научной конференции студентов и аспирантов “Техническая кибернетика, радиоэлектроника и системы управления”.-Таганрог: ТРТУ, 1996.- 1с.
110. Щекочихина С. Г. Разработка метода дискретного моделирования в задачах диагностики горной техники//Диссертация канд. тех.наук/ Кемерово: КемГУ, 1999. – 279 с.
111. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.- М.: Мир, 1975.- 531 с.
112. A.F. Bochkov, N.V. Zung Identification of nonlinear dynamic objects using interval experimental data. // Interval Computations. №3(5), St.-Petersburg-Moscow, 1992. – P. 31-37.

113. Alefeld G., Mayer G. Interval analysis: theory and applications/ – Journal of Computational and Applied Mathematics 121 (2000), p. 421-464.
114. B. H. Friesen, V. Kreinovich Ockham's razor in interval identification // Reliable Computing № 1 (3), 1995. Institute of New Technologies in Education, pp/225-237/
115. Hansen E.R. Interval form of Newton's method // Computing. – 1978. – V. 4, №3. – P. 187-201.
116. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space // Computing Supplement. – 1980. – V. 2. – P. 33-49.
117. Kearfott R. B. Rigorous global search: continuous problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
118. Kreinovich V., Lakeev A., Rohn J., Kahl P. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. – Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
119. Kreinovich V., Lakeev A.V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties // Reliable Computing. – 1997. – V. 3, №1. – P. 51-81.
120. Lakeyev A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduls // Reliable Computing. – 1996. – V. 2, №2. – P. 125-131.
121. Ljung L., Soderstrom T. Theory and pracktice of recursive identification - Cambr., Mass: MIT Press, 1983. - p529.
122. Mayer G. Enclosing the solutions of systems of linear equations by interval iterative processes // Computing Supplement. – 1998. – V. 6. – P. 47-58.
123. Mayer G., Rohn J. On then applicability of then interval Gaussian algorithm // Reliable Computing. –1998. – V. 4, №3. – P. 205-222.
124. Moore R. E. Methods and applications of interval analysis. – SIAM, Philadelphia, 1979.
125. Moore R.E. Interval analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
126. Moore R.E. Interval methods for nonlinear systems // Fundamentals of numerical computation (computer-oriented numerical analysis). Computing Supplement. – Wienn: Springer Verlag, 1980. – P. 113-120.

127. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979.
128. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
129. Neumaier A. Linear interval equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – P. 109-120.
130. Shary S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problem, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. – 1996. – V. 2, №1. – P. 3-33.
131. Shokin Yu. I. On interval problems, interval algorithms and their computational complexity // Scientific Computing and Validated Numerics – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 314-328.
132. Soderstrom T. On a method for model selection in system identification.- Automatica, 1981.-Vol. 13.- N 2.- pp. 387 - 388.
133. Stoica P., Soderstrom T. A method for the identification of linear systems using the generalised least squarec principles.- IEEE Transactions on Automatic Control, 1977.- Vol. 22.- N 4.- pp. 631 - 639.
134. Pushkov S.G., Kalinkina S.Yu. Boundary realizations method for interval linear dynamic systems // Reliable Computing. – 2005, Vol. 11, № 5. – pp. 413-423.

## **Приложения**

## Приложение 1.

### Основные сведения об аппарате непрерывных дробей

#### 1. Основные определения.

**Определение П1.1.** Пусть заданы последовательности комплексных (в общем случае) чисел  $\{a_n\}_1^\infty$ ,  $\{b_n\}_0^\infty$ , тогда *бесконечной непрерывной (или цепной) дробью* называется выражение

$$\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right] = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} . \quad (\text{П1.1})$$

Числа  $a_n$ ,  $b_n$  называются членами  $n$ -го звена  $\frac{a_n}{b_n}$  непрерывной дроби; причем  $\{a_n\}$  являются частными числителями, а  $\{b_n\}$  – частными знаменателями непрерывной дроби (П1.1) [36, 84, 96, 100].

**Замечание 1.** В дальнейшем считается, что все члены непрерывной дроби конечны, и более того – все частные знаменатели отличны от нуля.

Кроме введенного обозначения (П1.1) используется также другое обозначение:

$$\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right] = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} .$$

**Замечание 2.** В первоначальном определении указывается, что члены непрерывной дроби  $a_n$ ,  $b_n$  – комплексные числа. Но, не нарушая основных определений, под  $a_n$ ,  $b_n$  можно понимать комплексно-значные (в том числе – действительные) функции многих переменных, матрицы, операторы, элементы абстрактных пространств, в которых введены операции сложения и деления.

Если непрерывная дробь (П1.1) содержит только конечное число звеньев  $n$ , что соответствует случаю  $a_{n+1} = 0$ , то она принимает вид  $b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}$  и называется конечной непрерывной дробью, величина которой определяется с помощью обычных арифметических операций.

**Определение П1.2.** Конечную непрерывную дробь

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \dots + \frac{a_n}{b_n}} \quad (\text{П1.2})$$

называют *n-ой подходящей дробью* непрерывной дроби (П1.1). Таким образом, непрерывная дробь порождает последовательность подходящих дробей  $\left\{ \frac{P_n}{Q_n} \right\}$ .

Рассмотрим основные свойства непрерывных дробей (НД) без доказательства. Эти свойства существенно отличаются от свойств таких математических моделей, как бесконечные ряды и произведения, и достаточно полно освещены в соответствующих источниках.

**Эквивалентные преобразования непрерывной дроби.**

1) если умножить члены дроби  $a_m, b_m, a_{m+1}$  на любое конечное число  $p_m \neq 0$  ( $m = 1, 2, \dots, n, \dots$ ), то значение всей непрерывной дроби не изменится;

2) какова бы ни была числовая последовательность  $\{p_n\}_1^\infty$ , в которой  $p_n \neq 0$  для  $n = 1, 2, \dots$ , справедливо следующее тождество:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} = b_0 + \frac{p_1 a_1}{p_1 b_1 + \frac{p_1 p_2 a_2}{p_2 b_2 + \dots + \frac{p_{n-1} p_n a_n}{p_n b_n} + \dots}}$$

При этом для любого  $n$   $P_n$  и  $Q_n$  заменяются на  $p_1 p_2 \dots p_n P_n$ ,  $p_1 p_2 \dots p_n Q_n$ .

Непрерывная дробь  $\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right]$  приводится с помощью эквивалентного преобразования к такой, у которой все частные знаменатели равны 1. Для этого положим  $p_n = \frac{1}{b_n}$ , при условии, что все  $b_n \neq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда непрерывная дробь примет вид:

$$\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right] = c_0 + \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{1 + \dots + \frac{c_n}{1 + \dots}}}$$

где  $c_0 = b_0$ ;  $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$ ;  $c_n = \frac{a_n}{b_{n-1}b_n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), при этом  $P_n$  и  $Q_n$  заменяются соответственно на  $\frac{A_n}{b_1 b_2 \dots b_n}$  и  $\frac{B_n}{b_1 b_2 \dots b_n}$ .

В теории непрерывных дробей наиболее исследован специальных вид непрерывных дробей, получивших название *правильных С-дроби* (соответствующие непрерывные дроби):

$$\left[ 0; \frac{a_0}{1}; \frac{a_n x}{1} \right]_1^\infty = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1 x}{1} + \frac{a_2 x}{1} + \dots + \frac{a_n x}{1} + \dots \quad (\text{П1.3})$$

Эквивалентные преобразования позволяют привести НД вида (П1.1) к правильной С-дроби. С правильными С-дробями связаны также обобщенные С-дроби вида:

$$\left[ 0; \frac{a_n x^{\alpha_n}}{1} \right]_1^\infty = \frac{a_1 x^{\alpha_1}}{1} + \frac{a_2 x^{\alpha_2}}{1} + \dots + \frac{a_n x^{\alpha_n}}{1} + \dots$$

Популярность правильных С-дроби связана с тем, что для них доказан ряд специфических свойств таких, как сходимость к мероморфным функциям, равенство частных числителей при равенстве С-дроби, аппроксимирующих некоторую аналитическую функцию, и ряд других [20, 36, 96, 100].

Преимущество правильных С-дроби заключается также в справедливости следующего утверждения [22]: если две правильные С-дроби

$\left[ 1; \frac{a_n x}{1} \right]_1^\infty$  и  $\left[ 1; \frac{\tilde{a}_n x}{1} \right]_1^\infty$  соответствуют одному и тому же формальному

степенному ряду  $L = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ , то  $a_n = \tilde{a}_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ .

Это утверждение, указывающее практически единственность представления с помощью правильной С-дроби, имеет важнейшее значение в прикладных исследованиях, в частности, подтверждает возможность решения задачи структурно-параметрической идентификации.

### Сходимость непрерывных дробей.

Для непрерывных дробей теория сходимости намного богаче, но и намного сложнее, чем для бесконечных рядов. Сходимость непрерывных дробей, достаточно важна и поэтому приведем здесь ее основные понятия и определения.

Непрерывная дробь  $\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right]$  порождает последовательность подходящих дробей  $\left\{ V_n = \frac{P_n}{Q_n} \right\}$ , поэтому непрерывная дробь называется сходящейся, если существует  $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$  и он конечен. В этом случае значение непрерывной дроби принимается равным этому пределу. Важно замечание, сделанное в [20, 100], которое утверждает, что из сходимости непрерывной дроби еще не следует, что  $V$  равен той величине, которая была разложена в непрерывную дробь.

#### Определение П1.3.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = +\infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = -\infty$ , то непрерывную дробь называют *несущественно расходящейся*. Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$  не существует, то непрерывную дробь называют *существенно расходящейся*.

Сходимость рядов и бесконечных произведений не зависит от отбрасывания конечного числа их первых членов. Однако у непрерывных дробей такое отбрасывание (кроме отбрасывания  $b_0$ ) может превратить непрерывную сходящуюся дробь в несущественно расходящуюся. В связи с указанной особенностью вводится следующее понятие: непрерывная дробь  $\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right]$  называется *безусловно сходящейся*, если для всех  $m \geq 1$  непрерывная

дробь  $\frac{a_m}{b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1} + \dots}}$  сходится. Если хотя бы для одного значения  $m$

непрерывная дробь  $\frac{a_m}{b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1} + \dots}}$  расходится, то непрерывная дробь  $\left[ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right]$  называется *условно сходящейся*.

Из последних определений следует, что для непрерывных дробей, вообще говоря, нельзя давать признаки сходимости в предельной форме, как это делается для рядов. Условие сходимости, связывающее, например, члены непрерывной дроби  $a_n$  и  $b_n$ , должно выполняться для всех натуральных  $n$ .

Важное значение имеет понятие равномерной сходимости непрерывной дроби, которое можно сформулировать следующим образом [20]: если члены звеньев непрерывной дроби являются функциями конечного числа переменных, то эту дробь называют *равномерно сходящейся на множестве*  $E$  изменения этих переменных, когда ее подходящие дроби  $\frac{P_n}{Q_n}$  на  $E$  равномерно стремятся к пределу  $V$ , то есть можно для любого  $\varepsilon > 0$  найти такое число  $N$ , что для  $n \geq N$  на всем множестве  $E$   $Q_n \neq 0$  и имеет место неравенство:

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - V \right| < \varepsilon.$$

Понятие равномерной сходимости непрерывной дроби помогает выяснить вопрос, сходится ли данная непрерывная дробь именно к той функции, которая была разложена в эту непрерывную дробь.

### **Сжатие и растяжение непрерывных дробей**

Это свойство является специфическим для аппарата непрерывных дробей и заключается в следующем.

Если из последовательности  $\{V_n\}_1^\infty$  взять некоторую подпоследовательность  $\{V_{n_i}\}_1^\infty$ , обозначив ее  $\{f_n\}_1^\infty$ , то непрерывная дробь

(П1.4)

$$f_0 + \frac{f_1 - f_0}{1} + \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_0} + \frac{(f_1 - f_0)(f_2 - f_3)}{f_3 - f_1} + \dots + \frac{(f_{n-2} - f_{n-3})(f_{n-1} - f_n)}{f_n - f_{n-2}} + \dots \quad (\text{П1.4})$$

получена *сжатием* непрерывной дроби  $\left[ \{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_0^\infty \right]$ . Если же  $\{V_n\}_1^\infty$  является подпоследовательностью  $\{f_n\}_1^\infty$ , то непрерывная дробь (П1.4) получена *растяжением* непрерывной дроби  $\left\{ b_0; \frac{a_n}{b_n} \right\}$ .

## 2. Алгоритмы вычисления непрерывных дробей.

Существует ряд алгоритмов для вычисления последовательно подходящих дробей и величины непрерывной дроби. Наибольшее распространение получили два принципиально различных алгоритма: прямой рекуррентный алгоритм (FR-алгоритм, forward recurrence algorithm) и обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм, backward recurrence algorithm) [36, 96, 100].

**1) Прямой рекуррентный алгоритм** заключается в последовательном вычислении величин  $P_n, Q_n$  с помощью разностных уравнений

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \end{aligned} \quad (\text{П1.5})$$

а затем вычисления значения подходящей дроби  $V_n = P_n/Q_n$ .

При нахождении последовательности подходящих дробей вводят начальные условия вида

$$P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0, P_0 = b_0, Q_1 = 1.$$

Последовательность подходящих дробей также определяется однозначно, если использовать начальные условия вида

$$P_0 = b_0, Q_1 = 1, P_1 = a_1 + b_0 b_1, Q_1 = b_1.$$

Однозначность подходящих дробей проверяется непосредственным расчетом по указанным алгоритмам и начальным условиям.

Для вычисления  $V_n$  на основе соотношений (П1.5) необходимо осуществить  $4n + 1$  операций умножения и деления,  $2n$  операций сложения. Однако, если необходимы значения еще  $n - 1$  подходящей дроби  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , то в этом случае дополнительно требуется еще  $n - 1$  операция деления.

**2) Обратный рекуррентный алгоритм** вычисления подходящих дробей  $V_n$  основан на применении арифметических операций для обыкновенных дробей путём вычисления последовательно «от хвоста к голове».

Пусть требуется вычислить  $V_n = P_n/Q_n$ . Тогда, полагая  $a_{n+1}^{(n)} = 0$ , рассчитываем  $G_n^{(n)} = \frac{a_n}{b_n + G_{n+1}^{(n)}}$ , а затем последовательно

$$G_k^{(n)} = \frac{a_k}{b_k + G_{k+1}^{(n)}} \text{ при } k = n - 1, n - 2, \dots, 1. \quad (\text{П1.6})$$

Окончательно получаем  $V_n = b_0 + G_1^{(n)}$ .

Для вычисления  $V_n$  из соотношений (П1.6) требуется только  $n$  операций умножения или деления и столько же операций сложения. Преимуществом данного алгоритма является то, что он позволяет подсчитывать  $V_n$  для любого натурального  $n$ , но при этом не получаются предыдущие подходящие дроби  $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ .

## Приложение 2.

### Структурно-параметрическая идентификация интегрального звена с отсечкой

1. Переходная характеристика объекта имеет вид (рис. П2.1):

$$y(t) = \begin{cases} \frac{k}{T}t, & \text{если } 0 \leq t \leq T, \\ k, & \text{если } t \geq T. \end{cases} \quad (\text{П2.1})$$

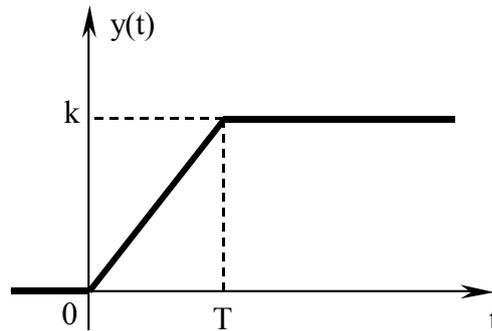


Рис. П2.1. Переходная характеристика интегрального звена с отсечкой

При построении дискретной модели рассмотрим два случая: 1) "кратный" шаг дискретизации, и 2) "некратный" шаг дискретизации  $\Delta t$ .

1) Предположим, что шаг дискретизации выбран так, что  $\Delta t = T/m$ , где  $m = 1, 2, \dots$  (кратный шаг). Заменяем в (П2.1) непрерывное время  $t$  дискретными отсчетами  $n\Delta t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), построим идентифицирующую матрицу и найдем дискретную передаточную функцию  $G^*(z)$  и дискретную переходную характеристику  $y^M(n\Delta t)$  в виде конечно-разностного уравнения.

Пусть, например,  $m = 3$ , т. е.  $\Delta t = T/3$ . Тогда  $y(n\Delta t) = k$  при  $n \geq 3$ .  
Строим идентифицирующую матрицу:

$$\begin{array}{c}
 z^{-1} \\
 z^{-1}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 \frac{k\Delta t}{T} & \frac{2k\Delta t}{T} & k & k & \dots \\
 -1 & -2 & -2 & -2 & \dots \\
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right]$$

В 3-ой строке первый элемент строки равен нулю, следовательно, производим сдвиг всей строки влево на 1 элемент и продолжаем вычисление следующих значений.

Элементы нулевого столбца матрицы определяют конечную непрерывную дробь

$$G^*(z) = \frac{\frac{k\Delta t}{T} z^{-1}}{1 + \frac{-z^{-1}}{1 + \frac{z^{-2}}{1 + z^{-1}}}}$$

Переходя к дробно-рациональному выражению, находим дискретную передаточную функцию

$$G^*(z) = \frac{k\Delta t}{T} (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}),$$

следовательно, дискретная модель переходной характеристики объекта имеет вид

$$y^M(n) = \frac{k\Delta t}{T} (x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вообще, для произвольного  $m = 1, 2, \dots$  нетрудно показать, что если шаг дискретизации выбран так, что  $\Delta t = T/m$ , то дискретная передаточная функция и дискретная переходная характеристика объекта, описываемого интегральным звеном с отсечкой, будут равны соответственно

$$G^*(z) = \frac{k\Delta t}{T} (z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(m-1)} + z^{-m}), \quad (\text{П2.2})$$

$$y^M(n) = \frac{k\Delta t}{T} (x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-m)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П2.3})$$

ДПФ рассматриваемого объекта отличается тем, что она в общем случае при произвольном  $\Delta t$  не имеет ненулевых полюсов, а порядок модели зависит от номера  $m$  отсчета, попадающего в момент отсечки  $T$ . То есть порядок дискретной модели напрямую зависит от шага дискретизации, что не свойственно типовым линейным объектам.

Зная шаг  $\Delta t$ , общую формулу дискретной модели и переходной характеристики, получаем оценку параметра  $T$  по формуле

$$\hat{T} = m\Delta t. \quad (\text{П2.4})$$

Рассчитаем по формуле (П2.3) значения дискретной переходной характеристики в точках  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$n = 0, \quad y^M(0) = 0;$$

$$n = 1, \quad y^M(\Delta t) = \frac{k\Delta t}{T} x(0) = \frac{k\Delta t}{T};$$

$$n = 2, \quad y^M(2\Delta t) = \frac{k\Delta t}{T} (x(\Delta t) + x(0 \cdot \Delta t)) = \frac{2k\Delta t}{T};$$

...

$$n = m - 1, \quad y^M((m-1)\Delta t) = \frac{k\Delta t}{T} (x((m-2)\Delta t) + \dots + x(\Delta t) + x(0 \cdot \Delta t)) = \frac{(m-1)k\Delta t}{T};$$

$$n \geq m, \quad y^M(n\Delta t) = k.$$

Следовательно, можно сделать вывод, что полученная модель является точной. Это позволяет получить по формуле (П2.4) достоверную оценку временного параметра  $T$ .

Факт того, что шаг дискретизации  $\Delta t$  выбран кратным времени отсечки  $T$ , проверяется путём кратного изменения  $\Delta t$ . Уменьшение  $\Delta t$  приводит к увеличению необходимого для идентификации числа измерений выходных переменных рассматриваемого звена, но при этом не меняется общий вид идентифицирующей матрицы для нахождения дискретной переходной характеристики при  $\Delta t = T/m$  (табл. П1.1).

В данном примере для удобства пронумеруем строки матрицы следующим образом: строка, содержащая измерения входной величины, имеет номер «-1»; строка, состоящая из измерений отклика объекта – номер «0»; а все остальные строки нумерируются по порядку, начиная с 1.

Появление конечного числа нулевых элементов в некоторых строках позволяет разбить всю матрицу на группы по 3 строки. Пусть  $r$  – номер группы строк в идентифицирующей матрице ( $r = 1, 2, \dots$ ), тогда в  $r$ -ю группу входят строки с номерами  $(3r - 3), (3r - 2), (3r - 1)$ , (т. е. 0, 1, 2; 3, 4, 5; 6, 7, 8; ...).

**Утверждение П2.1.** Идентифицирующая матрица для нахождения дискретной переходной характеристики при  $\Delta t = T/m$  (табл. П1.1) обладает следующим свойством: строка с бесконечным числом нулевых элементов входит в группу

$r = (m + 1)/2$  и имеет номер  $(3r - 2)$  – для нечетных  $m$ , и входит в группу

$r = m/2$  и имеет номер  $(3(r + 1) - 3)$  – для четных  $m$ .

Доказательство:

На первых двух строках в  $(m - 2r)$  – ом столбце оканчиваются элементы, операция над которыми дает в 3 - ей из строк группы нули в столбцах от 0 – го до  $(m - 2r - 1)$  – го. В связи с этим для продолжения расчетов в  $(3r - 1)$  – ой строке (3–ей в группе) необходимо сделать сдвиг элементов на  $(m - 2r)$  столбцов влево, при этом  $(3r - 1)$  – ый частный числитель непрерывной дроби умножится на  $z^{-(m - 2r)}$ .

Очередная строка в матрице будет нулевой, если в некоторой группе из трех строк  $r$  будет таково, что столбец с номером  $(m - 2r + 1)$ , с которого начинаются равные  $(m - 2r + 2)$  элементы в  $(3r - 3)$  – ей строке и равные  $-(m - 2r + 1)$  элементы в  $(3r - 2)$  – ой строке, окажется под номером 0:

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & \dots \\
 3r - 3 & (m - 2r + 2) & (m - 2r + 2) & (m - 2r + 2) & \dots \\
 3r - 2 & -(m - 2r + 1) & -(m - 2r + 1) & -(m - 2r + 1) & \dots \\
 3r - 1 & 0 & 0 & 0 & \dots
 \end{array}$$

Общий вид идентифицирующей матрицы для случая кратного шага  $\Delta t = T/m$

		0	1	2	...	$m - 2$	$m - 1$	$m$	$m + 1$	...
-1	стр.	1	1	1	...	1	1	1	1	...
0		$z^{-1}$	$\frac{k}{m}$	$\frac{2k}{m}$	$\frac{3k}{m}$	...	$\frac{k(m-1)}{m}$	$\frac{km}{m}$	$k$	$k$
1		-1	-2	-3	...	$-(m-1)$	$-(m-1)$	$-(m-1)$	$-(m-1)$	...
2	$z^{-(m-2)}$	1	1	1	...	1	1	1	1	...
3		1	2	3	...	$m-2$	$m-2$	$m-2$	$m-2$	...
4		-1	-2	-3	...	$-(m-3)$	$-(m-3)$	$-(m-3)$	$-(m-3)$	...
5	$z^{-(m-4)}$	1	1	1	...	1	1	1	1	...
6		1	2	3	...	$m-4$	$m-4$	$m-4$	$m-4$	...
7		-1	-2	-3	...	$-(m-5)$	$-(m-5)$	$-(m-5)$	$-(m-5)$	...
8	$z^{-(m-6)}$	1	1	1	...	1	1	1	1	...
9		1	2	3	...	$m-6$	$m-6$	$m-6$	$m-6$	...
10		-1	-2	-3	...	$-(m-7)$	$-(m-7)$	$-(m-7)$	$-(m-7)$	...
11	$z^{-(m-8)}$	1	1	1	...	1	1	1	1	...
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таким образом, при  $m - 2r + 1 = 0$  получаем, что  $m = 2r - 1$ , откуда  $r = \frac{m+1}{2}$ .

Так как элементы  $-(m - 2r + 1)$  равны нулю, то номер строки матрицы с нулями  $-(3r - 2)$ , что будет верным только для нечетных  $m$ , так как  $r \in \mathbb{N}$ .

Для четных  $m$  условием нулевой строки будет равенство  $m - 2r + 1 = 1$ , откуда  $r = \frac{m}{2}$  – номер группы, в которой в  $(3r - 3)$  – ей и  $(3r - 2)$  – ой строках будут элементы, равные соответственно  $(m - 2r + 2)$  и  $-(m - 2r + 1)$  во всех столбцах, кроме нулевого. Тогда будем иметь:

	0	1	2	...
$3r - 3$	1	$(m - 2r + 2)$	$(m - 2r + 2)$	...
$3r - 2$	-1	$-(m - 2r + 1)$	$-(m - 2r + 1)$	...
$3r - 1$	1	1	1	...
$3(r + 1) - 3$	$m - 2r$	$m - 2r$	$m - 2r$	...
$3(r + 1) - 2$	0	0	0	...

При этом строка нулевых элементов имеет номер  $3(r + 1) - 3$ , так как при  $m = 2r$  элементы этой строки  $m - 2r$  равны 0. Утверждение доказано.

**Замечание 1.** Сдвиги конечного числа элементов в строках, элементы которых вычисляются по соответствующим формулам, нехарактерны для типовых линейных объектов, для которых нулевые (или близкие к нулю) элементы появляются только во всей строке, на которой вычисление последующих строк прекращается.

2) Рассмотрим случай, когда  $m\Delta t < T < (m + 1)\Delta t$ ,  $m = 1, 2, \dots$  (некратный шаг).

Пусть, например,  $m = 2$ , тогда  $2\Delta t < T < 3\Delta t$ . Строим матрицу:

$z^{-1}$	1	1	1	1	...
	$\frac{k\Delta t}{T}$	$\frac{2k\Delta t}{T}$	k	k	...
	-1	$\frac{\Delta t - T}{\Delta t}$	$\frac{\Delta t - T}{\Delta t}$	$\frac{\Delta t - T}{\Delta t}$	...
	$\frac{3\Delta t - T}{\Delta t}$	1	1	1	...
	$\frac{-4\Delta t^2 + 4T\Delta t - T^2}{\Delta t(3\Delta t - T)}$	$\frac{-4\Delta t^2 + 4T\Delta t - T^2}{\Delta t(3\Delta t - T)}$	$\frac{-4\Delta t^2 + 4T\Delta t - T^2}{\Delta t(3\Delta t - T)}$	...	...
	$\frac{-2\Delta t + T}{3\Delta t - T}$	$\frac{-2\Delta t + T}{3\Delta t - T}$	$\frac{-2\Delta t + T}{3\Delta t - T}$	...	...
	0	0	0	...	...
	...	...	...	...	...

После преобразований получаем дискретную переходную характеристику

$$y^M(n) = \frac{k\Delta t}{T} (x(n-1) + x(n-2) + A \cdot x(n-3)),$$

где  $A = \frac{T - 2\Delta t}{\Delta t}$ . Получив числовой коэффициент  $A$  и шаг дискретизации  $\Delta t$ , найдем оценку временного параметра  $T$ :

$$\hat{T} = A\Delta t + 2\Delta t.$$

Проведя аналогичные расчеты, нетрудно показать, что для  $m\Delta t < T < (m + 1)\Delta t$  и  $m = 1, 2, \dots$  дискретная передаточная функция и конечно-разностное уравнение имеют вид:

$$G^*(z) = \frac{k\Delta t}{T} \left( z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-m} + \frac{T - m \cdot \Delta t}{\Delta t} z^{-(m+1)} \right), \quad (\text{П2.5})$$

$$y^M(n) = \frac{k\Delta t}{T} \left( x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-m) + \frac{T - m \cdot \Delta t}{\Delta t} \cdot x(n-(m+1)) \right), \quad (\text{П2.6})$$

откуда, зная числовой коэффициент  $A = \frac{T - m \cdot \Delta t}{\Delta t}$  при слагаемом  $x(n-(m+1))$

и величину шага дискретизации  $\Delta t$ , оценку параметра  $T$  находим по формуле

$$\hat{T} = A\Delta t + m \cdot \Delta t. \quad (\text{П2.7})$$

Рассчитанные по формуле (П2.6) значения дискретной переходной характеристики в точках  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  совпадают со значениями непрерывной переходной характеристики (П2.1) в этих точках. Следовательно, полученная модель является точной, что позволяет получить достоверную оценку временного параметра  $T$  по формуле (П2.7).

Очевидно, что формула (П2.6) для  $y^M(n)$  при некрatном шаге является обобщением случая кратного шага (П2.3): если положить в ней  $\Delta t = T/m$ , то получим дискретную модель для кратного шага, совпадающую с выведенной выше.

**2. Импульсная характеристика** рассматриваемого интегратора имеет следующий вид (рис. П2.2):

$$w(t) = \begin{cases} \frac{k}{T}, & 0 \leq t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (\text{П2.8})$$

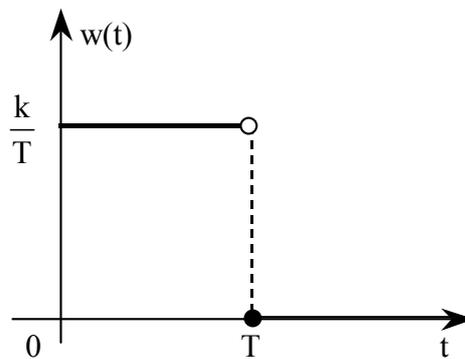


Рис. П2.2. Весовая характеристика интегрального звена с отсечкой

Построим дискретную модель весовой функции при кратном и некратном шаге и найдем оценки временного параметра  $T$ .

1) Предположим, что  $\Delta t = T/m$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Например, при  $\Delta t = T/3$  получим следующую идентифицирующую матрицу:

$$Z^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{k}{T} & \frac{k}{T} & \frac{k}{T} & 0 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

откуда дискретная передаточная функция и дискретная импульсная характеристика имеют соответственно вид:

$$G^*(z) = \frac{k}{T}(1 + z^{-1} + z^{-2}),$$

$$w^M(n) = \frac{k}{T}(x(n) + x(n-1) + x(n-2)).$$

Нетрудно показать, что при  $\Delta t = T/m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  дискретная передаточная функция и дискретная модель весовой характеристики объекта в виде конечно-разностного уравнения примут вид:

$$G^*(z) = \frac{k}{T}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(m-1)}), \quad (\text{П2.9})$$

$$w^M(n) = \frac{k}{T}(x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-(m-1))). \quad (\text{П2.10})$$

Отсюда, зная число слагаемых  $m$ , оценку временного параметра  $T$  получаем по формуле:

$$\hat{T} = m \cdot \Delta t. \quad (\text{П2.11})$$

Факт того, что шаг дискретизации выбран кратным  $T$ , проверяется вариацией шага дискретизации. Рассчитав по формуле (П2.10) значения дискретной весовой характеристики в точках  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получим, что данная модель является точной. Следовательно формула (П2.11) дает достоверную оценку временного параметра  $T$ .

2) Пусть  $m\Delta t < T < (m+1)\Delta t$ ,  $m = 1, 2, \dots$

При таком шаге дискретизации  $\Delta t$  дискретная модель весовой функции полностью совпадает с моделью, полученной для кратного шага дискретизации  $\Delta t = T/(m+1)$ :

$$G^*(z) = \frac{k}{T}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(m-1)}),$$

$$w^M(n) = \frac{k}{T}(x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-(m-1))).$$

Но в отличие от дискретной переходной характеристики, для дискретной весовой характеристики в случае некратного шага нельзя указать общую формулу для оценки временного параметра  $T$ . Точность оценки по формуле

$$\hat{T} = (m+1) \cdot \Delta t ,$$

полученной для кратного шага, зависит от выбора шага дискретизации  $\Delta t$  и в общем случае не позволяет получить достоверную оценку параметра  $T$ .

Таким образом показано, что модифицированный метода Висковатова может быть использован при решении задачи идентификации некоторых нелинейных динамических объектов. Однако, применимость этого метода, основанного на использовании аппарата непрерывных дробей, к нелинейным объектам требует в каждом случае отдельного дополнительного исследования.

## Приложение 3.

### Классическая и комплексная интервальные арифметики

#### 1. Классическая интервальная арифметика.

**Определение ПЗ.1.** Интервальная арифметика, рассматриваемая в работах [4, 108, 125 и др.], – это алгебраическая система  $\langle \mathbf{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$ , носителем которой является множество всех вещественных интервалов

$$A = [a_1, a_2] = \{x \in \mathbf{R} \mid a_1 \leq x \leq a_2\},$$

а операции сложения, вычитания, умножения и деления определены в соответствии со следующим принципом:

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\} \quad (\text{ПЗ.1})$$

для всех интервалов  $A, B$ , таких что выполнение точечной операции  $A * B$ ,  $*$   $\in$   $\{+, -, \cdot, /\}$ , имеет смысл для любых  $a \in A, b \in B$ . Действительное число  $a$  представляется как интервал, у которого левая и правая границы совпадают, т. е.  $a = [a, a]$ .

Развернутое определение интервальных арифметических операций таково:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \quad (\text{ПЗ.2})$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \quad (\text{ПЗ.3})$$

$$A \cdot B = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}], \quad (\text{ПЗ.4})$$

$$A/B = A \cdot [1/b_2, 1/b_1], \quad 0 \notin B, \quad (\text{ПЗ.5})$$

**Правило умножения** интервала на вещественную константу:

$$\alpha[a_1, a_2] = \begin{cases} [\alpha a_1, \alpha a_2], & \alpha \geq 0 \\ [\alpha a_2, \alpha a_1], & \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{ПЗ.66})$$

**Правило возведения** интервала в целую степень:

$$A^k = [a_1, a_2]^k = \begin{cases} [a_1^k, a_2^k] & \text{при } k = 2j + 1 \\ [a_1^k, a_2^k] & \text{при } k = 2j, a_1 \geq 0 \\ [a_2^k, a_1^k] & \text{при } k = 2j, a_2 \leq 0 \\ [0, \max(a_1^k, a_2^k)] & \text{при } k = 2j \text{ и } 0 \in A \end{cases} \quad (\text{ПЗ.7})$$

Поскольку интервалы – это множества, то между ними определяется частичное упорядочение по отношению включения друг в друга:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow a_1 \geq b_1, a_2 \leq b_2 \quad (\text{ПЗ.8})$$

Имеет место важное свойство монотонности по включению

$$A \subseteq A', B \subseteq B' \Rightarrow A * B \subseteq A' * B' \quad (\text{ПЗ.9})$$

для любых интервалов  $A, B \subseteq \mathbf{IR}$  и любой операции  $* \in \{+, -, \cdot, /\}$  [108].

**Знак интервала** определяется следующим образом: если  $A = [a_1, a_2]$ , то  $A \geq 0$  при  $a_1 \geq 0$  и  $A \leq 0$  при  $a_2 \leq 0$ . Если  $0 \in A$ , то интервал называют 0-содержащим.

### Алгебраические свойства интервальных операций.

Нейтральными элементами относительно сложения и умножения являются в классической интервальной арифметике  $\mathbf{IR}$  нуль и единица, соответственно:

$$A + 0 = A, \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$A \cdot 1 = A. \quad (\text{ПЗ.11})$$

Кроме того,

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Интервальные арифметические операции обладают следующими свойствами [4, 108]:

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ - ассоциативность сложения,} \quad (\text{ПЗ.13})$$

$$(AB)C = A(BC) \text{ - ассоциативность умножения,} \quad (\text{ПЗ.14})$$

$$A + B = B + A \text{ - коммутативность сложения,} \quad (\text{ПЗ.15})$$

$$AB = BA \text{ - коммутативность умножения.} \quad (\text{ПЗ.16})$$

Особенностью интервальной арифметики является отсутствие дистрибутивности умножения относительно сложения. Так, в общем случае

$$(A + B)C \neq AC + BC. \quad (\text{ПЗ.17})$$

Однако, имеет место более слабое свойство

$$A(B + C) \subseteq AB + AC \quad (\text{ПЗ.18})$$

называемое субдистрибутивностью умножения относительно сложения.

Как показано в [4, 103, 108], в ряде частных случаев дистрибутивность все-таки выполняется. Например:

$$a(B + C) = aB + aC, \text{ если } a \text{ – вещественное число,} \quad (\text{ПЗ.19})$$

$$A(B + C) = AB + AC, \text{ если } BC > 0. \quad (\text{ПЗ.20})$$

Перечислим еще несколько основных понятий, свойств интервалов и операций над ними.

**Равенство интервалов.** Два интервала  $A = [a_1, a_2]$  и  $B = [b_1, b_2]$  равны тогда и только тогда, когда  $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ .

**Симметричным** называют интервал  $A = [a_1, a_2]$ , у которого  $-a_1 = a_2$ .

**Отношение порядка** на множестве интервальных чисел  $\mathbf{IR}$  определяется следующим образом:  $A < B$  тогда и только тогда, когда  $a_2 < b_1$ .

**Упорядочивание по включению:**  $A$  не превосходит  $B$ , если  $A \subset B$ .

**Пересечение  $A \cap B$**  интервалов  $A$  и  $B$  пусто, если  $A < B$  или  $B < A$ . В противном случае

$$A \cap B = [\max(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)] \text{ – также интервал.}$$

**Середина (центр) интервала:**

$$\text{mid } A = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \quad (\text{ПЗ.21})$$

**Радиус интервала:**

$$\text{rad } A = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \quad (\text{ПЗ.22})$$

**Ширина интервала**

$$\text{wid } A = a_2 - a_1 \quad (\text{ПЗ.23})$$

**Расстояние между интервалами:**

$$\rho(A, B) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|) \quad (\text{ПЗ.24})$$

Некоторые свойства, соответствующие введенным формулам и операциям:

$$\text{mid } (A \pm B) = \text{mid } A \pm \text{mid } B, \quad (\text{ПЗ.25})$$

$$\text{mid } (aB) = a \text{ mid } B \text{ при } a \in \mathbf{R}, \quad (\text{ПЗ.26})$$

$$\text{rad } A \leq \text{rad } B \text{ при } A \in B \quad (\text{ПЗ.27})$$

$$\text{rad } (A \pm B) = \text{rad } A + \text{rad } B, \quad (\text{ПЗ.28})$$

Как видно из (ПЗ.25) и (ПЗ.28), ширина интервалов при сложении и вычитании может только складываться и потому противоположного

(обратного по сложению) элемента для интервалов ненулевой ширины не существует. Вместо этого более слабые свойства сокращения:

$$A + B = B + C \Rightarrow A = B$$

$$A \cdot C = B \cdot C, 0 \notin A, 0 \notin B, 0 \notin C \Rightarrow A = B.$$

## 2. Комплексная интервальная арифметика.

Многие из свойств и результатов, полученных для вещественной интервальной арифметики, можно перенести на случай комплексной. Для того, чтобы это проделать, нужно определить множества комплексных чисел, которые будут использоваться в качестве комплексных интервалов. Имеется 2 подхода к представлению комплексных интервалов [4]: представление комплексного интервала в виде прямоугольника и в виде круга на плоскости. Здесь мы рассмотрим только прямоугольники в качестве комплексных интервалов как основное представление, использующееся в работе.

**Определение ПЗ.2.** пусть  $A_1$  и  $A_2$  – произвольные элементы из  $\mathbf{IR}$ . Тогда множество комплексных чисел

$$A = \{a = a_1 + ia_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}, i^2 = -1, \quad (\text{ПЗ.29})$$

называется комплексным интервалом.

Определенные таким образом множества комплексных чисел могут быть изображены на комплексной плоскости в виде прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Множество всех таких комплексных интервалов обозначается через  $\mathbf{RC}$ , а прописные буквы  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$  используются для обозначения его элементов. Всякое  $A$  из  $\mathbf{RC}$  можно записать в виде

$$A = A_1 + iA_2, \text{ где } A_1, A_2 \in \mathbf{IR}.$$

Комплексное число  $a = a_1 + ia_2$  можно рассматривать как точечный комплексный интервал:

$$A = [a_1; a_1] + i[a_2; a_2] \in \mathbf{RC},$$

а каждый элемент  $A_1$  из  $\mathbf{RC}$  – как сумму  $A = A_1 + i[0; 0] \in \mathbf{RC}$ , откуда видно, что  $\mathbf{IR} \subset \mathbf{RC}$ .

**Определение ПЗ.3.** Два элемента  $A = A_1 + iA_2$  и  $B = B_1 + iB_2$  из  $\mathbf{RC}$  считаются равными, если  $A_1 = B_1$  и  $A_2 = B_2$ .

**Определение ПЗ.4.** Пусть  $* \in \{ +, -, \cdot, / \}$  – бинарная операция над элементами из  $\mathbf{IR}$ . Тогда если  $A = A_1 + iA_2, B = B_1 + iB_2 \in \mathbf{RC}$ , то

$$A \pm B = A_1 \pm B_1 + i(A_2 \pm B_2), \quad (\text{ПЗ.30})$$

$$A \cdot B = A_1B_1 - A_2B_2 + i(A_1B_2 + A_2B_1), \quad (\text{ПЗ.31})$$

$$A/B = (A_1B_1 + A_2B_2)/(B_1^2 + B_2^2) + i(A_2B_1 - A_1B_2)/(B_1^2 + B_2^2), \quad (\text{ПЗ.32})$$

$$0 \notin B_1^2 + B_2^2.$$

Здесь вычисление степеней производится согласно (ПЗ.7). При вычислении степеней  $B_1^2 = B_1B_1$  и  $B_2^2 = B_2B_2$  это свойство может оказываться невыполненным, даже если  $0 \notin B_1 + iB_2$ . Если при этом оказывается, что  $0 \notin B_1^2 + B_2^2$ , то деление не определено.

Операции, введенные выше, удовлетворяют соотношению

$$\{a * b \mid a \in A, b \in B\} \subseteq A * B. \quad (\text{ПЗ.33})$$

Для сложения и вычитания включение может быть заменено на равенство. Для умножения  $AB = \inf\{X \in \mathbf{RC} \mid \{ab \mid a \in A, b \in B\} \subseteq X\}$ , где точная нижняя грань берется в смысле частичного порядка на  $\mathbf{RC}$ , определяемого теоретико – множественным включением.

Пусть  $A, B, C \in \mathbf{RC}$ . Тогда имеют место следующие свойства:

$$A + B = B + A, AB = BA; \quad (\text{ПЗ.34})$$

$$(A + B) + C = A + (B + C); \quad (\text{ПЗ.35})$$

$$[0, 0] + i[0, 0] \in \mathbf{RC} \text{ и } [1, 1] + i[0, 0] \in \mathbf{RC}; \quad (\text{ПЗ.36})$$

– определенные единственным образом нейтральные элементы сложения (нуль) и умножения (единица).

Согласно [4], ширину комплексного интервала  $A = A_1 + iA_2$  можно определить следующим образом:

$$\text{wid } A = \text{wid } A_1 + \text{wid } A_2. \quad (\text{ПЗ.37})$$

## Приложение 4.

### Примеры вычисления нулей интервальной квадратичной функции

**Пример 1.** Рассмотрим расширение функции  $f(z) = z^2 - bz + c$  на область интервальных коэффициентов:

$$F(z) = z^2 + [-4, -2]z + [5, 7].$$

Определяющая точка  $V$  имеет координаты

$$z_v = -\frac{b_1 + b_2}{4} = 1.5,$$

$$F_v = \left(\frac{b_2 - b_1}{4}\right)^2 - \frac{D_1}{4} = 6.25.$$

Интервальный дискриминант:

$$D = [-4, -2]^2 - 4 [5, 7] = [4, 16] - [20, 28] = [-24, -4] < 0,$$

следовательно, уравнение имеет лишь комплексно-значные интервальные корни.

Действительно, представление функции в виде выделенного полного квадрата имеет вид

$$F^*(z) = (z - [1, 2])^2 + [1, 6].$$

то есть вершины интервальной параболы  $F(z)$  пробегают множество

$$P = \left[-\frac{b_2}{2}, \frac{b_1}{2}\right] \times \left[-\frac{D_2}{4}, -\frac{D_1}{4}\right] = [1, 2] \times [1, 6],$$

то есть нижняя граничная функция

лежит полностью выше оси  $Oz$ , следовательно, интервальная парабола  $F(z)$  не имеет пересечений с осью абсцисс.

На рис. П4.1 изображены граничные функции интервальной параболы, множество вершин  $P$  и определяющая точка  $V$ .

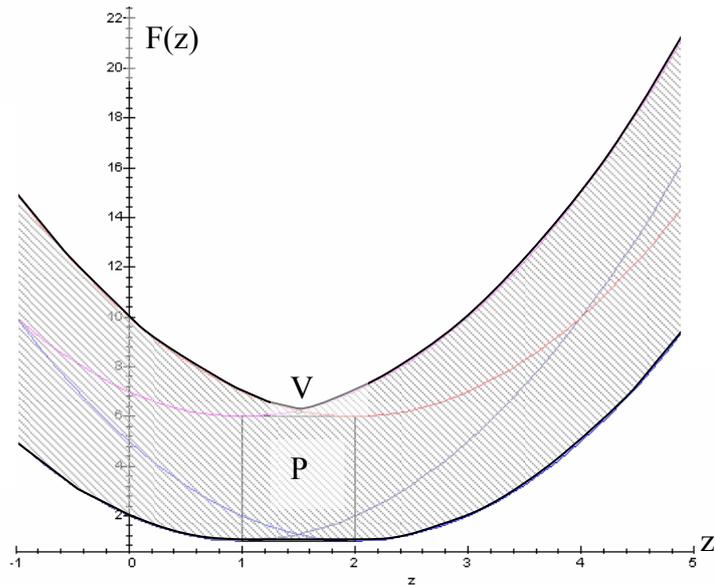


Рис. П4.1. Интервальная квадратичная функция с двумя комплексно-сопряженными нулями

Вычисление корней дает следующие выражения:

$$Z_{1,2} = \left[ \frac{-b_2}{2}, \frac{-b_1}{2} \right] \pm i \left[ \frac{\sqrt{-D_2}}{2}, \frac{\sqrt{-D_1}}{2} \right] = [1, 2] \pm i \left[ \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{24}}{2} \right] = [1, 2] \pm [1, 2.45]i.$$

$$\text{wid } Z_1 = \text{wid}(\text{Re } Z_1) + \text{wid}(\text{Im } Z_1) = \text{wid } Z_2 = 2.45$$

**Пример 2.** Рассмотрим функцию

$$F(z) = z^2 + [-4, -2]z + [4, 6].$$

Определяющая точка V имеет координаты  $z_v = 1.5$ ,  $F_v = 5.25$ .

Интервальный дискриминант:  $D = [-20, 0]$ .

«Симметричное» представление функции задается соотношением

$$F^*(z) = (z - [1, 2])^2 + [-5.25, -0.25].$$

Так как  $0 \in D$   $F_v > 0$ , то функция имеет один кратный интервальный нуль, вычисление которого по формулам (3.3.7) приводит к следующим результатам:

$$Z_1 = [1, 2] - [0, 2.24i] = [1 - 2.24i, 2] = [1, 2] - [0, 2.24]i,$$

$$Z_2 = [1, 2] + [0, 2.24i] = [1, 2 + 2.24i] = [1, 2] + [0, 2.24]i,$$

$$\text{wid } Z_1 = \text{wid}(\text{Re } Z_1) + \text{wid}(\text{Im } Z_1) = \text{wid } Z_2 = 3.34$$

Далее, поскольку  $0 \in D$ , то есть интервальная парабола имеет один вещественный корень (кратности 2), то согласно предложенной методики, следует произвести объединение полученных интервалов по вещественным значениям  $\text{Re } Z_1$  и  $\text{Re } Z_2$ , что приводит к единственному интервальному нулю функции:

$$Z = \text{Re } Z_1 \cup \text{Re } Z_2 = [1, 2], \text{ wid } Z = 1.$$

В самом деле, из рис. П4.2 видно, что полученный интервал  $Z$  соответствует истинному значению нуля функции.

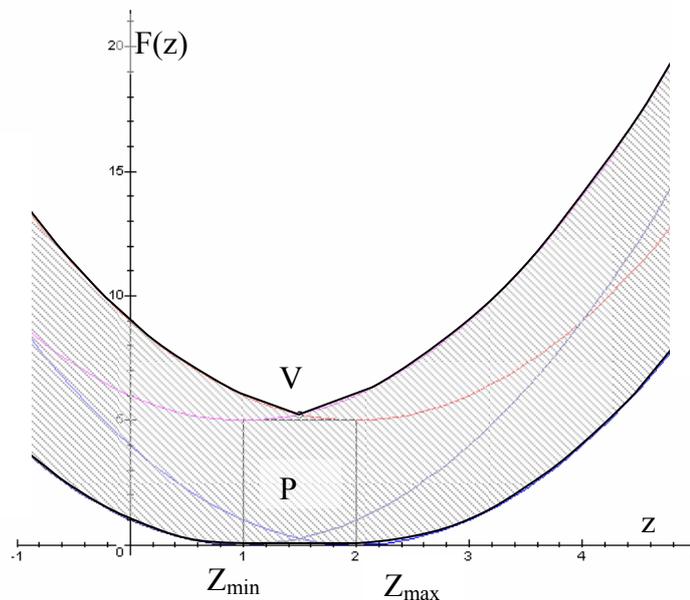


Рис. П4.2. Интервальная квадратичная функция с двумя совпадающими вещественно-значными нулями

**Пример 3.** Рассмотрим функцию

$$F(z) = z^2 + [-4, -2]z + [1, 3].$$

Координаты определяющей точки V:  $z_v = 1.5, F_v = 2.25$

Интервальный дискриминант:  $D = [-8, 12], 0 \in D$ .

Выделение полного квадрата приводит к виду

$$F^*(z) = (z + [-2, -1])^2 + [-3, 2]$$

Так как  $0 \in D, F_v > 0$ , то функция имеет один интервальный нуль кратности 2. Вычислим значения  $Z_1$  и  $Z_2$  по формулам (3.3.7) и произведем объединение полученных значений:

$$Z_1 = [-0.73, 2 - 1.41i] = [-0.73, 2] - [0, 1.41]i,$$

$$Z_2 = [1 + 1.41i, 3.73] = [1, 3.73] + [0, 1.41]i$$

$$\text{wid } Z_1 = \text{wid } Z_2 = 4.14;$$

$$Z = \text{Re } Z_1 \cup \text{Re } Z_2 = [-0.73, 3.73], \text{wid } Z = 4.46$$

На рис. П4.3 показан результат вычисления нуля функции.

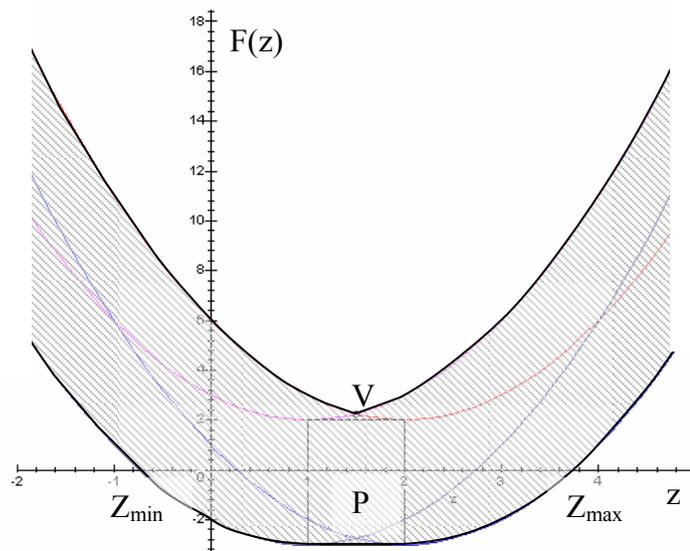


Рис. П4.3. Интервальная квадратичная функция с двумя совпадающими вещественно-значными нулями

**Пример 4.** Рассмотрим функцию

$$F(z) = z^2 + [-4, -2]z + [-1.125, 0.875].$$

Определяющая точка  $V$  имеет координаты  $z_v = 1.5$ ,  $F_v = 0.125$ .

Интервальный дискриминант:  $D = [0.5, 20.5] > 0$ .

Выделение полного квадрата приводит к виду

$$F^*(z) = (z - [1, 2])^2 + [-5.125, -0.125]$$

Так как  $D > 0$ ,  $F_v > 0$ , то функция имеет два пересекающихся интервальных нуля, объединение которых является нулем функции:

$$Z_1 = [-1.26, 1.65],$$

$$Z_2 = [1.35, 4.26],$$

$$\text{wid } Z_1 = \text{wid } Z_2 = 2.91,$$

$$Z = Z_1 \cup Z_2 = [-1.26, 4.26], \text{wid } Z = 5.52$$

Полученное решение соответствует истинному значению интервального нуля параболы (рис. П4.4).

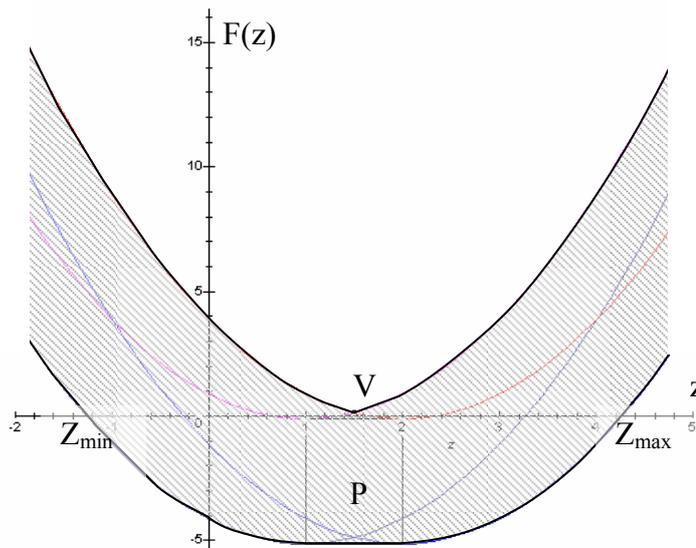


Рис. П4.1. Интервальная квадратичная функция с двумя совпадающими нулями

Очевидно, что в данном примере положительность интервального дискриминанта вовсе не означает наличие двух различных интервальных нулей функции. Необходимо также учитывать знак ординаты определяющей точки.

**Пример 5.** Рассмотрим функцию с интервальными коэффициентами

$$F(z) = z^2 + [-4, -2]z + [-1.25, 0.75].$$

Определяющая точка  $V$  имеет координаты  $z_v = 1.5$ ,  $F_v = 0$ .

Интервальный дискриминант:  $D = [1, 21] > 0$ .

Отсюда, «симметричное» представление функции имеет следующий вид:

$$F^*(z) = (z - [1, 2])^2 + [-5.25, -0.25]$$

Так как  $F_v = 0$ , то вычисление корней соответствующего квадратного уравнения, согласно приведенному в Главе 3 **Утверждению 3.1**, должно дать два интервальных корня, имеющих лишь одну общую точку, являющуюся граничной для обоих интервалов.

Действительно, нули функции  $F(z)$

$$Z_1 = \left[ \frac{-b_2}{2}, \frac{-b_1}{2} \right] - \left[ \frac{\sqrt{D_1}}{2}, \frac{\sqrt{D_2}}{2} \right] = [1, 2] - \left[ \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2} \right] = [-1.29, 1.5]$$

$$Z_2 = \left[ \frac{-b_2}{2}, \frac{-b_1}{2} \right] + \left[ \frac{\sqrt{D_1}}{2}, \frac{\sqrt{D_2}}{2} \right] = [1, 2] + \left[ \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2} \right] = [1.5, 4.29]$$

$$\text{wid } Z_1 = \text{wid } Z_2 = 2.79$$

имеют одну общую точку  $z = 1.5$ , которая является абсциссой определяющей

точки:  $z_v = -\frac{b_1 + b_2}{4}$ . Однако, поскольку  $D > 0$ , то в этом случае считаем, что

произошло разделение корней уравнения, и функция  $F(z)$  имеет два интервальных нуля.

И в этом случае положительность интервального дискриминанта также не гарантирует полного разделения корней уравнения. Положение определяющей точки указывает на то, что функция имеет нули с общей граничной точкой.

Сопоставление полученных интервальных нулей функции  $F(z)$  и ее графического изображения (рис. П4.5) подтверждает достоверность полученных результатов.

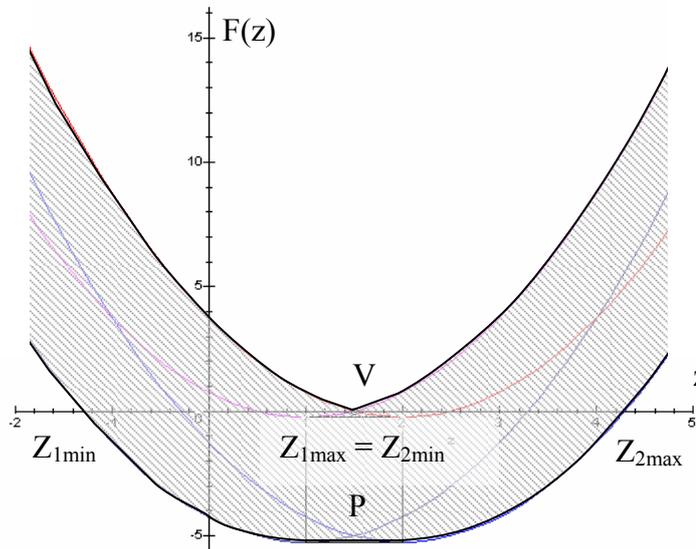


Рис. П4.5. Интервальная квадратичная функция с двумя различными нулями, имеющими общую границу

**Пример 6.** Рассмотрим функцию с интервальными коэффициентами

$$F(z) = z^2 + [-4, -2]z + [-2, 0].$$

Определяющая точка  $V$  имеет координаты  $z_v = 1.5$ ,  $F_v = -0.75$ .

Интервальный дискриминант:  $D = [4, 24] > 0$ .

Выделением полного квадрата получаем функцию

$$F^*(z) = (z - [1, 2])^2 + [-6, -1]$$

Так как  $F_v < 0$  и  $D > 0$ , то существуют два различных интервальных нуля функции  $F(z)$ :

$$Z_1 = [-1.45, 1], Z_2 = [2, 4.45],$$

$$\text{wid } Z_1 = \text{wid } Z_2 = 2.45$$

Результат соответствует изображенным на рис. П4.6 нулям функции  $F(z)$ .

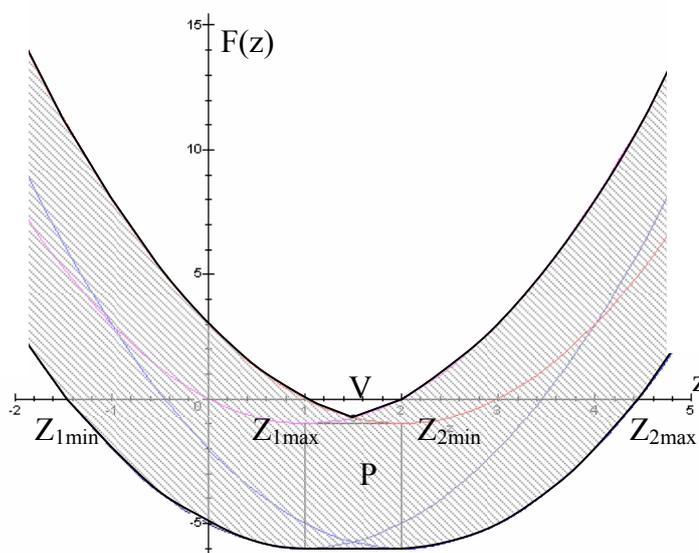


Рис. П4.6. Интервальная квадратичная функция с двумя различными вещественно-значными нулями

Таким образом, лишь при  $F_v < 0$  произошло полное разделение нулей функции, что соответствует Утверждению 3.1.(Гл.3, п. 3.1.1).