

Новосибирский государственный технический университет

На правах рукописи

Плохотников Виталий Валерьевич

**МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

05.13.01 - Системный анализ, управление и обработка информации
(в промышленности)

Диссертация на соискание
учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Воевода А.А.

Новосибирск - 2002

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	1
Глава 1. Анализ и синтез систем управления с интервальными параметрами. Постановка задачи синтеза	1
1.1 Формулировка проблемы управления	1
1.2. Анализ систем управления с интервальными парамет- рами	4
1.3. О синтезе линейных интервальных динамических сис- тем управления	13
1.4. О синтезе регуляторов пониженного порядка	22
1.5. Постановка задачи диссертационного исследования	29
Глава 2. О свойствах полиномов в различных пространствах и их связи друг с другом	1
2.1. Введение	1
2.2. О соответствии множеств полиномов, корней и коэф- фициентов	2
2.3. Об установлении взаимнооднозначного соответствия между множествами корней и коэффициентов полиномов	4
2.4. О введении криволинейных локальных координат в пространстве полиномов	7
2.5. Алгоритм поиска D -устойчивого интервального поли-	

нома с желаемым расположением корней.....	14
2.6. Поиск D -устойчивых интервальных полиномов низкого порядка	19
2.7. О совмещенных декартовых координатах в пространстве корней полиномов	25
2.8. Выводы	28

Глава 3. Синтез интервальных систем управления с малым параметром на основе свойства расположения корней производного

интервального полинома	1
3.1. Введение	1
3.2. О свойствах производных интервального полинома	2
3.3. Алгоритм построения D -устойчивого полинома с сосредоточенными параметрами	5
3.4. Алгоритмы построения D -устойчивых интервальных полиномов	9
3.5. D -стабилизация интервального полинома с помощью коррекции коэффициентов при младших степенях s	16
3.6. Синтез регуляторов для интервальных систем управления с использованием производных интервального полинома	21
3.7. Выводы.....	25

Глава 4. Оптимизационный синтез регуляторов пониженного порядка для систем управления с интервальными параметрами.

4.1. Введение	
4.2. Синтез регуляторов пониженного порядка для систем управления с постоянными параметрами.....	
4.2.1. Постановка задачи синтеза	
4.2.2. О выборе критерия оптимизации	
4.2.3. Обеспечение статического коэффициента передачи.....	

4.2.4. Описание алгоритма синтеза регуляторов пониженного порядка.....	
4.2.5 О синтезе регуляторов пониженного порядка в криволинейных локальных координатах	
4.3. Синтез систем управления с интервальными параметрами	
4.3.1. Постановка задачи синтеза	
4.3.2. О кривизне годографа Михайлова устойчивого интервального полинома.....	
4.3.3. Об использовании свойств кривизны к синтезу регуляторов для систем управления с интервальными параметрами	
4.3.4. Описание алгоритма синтеза регуляторов для систем управления, имеющих интервальную неопределенность..	
4.4. Выводы.....	

Глава 5. Синтез регуляторов

для реально существующих систем

управления с интервальными параметрами

5.1. Введение	
5.2. Синтез регулятора для стабилизации механической двухмассовой системы	
5.3. Синтез регулятора для управления температурным режимом 4-х полочной колонны аммиака	
5.4. Выводы	

Заключение

Список литературы

Приложение 1. Список обозначений, принятых в диссертации

Приложение 2. Интервальная математика.
О свойствах интервальных полиномов

Приложение 2. Акты о внедрении

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Несмотря на большую историю в развитии теории автоматического управления продолжается поток работ, посвященных анализу и синтезу линейных систем автоматического управления, что свидетельствует о том, что до сих пор не решены некоторые вопросы анализа и синтеза, казалось бы, самого простого класса систем автоматического регулирования - линейных систем. В настоящее время спектр рассматриваемых вопросов несколько усложнился и сместился в область исследования многоканальных систем управления, систем управления с неопределенными (интервальными) параметрами, систем с регулятором пониженного порядка, нестационарных систем и др. Большую роль в решение поставленных задач внесли такие отечественные и зарубежные ученые как Александров А.А., Андреев А.А., Бесекерский В.А., Воронов А.А., Востриков А.С., Гноенский А.С., Ляпунов А.М., Нетушил А.В., Попов Е.П., Смагина Е.М., Соболев О.С., Солодовников В.В., Chen C.T., Desoer C.A., Kwakernaak H., Rosenbrock H.H., Wolowich W.A. и др., результаты работы которых отражены в различных учебниках, учебных пособиях и монографиях.

При анализе и синтезе систем управления параметры объекта часто заданы неточно, что связано с погрешностями измерений, старением оборудования, возмущениями, влияющими на характеристики объекта. В этом случае справедливо говорить о системах управления с неопределенными параметрами, которые могут быть периодически

изменяющимися, функциями одной или нескольких переменных, интервальными и т.д.

Данная диссертация посвящена анализу и синтезу систем управления с интервальными параметрами. Неопределенность присуща как внешним условиям работы системы, так и самой математической модели объекта. Интервальная модель объекта управления отражает реальную ситуацию, когда его точные параметры не определены вследствие неточности априорных данных, а известны только границы диапазонов изменения тех или иных величин. В этой ситуации одной из важнейших задач является синтез такого регулятора, который бы обеспечивал желаемые требования, предъявляемые к системе, во всем диапазоне изменяющихся параметров объекта. Этой задаче и посвящена большая часть данного исследования.

Цель и задачи работы. Разработать модальный метод синтеза линейных регуляторов с сосредоточенными параметрами как можно меньшего порядка (пониженного порядка) для стабилизации линейных стационарных интервальных объектов управления. При этом задача синтеза ставится следующим образом. Необходимо синтезировать систему, полюса которой размещаются в желаемой односвязной области на комплексной плоскости. Интервальная система управления представляется в операторном виде. Выбор параметров регулятора осуществляется с помощью полиномиальных диофантовых включений и оптимизационных процедур. Найденный регулятор должен иметь сосредоточенные параметры. Предлагаемая методика должна быть применима как к одноканальным, так и к многоканальным системам.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- разработка критериев для оптимизационной процедуры синтеза регуляторов пониженного порядка;
- создание алгоритма оптимизационной процедуры модального метода синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с постоянными параметрами;

- разработка алгоритмов построения интервальных полиномов с заданным расположением корней;
- применение свойства включения области расположения корней производного интервального полинома в область расположения корней исходного интервального полинома для синтеза регуляторов с сосредоточенными параметрами;
- разработка алгоритма, устанавливающего взаимнооднозначное соответствие между множеством полиномов (коэффициентов полиномов) и множеством корней полиномов.

Методы исследования. При выполнении исследований в работе применялся аппарат операционного исчисления, теория устойчивости, специальные разделы интервальной математики, алгебры и математического анализа, элементы теории функций и функционального анализа. При анализе алгоритмов синтеза, свойств интервальных полиномов, моделей системы и режимов их работы использовался пакет программ Matlab .

Достоверность положений, методик, приводимых в диссертации, обеспечивается многократным моделированием получаемых результатов в пакетах Matlab, Labview, многочисленными тестовыми примерами и использованием в качестве примеров для синтеза регуляторов реально существующих объектов и моделей объектов, выбранных из других источников, а также сравнением полученных в данном исследовании результатов с результатами из этих работ.

Научная новизна. Разработана методика синтеза одно- и многоканальных линейных регуляторов пониженного порядка с сосредоточенными параметрами для систем управления с интервальными параметрами на основе диофантова уравнения (включения) с применением алгоритмов оптимизации нелинейного программирования. Использование диофантова уравнения позволяет формализовать решение данной задачи. Предлагаемая методика позволяет с помощью синтезируемого регулятора располагать полюса замкнутой интерваль-

ной системы в желаемой области, что соответствует поставленной задаче синтеза.

Из предлагаемого диссертационного исследования можно выделить следующие результаты:

- для управляемых и наблюдаемых стационарных интервальных объектов управления предложен метод синтеза регуляторов пониженного порядка, позволяющий размещать полюса замкнутой системы в заданной области;

- теорема о положительности кривизны амплитудно-фазовой характеристики (годографа Михайлова) гурвицевых полиномов распространена на интервальные полиномы;

- представлен критерий для оптимизационного синтеза, различающий D -устойчивые и D -неустойчивые передаточные функции;

- получены алгоритмы построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней;

- предложен алгоритм, устанавливающий взаимнооднозначное соответствие между множеством полиномов и множеством корней полиномов (корневым пространством \mathbf{R}^n);

- получены новые свойства интервальных липатовских полиномов;

- самостоятельным результатом является разработка алгоритма синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с постоянными параметрами.

Практическая ценность и внедрение. Разработанная методика синтеза линейных стационарных систем управления является более простой в вычислительном отношении и формализованной и позволяет получать регуляторы более низкого порядка по сравнению с существующими методами для управляемых и наблюдаемых объектов управления с интервальными параметрами. Кроме того необходимо отметить, что данная методика не требует знания внутренних переменных объекта и позволяет синтезировать регуляторы, обеспечи-

вающие не только асимптотическую устойчивость, но и желаемое качество переходных процессов в системе.

Результаты диссертационной работы были использованы:

- для решения стандартной задачи обеспечения устойчивости механической системы - двухмассовой системы, состоящей из двух масс и двух пружин, находящей своё применение в робототехнике и в проектировании виброзащитных систем;

- для расчета регулятора управления колонной синтеза аммиака на КОО «Азот»;

Также результаты исследований были отражены в двух госбюджетных отчётах по НИР по теме «Синтез многоканальных систем управления объектами с нестационарными параметрами» и в учебном процессе для проведения лабораторных работ по курсу «Теория автоматического управления».

На защиту выносятся следующие положения:

- оптимизационный алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка в корневом пространстве R^n для объектов с интервальными параметрами;

- соотношения, устанавливающие взаимнооднозначное соответствие между множеством полиномов и корневым пространством R^n полиномов;

- оптимизационный алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка на основе свойства расположения корней производного интервального полинома для объектов с интервальными параметрами;

- алгоритм поиска D -устойчивого интервального полинома на основе свойств полиномов, полученных из рассмотрения пространства коэффициентов полиномов;

- алгоритм поиска D -устойчивого интервального полинома с желаемым расположением корней на основе условий Липатова.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (Новосибирск,

1998, 2000), III Международном научно-техническом симпозиуме «KORUS'99» (Новосибирск, 1999), IV Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике «ИНПРИМ-2000» (Новосибирск, 2000), XVI конференции по интервальной математике (Новосибирск, 2000), Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» (Новосибирск, 2000), II Международной научно-технической конференции «Измерение, контроль, информатизация» (Барнаул, 2001), Научно-практическом семинаре «Проблемы синтеза и проектирования систем автоматического управления» (Новосибирск, 2001). Кроме того, материалы диссертации неоднократно обсуждались на городском научно-техническом семинаре «Проблемы синтеза систем управления» и в рамках лаборатории многоканальных систем управления на кафедре автоматики Новосибирского государственного технического университета.

Публикации. По результатам исследований автором лично и в соавторстве опубликовано 13 работ, ссылки на которые приведены в диссертации.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений. Основное содержание диссертации имеет объём ____ страниц. В приложениях приведены: список обозначений, принятых в диссертации; свойства интервальной математики, интервальных полиномов; акты о внедрении.

Во **введении** дается общая характеристика работы, обсуждается актуальность решаемых задач диссертационного исследования, аннотируются основные положения.

Первая глава посвящена аналитическому обзору существующих методик анализа и синтеза систем управления с интервальными параметрами. Раскрывается проблематика синтеза регуляторов для систем управления с интервальными параметрами. В частности уделяется внимание таким задачам как обеспечение устойчивости, D -устойчивости интервальных полиномов, построение D -устойчивых

интервальных полиномов с желаемым расположением корней. Кроме того, анализируются существующие методы синтеза регуляторов пониженного порядка. На примерах обосновывается необходимость в использовании таких регуляторов. Формулируется постановка задачи диссертационного исследования.

Во **второй главе** исследуются свойства полиномов. Рассматриваются множество полиномов, полиномы в пространстве коэффициентов, корневое пространство полиномов и с разных сторон исследуется их взаимосвязь. Рассматриваются различные варианты по установлению взаимнооднозначного соответствия между ними. Предлагается алгоритм построения корневого пространства \mathbf{R}^n . Данный алгоритм устанавливает взаимнооднозначное соответствие между пространством коэффициентов полиномов и построенным корневым пространством, что позволяет осуществлять оптимизационную процедуру перемещения корней в желаемую область непосредственно в корневом пространстве. Исходя из полученных свойств интервальных полиномов предлагается алгоритм формирования D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней, а на основе некоторых предположений - более простой способ построения интервальных D -устойчивых полиномов низкого порядка.

В **третьей главе** анализируются условия А.В. Липатова в отношении интервальных полиномов. Предлагаются новые свойства полиномов с сосредоточенными параметрами, удовлетворяющих условиям А.В. Липатова, и интервальных липатовских полиномов. Распространяются свойства области расположения корней производного полинома по отношению к области расположения корней исходного полинома на случай, когда коэффициенты полиномов заданы в интервальном виде. На основе представленных свойств предлагаются алгоритмы построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней и интервальных липатовских полиномов, которые заключаются в последовательном построении желаемого интервального полинома путем изменения его младших коэффициентов.

На основе приведенных свойств о расположении корней исходного интервального полинома и его производных, алгоритмов построения D -устойчивых интервальных полиномов, новых свойств интервальных липатовских полиномов предлагается методика синтеза регулятора пониженного порядка, располагающегося в канале обратной связи, для интервальных систем управления с малым параметром.

В **четвертой главе** исследуется свойство кривизны амплитудно-фазовой характеристики гурвицевых интервальных полиномов, позволяющее получить начальные условия для итерационной процедуры синтеза. Представлен критерий для оптимизационного синтеза регуляторов в корневом пространстве \mathbf{R}^n . Предлагается оптимизационный алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка в пространстве корней для объектов с постоянными параметрами. На примерах иллюстрируются возможности данной методики по синтезу регуляторов пониженного порядка. Кроме того, представлен алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с постоянными параметрами, когда требуется обеспечить аperiodические переходные процессы в системе. Главным результатом является оптимизационная методика синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с интервальными параметрами, которая заключается в последовательном сдвиге точки, соответствующей полиному, в выстраиваемом корневом пространстве \mathbf{R}^n в заданную область D .

Пятая глава содержит два примера синтеза систем с физическим объектом управления. Первый - обеспечение устойчивости механической двухмассовой системы, состоящей из двух пружин и двух масс. Задача заключается в необходимости уменьшения колебаний объекта, вызванных силами, возникающими в связях, соединяющих объект с источником колебаний. Вторым примером - расчет многоканального регулятора управления колонной синтеза аммиака, учитывающего существующее температурное влияние полок, неопределенность и варьирование некоторых параметров системы.

В **заклучении** перечислены основные результаты и изложены выводы по диссертационной работе.

В **приложениях** представлены: список принятых в диссертации обозначений; основные сведения о свойствах интервальной математики, интервальных полиномов, нашедших применение в данном исследовании; акты о внедрении результатов диссертационной работы.

ГЛАВА 1

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

1.1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Важность решения задачи синтеза систем автоматического управления обусловлена необходимостью поддержания заданного значения какой-либо физической величины, либо изменения её по некоторому закону в машинах, аппаратах или иных технических устройствах без непосредственного участия человека, с помощью специальных автоматических регуляторов. Увеличение сложности создаваемых в настоящее время объектов ведёт в общем случае к усложнению синтезируемых регуляторов. Практика же требует создания регуляторов как можно более простой структуры, обеспечивающих поставленные условия. Разработанные к настоящему времени алгоритмы управления не всегда отвечают этим требованиям.

Среди множества учебников, учебных пособий, монографий, посвященных проблемам, возникающим при проектировании систем автоматического управления, можно выделить работы следующих авторов: Александров А.А., Андреев А.А., Бесекерский В.А., Востриков А.С., Воронов А.А., Петров Б.Н., Попов Е.П., Смагина Е.М., Соболев О.С., Солодовников В.В., Цыпкин Я.З., Chen C.T., Desoer C.A., Kwak-

ernaak H., Rosenbrock H.H., Vidyasagar M., Wolowich W.A. [1, 3, 5, 6, 22, 24, 26, 30, 41, 45, 56, 85, 88, 103, 119, 115] и др.

Обсудим **содержание задачи синтеза** систем автоматического управления. Пусть система состоит из объекта, регулятора и преобразователя [27]

$$u = r(x, y, v); \quad x = q(u); \quad y = p(x),$$

где r , q , p - операторы, описывающие регулятор, объект, преобразователь; x , y , v , u - векторы состояния, выходных величин, задания (входных величин) и управления. Преобразователь p отражает функциональную зависимость между состоянием объекта и вектором выходных величин, доступных непосредственному измерению. Регулятор r организует управление как функцию y таким образом, чтобы имело место свойство $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0(t)$, где $y_0(t)$ - предписанное значение вектора выходных величин, определяемое вектором v и уравнениями движения системы. Под предельным соотношением понимается, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0: \|y(t) - y_0(t)\| < \varepsilon$ для $\forall t > T$.

В настоящее время достаточно полное **описание** сложных **динамических объектов управления** проводится, как правило, на языке дифференциальных уравнений [26]. Мы будем изучать управление объектами, модель поведения которых в общем случае имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u); \quad y = g(x); \quad x \in R^n; \quad u, y \in R^m,$$

где f , g - некоторые линейные функции. Задача синтеза заключается в определении управления r как функции x или y такого, чтобы поведение системы в целом отвечало технологическим требованиям. Требования к статическим характеристикам системы обычно формулируются легко, и мы специально этого вопроса касаться не будем. **Требования к динамическим свойствам системы**, как правило, формулируются на языке оценок переходных процессов во времени или в некоторых случаях задаются каким-либо критерием оптимальности процессов. Вид формализации технологических требований к

динамике системы зависит от выбранной модели объекта и предполагаемой процедуры синтеза. При применении конкретного метода синтеза переходят от оценок к одной из форм динамических характеристик системы в целом. К примеру, при синтезе систем по частотным характеристикам от оценок по быстродействию и перерегулированию переходят к желаемым характеристикам разомкнутой или замкнутой системы. При синтезе корневыми методами переходят к желаемому расположению корней характеристического уравнения системы. **Требования, предъявляемые к системам**, т.е. процессы в системе полностью можно задать следующим образом [26]:

- обеспечение желаемого дифференциального уравнения системы;
- обеспечение заданного векторного поля в пространстве состояний объекта (фазового портрета);
- формирование заданной совокупности переходных процессов;
- выполнение какого-либо критерия оптимальности вдоль переходных процессов.

В дальнейшем будем предполагать, что в качестве желаемых динамических свойств задана область расположения корней характеристического уравнения системы. Таким образом, цель синтеза - определить закон управления $u = r(t, x, v)$, обеспечивающий движение объекта в соответствии с заданной областью расположения корней характеристического уравнения.

Основная и наиболее полно разработанная структура систем автоматического управления предполагает использование рассогласования $\varepsilon = v - y$, т.е. $u = r(\varepsilon)$. Здесь и далее считаем, что векторы v и y согласованы по размерностям. Цель функционирования такой системы - ликвидация начальных рассогласований $\varepsilon(0)$, и вполне естественно использование ε в качестве входной величины для регулятора, формирующего управляющее воздействие на объект.

Как отмечалось ранее анализу и синтезу **линейных систем автоматического управления** до сих пор уделяется большое внимание.

Это связано с простотой в описании таких систем, большими наработками в области линейных дифференциальных уравнений, наличием многочисленных разработанных прикладных методов исследования и т.д.

С другой стороны в последнее время много внимания уделяется системам автоматического управления с неопределенными параметрами в частности **интервальным системам управления**. Действительно, интервальная модель динамической системы отражает реальную ситуацию с информацией о значениях ее параметров, когда априорно известны только границы диапазонов изменения тех или иных величин. Кроме того появляется все больше работ, посвященных разработке математического аппарата для таких систем.

Другой важной задачей, волнующей многих зарубежных и отечественных исследователей, является **синтез регулятора** как можно меньшего порядка (**пониженного порядка**). С практической точки зрения при прочих равных условиях, когда удовлетворяются все поставленные требования, предъявляемые к варианту решения (в данном случае к регулятору), выбирается тот вариант решения задачи, который требует меньше затрат по его внедрению.

Очень часто требования, предъявляемые заказчиком к системе автоматического управления, можно свести к расположению корней на комплексной плоскости, в пространстве корней. Соответственно в таком случае для решения поставленной задачи - синтеза регулятора, обеспечивающего расположение корней системы в желаемой области, запрашиваются варианты **модального метода синтеза**, различного рода **оптимизационные процедуры**.

Таким образом, из всего вышесказанного следуют следующее направление наших исследований: анализ и синтез линейных систем автоматического управления с интервальными параметрами, синтез регуляторов пониженного порядка с акцентом на модальные и оптимизационные методики. Решению поставленных задач в комплексе и посвящена большая часть данного исследования.

1.2. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Системам управления с неопределенными параметрами всегда уделялось большое внимание. Это связано с тем, что математические модели объектов управления не всегда точно описывают физические процессы и устройства вследствие погрешностей в измерении, потерь точности при построении модели, “старения” объектов, влияния шумов. Фактически речь идет о параметрической неопределенности объектов. Существует множество вариантов описания таких объектов, а следовательно и методов решения задач управления. Среди них можно выделить: объекты, описываемые моделями с мультилинейной параметрической зависимостью (*polynomials with multilinear parameter dependence*) [75, 78, 96]; полиномами с коэффициентами, являющимися непрерывными (линейными) функциями от переменной в каком-либо интервале¹ (*uncertain polynomials having dependent coefficients, polynomials with coefficients depend linearly on parameters* [114]); дисковыми полиномами² (*disc polynomials*); сферическими семействами полиномов³ (*spherical family of polynomials*); интервальными полиномами (*interval polynomials, uncertain polynomials, perturbed polynomials*) и др.

Наибольшее распространение получило последнее описание ввиду простоты и реальной инженерной практики. Внимание к таким системам увеличилось после появления в 1974 г. термина “**интервальная математика**” и математического аппарата, описывающего методы решения задач линейной алгебры, систем нелинейных уравнений, дифференциальных, интегральных уравнений и т.д.

Как и обычные системы управления, интервальные системы описываются дифференциальными или разностными уравнениями, при этом коэффициенты уравнений являются интервальными числами. Фактически интервальная модель динамической системы отражает ре-

1 Djafaris T.E., Hollot C.V. *Parameter partitioning via shaping conditions for the stability of families of polynomials* // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1989. - V. 34, № 11. - P. 1205-1209.

Wei K.H., Yedavalli R.K. *Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients* // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1987. - V.32, № 11. - P. 907-909.

2 Chapellat H., Bhattacharyya S.P., Dahleh M. *Robust stability of a family of disc polynomials* // Int. J. Contr. - 1990. - V. 51, № 6. - P. 1353-1362.

3 Barmish B.R., Tempo R. *On the spectral set for a family of polynomials* // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1991. - V.36, № 11. - P. 111-115.

альную ситуацию, когда известны только границы диапазонов изменения тех или иных величин.

Задача синтеза систем автоматического управления неразрывно связана с анализом этих систем. Для систем управления с интервальными параметрами задача анализа имеет еще большее значение ввиду отсутствия в интервальной математике свойств, характерных для математики вещественных чисел [40, 71, 94, 95, 97] (см. Приложение 1). Из всего набора вопросов, рассмотрим только те, которые будут нам необходимы непосредственно при решении задачи синтеза.

Так как в дальнейшем будет рассматриваться модальная методика синтеза систем управления, уделим бóльшее внимание анализу **интервальных полиномов**. Интервальная неопределенность систем может пониматься двояко, в соответствии с двойственным характером понимания самих интервалов. С одной стороны, интервал $[a'_i, a''_i]$ может представлять собой множество всех вещественных чисел от a'_i до a''_i , а с другой - быть лишь вместилищем, указателем границ для какого-то, хотя бы одного значения между a'_i и a''_i [71]. В данном исследовании используется именно первое понимание интервала. Введём следующее

Определение 1.1. *Интервальным полиномом называется полином, коэффициенты которого могут независимо принимать любые значения из заданных интервалов.*

Следовательно, если

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (1.1)$$

- интервальный полином, то

$$a_i \in [a'_i, a''_i], \quad 0 < a'_i \leq a''_i, \quad i \in \overline{\{0, n-1\}}. \quad (1.2)$$

Как известно, для того чтобы характеристический полином

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0,$$

где $a_i \in \mathbf{R}$, $i \in \overline{0, n-1}$ был устойчивым, необходимо и достаточно чтобы все его корни располагались в открытой левой комплексной полуплоскости - \mathbf{C}_-^0 .

Тогда условия устойчивости интервального полинома принимают следующий вид: интервальный полином, удовлетворяющий условиям (1.2), будет устойчивым, если корни этого полинома при любых сочетаниях коэффициентов a_i из интервала $[a_i', a_i'']$ будут располагаться в левой половине комплексной плоскости.

Важнейшие результаты в области анализа систем управления с интервальными параметрами, определяющие необходимые и достаточные условия устойчивости таких систем, были получены В.Л. Харитоновым [63].

Теорема 1.1 (Первая теорема Харитонова [63]).

Для того чтобы $\Gamma^n \subset G^n$, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma_1^n \subset G^n$.

Здесь G^n - множество всех устойчивых полиномов с коэффициентами - вещественными числами, Γ^n - семейство всех полиномов с коэффициентами, удовлетворяющими (1.2), а Γ_1^n - семейство тех полиномов из Γ^n , у которых каждый коэффициент a_i , $i \in \overline{0, n-1}$ равен либо a_i' , либо a_i'' .

Иными словами, интервальный полином устойчив, если устойчивы “угловые” полиномы⁴, т.е. полиномы, коэффициенты которых принимают значения, равные “концам” интервалов.

Вторая теорема Харитонова дает более строгие условия, показывающие, что для устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно, чтобы были устойчивыми четыре специальным образом сформированных полинома.

⁴ В некоторых работах [101, 112] такие полиномы называют *вершинными* (vertex polynomials), в некоторых - *граничными* [111] (bounding polynomials, edge polynomials), в других - *угловыми, экстремальными* (extreme polynomials) или *крайними* [10, 74, 99].

Теорема 1.2 (Вторая теорема Харитонова [63]).

Для того чтобы $\Gamma_1^n \subset G^n$, необходимо и достаточно, чтобы четыре полинома $f_i(s)$, $i \in \overline{1, 4}$ из Γ_1^n вида

$$f_1(s) = a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + a''_{n-2} s^{n-2} + a''_{n-3} s^{n-3} + a'_{n-4} s^{n-4} + \dots; \quad (1.3)$$

$$f_2(s) = a''_n s^n + a''_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + a'_{n-3} s^{n-3} + a''_{n-4} s^{n-4} + \dots; \quad (1.4)$$

$$f_3(s) = a'_n s^n + a''_{n-1} s^{n-1} + a''_{n-2} s^{n-2} + a'_{n-3} s^{n-3} + a'_{n-4} s^{n-4} + \dots; \quad (1.5)$$

$$f_4(s) = a''_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + a''_{n-3} s^{n-3} + a''_{n-4} s^{n-4} + \dots \quad (1.6)$$

принадлежали G^n .

Эти условия устойчивости автором были распространены и для случая, когда интервальные полиномы имеют комплексные коэффициенты⁵. Дальнейшие исследования показали, что для интервальных характеристических полиномов низкого порядка условия устойчивости, заданные в теореме, несколько избыточны [66, 76, 77]. Более подробно эти условия представлены в Приложении 1.

Необходимо отметить, что если коэффициенты интервального полинома являются зависимыми (*polynomials with multilinear parameter dependence, uncertain polynomials having dependent coefficients*), то количество вершинных полиномов, необходимых для установления устойчивости может быть уменьшено⁶. Различного рода вариантам доказательств теорем Харитонова и условий устойчивости (*гурвицевости*) интервальных полиномов низкого порядка посвящено достаточ-

5 Харитонов В.Л. К проблеме Рауса-Гурвица для семейства полиномов // Проблемы устойчивости движения аналитической механики и управления движением. - Новосибирск: Наука, 1979. - С. 106-111.

6 Wei K.H., Yedavalli R.K. Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1987. - V. 32, № 10. - P. 907-909.

Pujara L.R. On the stability of uncertain polynomials with dependent coefficients // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 6. - P. 756-759.

но большое количество работ⁷ как и разработке для них необходимых и достаточных условий устойчивости в частотной области⁸, но ввиду отсутствия необходимости здесь они не приводятся.

Необходимые и достаточные условия устойчивости интервальных полиномов, полученные Харитоновым и другими авторами [64, 76, 120], сыграли большую роль в развитии анализа и синтеза систем управления с интервальными параметрами. Но для синтеза важным является не только обеспечение устойчивости, но и удовлетворение заданных требований к качеству переходных процессов в системе, определенному расположению корней на комплексной плоскости и т.д. Поэтому в дальнейшем многие исследователи пытались обобщить теоремы Харитонова для интервальных полиномов с корнями в определенной подобласти на комплексной плоскости (*харитоновские области*).

Так как коэффициенты интервальных полиномов варьируются в пределах заданных границ, расположение корней таких полиномов также не является точным, а изменяется в зависимости от значений коэффициентов. Поэтому для интервальных систем управления можно воспользоваться понятием ***D*-устойчивости**⁹.

Определение 1.2. *Линейная динамическая система считается D-устойчивой, если все корни ее характеристического полинома локализованы в заданной области D комплексной плоскости.*

⁷ Ахмеджанов Ф.М., Крымский В.Г., Гляшов Р.З., Чельшев С.Ю. *Об устойчивости динамических систем с интервальными характеристическими полиномами* - Деп. в ВИНТИ. - 1989. - № 7505-B89.

Yeung K.S., Wang S.S. *A simple proof of Kharitonov's theorem* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1987. - V. 32, № 9. - P. 822-823.

Chapellat H., Bhattacharyya S.P. *An alternative proof of Kharitonov's theorem* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1989. - V. 34, № 4. - P. 448-450.

⁸ Argoun M.B. *Allowable coefficient perturbations with preserved stability of a Hurwitz polynomial* // Int. J. Contr. - 1986. - V. 44, № 4.

Argoun M.B. *Stability of a Hurwitz polynomial under coefficient perturbations: necessary and sufficient conditions* // Int. J. Contr. - 1987. - V. 45, № 2.

Argoun M.B. *Frequency domain conditions for the stability of perturbed polynomials* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1987. - V. 32, № 10.

⁹ В некоторых источниках области расположения корней, удовлетворяющие определению 1.2 называют областями *относительной устойчивости* [30, 67], в других - областями *D-устойчивости* [20,103,101,50,81], в третьих - используется термин *робастной устойчивости* (*robust stability*) [105,103].

В частном случае область D может быть замкнутой. Расположение корней интервальной системы в той или иной области на комплексной плоскости характеризует качество процессов, протекающих в системе.

Введем определение харитоновской области. Обозначим семейство интервальных полиномов следующим образом

$$S^n = \left\{ f(s): f(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i; a'_i \leq a_i \leq a''_i, \forall i \right\}, \quad (1.7)$$

тогда множество всех вершинных полиномов

$$V_s^n = \left\{ f(s): f(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i; \alpha_i \in \{a'_i, a''_i\}, \forall i \right\}. \quad (1.8)$$

Пусть D - односвязная область на комплексной плоскости C и пусть H_D - множество всех полиномов с корнями внутри D . Тогда любой полином $f(s) \in H_D$ будет D -устойчивым.

Определение 1.3 [112]. Область $D \subset C$ называется харитоновской если и только если при $V_s^n \subset H_D$ семейство $S^n \subset H_D$.

Таким образом, **харитоновскую область** можно определить как область устойчивости, о расположении корней всего семейства интервальных полиномов внутри которой, можно судить по всем его вершинным полиномам.

Рассмотрим **условия D -устойчивости** интервальных полиномов для некоторых частных случаев. Пусть область имеет вид левого сектора, ограниченного дугой и двумя радиусами и лежащего либо только в левой полуплоскости, либо только в правой. Тогда справедлива следующая

Теорема 1.3 [105]. Для того чтобы $S^n \subset H_D$ необходимо и достаточно чтобы $V_s^n \subset H_D$.

Во многих случаях необходимо, чтобы система была *апериодической*, т.е. чтобы все корни характеристического полинома были вещественными и отрицательными. Поэтому далее в [105] доказывается

аналогичная теорема для харитоновской области в виде вырожденного эллипса, который охватывает только линейный сегмент $\sigma \leq x \leq \tau < 0$; $y = 0$. В [66, 74, 90-92, 101, 110, 112] приводятся различные варианты теоремы 1.3 и примеры областей, для которых они выполняются.

Однако для установления D -устойчивости интервального полинома необходимо проверить 2^{n+1} вершинных полинома, что несколько трудоемко особенно для полиномов высоких порядков. Вследствие этого, многие ученые пытались найти условия, сходные с результатами, отраженными в теореме 1.2, для харитоновских областей т.е. чтобы о D -устойчивости интервального полинома (1.7) можно было судить по конечному подмножеству множества вершинных полиномов (1.8), либо построить алгоритмы, упрощающие эту процедуру [82, 113, 114]. Эти условия, имеющие важное значение для решаемой в дальнейшем задачи синтеза, приведены в Приложении 1.

Интересный подход предложен Mori T. и Kokame H. [99], который устанавливает, что интервальный полином

$$f(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1.9)$$

где $c_i \leq a_i \leq d_i$, $i = 1, \dots, n$, является апериодическим, если четыре специальным образом сформированных полинома порядка $2n$ устойчивы (см. Приложение 1).

Другой важной задачей анализа систем управления с интервальными параметрами является **построение интервального полинома** по заданному расположению корней, отвечающему заданным требованиям. Вследствие определенных свойств интервальной арифметики [40] построить интервальный полином, точно соответствующий желаемой области расположения корней, в общем случае невозможно. При использовании правил классической интервальной арифметики получается интервальный полином с областью расположения корней, накрывающей желаемую. Поэтому ставится задача найти такой интервальный полином, область расположения корней которого находилась бы внутри желаемой и максимально приближалась к ней. Исследова-

тели данную задачу решают на основе различных условий устойчивости, положений, выведенных из рассмотрения пространства параметров, позволяющие формировать интервальные полиномы с желаемым расположением корней [66, 79, 81, 104, 106, 107, 109, 114] и т.д. Согласно одному из таких подходов [36, 67] в интервальном полиноме

$$b(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n \quad (1.10)$$

производится замена s на $(s + \eta)$, где η , - показатель степени устойчивости; ξ - показатель быстродействия (рис.1.1). Аналогично операции смещения для полиномов с *сосредоточенными параметрами*¹⁰ [61] формируется смещенный интервальный полином

$$b^*(s) = b_0^* s^n + b_1^* s^{n-1} + \dots + b_n^*,$$

где

$$b_i^* = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_{n-k}^{i-k} \eta^{i-k} b_k, \quad i \in \overline{\{0, n\}} \quad (1.11)$$

C_{n-k}^{i-k} - число сочетаний из $(n-k)$ элементов по $(i-k)$. С помощью замены $s = jze^{-j\varphi}$, где j - мнимая единица; z - вспомогательная переменная, из (1.11) можно получить преобразованный интервальный полином в котором

$$b_i^{**} = j^{n-i} e^{-j(n-i)\varphi} b_i, \quad i \in \overline{\{0, n\}}. \quad (1.12)$$

Другой способ построения интервального полинома с желаемым расположением корней основан на достаточных условиях расположения корней в заданном секторе, полученных А.В. Липатовым [43,44]. В интервальной постановке эти условия выглядят следующим образом:

¹⁰ Для различия в работах, посвящённых анализу и синтезу систем управления с интервальными параметрами, полиномы, коэффициенты которых являются постоянными вещественными числами, авторы называют либо *полиномами с сосредоточенными параметрами*, *сосредоточенными постоянными параметрами* (Ефанов В.Н., Гусев В.М., Рутковский В.Ю.) [30], либо *полиномами с точечными параметрами* (Моисеев А.Н., Шашихин В.Н.) [47, 60, 72], либо *полиномами с постоянными, действительными параметрами* (Смагина Е.М., Дугарова И.В., Хлебалин Н.А.) [58, 59, 64, 65, 67].

$$\frac{a'_i}{a''_{i-1}a''_{i+1}} \geq \delta^*, \quad i \in \overline{1, (n-1)}, \quad (1.14)$$

где a'_i, a''_i - границы интервального коэффициента a_i ; δ^* - действительная функция, зависящая от степени полинома n и угла φ , значения которой выбираются по номограммам [66]. Если эти условия выполняются, то корни полинома расположены внутри заданного сектора.

Некоторыми авторами использовался несколько другой подход, когда условия задачи предполагают наличие устойчивого полинома с определенными номинальными значениями коэффициентов и необходимо найти максимально возможные возмущения δ_i для каждого коэффициента, при которых свойства получаемого интервального полинома остаются неизменными [79, 81, 104, 109]. На основе приводимых автором теорем δ_i находится из условий, построенных для каждого из четырех харитоновских полиномов (1.3,1.4,1.5,1.6) с использованием матриц Вандермонда.

1.3. О СИНТЕЗЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Несмотря на то, что в последнее время синтезу систем управления с интервальными параметрами уделялось большое внимание и вследствие этого количество работ, связанных с этой задачей постоянно увеличивалось, основные группы методов синтеза систем еще не сформировались. Условно все методики синтеза систем управления с интервальными параметрами можно разделить на следующие группы [30]:

- методы, основанные на применении аппарата функций чувствительности, построении структур, допускающих неограниченное увеличение коэффициентов усиления, а также на других классических подходах [35, 69];

- частотные методы синтеза систем управления с интервальными параметрами;
- модальные методы синтеза;
- методы синтеза оптимальных робастных регуляторов;
- методы синтеза, основанные на применении функций Ляпунова;
- методы, ориентированные на синтез многоуровневых систем¹¹.

К синтезу систем управления с интервальными параметрами могут быть применены некоторые классические подходы, в частности алгоритмы управления, предназначенные для систем с бесконечными коэффициентами усиления, которые инвариантны к параметрическим возмущениям¹². Кроме того, при создании структур с большими коэффициентами может использоваться аппарат исследования устойчивости интервальных систем¹³. При синтезе линейных интервальных динамических систем управления, вероятно, могут быть использованы и другие методики в частности адаптивное управление¹⁴. В дальнейшем остановимся на тех подходах, которые получили наибольшее развитие.

Синтез систем управления с интервальными параметрами на основе частотных характеристик базируется на установлении связи между свойствами разомкнутой и замкнутой систем.

В [87] передаточная матрица $G_p(s)$ разомкнутой m -мерной системы представляется в виде $G_p(s) = G(s) + \Delta(s)$, где $G(s)$ - передаточная матрица с “номинальными” параметрами; $\Delta(s)$ - матрица, дробно-рациональные элементы которой содержат неопределенные

11 Chen Y.H. *Decentralized robust control systems and estimated state-feedback controls for large-scale uncertain systems* // Int. J. Contr. - 1987. - V. 46, ¹ 6.

Chen Y.H. *Decentralized robust control systems design for large-scale uncertain systems* // Int. J. Contr. - 1987. - V. 47, ¹ 5.

Wang W.-J., Chen C.-F. *Robustness of perturbed large-scale systems with local constant state feedback* // Int. J. Contr. - 1989. - V. 50, ¹ 1.

12 Уланов Б.В. *Управление динамическими системами при неполной информации об их параметрах, состоянии и размерности* // ДАН СССР. - 1989. - Т. 308, № 4.

13 Лозинский Л.Д., Мееров М.В. *Синтез одного класса САУ с жесткой структурой, обладающего адаптивными свойствами (1-3 части)* // Автоматика и телемеханика. - 1986. - № 9,10,11.

14 Пылаев Н.К., Ядыкин И.Б. *Интервальные алгоритмы адаптивного управления с неявной эталонной моделью* // Автоматика и телемеханика. - 1989. - № 6.

коэффициенты. Указывается, что собственные числа матрицы \mathbf{G}_p содержатся внутри окружностей на комплексной плоскости с центрами в $\lambda(\mathbf{G}_n)$ и с радиусами $\delta + \varepsilon$, где $\varepsilon = \sigma_{\max}(\mathbf{E})$; \mathbf{E} - матрица погрешностей. Кроме того, собственные числа матрицы \mathbf{G}_p содержатся в объединении $N(\mathbf{G}, \delta)$ кругов радиусов δ с центрами в граничных точках множества $N(\mathbf{G})$. Для различных значений $0 \leq \omega < \infty$ на комплексной плоскости находятся пересечения областей - лент, границы которых являются огибающими для отмеченных областей и которые включают собственные числа матрицы \mathbf{G}_p . Далее синтез робастных регуляторов осуществляется исходя из требований и запасов устойчивости аналогично тому, как это делается для систем с сосредоточенными параметрами при использовании критерия Найквиста.

Замечание 1.1. Методы синтеза основанные на использовании частотных характеристик в общем случае применимы только для ограниченного класса объектов управления - минимально-фазовых. Кроме того методики трудно распространяемы на многоканальные системы.

Модальные методы синтеза систем управления с интервальными параметрами применяются в случае, когда необходимо учесть интервальную неопределенность объекта и найти интервальные либо сосредоточенные коэффициенты уравнения регулятора [31, 47, 58-60, 68, 86]. В такой ситуации находит применение интервальный характеристический полином замкнутой системы [65, 67]. Вначале формируется желаемый интервальный характеристический полином замкнутой системы [66, 79, 81, 104, 106, 107, 109, 114]. После этого осуществляется приближение корней интервального полинома линейной интервальной динамической системы к желаемым корням.

В [68] объект задан системой уравнений в сосредоточенных параметрах $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, где $\mathbf{x} = \|x_i\|_{n \times 1}$ - n -мерный вектор координат состояния; u - скалярное управление. Ведется поиск вектора $\mathbf{k} = \|k_i\|_{n \times 1}$ стабилизирующего управления $u = \sum_{i=1}^n k_i x_x$, с максимально возмож-

ными допусками таким образом, чтобы при любых $k_i \in [k'_i, k''_i]$ коэффициенты характеристического полинома системы не имели значений, выходящих за соответствующие интервалы для коэффициентов желаемого интервального характеристического полинома замкнутой системы (ХПЗС).

Приближение коэффициентов характеристического полинома системы и желаемого характеристического полинома обеспечивается в результате решения уравнений $\mathbf{P}\mathbf{k}^T + \mathbf{d} = \Delta$, где \mathbf{P} - числовая матрица, значения элементов которой зависят от коэффициентов матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} ; \mathbf{d} - вектор коэффициентов характеристического полинома объекта, Δ - интервальный вектор коэффициентов желаемого характеристического полинома системы.

Синтез интервального регулятора заключается в решении задачи линейного программирования [71]

$$J = \sum_{i=1}^n (k'_{i\max} - k'_{i\min} + k''_{i\min} - k''_{i\max}),$$

где $k'_{i\max}$, $k'_{i\min}$, $k''_{i\min}$, $k''_{i\max}$ - вспомогательные переменные, с учетом некоторых ограничений.

Замечание 1.2. Представленная методика модального синтеза систем управления предполагает знание вектора состояния, что не всегда возможно. Вследствие этого возникает необходимость в построении наблюдателя (дифференцирующего фильтра) для оценки вектора состояния. В результате порядок регулятора не может быть меньше порядка объекта. Этим свойством обладают и методики представленные в [31, 34, 47, 60, 58, 68].

Алгоритмы синтеза модального управления для многосвязных ЛИДС предлагаются в [58, 59], где модель объекта представляется как $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} - интервальные матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times r)$ соответственно. Управление вводится в виде линейной обратной связи по состоянию $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ с $(r \times n)$ - матрицей числовых коэффициентов усиления. Требуется определить матрицу \mathbf{K} такую, что-

бы закон управления обеспечил расположение коэффициентов характеристического полинома замкнутой интервальной системы $\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})x$ внутри заданных диапазонов, гарантирующих асимптотическую устойчивость системы. Процедура начинается с поиска матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$, при которой система

$$\dot{x} = \hat{\mathbf{A}}x + \mathbf{B}v, \quad (1.15)$$

где $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}$, допускает скалярное управление. Матрица \mathbf{K} вычисляется из $\mathbf{K} = \mathbf{qk}$, где \mathbf{q} - произвольный n -мерный числовой вектор, при котором в системе (1.15) возможно снижение размерности вектора управления до единицы. Этот подход также применен к системам с пропорционально-интегральным регулятором в обратной связи [34].

Похожие результаты получены в [39], где подробно исследуются особенности решения системы линейных интервальных алгебраических уравнений для приближения интервального характеристического полинома замкнутой системы к желаемому полиному. При этом здесь используется как интервальная модель системы, так и интервальная модель объекта.

Замечание 1.3. *Методика, представленная в [58, 59], предлагает строго ограниченный набор законов управления (пропорциональный либо пропорционально-интегральный) и, кроме того, как и в предыдущей требует знание вектора состояния. В [48] формируется закон управления, обеспечивающий всего лишь устойчивость системы или расположение корней системы в строго определенной области [36], накладывающей жесткие требования на регулятор.*

Некоторые авторы желаемого расположения корней добиваются, оперируя с передаточными функциями и используя теоремы Харитонова [36]. В данном случае рассматривается многосвязная система, заданная уравнениями $y(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{W}(s) \mathbf{E}(s)$; $\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s) - y(s)$, где $y(s) = \|y_i(s)\|_{M \times 1}$, $\mathbf{G}(s) = \|G_i(s)\|_{M \times 1}$, $\mathbf{E}(s) = \|E_i(s)\|_{M \times 1}$ - M -мерные векторы изображений по Лапласу управляемых координат, задающих воздействий и ошибок управления; $\mathbf{H}(s) = \|H_{ij}(s)\|_{M \times M}$;

$\mathbf{W}(s) = \|W_{ij}(s)\|_{M \times M}$ - передаточные матрицы многосвязного объекта и многосвязного регулятора. Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя дробно-рациональной функции $H_{ij}(s)$ являются интервальными.

Далее строится последовательность операций, позволяющих на основе информации о $\mathbf{W}(s)$ и интервальных параметрах объекта получить $B(s)$ как числитель определителя $\det\{\mathbf{I} + \mathbf{H}(s)\mathbf{W}(s)\}$. На основе вектора $\mathbf{B}^0 = \|B(s_1), B(s_2), \dots, B(s_{n+1})\|^T$, построенного по значениям $s = s_j, j \in \overline{1, (n+1)}$, формируется система линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами $\mathbf{F}\mathbf{b}^0 = \mathbf{B}^0$, где $F = \|F_{ij}\|_{(n+1) \times (n+1)}$ - матрица с действительными элементами $F_{ij} = s_i^{n+1-j}, i \in \overline{1, (n+1)}$; \mathbf{b}^0 - вектор искомых коэффициентов интервального полинома $B(s)$.

Искомые параметры регулятора определяются на основе совместного решения неравенств и уравнений, полученных из второй и третьей (обобщенной) теоремы В.Л. Харитонова, для “смещенного” и преобразованного полиномов.

Рассмотренный подход распространяется и на синтез многоуровневых управлений для моделей децентрализованных систем.

Замечание 1.4. Данная методика предполагает использование желаемого интервального характеристического полинома системы, построенного по алгоритму из [36], что уже накладывает ограничения на свойства системы.

Методика синтеза на основе оптимизации функционалов качества имеет место в [118], где система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(q))\mathbf{x} + (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}(r))\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x},$$

где \mathbf{x} - n -мерный вектор координат состояния; \mathbf{u} - m -мерный вектор управления; \mathbf{q} и \mathbf{r} - векторы неопределенных параметров размерности v и s ; \mathbf{A} и \mathbf{B} - числовые матрицы, характеризующие номинальное со-

стояние объекта; $\Delta \mathbf{A}(q(t))$, $\Delta \mathbf{B} = \Delta \mathbf{B}(r(t))\mathbf{u}$ - матрицы, позволяющие учитывать неопределенности параметров объекта; $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)$ - кусочно-непрерывная и равномерно ограниченная на отрезке $[t_0, T]$ матричная функция. Требуется найти $\mathbf{K}(t)$, чтобы обеспечивалась оптимальность системы, используя для оценки ее свойств квадратичный функционал

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, t_0) = \int_{t_0}^T [\mathbf{x}^\tau \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\tau \mathbf{R} \mathbf{u}] dt + \mathbf{x}^\tau(T) \mathbf{S} \mathbf{x}(T),$$

где τ - знак транспонирования; \mathbf{Q} , \mathbf{S} - положительно-полуопределенные матрицы; \mathbf{R} - положительно-определенная матрица.

С учетом теоремы, приведенной в [118], разрабатывается процедура получения $\mathbf{K}(t)$, обеспечивающей минимум верхней границы для $J(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, t)$ при учете ограничений, вытекающих из требований асимптотической устойчивости синтезируемой системы.

В [100] в продолжение этого подхода в качестве минимизируемого функционала используется несобственный интеграл

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^\tau \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\tau \mathbf{R} \mathbf{u}] dt. \quad (1.16)$$

Автором предполагается, что для системы с сосредоточенными параметрами минимум J (1.16) достигается при следующем законе управления: $\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\tau \mathbf{P} \mathbf{x}$, где \mathbf{P} - положительно-определенная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\mathbf{A}^\tau \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\tau \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0.$$

В [89] авторы для решения задачи синтеза используют утверждение, приведенное в [80] идентичное первой теореме Харитоновой [63]. Объект описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)$ - n -мерный вектор фазовых координат; $\mathbf{u}(t)$ - m -мерный вектор управления; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} - интервальные матрицы. Далее утверждается, что существует некоторое номинальное состояние объекта, для которого

эти матрицы приобретают вид \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{C}_0 с сосредоточенными параметрами. Необходимо найти матрицу \mathbf{K} обратных связей, стабилизирующих систему.

Процедура поиска заключается в следующем: для \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{C}_0 ведется поиск матрицы \mathbf{K}_0 , обеспечивающей минимум функционала (1.16). На данной совокупности ограничений минимизируется норма η разности $\mathbf{K}-\mathbf{K}_0$. Найденные таким образом управления являются субоптимальными для любого сочетания параметров объекта, отличного от номинального.

Замечание 1.5. В большинстве случаев для конструирования регуляторов требуется знание вектора состояния объекта управления (уравнение Рикатти), что часто не имеет места на практике. Поэтому приходится говорить лишь о приближённой реализации полученных условий оптимальности. Кроме этого некоторые из методик обеспечивают только асимптотическую устойчивость системы, не удовлетворяя требований к качеству.

В [99] ведется поиск обратной связи, с помощью которой осуществлялась бы **робастная стабилизация, на основе аппарата функций Ляпунова** в условиях ограничений. Система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(q(t)))\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{y}(t) = -\mathbf{c}\mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)$ - n -мерный вектор координат состояния; $\mathbf{q}(t)$ - вектор неопределенных параметров; $\Delta \mathbf{A}(q(t))$ - непрерывная матричная функция. В дальнейшем предполагается, что управление $\mathbf{u}(t) = -\gamma \Omega^\tau \mathbf{y}(t)$ при достаточно большом $\gamma > 0$ гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Предположение обосновывается на исследовании функции Ляпунова вида $V_c = \mathbf{x}^\tau \mathbf{P}_c \mathbf{x}$, где $\mathbf{P}_c = \mathbf{\Pi}^\tau$; $\mathbf{\Pi}$, \mathbf{Q} - матрицы размером $(n \times n)$ и $(k \times l)$ соответственно, которые необходимо найти.

Некоторыми авторами данный подход развивается к системам, динамика которых описывается уравнениями¹⁵

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^p r_i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t), \quad (1.17)$$

где $\mathbf{r}(t)$ - p -мерный вектор неопределенных коэффициентов, которые принимают значения из ограниченного множества \tilde{R} . Управление имеет вид $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$, где \mathbf{K} - подлежащая определению матрица.

В работе утверждается, что система (1.17) будет стабилизируемой при выборе $\mathbf{K} = -\gamma \mathbf{B}_0^T \mathbf{S}^{-1}$, где \mathbf{S} - положительно-определенная симметричная матрица; γ - достаточно большой положительный скаляр. Отмеченный вывод обосновывается с помощью формирования квадратичной функции Ляпунова $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}$.

Замечание 1.6. *Использование аппарата функций Ляпунова для синтеза систем управления с интервальными параметрами ограничивается только обеспечением устойчивости систем и не затрагивает проблем задания желаемого уровня робастного качества управления как то: перерегулирование, время переходных процессов, статическая ошибка, предъявляемых к системам.*

1.4. О СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Желание улучшить свойства системы, упростить процедуру подстройки регулятора под конкретный объект и повысить надёжность функционирования системы приводит к задаче синтеза регуляторов пониженного порядка (*low-order*). Видимо, именно поэтому инженерная практика старается “отбирать” из большого количества законов управления наиболее простые.

¹⁵ **Hollot C.V.** *Bound invariant Lyapunov functions: a means for enlarging the class of stabilisable uncertain systems* // Int. J. Contr. - 1987. - V. 46. - 1 1.

Определение 1.4 [46]. Регулятором пониженного порядка будем называть регулятор, коэффициентов которого не достаточно для произвольного назначения всех полюсов замкнутой системы.

Таким образом под понижением порядка понимается понижение степени числителя и знаменателя регулятора по сравнению с классическими методами без заметного ухудшения динамических свойств замкнутой системы.

Большое количество работ по проблеме синтеза регуляторов пониженного порядка для систем автоматического управления свидетельствует об актуальности такой постановки задачи. Проведем краткий обзор наиболее распространенных методов синтеза систем управления и попытаемся определить возможность синтеза регуляторов пониженного порядка. При **модальном синтезе в пространстве состояния** задан стационарный линейный управляемый и наблюдаемый объект управления P n -го порядка

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx. \quad (1.18)$$

Цель задачи синтеза - расположить полюса замкнутой системы в желаемых точках комплексной плоскости. Если вектор состояния x полностью доступен для измерения выбирается управление вида $u = Kx$. Характеристический полином замкнутой системы определяется выражением $\det(sI - A - BK)$. Зададим желаемое расположение полюсов замкнутой системы в виде собственных значений некоторой матрицы A^* . Приравнивая почленно два уравнения имеем, n соотношений для n коэффициентов матрицы K

$$\det(sI - A - BK) = \det(sI - A^*). \quad (1.19)$$

Отметим, что для упрощения решения (1.19) описание объекта управления удобно привести к известному каноническому виду [25, 85].

Замечание 1.7. Таким образом, если вектор состояния x наблюдаемого и управляемого объекта управления (1.18) доступен для измерения, то для любого наперед заданного расположения полюсов

замкнутой системы поставленная задача синтеза всегда решается с помощью статического регулятора K .

Если вектор x не доступен измерению, что практически всегда имеет место, то в систему предлагается дополнительно вводить некоторое динамическое звено, призванное оценивать вектор состояния, которое принято называть наблюдателем [25, 30, 85, 103].

Наблюдатель состояния полной размерности (*full-dimensional state estimator*) [25, 85, 103] может выглядеть так

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}); \quad \hat{y} = C\hat{x}.$$

Понятно, что чем точнее модель описывает объект, тем точнее производится оценка вектора состояния. Матрица L введена для того, чтобы обеспечить оценку при неустойчивом объекте и отработать разницу в начальных условиях между $x(0)$ и $\hat{x}(0)$. Если объект наблюдаем, то матрица L всегда существует [26].

Рассмотрим объект управления (1.18), где A , B и C имеют размерности $n \times n$, $n \times r$ и $q \times n$ соответственно. Полагаем, что $\text{rank } C = q$. Введём $P = [C \quad R]^T$, где R - вещественная матрица размерностью $(n-q) \times n$ такая, что P - невырожденная.

Вычислим обратную матрицу Q такую, что

$$I_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\bar{x} = Px$, тогда

$$\dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x} + PBu; \quad y = CP^{-1}\bar{x} = CQ\bar{x} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x}$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u;$$

$$y = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{x}_1,$$

где \bar{x}_1 содержит первые q элементов вектора \bar{x} . Исходя из того, что $y = \bar{x}_1$, необходимо наблюдать только $n-q$ последних элементов век-

тора \bar{x} . Таким образом, достаточно иметь наблюдатель состояния размерности $n-q$. Отметим, что такой наблюдатель называют наблюдателем состояния пониженной размерности (*reduced-dimensional estimator*) [85, 103].

Замечание 1.8. Таким образом, если вектор состояния x наблюдаемого и управляемого объекта управления (1.18) недоступен для измерения, то для любого наперёд заданного расположения полюсов замкнутой системы поставленная задача синтеза всегда решается с помощью регулятора $n-q$ -порядка.

При синтезе систем по логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам (ЛАЧХ) [6, 30] порядок регулятора зависит лишь от того, насколько ЛАЧХ объекта управления соответствует желаемой ЛАЧХ $L_c \approx L_d - L_p$, где L_c - ЛАЧХ регулятора; L_d - желаемая ЛАЧХ разомкнутой системы (определяется из требований к качеству переходных процессов в системе); L_p - ЛАЧХ объекта управления, и от искусства и опыта конструктора сделать порядок регулятора наименьшим.

Замечание 1.9. Стоит отметить, что данный алгоритм синтеза применим только к минимально-фазовым объектам и трудно распространяем на многоканальные системы.

При оптимальном синтезе системы автоматического управления должен быть выбран критерий, которой бы обеспечивал наилучшие качества системы в определённом смысле оптимальности, в виде некоторого функционала [6, 32, 33, 41] Часто критерий оптимальности задаётся в виде положительно определённые квадратичные формы от векторов состояния и управления. Отметим, что для линейных систем и функционала качества специального вида

$$I = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T P u) dt ,$$

где $x^T Q x$ и $u^T R u$ - положительно определённые квадратичные формы, решение задачи оптимального управления сводится к решению так называемого уравнения Рикатти, которое является в общем случае нелинейным.

Замечание 1.10. В большинстве случаев результаты, полученные при конструировании регуляторов, не могут быть реализованы точно вследствие необходимости использования вектора состояния.

При поливекторном синтезе¹⁶ рассматривается следующая система уравнений поливекторной модели $d = \sum_{i=1}^p R_i (\Lambda_i K)^h$, где $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ - задаваемый вещественный вектор; R_i - известные вещественные матрицы размером $n \times (C_m^i C_p^i)$, характеризующие объект управления; $(\Lambda^i K)^h$ - неизвестный вектор, характеризующий регулятор; K - искомая матрица обратной связи размером $m \times p$.

В процессе синтеза с помощью введения новой системы координат по исчислению Грассмана получается система алгебраических уравнений в новых переменных $w = \sigma + \sum R_i (\Lambda^i K)^h$, где w - вектор, зависящий от желаемых полюсов замкнутой системы; σ - вектор, зависящий от полюсов объекта. Размерность этой системы зависит только от числа входов и выходов системы управления и не зависит от n . Анализ такой модели гораздо более трудоёмок, чем в традиционных описаниях, и необходимо иметь некоторую численную процедуру для решения задачи синтеза в поливекторных моделях.

Замечание 1.11. Алгоритм может завершиться в некоторой точке локального минимума целевой функции F , не являющейся решением системы уравнений задачи синтеза. Данная задача синтеза решается если выполняется условие разрешимости, приводимое в источнике, однако в это уравнение входит неизвестная матрица K , ко-

¹⁶ Белозеров В.Е. Об одном подходе к решению проблемы синтеза статической и динамической обратной связи для линейных систем управления // Автоматика и телемеханика. - 1992. - № 2. - С. 67-76.

торая должна иметь какую-то специальную структуру. Выбор же такой структуры не оговорён.

Некоторыми авторами для решения данной задачи используются **методы оптимизации**¹⁷. Предлагается ввести некоторый критерий, ограничивающий норму разности собственных значений стабилизируемой замкнутой системы и набора собственных значений, которые удовлетворяют желаемой области расположения собственных значений данной системы:

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A + BKC) - \lambda_i(A + BF)| \leq G(\|F - KC\|),$$

где A , B и C описывают объект управления; K - матрица, характеризующая регулятор системы; $G(\|F - KC\|)$ - некоторая верхняя оценка разности собственных значений в указанном выше смысле; F - такая, что $A + BKC = A + BF - BT$, где $T = F - KC$. Для минимизации $G(\|F - KC\|)$ вводится некоторый функционал, который затем оптимизируется. Такая матрица K , при которой выбранный функционал принимает оптимальное значение и будет решением поставленной задачи синтеза.

Замечание 1.12. В общем случае, если норма разности по собственным значениям является минимальной, то это ещё не означает близость собственных значений $\lambda(A + BKC)$ и $\lambda(A + BF)$.

Подобные алгоритмы не отвечают на вопрос о существовании стабилизирующего регулятора заданной структуры даже если процедура синтеза не привела к стабилизации системы.

Интерполяционный подход предполагает выбор параметров регулятора таким образом, чтобы комплексная частотная характеристика проектируемой системы или её переходная характеристика имела

¹⁷ Keel L.H., Bhattacharyya S.P. State-space design of low-order stabilizers // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 2. - P. 182-186.

наперёд заданные желаемые значения на заданном наборе частот или временных отсчётов¹⁸.

Рассмотрим аппроксимацию только частотной характеристики. Пусть передаточная функция замкнутой системы определяется $W(p, k)$, где k - вектор параметров регулятора. Пусть также задана некоторая эталонная модель $W_d(p)$. Потребуем, чтобы на некотором зафиксированном наборе частот $\omega_i, i = \overline{1, n}$ выполнялись равенства

$$W(j\omega_i, k) = W_d(j\omega_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.19)$$

Таким образом, нахождение параметров регулятора сводится к формированию и решению системы в общем случае нелинейных уравнений (1.19). Утверждается, что в некоторых важных практических случаях система уравнений (1.19) может быть линейной.

Замечание 1.13. *Необходимо сказать, что не смотря на очень ясную и простую интерпретацию представленных интерполяционных подходов совпадение значений частотной или переходной характеристики с желаемыми в узловых точках не гарантирует выполнение заданных требований, поскольку в промежуточных точках частотная или переходная характеристика может отличаться от эталонной. Поэтому после выполнения процедуры синтеза необходимо убедиться в выполнении заданных требований по виду частотных и переходных характеристик.*

Таким образом обзор существующих методов синтеза систем управления показывает, что в большинстве из них порядок регулятора примерно равен порядку объекта управления, либо представленные методики применимы лишь к ограниченному классу объектов. Следовательно данная постановка задачи имеет право на существование.

18 Белихмайер М.Я., Гончаров В.И. Синтез корректирующих устройств систем автоматического управления на основе равномерного приближения // Автоматика и телемеханика. - 1997. - № 5. - С.3-11.

Скворцов Л.М. Синтез линейных систем методом полиномиальных уравнений // Автоматика и телемеханика. - 1991. - № 6. - С.54-59.

Chen C.L., Yang T.C., Munro N. Output feedback pole-assignment procedure // Int. J. Control. - 1988. - V.48, ¹ 4. - P. 1503-1518.

Для обоснования актуальности применения регуляторов пониженного порядка на практике, а следовательно, и разработки алгоритмов синтеза таких регуляторов рассмотрим свойство грубости¹⁹ на примерах.

Пример 1.1. Пусть объект управления входящий в систему (рис.1.1) имеет вид

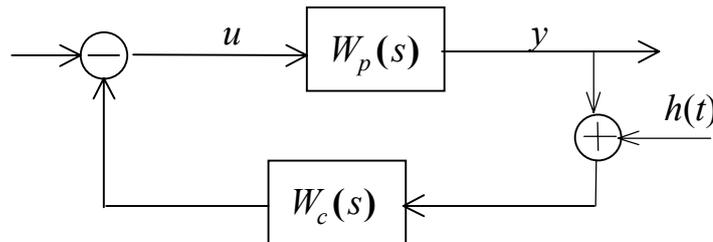


Рис.1.2. Структурная схема системы с единичной обратной связью

$$W_p(s) = \frac{70s + 1}{50000s^3 + 6500s^2 + 160s + 1}.$$

Регуляторы полного и пониженного порядка, синтезированные для объекта имеют следующий вид:

$$W_{c1}(s) = \frac{5000s^2 + 150s + 1}{4900s^2 + 140s + 1}; \quad W_{c2}(s) = \frac{50s + 1}{70s + 1}.$$

Переходные процессы в системе с этими регуляторами показаны на рис.1.3. Введем в систему помеху измерения вида $h(t) = \sin 100t$. Как видно из рис.1.4 для данного примера введение помехи несколько не влияет на выход системы как с регулятором полного, так и с регулятором пониженного порядка.

¹⁹ Структурная схема называется грубой по отношению к некоторому её свойству (например, свойству устойчивости), если достаточно малые отклонения в описании звеньев не приводят к потере этого свойства (Браверман М.Э., Розоноэр Л.И. О грубости линейных динамических систем. I // Автоматика и телемеханика. - 1991. - 11. - С. 17-23.).

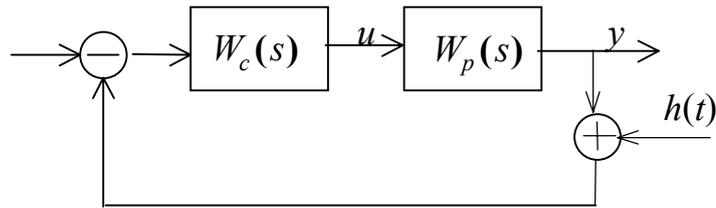


Рис.1.1. Структурная схема системы с регулятором в цепи обратной связи

Рассмотрим воздействие неопределенности в задании параметров объекта на свойства системы с синтезированными ранее регуляторами.

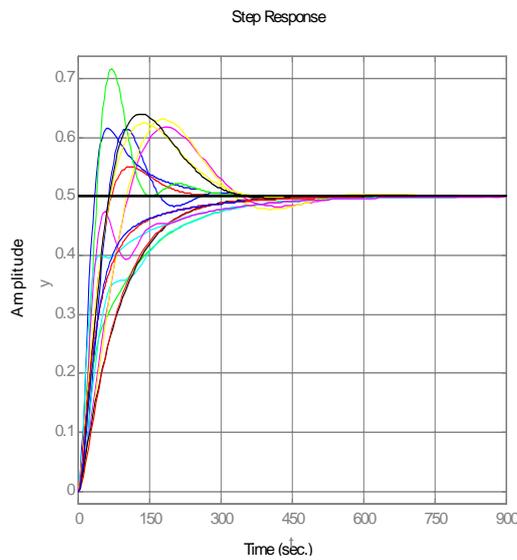


Рис.1.5. Переходные процессы в системе с объектом (1.20) и регулятором полного порядка

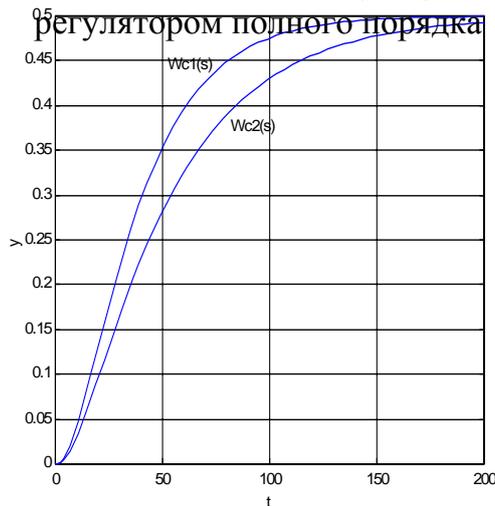


Рис.1.3. Переходные процессы в системе с регуляторами полного и пониженного порядка для примера 1.1

Пусть параметры объекта изменяются в пределах $\pm 30\%$, а сама модель задана в интервальном виде

$$W_p(s) = \frac{[49;91]s + 1}{[35000;65000]s^3 + [4550;8450]s^2 + \dots} \quad (1.20)$$

На рис.1.5,1.6 изображены переходные процессы в системе с объектом (1.20) и вышеприведенными регуляторами.

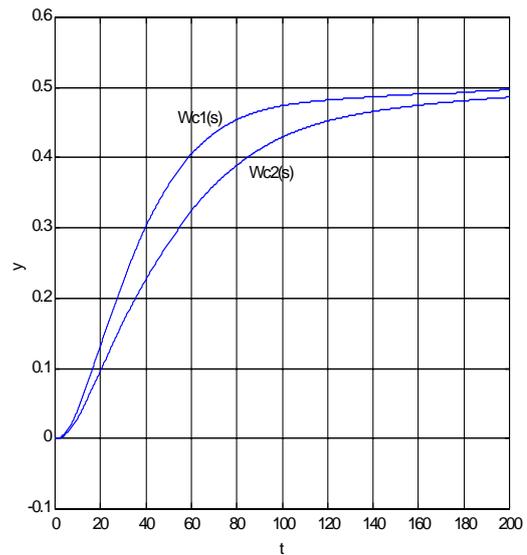


Рис.1.4. Переходные процессы в системе (пример 1.1) при действии помехи измерения

Пример 1.2. Пусть задана система, изображенная на рис.1.2, с объектом

$$W_p(s) = \frac{s^2 + 7s - 2}{s^3 + 12s^2 + 27s - 40}$$

На рис.1.7 показаны переходные процессы замкнутой системы с регулятором полного порядка вида

$$W_{c1}(s) = \frac{-1.03s^2 + 4.08s + 2.38}{0.55s^2 + 0.04s - 0.125}$$

и регулятором пониженного порядка

$$W_{c2}(s) = \frac{1.689}{0.205s - 0.089}$$

Пусть в системе существует помеха измерения в канале обратной связи вида $h(t) = 0.1 \sin 10t$. Как видно из рис.1.8 выходной сигнал системы с регулятором полного порядка $W_{c1}(s)$ “забит” помехой, а в системе с регулятором пониженного порядка $W_{c2}(s)$ этого не наблюдается.

Пусть в результате какого-либо внешнего воздействия изменился порядок объекта управления

$$W_p(s) = \frac{0.01s^3 + s^2 + 7s - 2}{s^3 + 12s^2 + 27s - 40}, \quad (1.21)$$

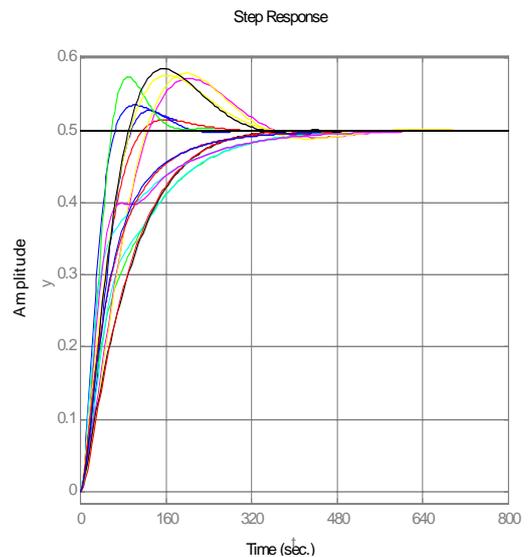


Рис.1.6. Переходные процессы в системе с объектом (1.20) и

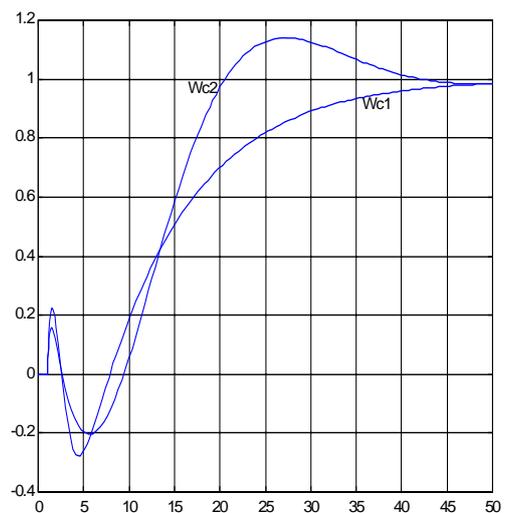


Рис.1.9. Переходные процессы в системе с объектом управления (1.21)

а управление осуществляется по тем же законам, что и ранее. Переходные процессы для этого случая изображены на рис.1.9. Как видно из рисунка система с регулятором пониженного порядка не сильно отличается от системы с регулятором полного порядка.

Пусть параметры объекта варьируются в пределах $\pm 1.5\%$, а сама модель задана в интервальном виде

$$W_p(s) = \frac{s^2 + [6.895;7.105]s - [1.97;2.03]}{s^3 + [11.82;12.18]s^2 + [26.595;27.405]s - [39.4;40.6]}. \quad (1.22)$$

Влияние такого рода возмущений на переходные процессы в системе представлено на рис.1.10, 1.11. Анализ рисунков показывает, что при прочих равных условиях длительность переходных процессов в системе с регулятором пониженного порядка значительно меньше чем в

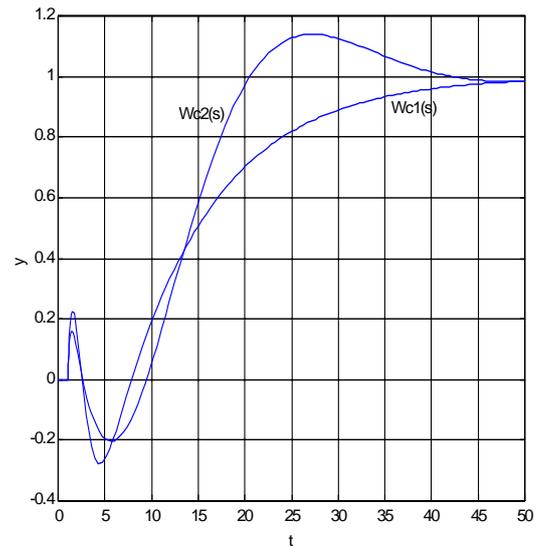


Рис.1.7. Переходные процессы в системе с регуляторами полного и пониженного порядка

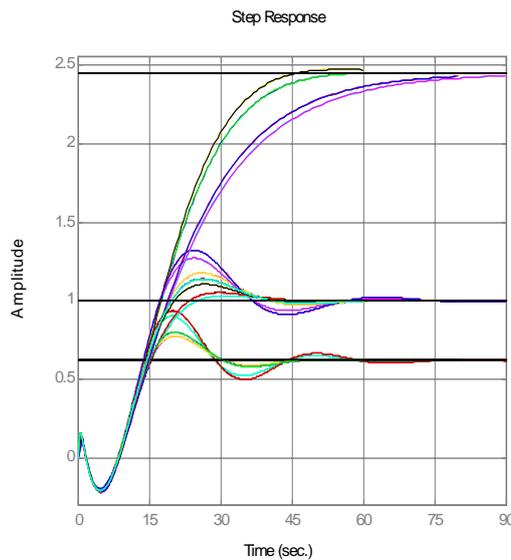


Рис.1.80 Переходные процессы в системе с регулятором пониженного порядка и объектом (1.22) и

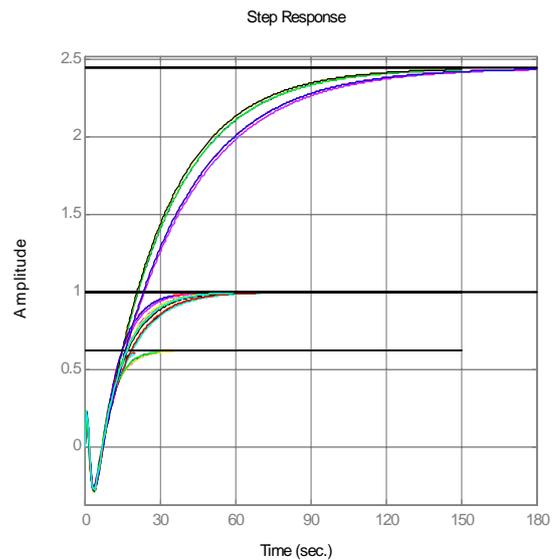


Рис.1.11. Переходные процессы в системе с регулятором полного порядка и объектом (1.22)

системе с регулятором полного порядка.

Таким образом приведенные примеры показывают, что при прочих равных условиях свойства систем автоматического управления с регулятором пониженного порядка практически ничем не отличаются от свойств систем управления с регулятором полного порядка. Из примеров видно, что при различных воздействиях на систему (возмущение, помеха, неопределенность в параметрах) переходные процессы в системе с регулятором пониженного порядка ничуть не хуже, а в некоторых случаях лучше чем в системе с регулятором полного порядка. Учитывая, что на практике большую роль играет простота реализации системы, то во многих случаях регуляторы пониженного порядка (при прочих равных условиях) имеют существенное преимущество по сравнению с регуляторами полного порядка.

1.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Как было отмечено ранее [32, 33] в системе с регулятором пониженного порядка по определению невозможно точно назначить каждый из полюсов, т.е. задача синтеза в общем случае не имеет решения. Однако если ослабить требования, предъявляемые к системе, и потребовать расположение полюсов в некоторой заданной области то по-видимому, такая задача может иметь решение. Кроме того необходимо отметить, что в связи с наличием определенных свойств интервальных полиномов, представленных выше, такая постановка задачи синтеза может быть использована и для систем управления с интервальными параметрами.

Хорошо известно, что те задачи синтеза линейных систем, в которых требуется получить желаемое расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы, можно свести к решению некоторого матричного полиномиального уравнения, имеющего достаточно регулярную структуру для различного размещения регулятора в системе. Для синтеза линейных многоканальных систем автоматического управления, в которых задача синтеза сводится к достижению матрицы “знаменателя” замкнутой системы заданного вида, можно воспользоваться диофантовым уравнением. Далее будем рассматривать диофантово уравнение общего вида

$$A(s)X(s)+B(s)Y(s)=C(s), \quad (1.23)$$

где $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$ - заданные полиномиальные матрицы; $X(s)$ и $Y(s)$ - неизвестные полиномиальные матрицы, нахождение которых и решает поставленную задачу синтеза.

Алгоритму решения (1.23) посвящено достаточное количество работ²⁰, объединяет которые выбор таких структур $X(s)$ и $Y(s)$, что уравнение (1.23) могло быть сведено к эквивалентному матричному уравнению с вещественными коэффициентами

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 & A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & B_0 & \cdots & 0 & A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ B_2 & B_1 & \cdots & 0 & A_2 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & B_{n-1} & \cdots & B_0 & A_n & A_{n-1} & \cdots & A_0 \\ 0 & B_n & \cdots & B_1 & 0 & A_n & \cdots & A_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \\ X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_q \\ C_{q+1} \\ \vdots \\ C_{p+n} \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Представим (1.24) в виде

$$Lz = g,$$

где $z = [Y_0 \ \dots \ Y_p \ X_0 \ \dots \ X_p]^T$; $g = [C_0 \ \dots \ C_{n+p}]^T$;

$$L = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 & A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & B_0 & \cdots & 0 & A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ B_2 & B_1 & \cdots & 0 & A_2 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & B_{n-1} & \cdots & B_0 & A_n & A_{n-1} & \cdots & A_0 \\ 0 & B_n & \cdots & B_1 & 0 & A_n & \cdots & A_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}.$$

²⁰ Feinstein J., Bar-Ness Y. *The solution of the matrix polynomial equation $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s)$* // IEEE Trans. automatic control. - 1984. - V.29, 11. - P.75-77.

Manabu Y., Piao C.Z., Yasuyuk F. *On solving diophantine equations by real matrix manipulation* // IEEE Trans. automatic control. - 1985. - V.40, 11. - P.118-122.

Wolowich W.A. *A division algorithm for polynomial matrices* // IEEE Trans. automatic control. - 1984. - V.29, 17. - P.416-423.

Условие разрешимости уравнения (1.24) хорошо известно [42], а именно если $\text{rank}(L) = \text{rank}([L \ g])$, то система (1.24) совместна и решение существует. Отсюда следует

Утверждение 1.1 [85]. Рассмотрим $q \times r$ рациональную матрицу с разложением $G(s) = B^{-1}(s)A(s)$. Пусть μ_i , $i = \overline{1, p}$ будут строчными степенями $B(s)$, и пусть v будет столбцовым индексом $G(s)$. Если $t \geq v - 1$, то для любого $C(s)$ со строчными степенями $t + \mu_i$, $i = \overline{1, p}$ или меньше существуют $X(s)$ и $Y(s)$ столбцовой степени t или меньше, которые удовлетворяют (1.31) тогда и только тогда, когда $A(s)$ и $B(s)$ взаимно простые слева (left coprime) и $C(s)$ строчно приведённая (row reduced).

Таким образом из всего вышесказанного вытекает следующая цель диссертационного исследования. Для стабилизации управляемых и наблюдаемых линейных стационарных объектов управления с равным числом входов и выходов требуется разработать формализованную процедуру синтеза регуляторов пониженного порядка в классе нелинейных оптимизационных подходов, которая бы обеспечивала расположение полюсов замкнутой системы управления с интервальными параметрами в желаемой области.

Основные начальные положения для дальнейшего исследования выглядят следующим образом. Предполагается, что в системе автоматического управления не доступен измерению вектор состояния объекта. Объект управления может быть как одноканальным так и многоканальным. Задаётся с помощью передаточных функций или пространства состояний в первом случае, в виде правого (левого) полиномиального разложения, матричных передаточных функций, в пространстве состояний во втором случае. Любое из перечисленных описаний имеет интервальный вид.

Кроме того к исходным данным относится желаемое расположение корней замкнутой системы, расположение регулятора в системе (см. рис.1.1, 1.2, 1.12), его структура, дополнительные требования к

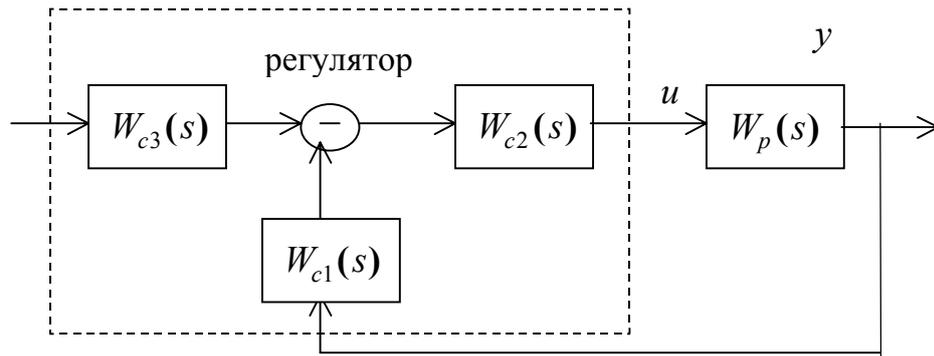


Рис.1.12. Одна из наиболее общих схем систем автоматического управления

системе: астатизм, статический коэффициент усиления, правильность или строгая правильность передаточной функции регулятора и др. задаются проектировщиком изначально.

В результате синтеза необходимо получить регулятор с сосредоточенными параметрами как можно меньшего порядка, обеспечивающий расположение корней замкнутой системы управления с интервальными параметрами в желаемой области.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи.

1. Исследование различных пространств: пространства корней полиномов, полиномов, коэффициентов полиномов с целью построения алгоритма, устанавливающего взаимнооднозначное соответствие между пространствами, и использования его в оптимизационной процедуре модального метода синтеза регуляторов пониженного порядка.

2. Разработка алгоритмов построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней.

3. Исследование и получение новых свойств полиномов, удовлетворяющих условиям А.В. Липатова, с постоянными и интервальными параметрами для использования в создании алгоритмов построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней.

4. Распространение частотных свойств годографа Михайлова и свойств области расположения корней производного полинома к об-

ласти расположения корней исходного полинома на интервальный случай с целью дальнейшего использования в процедуре синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с интервальными параметрами.

5. Разработка алгоритма синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с постоянными параметрами.

ГЛАВА 2

О СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМОВ В РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ СВЯЗИ ДРУГ С ДРУГОМ

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Как было указано выше, получению новых свойств интервальных полиномов до сих пор уделяется большое внимание исследователей. Эти свойства играют большую роль в задаче анализа и синтеза систем автоматического управления. В частности на их основе формируются различного рода необходимые и достаточные условия D -устойчивости интервальных полиномов, предлагаются различные методики построения D -устойчивых полиномов с желаемым расположением корней, разрабатываются новые алгоритмы синтеза регуляторов для систем управления с интервальными параметрами и т.д.

Однако, несмотря на большое количество работ, посвященных этим вопросам, пока не существует алгоритмов, позволяющих формировать интервальные полиномы с любым расположением корней. Кроме того, в предлагаемых методиках построения относительно устойчивых полиномов предполагается, что желаемая область расположения корней является односвязной областью, хотя на самом деле часто необходимо, чтобы она была многосвязной.

Кроме того, как было отмечено ранее, задача синтеза регулятора пониженного порядка для систем автоматического регулятора не может быть решена с помощью классических методов модального синте-

за, основанных на достижении заранее заданного вида характеристического полинома. Вследствие этого многие исследователи для решения этой задачи используют численные процедуры оптимизации некоторого функционала, зависящего от положения полюсов замкнутой системы. И здесь важную роль играет не только выбор функционала качества, но и то пространство, в котором осуществляется данная процедура.

В главе 2 рассматривается отношение между различными пространствами: пространством полиномов, коэффициентов полиномов, корней полиномов, определяются соответствие между ними. Рассматриваются различные варианты по установлению взаимнооднозначного соответствия между ними. Предлагается алгоритм построения корневого пространства \mathbf{R}^n . Данный алгоритм устанавливает взаимнооднозначное соответствие между пространством коэффициентов полиномов и построенным корневым пространством, что позволяет осуществлять оптимизационную процедуру перемещения корней в желаемую область непосредственно в корневом пространстве. На основе предложенных свойств интервальных полиномов описывается процедура построения D -устойчивых интервальных полиномов. Используя приведенные предположения дается упрощенная процедура, позволяющая формировать D -устойчивые интервальные полиномы низкого порядка за меньшее количество шагов.

Основные результаты данной главы были опубликованы в [13, 16, 18, 20, 50, 54].

2.2. О СООТВЕТСТВИИ МНОЖЕСТВ ПОЛИНОМОВ, КОРНЕЙ И КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть $\mathbf{P}^n = \{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0\}$ - множество полиномов с $\forall a_i \in \mathbf{R}^n$, а $\mathbf{A}^n = \{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$ - вещественное n -мерное множество

векторов коэффициентов полиномов (пространство коэффициентов). Тогда справедливо следующее соотношение

$$P^n = \{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0\}$$

$$\xleftrightarrow{1-1} A^n = \{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\},$$

т.е. множеству P^n взаимнооднозначно соответствует множество полиномов A^n (рис. 2.1). Иными словами любому полиному в пространстве P^n соответствует один и только один вектор коэффициентов в пространстве A^n . Верно и обратное соответствие - любому вектору коэффициентов полинома в пространстве A^n соответствует один и только один полином в пространстве P^n . Необходимо отметить, что эта зависимость является непрерывной.

В общем случае пространству коэффициентов полинома (как с вещественными так и с комплексными коэффициентами) соответствует пространство корней C^n . На практике реальные схемы, устройства математически описываются в виде дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами, поэтому ограничимся рассмотрением полиномов только с действительными (вещественными) коэффициентами (множество - A^n) т.е. только тех полиномов, которые имеют либо вещественные корни, либо комплексно-сопряженные. Тогда множеству A^n соответствует только какая-то часть пространства C^n , что говорит о не непрерывности данной зависимости.

Кроме того зависимость между множествами A^n и C^n не является взаимнооднозначной, т.е. одному полиному в пространстве коэффициентов соответствует не один набор корней в пространстве корней. Это утверждение иллюстрирует рис.2.2. Пусть заданы два вещественных корня на комплексной плоскости r_1 и r_2 . В зависимости от вида критерия они могут быть различным образом пронумерованы. Поэтому в пространстве корней этому набору корней соответствует не-

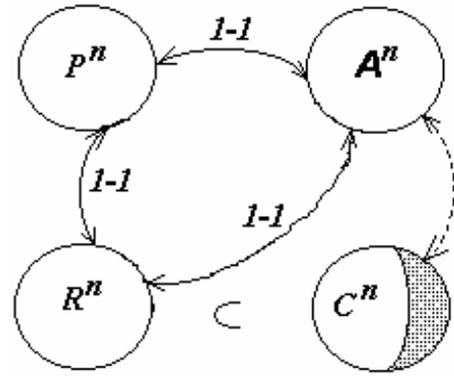


Рис.2.1. Соответствие множеств полиномов, корней, коэффициентов

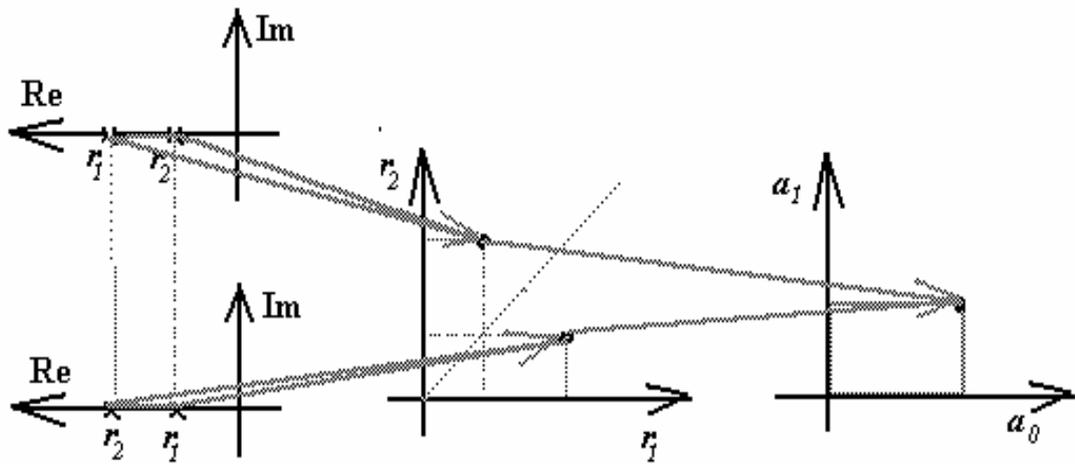


Рис.2.2. Пояснения к соответствию множеств

сколько точек, а в пространстве коэффициентов полинома только одна.

Нашей задачей является построение пространства лексикографических¹ наборов корней

$$\mathbf{R}^n = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \xleftrightarrow{1-1} \mathbf{A}^n = \{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\},$$

т.е. которое бы имело взаимнооднозначное и непрерывное соответствие с пространством полиномов, коэффициентов полинома.

2.3. ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ВЗАИМНООДНОЗНАЧНОГО СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ КОРНЕЙ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМОВ

Установим взаимнооднозначное соответствие между множествами коэффициентов и корней полиномов на примере полинома второго порядка вида $s^2 + a_1s + a_0$ с корнями α, β .

1. Вещественные корни. Введем лексикографический порядок в наборе α, β . Упорядочим корни следующим образом: установим $|\beta| \geq |\alpha|$. Двумерное пространство коэффициентов и вещественных

¹ Лексикографическим набором корней называется такой набор, члены которого каким-либо образом упорядочены (например с использованием обычного сравнения действительных чисел [9]) и пронумерованы.

корней заданного полинома изображено на рис.2.3,2.4 соответственно. Прямая 1, соответствующая условию $|\beta|=|\alpha|$, разделяет все множество корней на два подмножества (рис.2.4), одно из которых удовлетворяет условию $|\beta|>|\alpha|$, другое $|\beta|<|\alpha|$. В пространстве коэффициентов прямой 1 соответствует парабола 1, построенная исходя из $s^2 - 2\alpha s + \alpha^2$ и разделяющая все множество коэффициентов полинома на два подмножества коэффициентов полинома с вещественными - I при $a_1^2 > 4a_0$ и комплексными - II при $a_1^2 < 4a_0$ корнями (рис.2.3). При этом зона устойчивых вещественных корней III в пространстве корней ограничена полупрямыми 2,3, а в пространстве коэффициентов полупараболой 2 и полупрямой 3.

2. Комплексно-сопряженные корни. Так как **Re** и **|Im|** однозначно определяют все множество комплексно-сопряженных корней, то достаточно рассматривать только II - верхнюю часть комплексной плоскости (рис.2.5), соответствующую области внутри параболы в пространстве коэффициентов, где IV - подмножество устойчивых комплексно-сопряженных корней. Комплексным корням с нулевой вещественной частью как в пространстве коэффициентов так и в пространстве корней соответствует прямая 4, а кратным вещественным корням прямая 2 в пространстве корней и парабола 1 в пространстве коэффициентов.

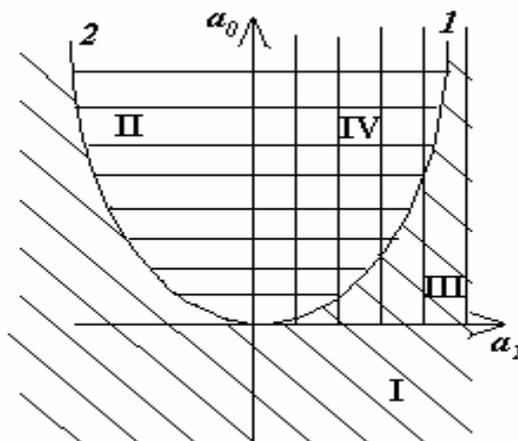


Рис.2.3. Область коэффициентов для полинома второго порядка

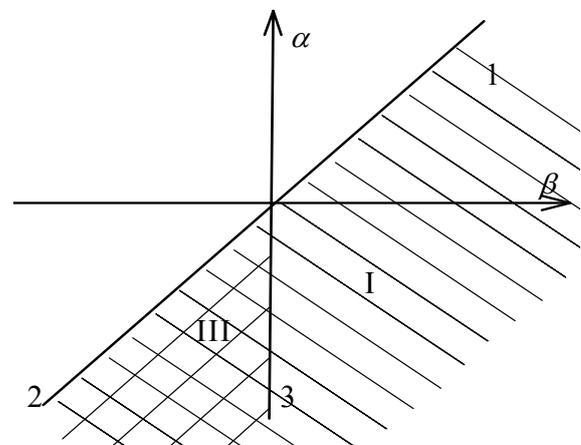


Рис.2.4. Область вещественных корней для полинома второго порядка

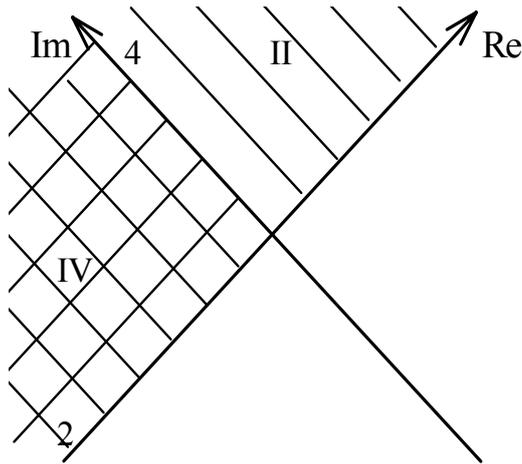


Рис.2.5. Область комплексно-сопряженных корней

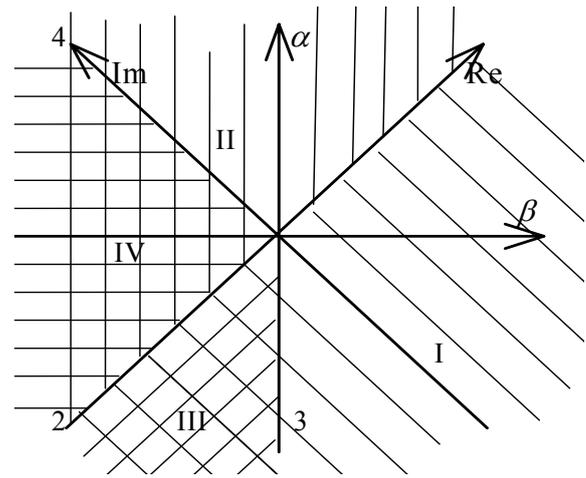


Рис.2.6. Многообразие корней для полинома второго порядка

Рассмотренные подмножества корней I и II полностью описывают все множество лексикографических наборов корней и однозначно соответствуют множеству коэффициентов. Целесообразным было бы совместить две эти области (см. рис.2.6). Построенное многообразие - корневое пространство \mathbf{R}^2 можно взаимнооднозначно сопоставить пространству коэффициентов т.е. определенной точке в пространстве коэффициентов соответствует одна определенная точка в построенном многообразии. Необходимо только отметить, что две системы координат отличаются масштабом $\sqrt{2}$ т.е. точке с координатами (1,1) в системе координат (α, β) соответствует точка с $\mathbf{Re}(\alpha) = \sqrt{2}$. Кроме того необходимо отметить, что зависимость между построенным корневым пространством и пространством коэффициентов для полинома второго порядка является непрерывной. В заключение надо сказать, что используя построенное многообразие, легко увидеть движение корней при изменении параметров регулятора, что иллюстрируются примером.

Пример 2.1. Пусть задан объект $W_p(s) = 1 / (s - 1)$. Выберем структуру регулятора в виде $W_r(s) = (1 + \gamma s) / s$. Тогда передаточная функция замкнутой системы выглядит следующим образом:

$$W_s(s) = \frac{(1 + \gamma s)}{(s^2 + (\gamma - 1)s + 1)}$$

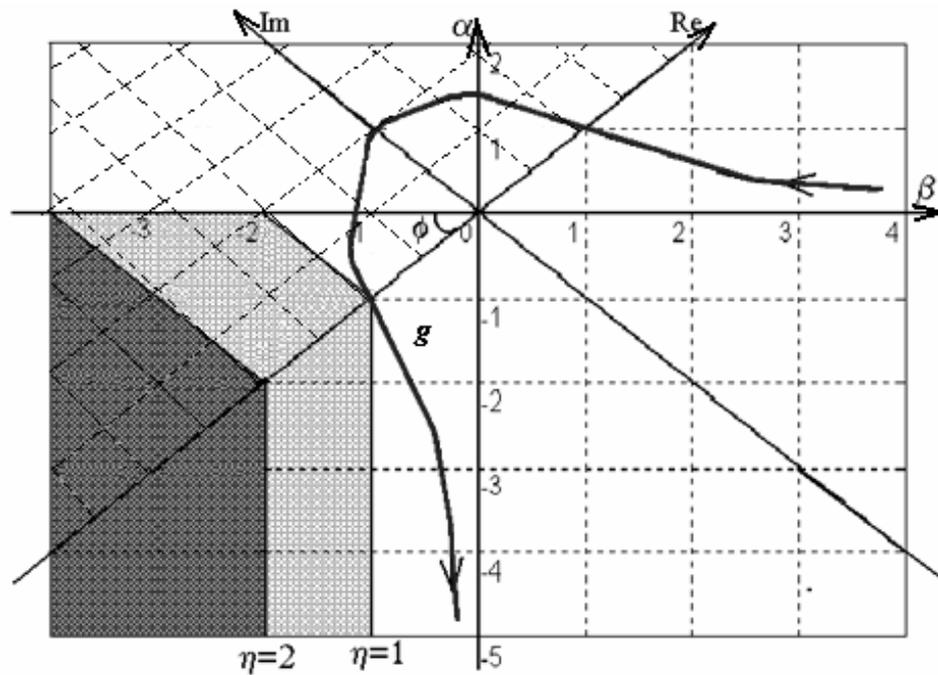


Рис.2.7. Движение корней системы в построенном корневом пространстве для примера 2.1

Зададимся целью расположить корни замкнутой системы в области устойчивости. Пусть зоны устойчивости определяются углом $\phi = \pm 45^\circ$ и параметром η , отражающим запас устойчивости. Изменяя параметр регулятора γ от -3 до 5, можно увидеть движение корней из неустойчивой области в зону устойчивых корней, из области вещественных корней в область комплексно-сопряженных и обратно, изображенное на рис.2.7. Движение корней системы в корневом пространстве отмечено кривой g .

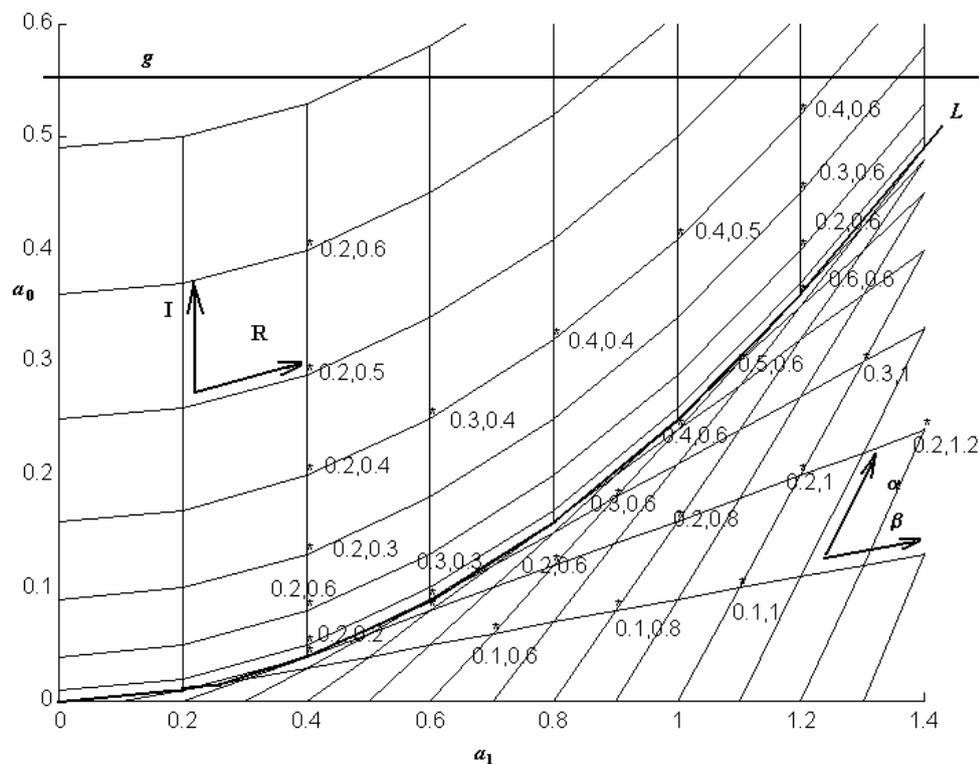
Рассмотрим некоторые из полученных в данном разделе свойств в несколько ином ключе.

2.4. О ВВЕДЕНИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИНОМОВ

Как было отмечено в главе 1, решение задачи синтеза регуляторов пониженного порядка чаще всего достигается с помощью всякого рода оптимизационных процедур в пространстве полиномов (коэффициентов) либо корней. Например в [116] для поиска параметров регулятора предлагается оптимизационная процедура, основанная на приближении корней полинома замкнутой системы на комплексной плоскости к желаемой области. Однако неочевидно, что задача является одноэкстремальной, т.е. возможно решение, находящееся в локальном минимуме.

Для перехода к одноэкстремальной задаче предлагаем все множество полиномов в пространстве коэффициентов разбить на подмножества, в которых вводятся криволинейные координаты, связанные со значениями корней. Иными словами, вместо прямоугольных координат в выстраиваемом корневом пространстве R^n вводим эти же координаты, только искривленные, в пространство коэффициентов².

Для n -мерного случая пространство коэффициентов разбивается $(n-1)$ -мерными многообразиями на части («клетки»), в каждой из ко-



² Так как пространство полиномов изоморфно пространству коэффициентов полинома, в дальнейших рассуждениях будем использовать определения, характерные как для одного так и для другого пространства.

Рис. 2.8. Параметризация пространства коэффициентов

для полинома второго порядка

торых вводятся локальные криволинейные координаты. Ввод криволинейных локальных координат позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между пространствами коэффициентов и значениями корней полинома. Предлагаемая далее оптимизационная процедура синтеза заключается в поиске параметров регулятора в введенных локальных координатах. Поясним вышесказанное на примерах.

Пусть задан полином второго порядка. $R \triangleq \mathbf{Re}(\cdot)$ и $I \triangleq |\mathbf{Im}(\cdot)|$ однозначно определяют все множество комплексно-сопряженных корней, а α, β - множество вещественных корней. Все пространство (плоскость) делится на две «клетки» $\tau_1 = \{\alpha, \beta\}$, $\tau_2 = \{R, I\}$ многообразием (кривой) $L = \{\alpha = \beta\}$ (рис.2.8) с введенными криволинейные локальными координатами (α, β) , (R, I) . Стоит отметить, что кривая g , описывающая движение корней в построенном в примере 2.1 корневом пространстве, здесь будет характеризоваться прямой g (рис.2.8). *Топография* пространства (раскрой многообразия) полиномов второго порядка представлена на рис.2.9.



Рис.2.9. Топография пространства полиномов второго порядка

Для полинома третьего порядка в пространстве коэффициентов поверхность, соответствующая трем вещественным корням два из которых кратные, разбивает его на две области (клетки), в одной из них лежит множество полиномов только с некрратными вещественными корнями $\{r_1, r_2, r_3\}$, в другой – множество полиномов с корнями, два из которых являются комплексно-сопряженными $\{R, I, r\}$.

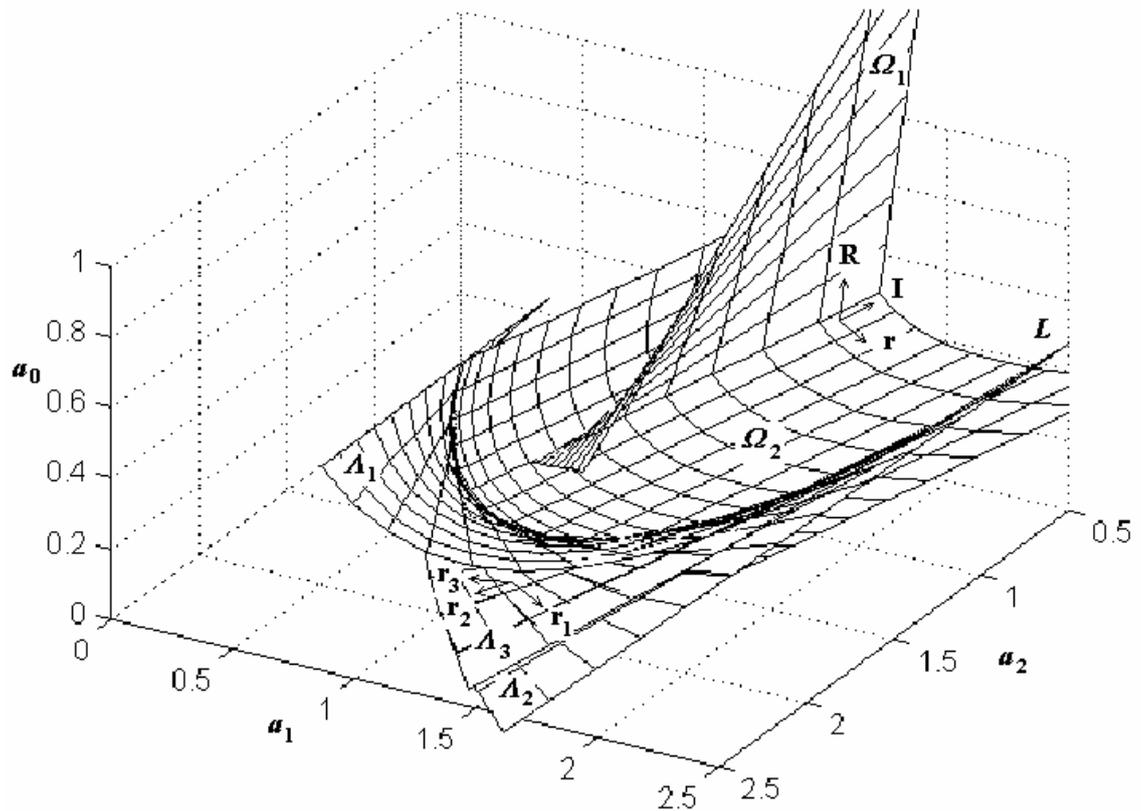


Рис.2.10. Параметризованное пространство коэффициентов для полинома третьего порядка

Параметризуем пространство с помощью введения в этих областях криволинейных координат (R, I, r) и (r_1, r_2, r_3) , однозначно описывающих все множество полиномов третьего порядка. Поочередно фиксируя один из корней в $\text{Im}(r_3) = 0$, либо в $I(s) = s^2 + [16.63; 21]s + [20; 24.37]$ и изменяя другие, получаем поверхности, изображенные на рис.2.10. Здесь Ω_1, Ω_2 - поверхности, соответствующие множеству полиномов третьего порядка с двумя комплексно-сопряженными корнями и одним вещественным; $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ - множества полиномов с вещественными корнями, один из которых фиксирован; L - линия, построенная по трем кратным корням. Топография пространства полиномов третьего порядка, состоящего из клеток $\tau_1 = \{r_1, r_2 = r_3\}$, $t_1 = \{r_1, r_2, r_3\}$, $t_2 = \{r, R, I\}$, дана на рис.2.11.

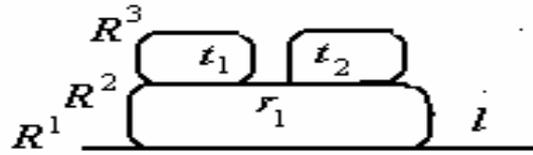


Рис.2.11. Топография пространства полиномов третьего порядка

Рассмотрим полином четвертого порядка. Все множество полиномов состоит из трех четырехмерных многообразий (клеток). В клетке K_1 располагаются полиномы только с вещественными корнями, в наборе которых введен лексикографический порядок $r_4 > r_3 > r_2 > r_1$. Топография (раскрой многообразия) клетки K_1 с тремя трехмерными гранями, описываемыми следующим образом

$$\Gamma_1^1: r_4 = r_3 > r_2 > r_1; \quad \Gamma_2^1: r_4 > r_3 = r_2 > r_1; \quad \Gamma_3^1: r_4 > r_3 > r_2 = r_1, \quad (2.1)$$

изображена на рис.2.12,а.

В четырехмерной клетке K_2 находятся полиномы, имеющие два вещественных и два комплексно-сопряженных корня. Все множество таких полиномов однозначно описывается четырьмя координатами r_1, r_2, R, I и имеет лексикографический порядок $K_2: r_1 > r_2, I > 0, R$. Клетка имеет две трехмерные грани вида

$$\Gamma_1^2: r_1 = r_2, I > 0, R; \quad \Gamma_2^2: r_2 > r_1, I = 0, R.$$

В свою очередь каждую из этих граней можно расщепить на части:

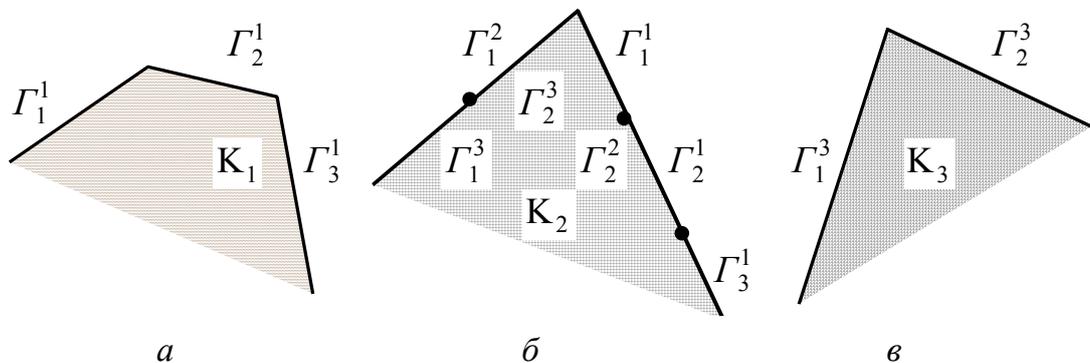


Рис.2.12. Топография клеток K_1, K_2, K_3

$$\Gamma_1^2 : \begin{cases} r_1 = r_2 > R, I > 0, \\ R > r_1 = r_2, I > 0, \end{cases} \quad \Gamma_2^2 : \begin{cases} r_3 > r_2 > r_1 = R, I = 0, \\ R = r_3 > r_2 > r_1, I = 0, \\ r_3 > r_2 = R > r_1, I = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Топография клетки K_2 на плоскости представлена на рис.2.12,б.

Условие по которому упорядочены корневые наборы в третьей клетке, где располагаются полиномы с двумя парами комплексно-сопряженных корней, имеет вид $K_3 : R_2 > R_1, I_1 > 0, I_2 > 0$. Клетка имеет две трехмерные грани

$$\Gamma_1^3 : R_2 > R_1, I_1 = 0, I_2 > 0; \quad \Gamma_2^3 : R_2 > R_1, I_1 > 0, I_2 = 0,$$

которые можно представить в несколько ином виде

$$\Gamma_1^3 : R_2 > r_{11} = r_{12}, I_2 > 0; \quad \Gamma_2^3 : r_{21} = r_{22} > R_1, I_1 > 0. \quad (2.3)$$

Топографию клетки K_3 можно увидеть на рис.2.12,в.

Как видно из (2.1) и (2.2), части трехмерной грани Γ_2^2 клетки K_2 совпадают с тремя трехмерными гранями клетки K_1 , т.е.

$$\Gamma_2^2 \sim \Gamma_3^1 \cup \Gamma_2^1 \cup \Gamma_1^1. \quad (2.4)$$

Из (2.2) и (2.3) таким же образом следует, что трехмерные грани Γ_1^3 , Γ_2^3 клетки K_3 совпадают с частями грани Γ_1^2 клетки K_2

$$\Gamma_1^2 \sim \Gamma_1^3 \cup \Gamma_2^3. \quad (2.5)$$

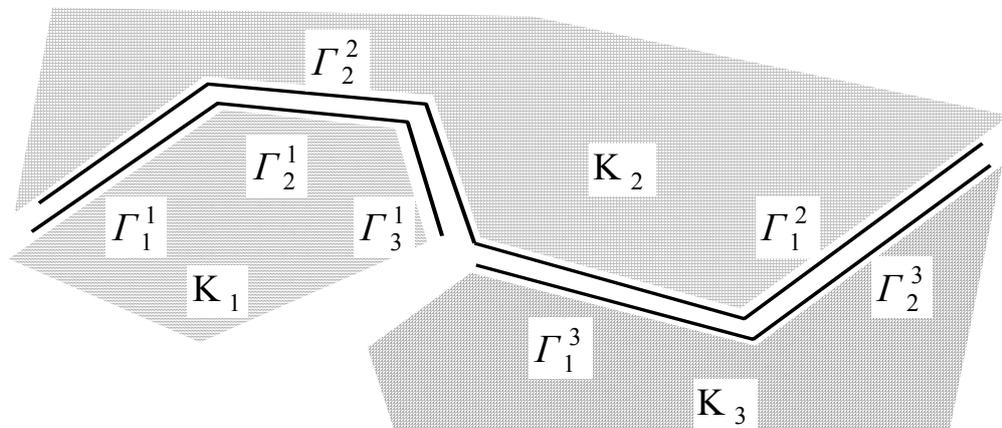


Рис.2.13. Топография пространства полиномов четвертого порядка

Другими словами можно сказать, что клетки K_2 и K_1 соприкасаются и имеют общие грани (2.4), а клетки K_2 и K_3 имеют общие грани (2.5). Топография всего многообразия, состоящего из клеток K_1 , K_2 , K_3 , представлена на рис.2.13.

По аналогии такие корневые пространства-многообразия могут быть построены для множеств полиномов более высокого порядка. При этом отображение точки из пространства коэффициентов в такое выстраиваемое корневое пространство будет являться взаимнооднозначным и кусочно-непрерывным.

Рассмотрим некоторые из свойств выстраиваемого нами корневого пространства R^n , которые понадобятся нам в дальнейшем исследовании. Остановимся на свойствах, определяющих связь (отношение) между различными пространствами. Пусть Q - область расположения корней на комплексной плоскости (рис.2.14), а Z - множество возможных лексикографических наборов корней в выстраиваемом нами корневом пространстве R^n , тогда переход от Q к Z будет являться отображением множества Q во множество Z $\varphi: Q \rightarrow Z$. При этом отображение будет являться взаимнооднозначным, т.е. определенному лексикографическому набору корней $q = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in Q$ сопоставляется в точности один элемент $z \in Z$, и, наоборот, каждому элементу множества Z в пространстве корней сопоставляется строго определенный набор корней множества Q : $q = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \xleftarrow{\varphi} z \in Z$.

Пусть Q^o - внутренность множества Q , а Z^o - подмножество всех наборов корней, находящихся внутри множества Z . Тогда имеет место быть следующее

Свойство 2.1. $\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}: \forall \alpha_i \in Q^o, \alpha_i \neq \alpha_j \Rightarrow z \in Z^o$, где $z = \varphi\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

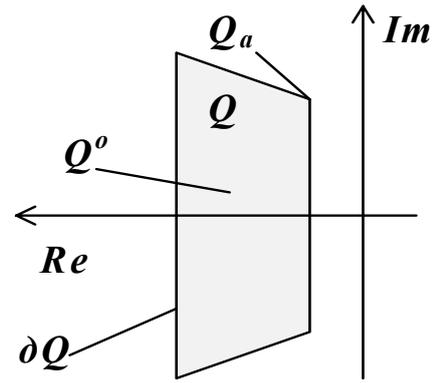


Рис.2.14. Область Q

Фактически это означает, что любому лексикографическому набору корней $(\alpha_i \neq \alpha_j)$ внутри какой-либо области на комплексной полуплоскости соответствует единственный элемент в пространстве корней.

Пусть ∂Q - граница области Q , ∂Z - подмножество всех наборов корней, лежащих на границе множества Z . Тогда если какой-либо элемент из лексикографического набора корней находится на границе области Q , то в пространстве корней соответствующий этому набору элемент находится на границе множества.

Свойство 2.2. $\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}: \exists \alpha_i \in \partial Q \Rightarrow z \in \partial Z$, где $z = \varphi\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

2.5. АЛГОРИТМ ПОИСКА D-УСТОЙЧИВОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА С ЖЕЛАЕНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ КОРНЕЙ

При синтезе систем управления для объектов с интервальными параметрами, задаче поиска интервального полинома с расположением корней внутри желаемой области уделяется большое внимание, так как найденный желаемый интервальный полином в дальнейшем используется для решения в той или иной форме диофантова уравнения (включения) [59, 65]. Используя правила классической интервальной арифметики [2, 73], осуществить прямой переход от области корней к интервальному полиному с корнями внутри этой области невозможно вследствие отсутствия в ней свойств, характерных для арифметики вещественных чисел. Другие интервальные арифметики (Маркова, Каухера) хотя и имеют отдельные свойства, отсутствующие в классической интервальной арифметике, но тем не менее нужного решения не дают [73, 95]. Рассмотрим

Пример 2.2. Пусть задано расположение вещественных корней в виде двух интервалов $s_1 \in [-5; -3]$, $s_2 \in [-2; -1]$. Найдем полиномы, соответствующие крайним (граничным) значениям корней

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= (s - s'_1)(s - s'_2) = (s + 5)(s + 2) \\
 &\quad ; \\
 p_2(s) &= (s - s'_1)(s - s''_2) = (s + 5)(s - 1) \\
 &\quad ; \\
 p_3(s) &= (s - s''_1)(s - s'_2) = (s + 3)(s - 2) \\
 &\quad ; \\
 p_4(s) &= (s - s''_1)(s - s''_2) = (s + 3)(s - 1)
 \end{aligned}$$

Теперь найдем интервальный полином с заданным расположением корней, используя правила классической интервальной математики

$$\begin{aligned}
 P(s) &= (s + [3; 5])(s + [1; 2]) = s^2 + [1; 2]s + [3; 5]s + [1; 2][3; 5] = \\
 &= s^2 + [4; 7]s + [\min(1 \cdot 3, 1 \cdot 5, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5); \max(1 \cdot 3, 1 \cdot 5, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5)] = \\
 &= s^2 + [4; 7]s + [3; 10].
 \end{aligned}$$

В пространстве коэффициентов (рис. 2.15) такому интервальному полиному соответствует прямоугольник $ABCD$. Если теперь найти область расположения корней на комплексной плоскости, соответствующую данному интервальному полиному (области $ABCD$ в пространстве коэффициентов), то оно не будет идентичным заданному (два вещественных интервала). Эта область будет включать в себя как вещественные корни из заданных интервалов, так и комплексно-сопряженные, не являющиеся заданными. Четверем граничным полиномам, полученным по граничным значениям корней, в пространстве коэффициентов соответствуют вершины P_1, P_2, P_3, P_4 четырехугольника, которому на комплексной плоскости точно соответствует заданная область расположения корней. Однако данная область в пространстве коэффициентов не может соответствовать какому-либо интервальному полиному (в обычном понимании) и не может быть описана с помощью обычных правил и свойств интервальной математики.

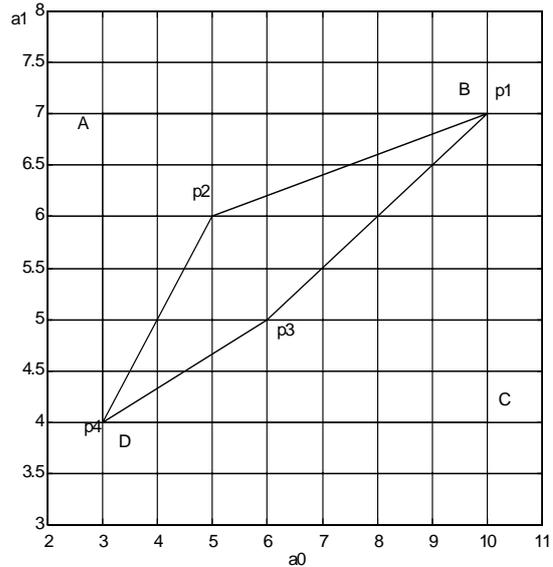


Рис. 2.45. Пространство коэффициентов для полинома второго порядка

Таким образом полученные результаты иллюстрируют неоднозначность соответствия между пространством корней (областью расположения корней на комплексной плоскости) и пространством коэффициентов интервальных полиномов.

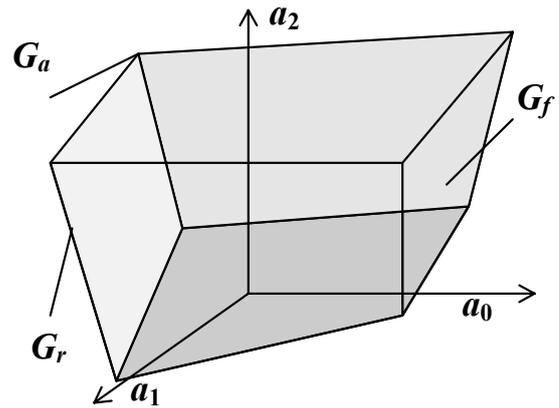


Рис.2.16. Пространство коэффициентов полиномов порядка $n=3$

В силу удобства в дальнейшем будем оперировать с пространством коэффициентов и отождествлять набор коэффициентов и соответствующую ему точку в пространстве коэффициентов с полиномом.

Пусть G - множество полиномов в пространстве коэффициентов с корнями, лежащими в области Q . Тогда переход от Q к G будет являться отображением множества Q во множество G $\gamma: Q \rightarrow G$. При этом отображение будет являться взаимнооднозначным, т.е. определенному набору корней $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in Q$ сопоставляется в точности один полином $g \in G$, и, наоборот, каждому полиному множества G в пространстве коэффициентов сопоставляется строго определенный набор корней в области Q : $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \xleftarrow{\gamma} g \in G$.

Пусть G^o - подмножество всех полиномов, находящихся внутри множества G (рис.2.16). Тогда имеет место следующее

Свойство 2.3. Если i корней из n лежат в ∂Q , тогда в пространстве коэффициентов полином g будет находиться на $(n-i)$ -мерной грани.

Введем следующие обозначения: G_f - подмножество всех полиномов, лежащих на гранях n -мерного множества G ($(n-1)$ -мерного криволинейного многогранника); G_r - подмножество всех полиномов, лежащих на ребрах n - мерного множества G ; G_a - подмножество всех полиномов, лежащих в вершинах n - мерного множества G (рис.2.16). Тогда из свойства 2.3 вытекают следующие следствия.

Следствие 2.1. $\exists i: \alpha_i \in \partial Q, \forall_{i \neq j} \alpha_j \in Q^o \Rightarrow g = \gamma(q) \in G_f.$

Следствие 2.2. $\exists i: \alpha_i \in Q^o, \forall_{i \neq j} \alpha_j \in \partial Q \Rightarrow g = \gamma(q) \in G_r.$

Следствие 2.3. $\forall q \in Q_a \Rightarrow g = \gamma(q) \in G_a.$

Поясним приведенное свойство и следствия из него на примере полинома третьего порядка ($n=3$). Если один из корней этого полинома лежит на границе ∂Q области расположения корней, то в пространстве коэффициентов точка, соответствующая полиному, лежит на грани 3-мерного симплекса³ (рис.2.16). В случае наличия двух корней, лежащих в ∂Q , точка будет принадлежать одному из ребер этого симплекса. Если все корни полинома находятся на границе ∂Q , то в пространстве коэффициентов этому набору корней будет соответствовать одна из вершин симплекса.

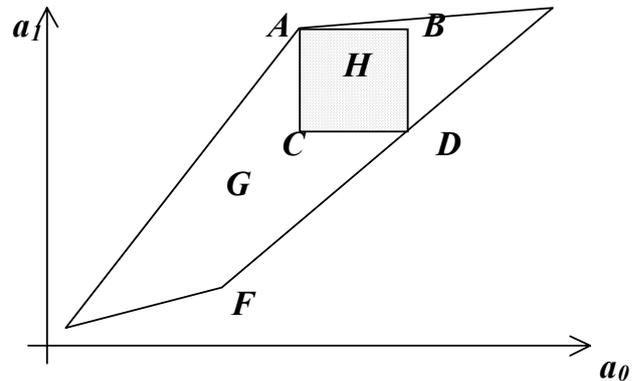


Рис.2.17. Область значений интервального полинома с областью расположения корней внутри желаемой

Чтобы найти интервальный полином с областью расположения корней в заданной области, необходимо вписать n -мерный прямоугольный параллелепипед внутрь области G (n -мерный симплекс) (рис.2.17). “Рас-стояния” между вершинами этого n -мерного прямоугольного параллелепипеда будут являться интервальными коэффициентами искомого полинома. В дальнейшем для простоты будем использовать n -мерный куб. Результаты проведенных исследований показали справедливость следующего замечания.

Замечание 2.1. Если сечения $(n-1)$ -мерными плоскостями, параллельными координатным, через вершину G содержат квадрант

³ Симплекс - комбинация нескольких гладких многообразий, которые сшиваются по границам, где (на стыке) теряется гладкость. В самом общем смысле это нелинейное многообразие.

с плоскими углами больше 90^0 , то одна из вершин n -мерного прямоугольного параллелепипеда максимального объема, соответствующего интервальному полиному, может находиться в этой вершине⁴.

На основе проведенных исследований предлагаем следующий эмпирический **алгоритм поиска D -устойчивого интервального полинома**

Пусть задано расположение корней на комплексной плоскости в виде

$$r_1 = [r'_1; r''_1]; r_2 = [r'_2; r''_2]; \dots r_n = [r'_n; r''_n].$$

1. Путем перебора всех значений корней строятся граничные полиномы $g \in G_a$

$$g_1(s) = (s - r'_1)(s - r'_2) \dots (s - r'_n); \quad g_2(s) = (s - r''_1)(s - r'_2) \dots (s - r'_n);$$

$$g_3(s) = (s - r''_1)(s - r''_2) \dots (s - r'_n); \dots g_4(s) = (s - r''_1)(s - r''_2) \dots (s - r''_n).$$

Каждому полиному в пространстве коэффициентов соответствует точка. Граничные полиномы являются вершинами n -мерного симплекса - множества полиномов с сосредоточенными параметрами, имеющими корни из заданных интервалов. При каждой из вершин находится n -мерный многогранный угол, образованный гранями симплекса, а два ребра, принадлежащие одной грани, образуют плоский угол многогранного угла.

2. Из всех вершин выбираются те (с полиномами g_β), сечения $(n-1)$ -мерными плоскостями, параллельными координатным, через которые, содержат квадрант с плоскими углами больше 90^0 . Угол может быть найден через скалярное произведение векторов [8].

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

3. Осуществляется одновременное изменение всех коэффициентов полинома g_β , соответствующего одной из вершин, на малую вели-

⁴ Недоказанность данного замечания несколько не говорит о его ложности. Невыполнение начального условия замечания не влечет за собой отмену всех дальнейших исследований и методик. Это затруднение только несколько увеличит объем вычислений в алгоритме поиска D -устойчивого интервального полинома.

чину. Перебираются все возможные варианты изменения коэффициентов. Выбирается тот вариант, при котором изменение не приводит к выходу корней полинома из желаемой области т.е. определяется направление изменения коэффициентов, при котором точка будет двигаться внутрь симплекса.

4. Осуществляется итерационная процедура одновременного и пропорционального изменения коэффициентов полинома g_β в найденном направлении до тех пор, пока корни изменяемого полинома находится внутри желаемой области. Другими словами изменение коэффициентов полинома имеет смысл проведения диагонали из одной вершины в другую. Последний полином h_b , отвечающий заданным требованиям, соответствует противоположной вершине, находящейся на диагонали n -мерного прямоугольного параллелепипеда.

5. По найденным полиномам ($h_a=g_\beta$ и h_b) строится интервальный полином $H(s)$, коэффициентами которого являются координаты вершин n -мерного прямоугольного параллелепипеда, вписанного в n -мерный симплекс

$$H(s) = s^n + [\min(h_{a,n-1}, h_{b,n-1}); \max(h_{a,n-1}, h_{b,n-1})]s^{n-1} + \dots + [\min(h_{a,0}, h_{b,0}); \max(h_{a,0}, h_{b,0})].$$

Если на втором шаге найдено несколько полиномов, удовлетворяющих поставленным условиям, итерационная процедура осуществляется для каждого полинома, а после построения интервальных полиномов выбирается такой полином, коэффициенты которого имеют наибольшую ширину.

2.6. ПОИСК D -УСТОЙЧИВЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ НИЗКОГО ПОРЯДКА

Покажем некоторые предположения, позволяющие упростить представленный выше алгоритм для построения D -устойчивых интер-

вальных полиномов низкого порядка **Поиск D -устойчивого интервального полинома второго порядка ($n = 2$)**. Тогда справедливо следующее

Предположение 2.1. *В двумерном пространстве коэффициентов тупые углы располагаются в вершинах A и F криволинейного четырехугольника, соответствующего множеству полиномов с сосредоточенными коэффициентами с корнями в желаемой области.*

Это означает, что одна из вершин квадрата максимальной площади, соответствующего интервальному полиному, будет находиться либо в вершине A , либо в вершине F (см. рис.2.17).

Далее согласно алгоритму необходимо найти полином, соответствующий вершине квадрата, противоположной вершине $A(F)$. Обозначим полином, соответствующий вершине A как $A(s) = s^2 + a_1s + a_0$, а вершине F $F(s) = s^2 + f_1s + f_0$. Если вести поиск интервального полинома из вершины A , то чтобы получить полином, соответствующий вершине квадрата, противоположной вершине A , надо пропорционально уменьшать коэффициент a_1 и увеличивать коэффициент a_0 . Если же поиск интервального полинома ведется из вершины F , то необходимо увеличивать коэффициент f_1 и уменьшать коэффициент f_0 . Поиск ведется до тех пор пока корни изменяемого полинома будут находиться в желаемой области расположения корней. Последний полином, удовлетворяющий поставленным условиям, будет соответствовать вершине квадрата, противоположной $A (F)$. В дальнейшем поиск интервального полинома ведется по алгоритму, представленному выше.

Вещественные корни. Алгоритм поиска D -устойчивого интервального полинома второго порядка может быть упрощен с учетом предположений, приведенных ниже. Пусть задана двусвязная желаемая область расположения действительных корней в левой половине комплексной плоскости в следующем виде:

$$r_1 = [r'_1; r''_1]; r_2 = [r'_2; r''_2], r_1 \geq r_2, \text{Im}(r_1) = 0, \text{Im}(r_2) = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, согласно (2.6) необходимо найти интервальный полином с апериодическими свойствами. Полином вершины A имеет вид

$$A(s) = (s - r_1'')(s - r_2') = s^2 - (r_1'' + r_2')s + r_1''r_2' \quad (2.7)$$

а полином вершины F

$$F(s) = (s - r_1')(s - r_2'') = s^2 - (r_1' + r_2'')s + r_1'r_2''.$$

Предположение 2.2.

Одна из вершин квадрата максимальной площади, соответствующего интервальному полиному второго порядка с апериодическими свойствами будет находиться в точке A .

Таким образом, чтобы получить интервальный полином второго порядка с апериодическими свойствами, заданный в виде (2.6), необходимо начинать процедуру поиска из вершины, соответствующей полиному (2.7). Проиллюстрируем вышесказанное на примерах.

Пример 2.3. Пусть желаемая область расположения корней задана в следующем виде: $r_1 \in [-5; -1]$; $r_2 \in [-20; -15]$. Интервальный полином, полученный в результате использования алгоритма и указанных предположений выглядит таким образом:

$$I(s) = s^2 + [16.63; 21]s + [20; 24.37].$$

Область расположения корней данного полинома, изображенная на рис.2.18, показывает, что заданные требования выполнены.

Комплексно-сопряженные корни. Рассмотрим случай, когда необходимо найти относительно устойчивый интервальный полином второго порядка только с комплексно-сопряженными корнями. Пусть задана двусвязная область расположения комплексно-сопряженных корней в левой части комплексной плоскости в следующем виде:

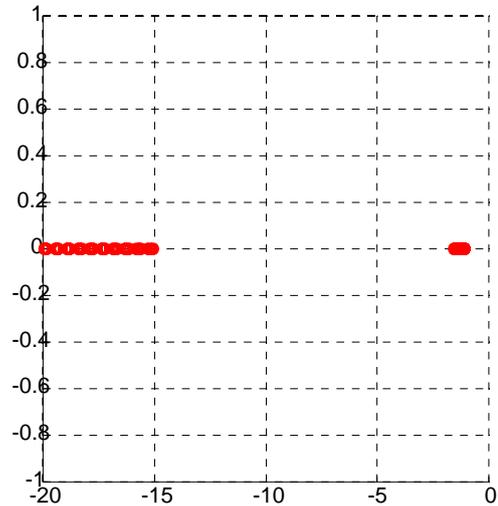


Рис.2.18. Область расположения корней интервального полинома с апериодическими свойствами

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = [\alpha'; \alpha''], \quad \beta = [\beta'; \beta'']. \quad (2.8)$$

Тогда полином вершины A имеет вид

$$A(s) = (s - (\alpha' - i\beta'))(s - (\alpha' + i\beta')) = s^2 - 2\alpha's + \alpha'^2 + \beta'^2,$$

а полином вершины F

$$F(s) = (s - (\alpha'' - i\beta''))(s - (\alpha'' + i\beta'')) = s^2 - 2\alpha''s + \alpha''^2 + \beta''^2. \quad (2.9)$$

В результате многочисленных экспериментов было получено следующее

Предположение 2.3.

Одна из вершин квадрата (прямоугольника) максимальной площади, соответствующего интервальному полиному второго порядка, при задании желаемой области расположения корней в левой полуплоскости в виде (2.8) будет находиться в точке F .

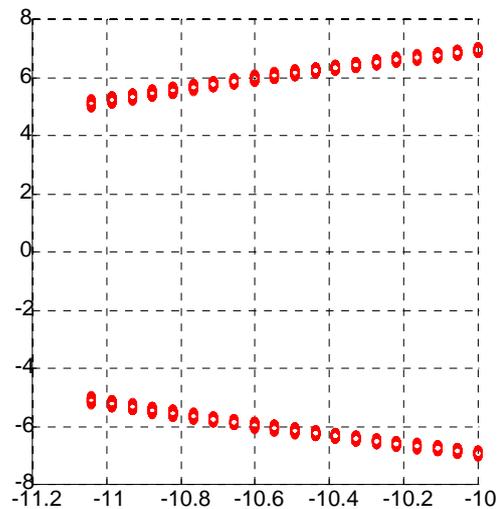


Рис.2.19. Расположение корней интервального полинома из примера 2.4

На основе предположения 2.8 можно сделать вывод, что для получения интервального полинома второго порядка, имеющего только комплексно-сопряженные корни внутри заданной области, описываемой в виде (2.8), итерационную процедуру необходимо запускать из вершины, соответствующей полиному (2.9). Рассмотрим пример построения такого полинома.

Пример 2.4. Пусть желаемая область расположения корней задана в следующем виде: $r_{1,2} = [-20; -10] \pm i[-7; -5]$. Из (2.9) после использования алгоритма получим интервальный полином, вида

$$I(s) = s^2 + [20; 22.08]s + [146.92; 149].$$

Область расположения корней полученного полинома показана на рис.2.19. Требования выполнены.

Поиск D -устойчивого интервального полинома третьего порядка с вещественными корнями ($n = 3$). Формирование относительно устойчивого интервального полинома третьего порядка по заданным областям действительных корней аналогично построению интервального полинома второго порядка. Пусть область расположения корней задана в виде

$$r_1 = [r_1'; r_1'']; r_2 = [r_2'; r_2'']; r_3 = [r_3'; r_3''], r_1 \geq r_2 \geq r_3, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{Im}(r_1) = 0, \mathbf{Im}(r_2) = 0, \mathbf{Im}(r_3) = 0. \quad (2.11)$$

Предположение 2.4. В трехмерном пространстве коэффициентов полинома тупые углы в симплексе, соответствующем множеству полиномов с сосредоточенными параметрами, которые построены по корням из интервалов (2.10), (2.11), располагаются в вершинах N и M , с полиномами

$$N(s) = (s - r_1'')(s - r_2')(s - r_3'') = s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0;$$

$$M(s) = (s - r_1')(s - r_2'')(s - r_3') = s^3 + m_2 s^2 + m_1 s + m_0.$$

В этом случае если одна из вершин прямоугольного параллелепипеда находится в вершине N с полиномом $N(s)$, итерационная процедура заключается в увеличении коэффициентов n_2 и n_0 и уменьшении n_1 и в увеличении m_1 , уменьшении m_2 и m_0 если вершина находится в M с полиномом $M(s)$.

Предположение 2.5. Вершина прямоугольного параллелепипеда максимального объема, соответствующего интервальному полиному третьего порядка с аperiodическими свойствами, вписанного в трехмерный симплекс находится в вершине N с полиномом $N(s)$.

Воспользовавшись предположением 2.5, построим интервальный полином третьего порядка с аperiodическими свойствами согласно предлагаемому алгоритму.

Пример 2.5. Пусть желаемая область расположения корней задана в следующем виде: $r_1 \in [-1; -0.5]$; $r_2 \in [-7; -5]$; $r_3 \in [-20; -15]$.

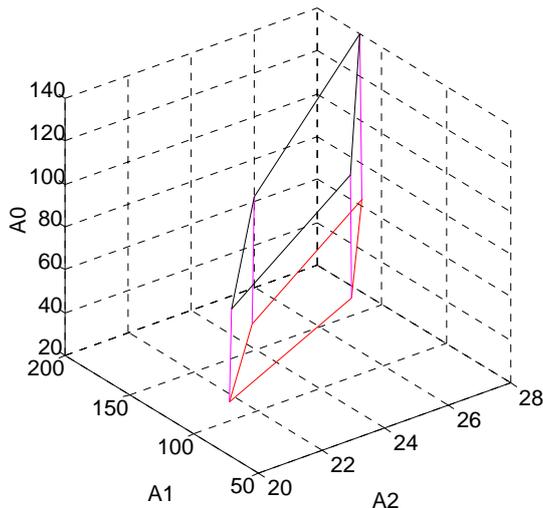


Рис.2.20. Множество полиномов в пространстве коэффициентов

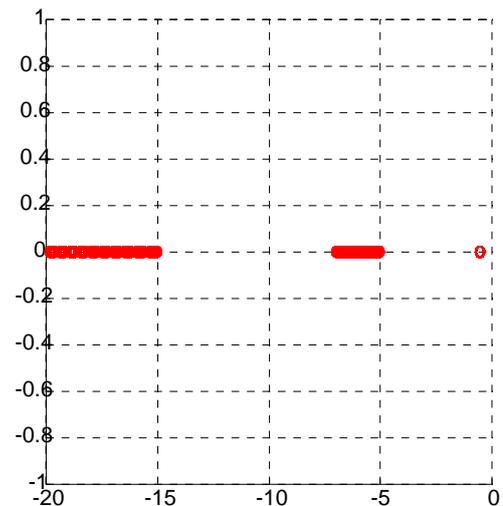


Рис.2.21. Область расположения корней интервального полинома
Интервальный полином, полученный исходя из вышеприведенных предположений и алгоритма поиска выглядит таким образом

Исходя из вышеприведенных предположений и алгоритма поиска выглядит таким образом

$$I(s) = s^3 + [22.5; 25.4]s^2 + [113.1; 116]s + [52.5; 55.4].$$

Множество полиномов с сосредоточенными параметрами в пространстве коэффициентов и область расположения корней интервального полинома на комплексной плоскости показаны на рис.2.20, 2.21 соответственно.

Достоинство предложенного алгоритма поиска D -устойчивого интервального полинома заключается в том, что область расположения корней получаемого интервального полинома в общем случае рассматривается как многосвязная в отличие от алгоритмов, предлагаемых другими авторами [36, 43, 67, 79, 81, 104, 109]. Если предположения, представленные выше, несправедливы, то поиск интервального полинома осуществляется в соответствии с основной процедурой, т.е. перебираются все вершины симплекса, выбираются те, координатные квадранты при которых содержат плоские углы $>90^0$ (см. замечание) и далее по основной процедуре поиска.

В случае когда в пространстве коэффициентов в n -мерном симплексе не найдены вершины, удовлетворяющие поставленному условию, необходимо переместить исходную точку либо на ребро, либо на грань и далее сдвигать ее внутрь симплекса в соответствии с алгоритмом.

4.7. О СОВМЕЩЕННЫХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ В ПРОСТРАНСТВЕ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

Как было отмечено выше использование полиномов с комплексными коэффициентами имеет определенные сложности, поэтому ограничимся рассмотрением полиномов только с действительными коэффициентами.

Будем считать, что координаты вектора $\bar{z} = (z_1; \dots; z_n)$ корней полинома (многочлена) $f(s)$ степени n лексикографически упорядочены с использованием обычного сравнения действительных чисел [9], т.е. $z_k \geq z_{k+1}$, если $\operatorname{Re} z_k > \operatorname{Re} z_{k+1}$, или $\operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} z_{k+1}$ и $\operatorname{Im} z_k \geq \operatorname{Im} z_{k+1}$. Этим устанавливается взаимнооднозначное соответствие между упорядоченными векторами корней и векторами $\bar{a} = (a_0; \dots; a_{n-1})$ коэффициентов приведённых многочленов вида

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Указанный выше лексикографический порядок естественным образом сужается на множество C^+ (C^+ - верхняя половина комплексной плоскости с вещественной осью), по каждому конечному подмножеству которого однозначно восстанавливается приведённый многочлен.

Установим теперь способ однозначной записи приведённого многочлена степени n с действительными коэффициентами в виде произведения линейного и неприводимых квадратных множителей, в котором скобки с большими парами корней стоят левее скобок с меньшими парами.

Для многочлена нечётной степени, число действительных корней которого нечётно, выделим наибольший действительный корень, и запись множителей начнём с соответствующей ему скобки: $f(s) = (s - x_1)g(s)$. Теперь многочлен чётной степени $g(s)$ (или сам многочлен $f(s)$, если он чётной степени) запишется в виде произведения квадратных трёхчленов $s^2 + p_k s + q_k$, причём неприводимые трёхчлены вполне определены самими парами комплексных корней, а скобки, соответствующие действительным корням (число их чётно) образуются из попарных произведений рядом стоящих скобок $(s - x_k)$, где корни x_k нумеруются в порядке убывания; теперь однозначно определён и порядок следования трёхчленов в разложении: будем считать, что $p_k \leq p_{k+1}$ при всех k , а если $p_k = p_{k+1}$, то $q_k \geq q_{k+1}$. Будем называть такое разложение *упорядоченным*.

Введём координаты упорядоченных корневых наборов индукцией по степени многочлена.

Базис индукции. Если многочлен $f(s)$ с действительными коэффициентами имеет первую степень, то его единственный корень действителен и совпадает со своей координатой на первой оси R_1 ; если это многочлен второй степени, то паре его корней сопоставляется одна точка на плоскости R_2 : кратным действительным корням $x_1 = x_2$ сопоставляется точка $x = x_1$ оси абсцисс; различным действительным корням $x_1 > x_2$ сопоставляется точка с абсциссой и отрицательной ординатой

$$x = (x_1 + x_2) / 2; \quad y = (x_1 - x_2) / 2; \quad (2.12)$$

комплексно сопряжённым корням $z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ сопоставляется точка с абсциссой α и положительной ординатой β .

Замечание 2.1. В случае кратных корней они легко восстанавливаются по своим координатам: $x_1 = x + y$; $x_2 = x - y$ ($y > 0$).

Замечание 2.3. Зависимость координат от коэффициентов непрерывна: абсцисса всегда равна $p_k / 2$; а квадрат ординаты равен модулю дискриминанта D . Если дискриминант отрицателен и стремится к нулю, то точка $(x; y)$ верхней координатной полуплоскости превращается в точку $(x; 0)$, соответствующую кратной паре; то же самое верно и для $D > 0$.

Пусть координаты для многочлена степени $n - 2$ уже построены.

Индукционный шаг. Запишем упорядоченное разложение многочлена $f(s)$ степени n . Тогда правая квадратичная скобка в разложении определяет некоторую корневую пару, которая имеет такие же координаты на плоскости R_2 , какие указаны в базисе индукции. Они приписываются справа к координатам остальных корней многочлена $f(s)$, получающихся в соответствии с индукционным предположением.

Перед тем как использовать приведенные положения для построения оптимизационной процедуры, необходимо желаемую область D на комплексной плоскости также привести к области-части корневого пространства R^n в совмещенных декартовых координатах, т.е. выявить ограничения на расположение корней. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2.6. Пусть желаемой областью D на комплексной плоскости является область, ограниченная параболой (рис.2.22) и описываемая выражением

$$\alpha \leq -a - b\beta^2.$$

Тогда в корневом пространстве R^n комплексно-сопряженные корни должны удовлетворять ограничению $x_{1,2} \leq -a - b\beta^2 \pm i\beta$, а вещественные корни ограничению $x \leq -a$.

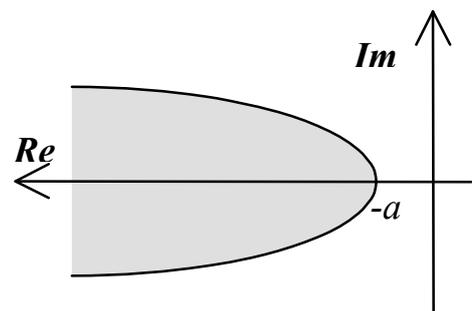


Рис.2.22. Возможный вид области D на комплексной плоскости

Замечание 2.4. Зависимость совмещенных координат от коэффициентов многочлена кусочно непрерывна⁵.

2.8. ВЫВОДЫ

По результатам главы можно сказать следующее.

1. Предложен алгоритм построения корневого пространства R^n полиномов степени n путем введения совмещенных криволинейных координат в пространстве коэффициентов. Данное отображение одного пространства в другое является взаимнооднозначным и кусочно-непрерывным, что играет большую роль в оптимизационном синтезе регуляторов пониженного порядка. Даны новые свойства отображения пространства корней и коэффициентов полиномов.

Даны выражения, связывающие область расположения корней на комплексной плоскости и область в совмещенных декартовых координатах корневого пространства R^n .

2. Из многочисленных исследований выявлен ряд свойств и предположений, на основе которых предложена методика построения D -устойчивого интервального полинома, имеющего заданное расположение корней.

Достоинством предложенной методики является то, что область расположения корней на комплексной плоскости рассматривается как многосвязная. Кроме того в результате использования этой методики можно получить интервальные коэффициенты полинома с наибольшей шириной. С помощью такой методики можно получить интервальные полиномы с аperiодическими или колебательными свойствами.

⁵ Следует из замечания 4.2 и конструкции координат. Разрывы 1-го рода возникают из-за перестановок скобок в упорядоченном разложении на гиперповерхностях $\operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} z_{k+1}$.

При использовании приведенных предположений алгоритм поиска D -устойчивых интервальных полиномов низкого порядка может быть сильно упрощен.

ГЛАВА 3

СИНТЕЗ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВА РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ ПРОИЗВОДНОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Как отмечалось в предыдущей главе, подзадача поиска желаемого D -устойчивого интервального полинома в задаче синтеза регулятора для систем управления с интервальными параметрами играет немаловажную роль. И несмотря на большое количество публикаций по данной проблеме она до сих пор полностью не решена¹.

В данной главе обобщаются свойства, связывающие области размещения корней производного и исходного полиномов на случай, когда их коэффициенты заданы в интервальном виде. Предлагаются новые свойства полиномов с сосредоточенными параметрами, удовлетворяющих условиям Липатова, и интервальных липатовских полиномов. На основе представленных свойств предлагаются алгоритмы построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней, которые заключаются в последовательном по-

¹ Идеальным вариантом был бы случай, когда вообще не надо было бы переходить от описания желаемых свойств системы в виде области расположения корней на комплексной плоскости к желаемому характеристическому интервальному полиному системы. Либо предложить какой-либо простой способ преобразования исходного интервального полинома системы таким образом, чтобы он отвечал поставленным требованиям т.е. являлся желаемым.

строении желаемого интервального полинома путем изменения его младших коэффициентов.

На основе представленных свойств о расположении корней исходного интервального полинома и его производных, алгоритмов построения D -устойчивых интервальных полиномов, новых свойств интервальных липатовских полиномов предлагается методика синтеза регулятора, располагающегося в канале обратной связи, для интервальных систем управления с малым параметром.

Основные результаты по данной главе были опубликованы в [13, 14, 20, 54, 117].

3.2. О СВОЙСТВАХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА

Напомним малоизвестное утверждение Гаусса [49, 52] и следствие из него, которые в дальнейшем нам будут необходимы.

Утверждение 3.1 (Гаусс). Пусть D - некоторая выпуклая область в \mathbb{C} (комплексная плоскость) и все корни полинома $a(s)$ лежат в D . Тогда и корни $\dot{a}(s) = da(s) / ds$ лежат в D .

Следствие 3.1. Пусть D - выпуклая область в \mathbb{C} (комплексная плоскость) и все корни полинома $a(s)$ лежат в D . Тогда и корни $a^{(i)}(s)$, $i = \overline{1, n-1}$ лежат в D .

Стоит отметить, что результат, близкий к этому утверждению, был получен в [21]. Представим его ниже.

Утверждение 3.2. Пусть $a(s)$ - комплексный многочлен, s_1, \dots, s_n - его корни, тогда любой корень s_0 его производной удовлетворяет условиям

$$\min_{1 \leq l \leq n} \operatorname{Re} s_l \leq \operatorname{Re} s_0 \leq \max_{1 \leq l \leq n} \operatorname{Re} s_l; \quad (3.1)$$

$$\min_{1 \leq l \leq n} \operatorname{Im} s_l \leq \operatorname{Im} s_0 \leq \max_{1 \leq l \leq n} \operatorname{Im} s_l. \quad (3.2)$$

Обобщим вышеприведенные утверждения на интервальный случай. Воспользуемся понятием \mathcal{J} - производной функции [40], которое позволяет распространить понятие производной на интервальные функции, а именно: пусть $f(s)$ - интервальная функция от комплексной переменной s , тогда для малого h выделяем линейную часть поращению

$$f(s+h) - f(s) = \varphi(s)h + r(h).$$

В качестве производной $f'(s)$ берется $\varphi(s)$. Для интервальных полиномов $\sum_{i=0}^n a_i s^i$ это приводит к $\sum_{i=0}^{n-1} i a_i s^{i-1}$, где $a_i \in I(\mathbf{R})$, $I(\mathbf{R})$ - множество интервальных чисел. Тогда справедливо следующее

Утверждение 3.3. Пусть D - выпуклая область в \mathbf{C} и все корни полинома $\sum_{i=0}^n a_i s^i$ степени n лежат в D . Тогда и корни $\sum_{i=0}^{n-1} i a_i s^{i-1}$ лежат в D , где $a_i \in I(\mathbf{R})$.

Доказательство этого утверждения очевидно и основано на том факте, что интервальный полином - это множество полиномов с сосредоточенными параметрами, а его производная - множество производных полиномов с сосредоточенными параметрами.

В [46] утверждается, что области расположения корней полиномов с сосредоточенными параметрами $a^{(i)}(s)$, $i = \overline{1, n-1}$ с увеличением i будут сходиться к точке. По аналогии можно предположить существование интервала сходимости, к которому сходятся области расположения корней производных интервальных полиномов. Безусловно, было бы полезно знать к какому интервалу (корню $n-1$ производной) сходятся области расположения корней производных интервального полинома. В связи с этим справедливо

Утверждение 3.4. Пусть $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$; $a_n \in \mathbf{R}$, $a_i \in I(\mathbf{R})$ - некоторый интервальный полином и s_1, \dots, s_n - его интервальные

корни. Тогда области расположения корней интервальных полиномов $a^{(i)}(s)$, $i = \overline{1, n-1}$ с увеличением i будут сходиться к интервалу

$$s_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j = -\frac{a_{n-1}}{na_n}, \quad (3.3)$$

который далее будем называть интервалом сходимости.

Доказательство. Для доказательства вычислим интервал, в котором находятся корни полинома

$$a^{(n-1)}(s) = n!a_n s + (n-1)!a_{n-1}.$$

Согласно теореме Виета [96] и с учетом правил интервальной арифметики [73] для полинома $a(s)$

$$a_{n-1} / a_n = -\sum_{i=1}^n s_i,$$

вычислим корень $a^{(n-1)}(s)$, который равен

$$s_0 = -\frac{(n-1)!a_{n-1}}{n!a_n} = -\frac{a_{n-1}}{na_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j.$$

Таким образом, принимая во внимание утверждение 3.3 и следствие 3.1 можно констатировать, что области расположения корней полиномов $a^{(i)}(s)$, $i = \overline{1, n-1}$ с увеличением i будут сходиться к интервалу (3.3). Проиллюстрируем вышесказанное на примере.

Пример 3.1. Рассмотрим интервальный полином 6-й степени

$$a(s) = s^6 + [3;4]s^5 + [12;13]s^4 + [42;45]s^3 + [2;10]s^2 + [-92;-81]s + [230;238].$$

Производные интервального полинома будут иметь следующий вид:

$$a^{(1)}(s) = 6s^5 + [15;20]s^4 + [48;52]s^3 + [126;135]s^2 + [4;20]s + [-92;-81];$$

$$a^{(2)}(s) = 30s^4 + [60;80]s^3 + [144;156]s^2 + [252;270]s + [4;20];$$

$$a^{(3)}(s) = 120s^3 + [180;240]s^2 + [288;312]s + [252;270];$$

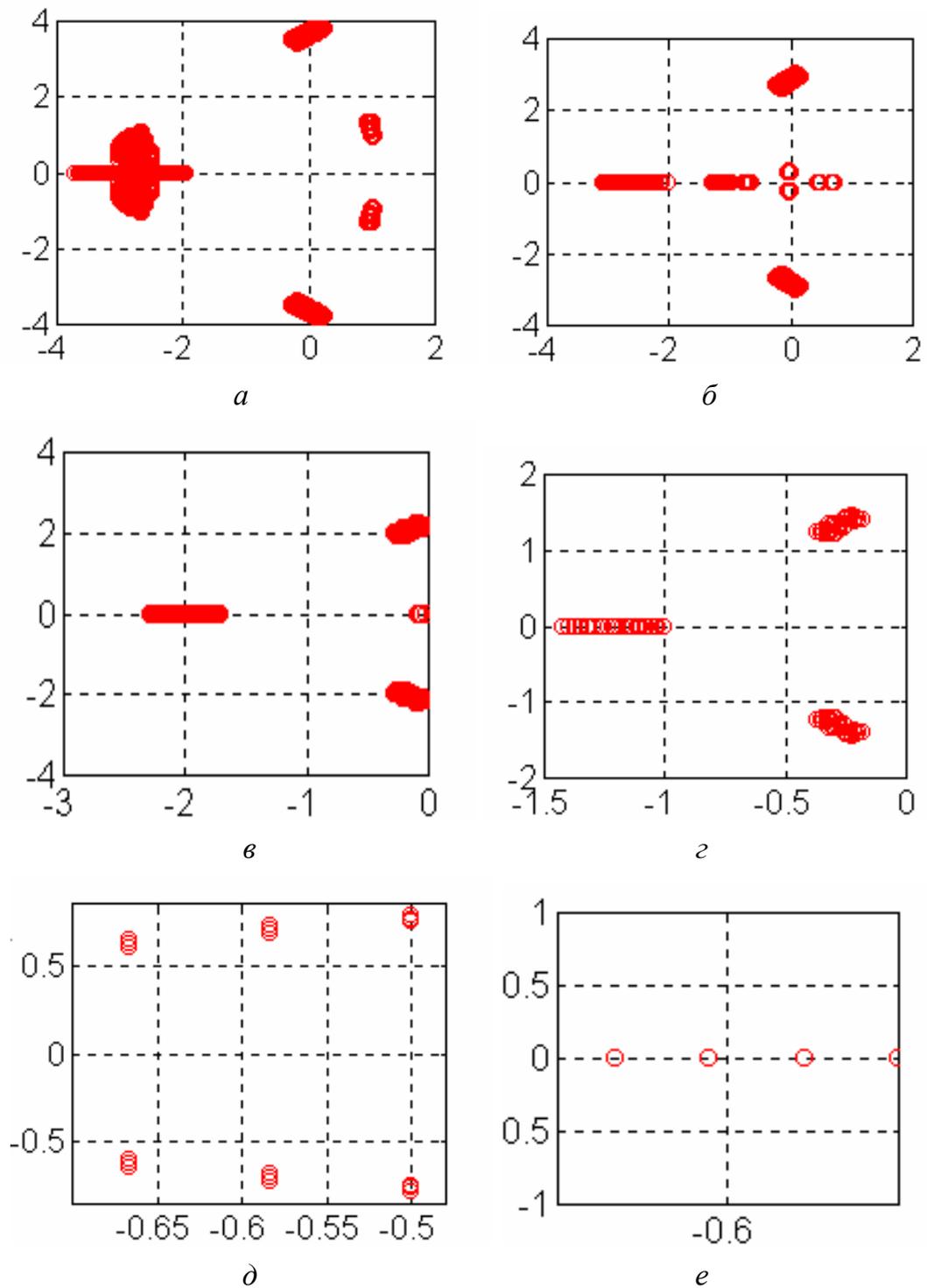


Рис.3.1. Расположение корней интервального полинома и его производных: *a* - исходного полинома; *б* - первой производной; *в* - второй; *г* - третьей; *д* - четвертой; *е* - пятой производных

$$a^{(4)}(s) = 360s^2 + [360;480]s + [288;312];$$

$$a^{(5)}(s) = 720s + [360;480].$$

Расположение корней производных интервальных полиномов показано на рис.3.1. Как можно заметить, область расположения корней сжимается до интервала (3.3) с увеличением порядка производной.

3.3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ D-УСТОЙЧИВОГО ПОЛИНОМА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В [67] процедура построения интервального полинома с желаемым расположением корней осуществляется на основе достаточных условий расположения корней в заданном секторе, полученных А.В. Липатовым [43]. Напомним некоторые свойства *липатовских полиномов* и введем новые, которые в дальнейшем нам понадобятся для решения задачи *D*-стабилизации.

Для полинома $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$ условия Липатова выглядят следующим образом:

$$\delta_i \geq \delta_{saf}(n, \varphi), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \delta_i = a_i^2 / (a_{i+1} a_{i-1}), \quad (3.4)$$

где $\delta_{saf}(n, \varphi)$ - действительная функция степени полинома - n и угла - φ , значения которой выбираются по соответствующим номограммам [66]. Если эти условия выполняются, то корни полинома лежат внутри сектора $\pi \pm \varphi$ ($\varphi \leq \pi / 2$).

В дальнейших рассуждениях без потери общности предположим, что $\delta_{saf}(n, \varphi) = 2.2$. Обозначим множество липатовских полиномов² через L . Тогда справедливо следующее

² Здесь и далее полиномы, удовлетворяющие условию (3.4) будем называть *липатовскими полиномами*.

Утверждение 3.5. Множество полиномов L может быть описано семейством однопараметрических кривых K с помощью масштаба по времени M .

Доказательство. Пусть задан нормированный полином³ вида

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (3.5)$$

Вводя масштаб по времени, представим оператор дифференцирования в виде $\tilde{s} = d/d(Mt)$, тогда $\tilde{s} = M^{-1}s$, а (3.5) приобретает следующий вид:

$$(M^{-1}\tilde{s})^n + a_{n-1}(M^{-1}\tilde{s})^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (3.6)$$

Нормируя полином (3.6) по старшей степени, в результате получим

$$\tilde{s}^n + a_{n-1}M\tilde{s}^{n-1} + \dots + M^n a_0 = 0,$$

а после переобозначения коэффициентов $\tilde{a}_i = a_i M^{n-i}$

$$\tilde{s}^n + \tilde{a}_{n-1}\tilde{s}^{n-1} + \dots + \tilde{a}_0 = 0. \quad (3.7)$$

Согласно этому утверждению можно сказать, что любой полином Липатова n -го порядка может быть получен умножением соответствующих коэффициентов исходного липатовского полинома на параметр масштабирования, возведенный в $(n - i)$ -ую степень. К примеру исходным липатовским полиномом пятого порядка, отнормированным по коэффициенту при s^4 , будет

$$k(s) = s^5 + s^4 + 0.4545s^3 + 0.0939s^2 + 0.0088s + 0.00038.$$

Из проведенных исследований и предыдущего утверждения вытекает следующее

Свойство 3.1. Семейство однопараметрических кривых, описывающих множество полиномов Липатова является упорядоченным $(\forall l_1, l_2 \in L, \forall i \in n \ l_1(i) > l_2(i) \vee l_1(i) < l_2(i))$.

³ В некоторых зарубежных источниках полином, коэффициент при старшей степени которого равен единице, называют **моническим**.

Если графически изобразить полиномы, откладывая по оси абсцисс коэффициенты полиномов в порядке убывания, а по оси ординат значения этих коэффициентов, получим квазидиаграммы Ньютона. Некоторые полиномы Липатова пятого порядка, полученные путем масштабирования, показаны на рис.3.2, где a_i - i -й коэффициент полинома; M - параметр масштабирования.

Воспользовавшись вышеприведенными положениями о липатовских полиномах и расположении корней производной полинома по отношению к расположению корней исходного полинома представим следующий **алгоритм построения D -устойчивого полинома** (с сосредоточенными параметрами):

- выбирается устойчивый полином первого порядка с желаемым расположением корней;
- вычисляется неопределенный интеграл по s от выбранного полинома;
- свободный коэффициент проинтегрированного полинома находится согласно условиям Липатова (3.4);
- далее полученный полином опять интегрируется, а свободный коэффициент определяется исходя из (3.4);

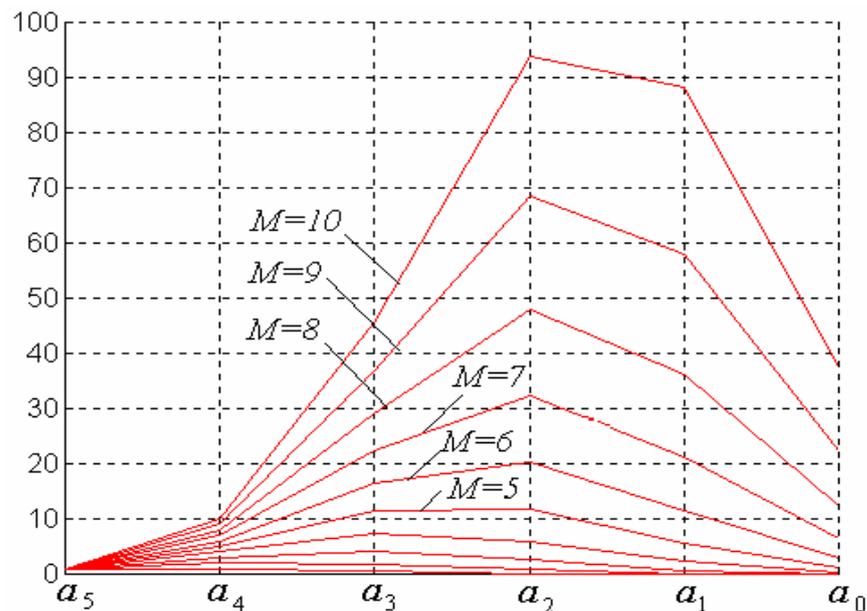


Рис.3.2. Полиномы Липатова, полученные масштабированием

- процедура повторяется до тех пор, пока не будет найден полином нужного порядка⁴.

Обозначим множество устойчивых полиномов, построенных с помощью указанной процедуры через M . Тогда справедливо следующее

Утверждение 3.6. *Множество полиномов M может быть описано семейством однопараметрических кривых T с помощью масштаба по времени M .*

Таким образом любой полином множества M может быть найден посредством умножения i -го коэффициента исходного полинома на M^{n-i} . Примером одного из таких исходных полиномов пятого порядка, отнормированного по коэффициенту при s^4 , может быть следующий полином:

$$t(s) = s^5 + s^4 + 0.7273s^3 + 0.3606s^2 + 0.1084s + 0.0148.$$

Свойства, характерные для липатовских полиномов, имеют место и для полиномов, построенных согласно вышеприведенной методике.

3.4. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ D-УСТОЙЧИВЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Распространим вышеприведенные свойства на интервальные полиномы. В этом случае (3.4) представляется в виде

$$\delta_{saf} \cdot [a'_{i-1}; a''_{i-1}] = [a'_i; a''_i]^2 / [a'_{i+1}; a''_{i+1}], \quad (3.8)$$

где a'_i, a''_i - нижняя и верхняя границы интервального коэффициента a_i . После преобразования в соответствии с правилами интервальной арифметики (3.5) выглядит следующим образом:

⁴ Стоит заметить, что, так как при интегрировании корни «расползаются», и в результате действия процедуры может получиться неустойчивый полином, большую роль играет выбор полинома первого порядка. В этом случае, если это возможно, рекомендуется либо изменить желаемое расположение корней, либо воспользоваться другой процедурой поиска свободного коэффициента.

$$\delta_{saf} a'_{i-1} = a_i'^2 / a_{i+1}''; \quad \delta_{saf} a''_{i-1} = a_i''^2 / a_{i+1}' \quad (3.9)$$

Определение 3.1. Интервальные полиномы, коэффициенты которых вычислены исходя из (3.9), будем называть **интервальными липатовскими полиномами**.

Обозначим множество интервальных липатовских полиномов через P . На квазидиаграммах Ньютона интервальный полином будет представлять полосу - семейство однопараметрических кривых, построенных по точечным значениям коэффициентов из заданных интервалов, соответствующих множеству полиномов с сосредоточенными параметрами (рис.3.3). По аналогии с утверждением 3.5, учитывая, что интервальный полином - это множество полиномов с коэффициентами $a_i \in I(\mathbf{R})$, представим следующее

Утверждение 3.7. Множество интервальных полиномов P может быть описано семейством полос однопараметрических кривых $F \subset P$ с помощью масштаба по времени M .

Доказательство этого утверждения сходно с доказательством для полиномов с коэффициентами $a_i \in R$. Из данного утверждения вытекают следующие свойства.

Свойство 3.2. Любой интервальный липатовский полином может быть описан двумя граничными полиномами.

Свойство 3.3. Любой полином принадлежащий интервальному липатовскому полиному также является липатовским.

Исходя из вышесказанного, можно утверждать, что любой интервальный липатовский полином можно получить, умножая соответствующие коэффициенты исходного интервального липатовского полинома $f \in F$ на параметр масштабирования, возведенный в степень $(n - i)$.

На основе приведенных выше свойств интервальных липатовских полиномов предлагается следующий **алгоритм построения интервальных липатовских полиномов**:

1. Коэффициенты полинома a_n , a_{n-1} задаются равными единице, остальные (младшие) интервальные коэффициенты находятся согласно (3.9).

2. Коэффициент a_{n-1} увеличивается на малую величину Δ . Остальные интервальные коэффициенты снова находятся из выражения (3.9).

3. Второй пункт процедуры повторяется до тех пор, пока интервальный полином остается липатовским.

4. Любой другой интервальный липатовский полином n -го порядка находится умножением исходного интервального липатовского полинома, полученного на шаге 3, на коэффициент масштабирования M , возведенный в $(n - i)$ -ую степень⁵.

Примером исходного липатовского интервального полинома пятого порядка, построенного таким образом (для $M \geq 1$), может служить полином вида

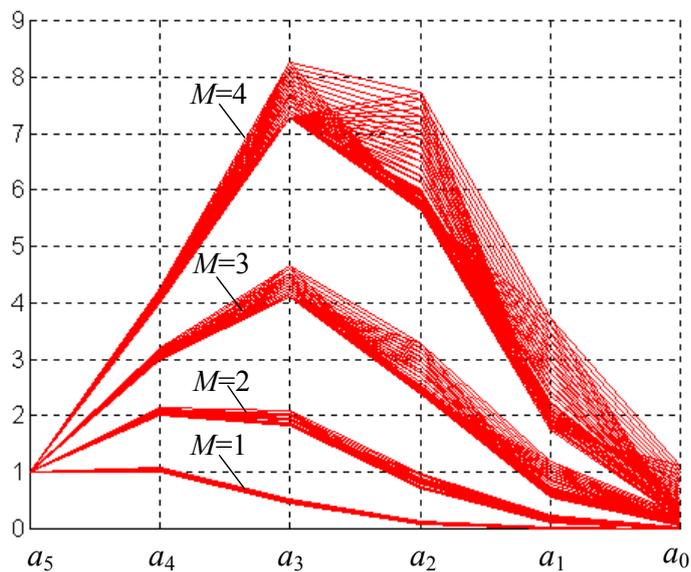


Рис.3.3. Интервальные липатовские полиномы, полученные масштабированием

⁵ Интервальный липатовский полином порядка $p < n$ находится путем отсечения $(p-n)$ младших коэффициентов интервального полинома и умножения оставшейся части полинома на s в степени $(p-n)$. Если необходимо получившийся полином умножается на коэффициент масштабирования.

$$f(s) = s^5 + [1; 1.106]s^4 + [0.4545; 0.5107]s^3 + [0.0886; 0.1186]s^2 + [0.007; 0.014]s + [0.000187; 0.00101]. \quad (3.10)$$

Интервальные липатовские полиномы порядка $n = 5$, полученные путем масштабирования, изображены на квазидиаграммах Ньютона (рис.3.3). Для иллюстрации сказанного приведем несколько примеров.

Пример 3.2. Пусть необходимо найти интервальный липатовский полином, если он существует, порядка $n = 5$ с коэффициентом a_4 , накрывающим интервал $[11; 11.5]$. Коэффициент масштабирования для интервального липатовского полинома $M = 11$. Чтобы получить заданный интервальный липатовский полином, необходимо умножить исходный интервальный липатовский полином (3.10) на параметр масштабирования $M = 11$, возведенный в степень $(n - i)$, где i - степень s . В результате получим полином

$$f(s) = s^5 + [11; 11.66]s^4 + [54.99; 61.79]s^3 + [117.93; 157.86]s^2 + [102.49; 204.97]s + [30.12; 162.6].$$

При этом коэффициент при s^4 накрывает заданный интервал $[11; 11.5]$, т.е. требования выполнены.

Пример 3.3. Пусть необходимо найти интервальный липатовский полином, если он существует, порядка $n = 5$ с коэффициентами: a_3 , накрывающим интервал $[12; 13]$; a_1 , накрывающим интервал $[5; 8]$. Нормирующий множитель для полинома с $a_3 = [12; 13]$ находится из $M = \sqrt{a_2 / a_{2_{\text{исх}}}}$ и равен $M_1 = 5.138$, а для полинома с $a_1 = [5; 8]$ из $M = \sqrt[4]{a_1 / a_{1_{\text{исх}}}}$ и равен $M_2 = 8.939$. Выбрав наименьший коэффициент $M_1 = 5.138$, умножив его на коэффициенты исходного интервального липатовского полинома (3.10), получим полином, по коэффициентам которого видно, что заданные требования выполняются

$$f(s) = s^5 + [5.138; 5.45]s^4 + [12; 13.48]s^3 + [12.02; 16.09]s^2 + [4.88; 9.76]s + [0.67; 3.62].$$

Замечание 3.1. Требования по расположению корней интервального липатовского полинома в заданной области можно обеспечить, выбрав соответствующим образом параметр δ_{saf} . Кроме того, если известна ширина какого-либо интервального коэффициента, то интервальный полином можно строить с ее учетом, например, как в [67].

На основе свойств расположения корней интервального полинома и его производных, а также свойств интервальных липатовских полиномов предложим несколько другой **алгоритм построения D -устойчивых интервальных полиномов**:

1. Выбирается полином первого порядка с желаемым расположением корней вида $a_1s + a_0$, где $a_1 \in R$; $a_0 \in IR$.
2. Вычисляется неопределенный интеграл по s от выбранного полинома.
3. Свободный коэффициент полученного интегрированием многочлена находится согласно условиям Липатова (3.9).
4. Возврат к шагу 2 и повтор процедуры до тех пор, пока не будет найден D -устойчивый интервальный полином желаемого порядка или пока не нарушится условие о принадлежности корней полученного полинома области D .

Необходимо отметить, что, так как при интегрировании полинома его корни «разъезжаются», большую роль играет выбор области D -устойчивости. Если в результате процедуры получен полином, корни которого выходят за область D -устойчивости, необходимо скорректировать исходный полином первого порядка и повторить процедуру.

Пусть X - множество устойчивых интервальных полиномов, построенных в соответствии с вышеприведенной методикой. Тогда справедливо следующее

Утверждение 3.8. Множество интервальных полиномов X может быть описано семейством полос однопараметрических кривых $V \subset X$ с помощью масштаба по времени M .

Следствием этого утверждения являются свойства интервальных полиномов множества X , аналогичные свойствам интервальных липатовских полиномов.

Свойство 3.4. *Любой интервальный полином из множества X может быть описан двумя граничными полиномами.*

Свойство 3.5. *Корни любого полинома, принадлежащего интервальному полиному из X с корнями в области D , располагаются в области D .*

Таким образом любой интервальный полином множества X можно получить, умножая соответствующие коэффициенты исходного интервального полинома на параметр масштабирования в степени $(n - i)$. Примером исходного интервального полинома $v \in V$ пятого порядка может служить полином вида

$$v(s) = s^5 + [1; 1.0177]s^4 + [0.7272; 0.7532]s^3 + [0.3544; 0.3868]s^2 + [0.101; 0.01247]s + [0.012; 0.0199] \quad (3.11)$$

Квазидиаграммы Ньютона для семейства однопараметрических кривых, соответствующих интервальным полиномам множества X порядка $n = 5$, полученных при помощи масштабирования, изображены на рис.3.4. Покажем на примере, как можно сформировать интерваль-

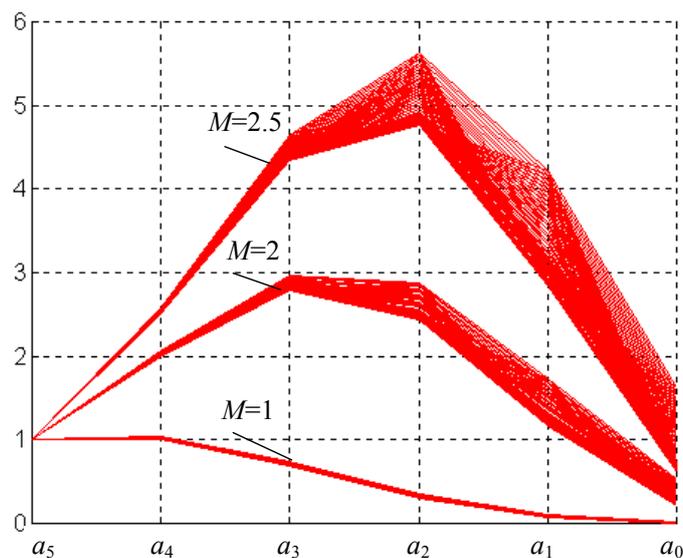


Рис.3.4. Интервальные полиномы из множества X

ный полином из множества X , если известны некоторые его параметры.

Пример 3.4. Пусть необходимо найти устойчивый интервальный полином, если он существует, порядка $n = 5$ с коэффициентом \tilde{a}_2 , покрывающим интервал $[700; 750]$. Коэффициент масштабирования для интервального полинома находится из $M = \sqrt[3]{\tilde{a}_2/a_{2\text{исх}}}$ и равняется $M = 12.547$. Умножим исходный интервальный полином (3.11) на M^{n-i} и получим

$$v(s) = s^5 + [12.547; 12.769]s^4 + [114.48; 118.57]s^3 + [700; 764]s^2 + [2503; 3090.5]s + [3731.5; 6188].$$

Как видим поставленные требования выполнены. Получен D -устойчивый интервальный полином с коэффициентом $\tilde{a}_2 = [700; 764]$, покрывающим требуемый интервал $[700; 750]$.

Найденные с помощью предложенных методик D -устойчивые интервальные полиномы в дальнейшем могут использоваться в качестве желаемых интервальных характеристических полиномов систе-

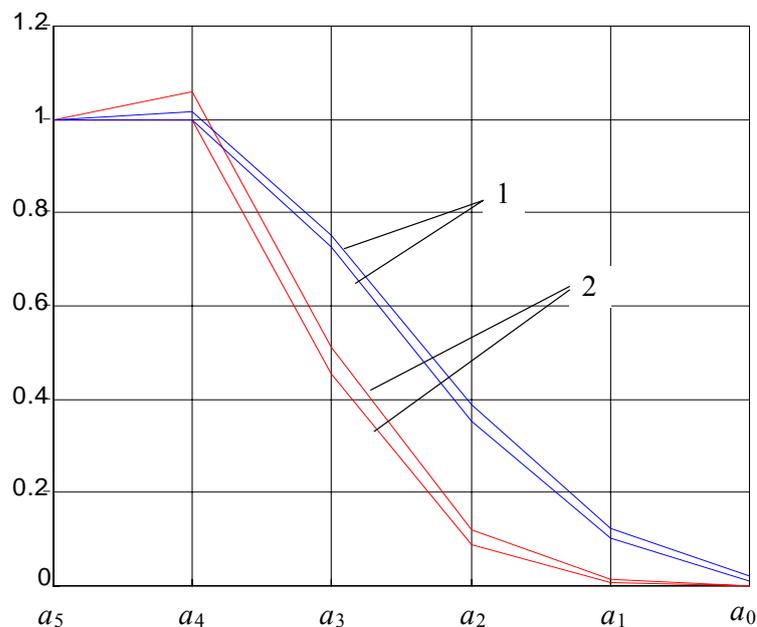


Рис.3.5. Квазидиаграммы Ньютона для D -устойчивых интервальных полиномов, построенных различными способами

мы. Первый способ построения устойчивых интервальных полиномов рекомендуется использовать, если необходимо обеспечить попадание корней полиномов в заданный сектор или обеспечить наибольшую ширину интервальных коэффициентов при старших степенях полинома, а второй - способ при построении интервальных полиномов с коэффициентами наибольшей ширины при младших степенях. На рис.3.5 приведены квазидиаграммы Ньютона для исходного интервального полинома, построенного с помощью интегрирования - 1, и исходного интервального липатовского полинома - 2, графически дающие представление о различии этих полиномов. Кроме того, второй способ построения полиномов эффективен при решении задачи D -стабилизации интервальных полиномов, с которой мы познакомимся в следующем разделе.

3.5. D -СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА С ПОМОЩЬЮ КОРРЕКЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ СТЕПЕНЯХ s

Так как при синтезе систем управления с интервальными параметрами осуществляется D -стабилизация характеристического интервального полинома системы, можно сделать предположение о возможности использования вариации методики D -стабилизации полинома с сосредоточенными параметрами [46] для решения поставленной задачи. Нужно отметить, что предлагаемая методика может дать корректирующий полином пониженного порядка т.е. $\deg x(s) < n - 1$, что несомненно является ее достоинством.

Алгоритм D -стабилизации интервального полинома с помощью коррекции коэффициентов при младших степенях s заключается в последовательном вычислении производных полинома $a(s)$ до тех пор, пока все корни какой-либо l -й производной $a^{(l)}(s)$ не будут принадлежать желаемой области D , где l - порядок производной $a(s)$. Далее интегрируя полином $a^{(l)}(s)$ до полинома степени, равной степени $a(s)$, и

выбирая свободный коэффициент после каждого интегрирования таким образом, чтобы область расположения корней полиномов $\hat{a}^{(i)}(s)$ принадлежала D и в конечном итоге, чтобы корни $\hat{a}(s)$ принадлежали области D , отыскивается скорректированный интервальный полином $\hat{a}(s)$ степени, равной степени $a(s)$.

Пусть задан некоторый интервальный полином $a(s)$ с $\deg a(s) = n$. Необходимо определить такой полином $x(s)$ с сосредоточенными параметрами и $\deg x(s) \leq n - 1$, чтобы корни скорректированного интервального полинома $\hat{a}(s) = a(s) + x(s)$ принадлежали желаемой области D .

Здесь необходимо сказать несколько слов о выборе D исходя из расположения корней исходного полинома. На основании вышеприведенных свойств о расположении корней исходного интервального полинома и его производных можно предложить условия разрешимости задачи D -стабилизации в виде следующих утверждений.

Утверждение 3.9. (Необходимое условие разрешимости задачи D -стабилизации). Пусть D - желаемая область расположения корней скорректированного интервального полинома. Тогда для того чтобы задача D -стабилизации имела решение, необходимо, чтобы интервал (3.3) принадлежал области D .

Отметим, что доказательство этого утверждения очевидно.

Основываясь на многочисленных примерах, можно добавить, что для увеличения вероятности решения вышеупомянутой задачи, интервал (3.3) должен располагаться как можно ближе к “центру” области D .

Утверждение 3.10. (Необходимое условие разрешимости задачи D -стабилизации). Для того чтобы задача D -стабилизации имела решение необходимо, чтобы

$$\omega(\hat{a}_j^{(i)}) \geq \omega(a_j^{(i)}), \quad (3.12)$$

где $\omega(\hat{a}_j^{(i)}) = \hat{a}_j^{(i)} - \hat{a}_j'^{(i)}$, $\omega(a_j^{(i)}) = a_j^{(i)} - a_j'^{(i)}$ - ширина интервальных коэффициентов полиномов [73]; $i = \overline{0, n-1}$; $j = \overline{0, n-i}$.

Доказательство этого утверждения очевидно и основано условиях разрешимости задачи модального синтеза систем управления с интервальными параметрами [68]. Представим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи D -стабилизации, если необходимо получить корректирующий полином только степени $\deg x(s) \leq n-2$.

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи D -стабилизации.

Для того чтобы задача D -стабилизации имела решение необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее

Утверждение 3.11. Пусть D - желаемая область расположения корней скорректированного интервального полинома $\hat{a}(s) = a(s) + x(s)$, причём $\deg a(s) = n$. Тогда чтобы задача D -стабилизации имела решение необходимо и достаточно, чтобы интервал (3.3) принадлежал области D и $\deg x(s) = n-2$.

Доказательство. По условиям утверждения единственным требованием к расположению корней $\hat{a}(s) = \sum_{i=0}^n \hat{a}_i s^i$, где $\hat{a}_n \in \mathbf{R}$; $\hat{a}_i \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$; $i = \overline{0, n-1}$, по теореме Виета [8] будет соотношение

$$-\sum_{i=1}^n s_i = \frac{\hat{a}_{n-1}}{\hat{a}_n}. \quad (3.13)$$

Найдём какое-либо решение, удовлетворяющее области D . Если $s_1 = s_2 = \dots = s_n = s_0$, тогда (3.13) можно записать в виде

$$-ns_0 = \hat{a}_{n-1} / \hat{a}_n. \quad (3.14)$$

Учитывая (3.3), равенство (3.14) можно переписать как

$$-n \left(-\frac{a_{n-1}}{na_n} \right) = \frac{\hat{a}_{n-1}}{\hat{a}_n}. \quad (3.15)$$

Так как $\deg x(s) = n - 2$ то $\hat{a}_n = a_n$; $\hat{a}_{n-1} = a_{n-1}$, поэтому (3.15) всегда имеет место независимо от a_i , $i = \overline{0, n-2}$. Следовательно, с помощью $x(s)$ всегда можно добиться, по крайней мере, предложенного выше расположения корней $\hat{a}(s)$. Используя теорему Виета представленное утверждение можно распространить на степень корректирующего полинома $x(s)$ меньшую $n - 2$. Ниже предлагается непосредственно **описание алгоритма D -стабилизации** интервального полинома $a(s)$.

Шаг 1. Вначале определяется интервал, к которому будут сходиться области расположения корней i -х производных интервального полинома $a(s)$ исходя из (3.3)⁶. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Для заданной области D проверяем выполнение условия разрешимости задачи D -стабилизации (утверждения 3.9, 3.11). Если данное условие не выполняется, то необходимо выйти из алгоритма и скорректировать область D (изменение условий постановки задачи). Иначе - переходим к шагу 3.

Шаг 3. Последовательно вычисляем производные полинома $a(s)$ до тех пор, пока все корни какой-либо l -й производной $a^{(l)}(s)$ не будут принадлежать D , где l - порядок производной $a(s)$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Далее производится последовательное интегрирование полинома $a^{(l)}(s)$ до полинома степени, равной степени $a(s)$. Свободный интервальный коэффициент после каждого интегрирования подбирается таким образом, чтобы область

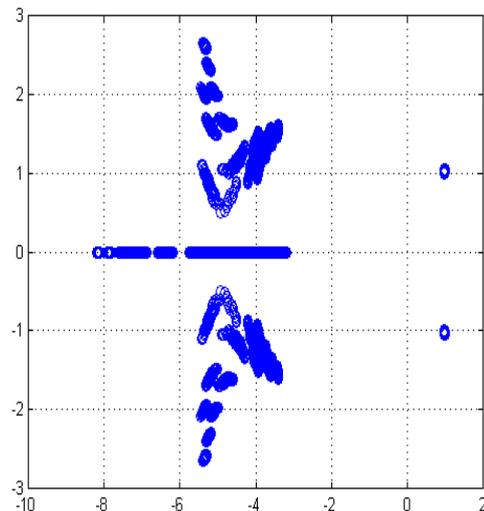


Рис. 3.6. Корни исходного интервального полинома

⁶ Отметим, что здесь для определения интервала схождения удобнее пользоваться не корнями исходного полинома, а его старшими коэффициентами.

расположения корней полиномов $\hat{a}^{(i)}(s)$ принадлежала D и выполнялось утверждение 3.10. Выбор свободных коэффициентов можно осуществить либо используя какую-либо итерационную процедуру, либо вычисляя свободный коэффициент с помощью методик, предложенных в предыдущем разделе. Если на каком-то этапе не удастся найти такой свободный интервальный коэффициент при котором корни интервального полинома $\hat{a}^{(i)}(s)$ располагались бы в заданной области D , то необходимо увеличить порядок производной l или изменить желаемую область D и заново повторить данную процедуру.

В результате выполнения представленных шагов получаем скорректированный полином $\hat{a}(s)$ степени, равной степени $a(s)$.

Шаг 5. Определяем стабилизирующий полином как

$$x(s) = \hat{a}(s) (-) a(s), \quad (3.16)$$

где $(-)$ - интервальная операция вычитания из расширенной арифметики Маркова (интервальная арифметика с нестандартным вычитанием и делением)⁷.

Пример 3.5. Рассмотрим неустойчивый полином

$$a(s) = s^5 + [12;13]s^4 + [42;45]s^3 + [5;7]s^2 - [89;83]s + [231;237],$$

который имеет корни, изображенные на рис.3.6. Потребуем, чтобы вещественные части корней скорректированного интервального полинома принадлежали интервалу $[-9.5; -0.2]$. Заданным расположением корней обладает лишь интервальный полином 3-й производной

$$a^{(3)}(s) = 60s^2 + [288;312]s + [252;270].$$

Вычисляем интеграл от $a^{(3)}(s)$ и подбираем свободный интервальный коэффициент c таким образом, чтобы расположение корней полинома

$$\hat{a}^{(2)}(s) = \int a^{(3)}(s)ds + c$$

⁷ Нестандартная операция вычитания $(-)$, определенная для элементов $A, B \in I(\mathbf{R})$, выглядит следующим образом $A(-)B = [\min\{a' - b', a'' - b''\}, \max\{a' - b', a'' - b''\}]$ [1,6,90].

удовлетворяло желаемому интервалу. Выбор c можно осуществить, например, используя корневой годограф. Выбираем $c=[110;130]$ в результате имеем

$$\hat{a}^{(2)}(s) = 20s^3 + [144;156]s^2 + [252;270]s + [110;130].$$

Повторяя далее процедуру интегрирования получаем при $c=[38;42]$

$$a^{(1)}(s) = 5s^4 + [48;52]s^3 + [126;135]s^2 + [110;132]s + [38;42].$$

Аналогично для $\int a^{(1)}(s)ds$ выбираем $c=[7;13]$, тогда

$$\hat{a}(s) = s^5 + [12;13]s^4 + [42;45]s^3 + [59;61]s^2 + [37;43]s + [7;13].$$

Как можно заметить, результирующий полином удовлетворяет заданному расположению корней (рис.3.7). И в результате из (3.16) получаем корректирующий полином

$$x(s) = 54s^2 + 126s - 224.$$

Важно отметить, что корректирующий полином имеет порядок $n=2$, что является достоинством по сравнению с другими методами, дающими корректирующий полином порядка всего на единицу меньше порядка исходного полинома.

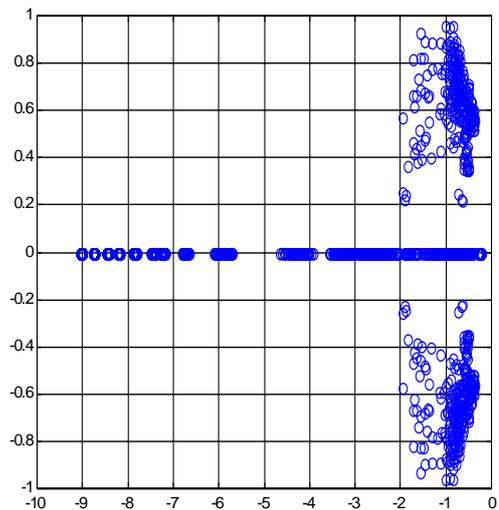


Рис.3.7. Корни скорректированного интервального полинома

3.6. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА

Постановка задачи синтеза. Пусть одноканальный объект управления n -го порядка без нулей задан передаточной функцией вида

$p(s) = n_p / d_p(s)$, где $d_p(s) = \sum_{i=0}^n d_{pi}s^i$; $d_{pn} \in \mathbf{R}$; $d_{pi} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$. Необходимо синтезировать такой регулятор, чтобы корни медленных движений характеристического полинома замкнутой системы принадлежали заданной области D .

Для решения поставленной задачи синтеза примем структуру регулятора в виде

$$c(s) = n_c(s) / d_c(\mu s),$$

где $n_c(s) = \sum_{i=0}^m n_{ci}s^i$; $d_c(\mu s) = \sum_{i=1}^m d_{ci}(\mu s)^i + 1$; $m \leq n-1$; μ - малый параметр. Тогда характеристический полином $d_f(s)$ замкнутой системы представляется как

$$d_f(s) = n_p n_c(s) + d_p(s) d_c(\mu s). \quad (3.17)$$

После некоторых преобразований (3.17) можно представить

$$\begin{aligned} d(s) &= (n_p n_{c0} + d_{p0}) + (n_p n_{c1} + d_{p1} + d_{p0} d_{c1} \mu) s + \\ &+ (n_p n_{c2} + d_{p2} + d_{p1} d_{c1} \mu + d_{p0} d_{c2} \mu^2) s^2 + \dots \\ &\dots + (n_p n_{cm} + d_{pm} + d_{p m-1} d_{c1} \mu + d_{p m-2} d_{c2} \mu^2 + \dots + d_{p0} d_{cm} \mu^m) s^m + \quad (3.18) \\ &+ (d_{p m+1} + d_{pm} d_{c1} \mu + d_{p m-1} d_{c2} \mu^2 + \dots + d_{p1} d_{cm} \mu^m) s^{m+1} + \dots \\ &\dots + d_{pn} d_{cm} \mu^m s^{n+m}. \end{aligned}$$

Так при $\mu \rightarrow 0$ и $m < n$, выражение (3.18) принимает вид

$$d_f(s) \approx \{n_p n_c(s) + d_p(s)\} d_c(\mu s).$$

Таким образом, с учётом вышеуказанного ограничения на μ задачу стабилизации характеристического полинома замкнутой системы можно разделить на две отдельные подзадачи: рассмотренную выше задачу D -стабилизации $d_s(s) = n_p n_c(s) + d_p(s)$ и задачу выбора знаменателя регулятора. Здесь имеет смысл говорить о разделении движе-

ний [25], причём полином $d_s(s)$ обеспечивает в системе медленные движения, а $d_c(\mu s)$ - быстрые.

Отдельно следует остановиться на критерии выбора $d_c(\mu s)$. Предлагается осуществлять выбор исходя из следующих условий:

- $d_c(\mu s)$ должен быть устойчивым;
- постоянные времени $d_c(\mu s)$ должны быть много меньше наименьшей постоянной времени медленных движений.

Решение. Используя представленный выше алгоритм D -стабилизации полинома медленных движений $d_s(s)$, получаем скорректированный полином $\hat{d}_s(s)$. Отсюда определяем полином числителя регулятора

$$x(s) = [\hat{d}_s(s)(-d_p(s))] / n_p. \quad (3.19)$$

Если $x(s)$ оказался без свободного члена, то предлагается незначительно изменить свободные коэффициенты на шаге 4 алгоритма D -стабилизации.

Далее выбираем полином быстрых движений $d_c(\mu s) \in S$, например по методике, указанной в [25]. После этого необходимо произвести проверку на расположение полюсов замкнутой системы.

Если по каким-то соображениям (например, ограничение по ресурсам системы) регулятор с малым параметром будет не пригоден, то предлагается применять оптимизационную процедуру сдвига корней $d_c(\cdot)$ в “медленную” область, сохраняя при этом расположение полюсов замкнутой системы в заданной области D . Задача оптимизации может быть сформулирована, например, следующим образом. Пусть необходимо минимизировать функционал

$$J(n_{ci}, d_{cj}) = - \min_{\lambda_i} \operatorname{Re}(\lambda_i)$$

при ограничениях

$$\max_{\lambda_i} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0; \quad \eta_k \in D,$$

где λ_i - корни $d_c(\cdot)$; η_k - полюса замкнутой системы. В качестве начальных значений для процедуры оптимизации выбираем полученные выше коэффициенты $n_c(s)$ и $d_c(s)$.

Пример 3.6. Пусть необходимо синтезировать регулятор для объекта управления с интервальными параметрами из примера 3.5. вида

$$p(s) = \frac{40}{s^5 + [12;13]s^4 + [42;45]s^3 + [5;7]s^2 + [-89;-83]s + [231;237]}.$$

Требуется расположить полюсы замкнутой системы так, чтобы вещественные части корней медленных движений принадлежали интервалу $[-4; -0.3]$ и находились в секторе $\varphi = 55^\circ$ (область D).

Воспользовавшись алгоритмом построения интервального липатовского полинома, получаем полином

$$d_s(s) = s^5 + [12; 13]s^4 + [62.45; 65.45]s^3 + [134.4; 136.4]s^2 + [119.4; 125.4]s + [41.5; 47.5].$$

В соответствие с (3.19) полином числителя регулятора будет иметь вид

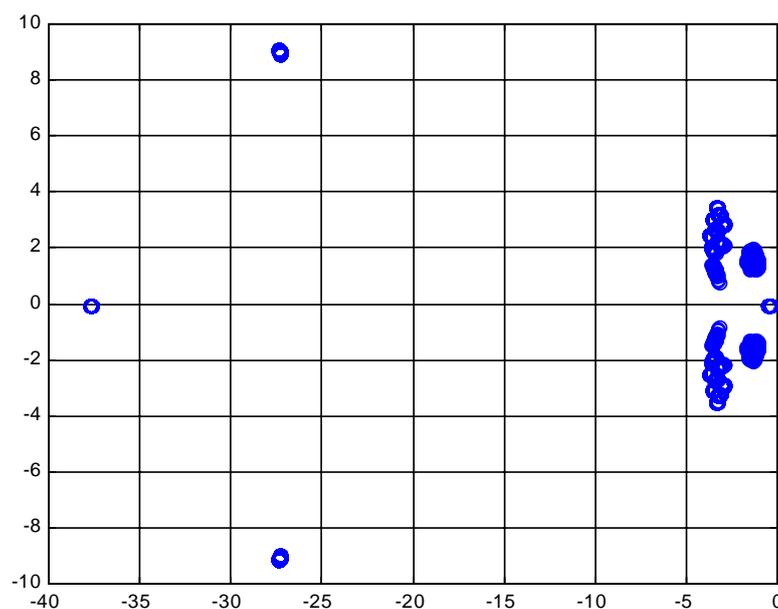


Рис.3.8. Полюса замкнутой системы

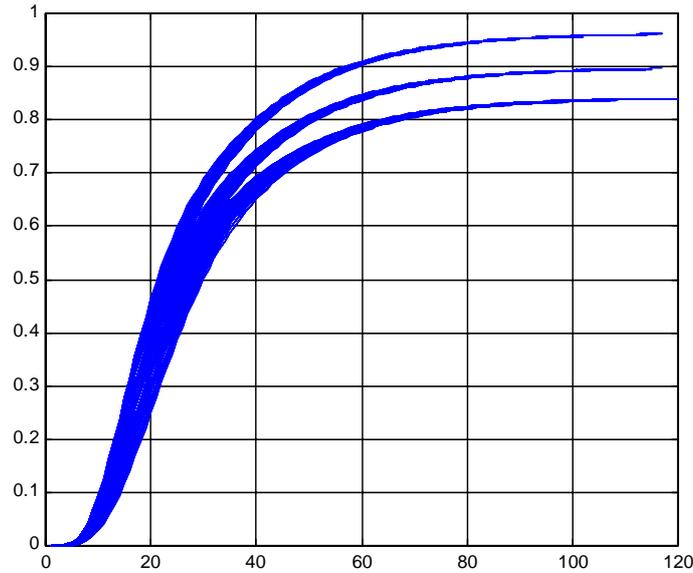


Рис.3.9. Переходные процессы в системе

$$n_c(s) = [d_s(s) (-) d_p(s)] / n_p = 0.51s^3 + 3.23s^2 + 5.06s - 4.74.$$

Выбираем полином знаменателя регулятора так, чтобы быстрые корни принадлежали области $s \in [-38; -27]$

$$d_c(\mu s) = 0.000037s^3 + 0.0033s^2 + 0.1s + 1.$$

Таким образом, имеем регулятор пониженного порядка

$$c(s) = \frac{0.51s^3 + 3.23s^2 + 5.06s - 4.74}{0.000037s^3 + 0.0033s^2 + 0.1s + 1}.$$

Расположение полюсов замкнутой системы представлено на рис.3.8.

Отметим, что если разместить регулятор в цепи обратной связи, то получим переходной процесс синтезированной системы, как показано на рис.3.9. Задача синтеза успешно решена. Отметим, что в результате синтеза получен регулятор пониженного порядка.

3.7. ВЫВОДЫ

В данной главе представлено применение свойств областей расположения корней производных интервальных полиномов по отношению к области расположения корней исходного интервального поли-

нома к синтезу линейных регуляторов пониженного порядка с сосредоточенными параметрами. По результатам главы можно выделить следующие основные положения.

1. На основе следствий из утверждения Гаусса о расположении корней производных интервальных полиномов предложен алгоритм синтеза регуляторов для систем управления с интервальными параметрами. Достоинством данной методики является возможность получения регулятора пониженного порядка. Данный алгоритм предполагает последовательное построение характеристического полинома замкнутой системы по заданному расположению полюсов замкнутой системы.

2. Для интервальных объектов без конечных нулей получены в общем случае необходимые условия разрешимости задачи синтеза. Для частного случая (порядок регулятора $n - 2$) получено необходимое и достаточное условие разрешимости.

3. Получены новые свойства полиномов, удовлетворяющих условиям Липатова. На основе полученных свойств о масштабировании полиномов разработан алгоритм построения полиномов Липатова.

4. Выделены новые свойства интервальных липатовских полиномов, на основе которых предложен алгоритм их построения. Предложен алгоритм построения D -устойчивых интервальных полиномов, основанный на условиях Липатова и свойств расположения корней производного интервального полинома относительно исходного. Получены свойства множества полиномов, построенных с помощью указанной методики.

ГЛАВА 4

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

При модальном синтезе систем автоматического управления ведется поиск такого регулятора, при котором расположение корней системы отвечает поставленным требованиям. От исходных требований к динамическим свойствам систем на языке оценок переходных процессов во времени к требованиям в виде желаемого расположения корней можно перейти например с помощью методики предлагаемой в [29]. На практике часто необходимо синтезировать регулятор как можно более простой структуры - так называемый регулятор пониженного порядка. Так как в этом случае параметров регулятора недостаточно для точного размещения корней, ставится задача найти такие их значения, при которых обеспечивалось бы расположение корней системы в некоторой желаемой области или как можно ближе к ней. Обычно решение находится с помощью оптимизационных процедур в пространстве полиномов (коэффициентов), корней [7, 32, 33].

В [11, 46] для поиска параметров регулятора предлагается оптимизационная процедура, основанная на приближении корней полинома замкнутой системы в пространстве C^1 (комплексная плоскость) к желаемой области. Однако ввиду сложной зависимости корней и ко-

ээффициентов полинома, а также корней между собой найти наилучшее решение не всегда возможно. Для упрощения поиска предлагается ввести так называемое корневое пространство и оптимизационную процедуру осуществлять в этом пространстве. При этом точке в пространстве коэффициентов будет взаимнооднозначно сопоставляться одна точка из пространства корней.

Основные результаты по данной главе были опубликованы в [15, 17, 19, 20, 29, 51, 54].

4.2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ Пониженного Порядка для систем управления с постоянными параметрами

Вначале рассмотрим основные положения оптимизационной методики синтеза для систем управления с постоянными параметрами, а затем предлагаемую методику распространим на системы управления с интервальными параметрами.

4.2.1. Постановка задачи синтеза

Для стабилизации управляемых и наблюдаемых линейных стационарных объектов управления¹ с равным числом входов и выходов

¹ Объект и регулятор могут быть заданы как с помощью передаточных функций так и в пространстве состояний для одноканального случая и в виде правого (левого) полиномиального разложения, матричных передаточных функций, в пространстве состояний для многоканального случая.

В теории автоматического управления до шестидесятых годов широко использовался аппарат преобразования Лапласа (описание и синтез в частотной области). Основоположающим здесь было понятие передаточной функции

$$h(s) = \frac{n(s)}{d(s)}; \quad n(s) = \sum_{i=0}^m n_i s^i; \quad d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i.$$

Затем под влиянием результатов, полученных в линейной теории дифференциальных уравнений, внимание исследователей переключилось на описание систем в пространстве состояний (описание и синтез во временной области)

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx + Du,$$

где A , B , C и D - матрицы размером $n \times n$, $n \times r$, $r \times n$ и $r \times r$ соответственно.

Для многоканальных систем исследование в частотной области по форме описания развивалось по нескольким направлениям.

1. Исследование полиномиальных разложений [56, 85, 119]:

требуется разработать оптимизационную методику модального синтеза регуляторов пониженного порядка.

Задача ставится следующим образом:

- необходимо синтезировать такой регулятор наименьшего порядка, который бы обеспечивал размещение полюсов замкнутой системы в желаемой выпуклой симметричной односвязной области D , либо

- при заданной структуре регулятора найти такие его параметры, которые бы обеспечивали наиболее близкое расположение корней замкнутой системы к желаемой области.

Таким образом, исходными данными для процедуры D -стабилизации являются желаемая область расположения корней D замкнутой системы, местоположение регулятора в системе. Одна из наиболее общих структурных схем системы автоматического управления приведена на рис.1.13, от которой в зависимости от поставленных условий легко перейти к наиболее часто встречающимся схемам (см. рис.1.2,1.3) или любым другим. Помимо основных требований могут быть заданы дополнительные, как то: астатизм, статический коэффициент усиления, правильность или строгая правильность передаточной функции регулятора и др. Приоритет тех или иных требований устанавливается заказчиком.

$$H(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s),$$

где $H(s)$ - матричная передаточная функция; $N_l(s)$, $D_l(s)$, $N_r(s)$, $D_r(s)$ - полиномиальные матрицы. Ввиду некоммутативности матричного перемножения введены два разложения - левое и правое. По аналогии с одноканальным случаем матрицы $N_l(s)$ и $N_r(s)$ могут рассматриваться как "числитель", а $D_l(s)$ и $D_r(s)$ - как "знаменатель" модели многоканальной системы.

2. Использование системной матрицы [102]

$$H(s) = \left[\begin{array}{cc|c} I_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & T(s) & U(s) \\ \hline 0 & -V(s) & W(s) \end{array} \right],$$

где $T(s)$, $U(s)$, $V(s)$, $W(s)$ - полиномиальные матрицы, соответствующие следующему описанию:

$$T(s)\xi(s) = U(s)u(s); \quad y(s) = V(s)\xi(s) + W(s)u(s),$$

где $u(s)$ - вектор управления; $y(s)$ - вектор выхода; $\xi(s)$ - вектор псевдосостояния.

3. Непосредственное использование матричных передаточных функций [88, 115].

Оптимизационную процедуру будем осуществлять в корневом пространстве \mathbf{R}^n . Алгоритм построения такого пространства предлагался в главе 2.

4.2.2. О выборе критерия оптимизации

Воспользуемся приведенными в главе 2 положениями о корневом пространстве \mathbf{R}^n для построения оптимизационной процедуры синтеза регуляторов пониженного порядка. Функция оптимизации $f(\Lambda)$ может быть представлена следующим образом:

$$f(\Lambda) = \mu, \quad (4.1)$$

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \in D; \\ \rho(\lambda, D), & \text{если } \lambda \notin D, \end{cases}$$

где D - заданная область расположения полюсов замкнутой системы в пространстве \mathbf{R}^n ; n - количество полюсов системы; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ - точка в пространстве \mathbf{R}^n с координатами, связанными со значениями корней; $\rho(\lambda, D)$ - расстояние от точки с координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ до заданной области D .

$$\rho(\lambda_i, D) = \sqrt[p]{|\rho(\lambda_1, D)|^p + |\rho(\lambda_2, D)|^p + \dots + |\rho(\lambda_n, D)|^p},$$

где $\rho(\lambda_i, D)$ - расстояние по координате λ_i до ближайшей точки D .

Таким образом, при решении модальной задачи синтеза необходимо решать задачу минимизации функционала (4.1) Будем считать, что задача синтеза успешно решена, если полюса замкнутой системы принадлежат области D . В качестве метода оптимизации может быть выбран метод Нелдера-Мида с ограничениями².

² Метод Нелдера-Мида является прямым методом, не требующем вычисления градиента или иной информации о производной, и связан с построением симплекса в n -мерном пространстве, который задается $n+1$ -й вершиной. В двумерном пространстве симплекс - это треугольник, а в трехмерном - пирамида.

В некоторых случаях стабилизации системы управления недостаточно для её практического использования. Кроме этого необходимо обеспечить выполнение некоторых дополнительных требований к системе как то: статический коэффициент передачи, качество переходных процессов и автономность каналов (для многоканальных систем) [4, 25, 57, 62]. Для решения этих задач в [46] было предложено использование H_∞ -нормы матричной передаточной функции, где показывалось, что чем больше H_∞ -норма, тем хуже качество переходных процессов³. Воспользуемся этими результатами для достижения автономности и улучшения качества переходных процессов.

Необходимо отметить, что при использовании H_∞ -нормы необходимо соблюдать следующие ограничения: полюса замкнутой передаточной функции должны быть левыми или более того - принадлежать заданной области D ; статический коэффициент должен быть задан исходно и не должен изменяться в процессе синтеза. Таким образом для решения данной подзадачи необходимо минимизировать функционал

$$J = \|W(s)\|_\infty \quad (4.2)$$

при ограничениях

$$\lambda_k \in D, \quad (4.3)$$

где λ_k - полюса замкнутой системы.

4.2.3. Обеспечение статического коэффициента передачи

На каждом шагу алгоритма новая точка выбирается внутри или вблизи симплекса. Значение функции в этой точке сравнивается со значениями в вершинах симплекса, и, как правило, одна из вершин заменяется этой точкой, задавая тем самым новый симплекс. Эти итерации повторяются до тех пор, пока диаметр симплекса не станет меньше заданной величины итерационной погрешности по переменным x .

3 В геометрической интерпретации H_∞ -норма - это радиус окружности, описанной около амплитудно-фазовой характеристики передаточной функции динамического звена с центром в начале координат. Отсюда понятно, что при уменьшении R у такой передаточной функции отклик на входной сигнал будет уменьшаться. Соответственно, если H_∞ -норма некоторого

Рассмотрим следующий вопрос, являющийся частью общей задачи синтеза регулятора, - обеспечение статического коэффициента передачи замкнутой системы. В предлагаемой методике для обеспечения заданного статического коэффициента передачи предлагается ввести в оптимизационную процедуру ограничения на коэффициенты регулятора. Рассмотрим классическую схему системы автоматического управления с регулятором в прямом канале (см. рис.1.2). Передаточная функция замкнутой системы будет иметь следующий вид:

$$W_s(s) = \frac{W_c(s)W_p(s)}{1 + W_c(s)W_p(s)},$$

где

$$W_p(s) = \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i}; \quad W_p(s) = \frac{c(s)}{d(s)} = \frac{\sum_{i=0}^k c_i s^i}{\sum_{i=0}^r d_i s^i} \quad (4.4)$$

- передаточные функции объекта и регулятора соответственно. В статике при $s \rightarrow 0$ передаточная функция замкнутой системы

$$W_s(s) = \frac{c(s)a(s)}{c(s)a(s) + d(s)b(s)}$$

превращается в выражение

$$k = \frac{a_0 c_0}{a_0 c_0 + b_0 d_0}, \quad (4.5)$$

где c_0, d_0 - неизвестные младшие коэффициенты передаточной функции регулятора; a_0, b_0 - известные младшие коэффициенты передаточной функции объекта.

Если регулятор располагается в канале обратной связи (см. рис.1.3), то передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$W_s(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_c(s)W_p(s)}.$$

После подстановки (4.4) в данное равенство имеем передаточную функцию

$$W_s(s) = \frac{d(s)a(s)}{c(s)a(s) + d(s)b(s)},$$

вырождающуюся при $s \rightarrow 0$ в соотношение для коэффициента передачи

$$k = \frac{a_0 d_0}{a_0 c_0 + b_0 d_0}. \quad (4.6)$$

Из выражений (4.5), (4.6) при заданном коэффициенте передачи замкнутой системы и известных параметрах объекта легко получить ограничения на коэффициенты регулятора, которые и будут в оптимизационной процедуре обеспечивать этот коэффициент передачи.

4.2.4. Описание алгоритма синтеза регуляторов пониженного порядка

Шаг 1. Выбираем структуру регулятора⁴ наименьшего порядка, удовлетворяющую требованиям к системе⁵.

Шаг 2. Из заданного коэффициента передачи замкнутой системы и (4.5) либо (4.6) определяются ограничения на коэффициенты регулятора.

Замечание 4.1. Предложенный способ обеспечения заданного статического коэффициента передачи замкнутой системы рекомендуется использовать если объект является одноканальным, либо коэффициент передачи должен быть отличен от единицы. В случае если требуется обеспечить коэффициент передачи равный единице,

⁴ Под структурой регулятора здесь и далее понимается местоположение регулятора в системе (см. рис. 1.2, 1.3, 1.13), степени числителя и знаменателя, а также дополнительные требования как то: правильность, строгая правильность передаточной функции регулятора.

⁵ К примеру, если необходимо синтезировать строго правильный регулятор, то минимальное его представление для одноканального случая имеет вид: степень числителя равна нулю, а степень знаменателя - единице, для многоканального случая, представленного правым разложением - столбцовые степени матрицы "числителя" должны быть равны нулю, соответствующие столбцовые степени матрицы "знаменателя" - единице.

или если объект является многоканальным рекомендуется для обеспечения заданного коэффициента по завершении оптимизационной процедуры минимизировать функционал (4.2).

Шаг 3. Исходя из (2.12), определяются ограничения (границы области D) на расположение корней в корневом пространстве R^n в совмещенных декартовых координатах (см. пример 2.6).

Шаг 4. Выбираются начальные условия для оптимизационной процедуры (один из способов выбора начальных условий будет рассмотрен ниже).

Шаг 5. В соответствии с поставленными требованиями минимизируется функционал (4.1) с ограничениями (4.5), (4.6). Если необходимо обеспечить дополнительные требования, минимизируется функционал (4.2) с ограничениями (4.3).

Шаг 6. Если задачу синтеза решить не удаётся, то повышаем порядок регулятора и переходим к шагу 2. Если задача синтеза решена успешно, переходим к шагу 7.

Шаг 7. Анализ свойств системы с полученным регулятором.

Приведем несколько примеров синтеза регуляторов, основываясь на представленную методику.

Пример 4.1. Пусть задан одноканальный объект вида⁶

$$g(s) = \frac{s^2 + 7s - 2}{s^3 + 12s^2 + 27s - 40}.$$

Задача синтеза: а) полюса замкнутой системы вещественные и лежат левее -0.1 ; б) регулятор строго правильный; в) статический коэффициент замкнутой системы равен 1.

⁶ Gu D.W., Choi B.W. Postlethwaite I. Low-order stabilizing controllers // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1993. - V. 38, № 11. - P. 1713-1717.

Расположим регулятор в цепи обратной связи и выберем его структуру в следующем виде: $h(s) = c_0 / (d_1 s + d_0)$. Из статического коэффициента передачи замкнутой системы (4.6) имеем соотношение $c_0 = -19d_0$, которое будет являться ограничением при действии оптимизационной процедуры. Диофантово уравнение имеет вид

$$\begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 27 & -40 \\ 12 & 27 \\ 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot c_0 = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}.$$

После действия оптимизационной процедуры получаем регулятор⁷, удовлетворяющий поставленной задаче синтеза

$$c(s) = \frac{0.152}{0.0167s - 0.008},$$

который распределяет полюса следующим образом: -7.8085; -3.3115; -0.2564; -0.1445. Переходные процессы для рассчитанного регулятора и регулятора из [46] представлены на рис.4.1. Переходные процессы в системе с регулятором пониженного порядка, рассчитанного по представленной методике, не хуже чем в системе с регулятором рассчитанным в [46].

Пример 4.2. Рассмотрим двухканальный объект управления $P(s)$, представленный в пространстве состояний⁸,

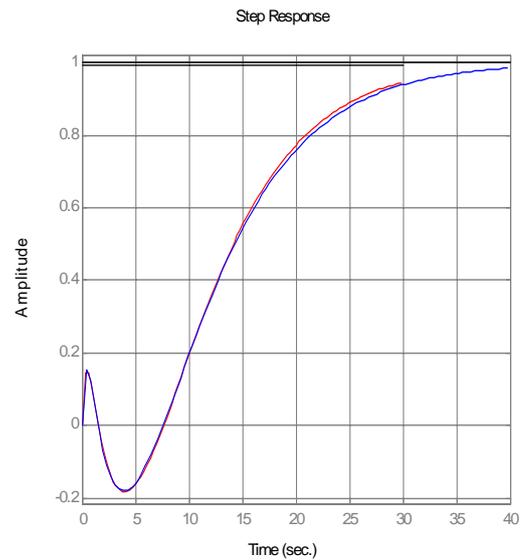


Рис.4.1. Переходные процессы системы из примера 4.1

$$A = \begin{bmatrix} -0.55 & 29.0513 & -0.1786 & 5.6206 & -2.0999 & -2.4016 & -22.9655 \\ -16.4444 & -0.0116 & 0.94 & -59.1677 & 23.7574 & -5.7259 & 0.3384 \\ -0.1292 & -1.0611 & -1.6313 & 10.6938 & 26.4404 & -4.9794 & -11.6464 \\ 0.3664 & 0.584 & -0.2406 & -16.0509 & 6.561 & 35.3381 & 103.0935 \\ -0.1582 & -0.1027 & -1.7638 & -2.5377 & -13.918 & 59.4749 & -41.2525 \\ 0.0098 & 0.0224 & -0.5422 & -4.9886 & -7.5207 & -2.8533 & -16.0967 \\ 0.0829 & -0.0044 & 0.2359 & -4.3071 & 3.3372 & -0.2006 & 2.5741 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 2.1741 & -2.4536 \\ 2.5215 & -2.674 \\ 1.4914 & 1.6399 \\ -0.692 & 1.7869 \\ 1.9558 & 0.7342 \\ 0.5524 & 0.6408 \\ -0.4062 & 0.2454 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -0.1902 & 0.0146 \\ 0.4414 & -0.0022 \\ 0.0034 & 0.3138 \\ 0.5654 & -0.2287 \\ -0.2501 & -0.4905 \\ 0.0047 & 0.4653 \\ -0.4066 & 0.0902 \end{bmatrix}^T.$$

Полюса объекта: $-5.3951 \pm j26.9741$; $-0.3286 \pm j22.0524$; $-8.6829 \pm j20.2834$; -3.6278 ; норма $\|P(s)\|_\infty = 6.1256$, переходные характеристики показаны на рис.4.2.

Необходимо обеспечить следующие требования, предъявляемые к системе: а) полюса замкнутой системы должны лежать левее -0.2 ; б) регулятор астатический, строго правильный; в) обеспечить минимум H_∞ -нормы передаточной функции замкнутой системы.

В соответствии с вышеуказанными требованиями на первом шаге выбираем регулятор наименьшего порядка - И-регулятор. Таким образом, имеем четыре неизвестных параметра

$$\dot{i} = K\varepsilon = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \varepsilon,$$

7 В [46] синтезирован регулятор вида $c(s) = 21.31 / (2.361s - 1.122)$, распределяющий полюса системы как -0.191 ; -0.191 ; -3.3332 ; -7.8097 и обеспечивающий переходной процесс в системе изображенный на рис. 4.2.

У авторов **Gu D.W.**, **Choi B.W.** предлагается регулятор $c(s) = (201s + 1004) / (s - 136)$, который распределяет полюса системы как -2.584 ; -5.0823 ; -65.3337 ; -4 .

8 **Stoustrup J.**, **Niemann H.** *Multiobjective control for multivariable systems with mixed-sensitivity specifications* // Int. J. Contr. - 1997. - V. 66, 1 2. - P. 225-243.

где u - вектор входа объекта (выход регулятора), 2×1 ; ε - вектор входа регулятора, 2×1 . Представим замкнутую систему с единичной обратной связью в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ \dot{i} = K\varepsilon; \\ y = Cx; \\ \varepsilon = v - y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -KC & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} v; \\ y = [C \mid 0] \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где v - вектор входа системы, 2×1 ; x - вектор переменных состояния объекта, 7×1 .

В результате минимизации функционала с единичными начальными условиями имеем $\|W(s)\|_{\infty} = 1.0009$ для регулятора следующего вида⁹:

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.5113}{s} & \frac{1.7878}{s} \\ \frac{1.0805}{s} & \frac{2.0895}{s} \end{bmatrix},$$

который распределяет полюса замкнутой системы: $-8.5976 \pm j20.0779$; $-5.2257 \pm j27.2305$; $-1.7607 \pm j1.133$; $-0.5365 \pm j22.527$; -0.2 . Переходные процессы системы представлены на рис.4.3, где цифрой 1 помечены процессы с регулятором, рассчитанным предлагаемой процедурой, а цифрой 2 - процессы с регулятором, полученным в [46]. В целом можно отметить, что переходные процессы и в первом и во втором случаях идентичны.

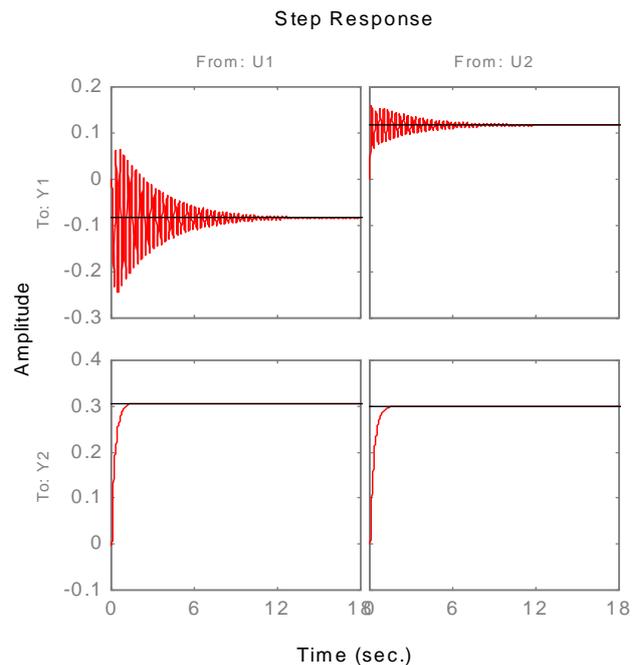


Рис.4.2. Переходные процессы объекта управления из примера 4.2

⁹ В [46] расположение полюсов замкнутой системы $-5.2881 \pm j26.9278$; $-8.7942 \pm j20.3606$; $-0.2414 \pm j21.9060$; $-1.7381 \pm j1.7533$; -0.3174 обеспечивает регулятор вида

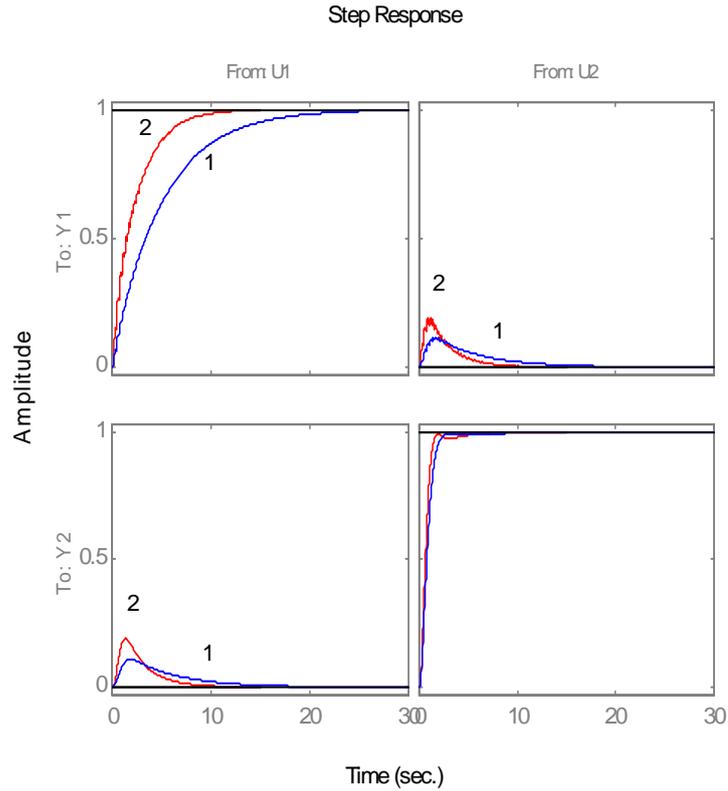


Рис.4.3. Переходные процессы системы для примера 4.2

Пример 4.3. Рассмотрим объект управления¹⁰

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Определим задачу синтеза как задачу размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы $W(s)$ с ПИ-регулятором в прямой цепи

$$C(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{c1}^{11}s + n_{c0}^{11} & n_{c1}^{12}s + n_{c0}^{12} \\ n_{c1}^{21}s + n_{c0}^{21} & n_{c1}^{22}s + n_{c0}^{22} \end{bmatrix}$$

в области, которая описывается следующим образом:

$$\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) = -0.5; \quad \min_i \operatorname{Re}(\lambda_i) = -5,$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1.1609}{s} & \frac{1.7953}{s} \\ \frac{2.6043}{s} & \frac{3.4599}{s} \end{bmatrix}.$$

¹⁰ Zhang S.-Y. *Input-output feedback compensator design* // Automatica. - 1987. - V. 23, ¹ 2. - P. 255-257.

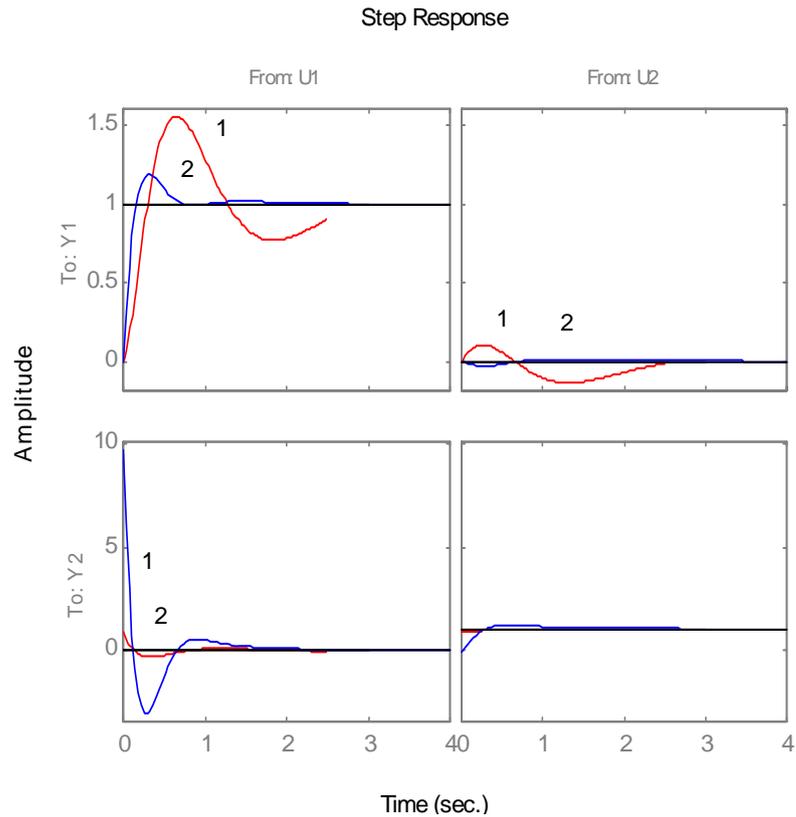


Рис.4.4. Переходные процессы замкнутой системы для примера 4.3 где λ_i - полюса замкнутой системы. Дополнительно потребуем минимума функционала (4.2). При **единичных начальных условиях**¹¹ имеем

$$C(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9.9629s + 6.9793 & 9.428s + 59.6949 \\ 0.0791s + 12.205 & -53.9803s - 11.677 \end{bmatrix}.$$

Полюсы замкнутой системы: $-1.1922 \pm j1.4851$; -2.9545 ; -2.8434 ; -2.6701 ; переходные процессы показаны на рис. 4.4¹², где цифрой 1 помечены процессы в системе с регулятором, рассчитанным по представленной методике, а цифрой 2 методикой, предлагаемой в [46].

¹¹ Стоит отметить, что для единичных начальных условий процедура синтеза из [46] не дала необходимых результатов в отличие от методики представленной здесь. При специальном подборе начальных условий данная методика дала бы нехудшие результаты чем в [46].

¹² В [46] для заданного объекта и при такой же постановке задачи получен регулятор вида

$$C(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8.8496s + 17.2904 & -0.0933s - 2.1009 \\ -1.8547s + 13.6816 & -5.6154s - 4.518 \end{bmatrix},$$

располагающий полюса следующим образом: -4.9905 ; $-3.4252 \pm j2.4229$; -1.1241 ; -0.5 и обеспечивающий переходные процессы в системе, изображенные на рис.4.4.

Можно отметить, что поставленные требования выполнены, достигнуто хорошее качество регулирования.

Отметим, что в некоторых случаях алгоритм работает для объектов с неравным числом входов и выходов. Для иллюстрации рассмотрим

Пример 4.4. Пусть дан “неквдратный” многоканальный объект управления¹³

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1010 & -0.1681 & -0.04564 & -0.01075 \\ 0.0608 & -2.1407 & -0.05578 & -0.1273 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1179 & 0.1441 & 0.1476 \\ 0.1441 & 1.7057 & -0.7557 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

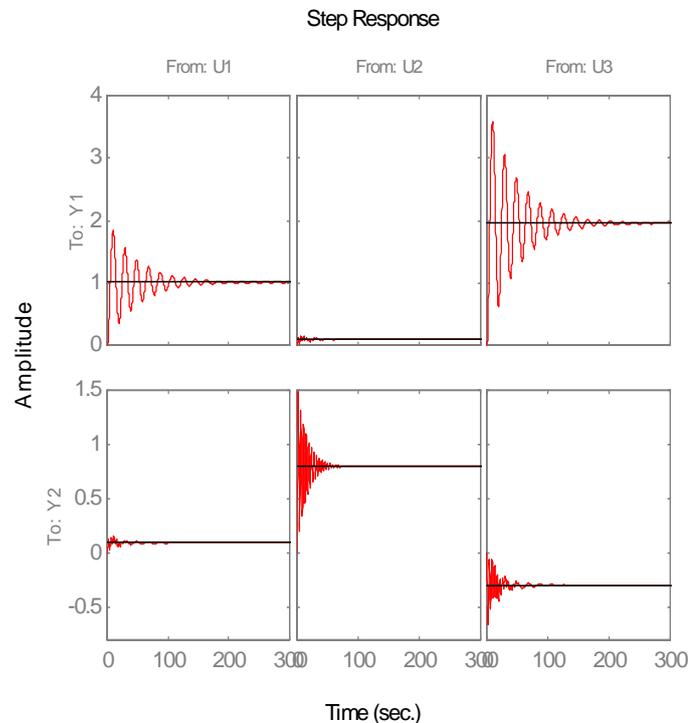


Рис.4.5. Переходные процессы объекта из примера 4.4

¹³ Scherer C., Gahinet P., Chilali M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1997. - V. 42, № 7. - P. 896-91.

переходные процессы которого изображены на рис.4.5.

Задачу синтеза поставим следующим образом. Необходимо синтезировать строго правильный астатический регулятор при достижении минимума H_∞ -нормы и ограничениях $\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) < -0.015$. В соответствии с постановкой задачи на первом этапе выбираем И-регулятор.

Минимизируя функционал (4.2), имеем $J = 1.2224$. Корни системы имеют следующее расположение¹⁴: $-0.032 \pm j1.4595$; $-0.017 \pm j0.324$; -0.058 ; -0.017 . Регулятор имеет вид

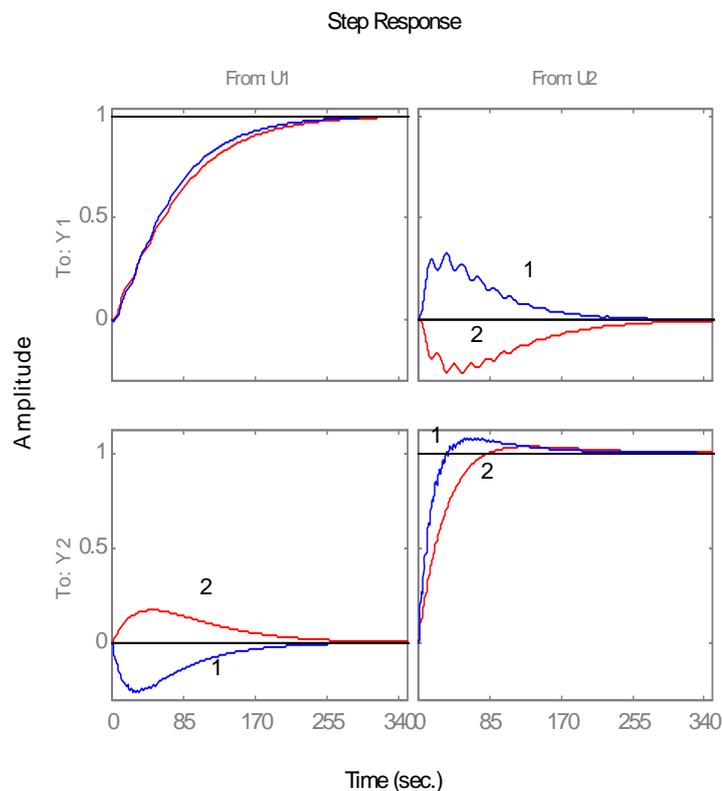


Рис.4.6. Переходные процессы замкнутой системы из примера 4.4

¹⁴ В [46] расположение корней -0.0257 ; $-0.0485 \pm j1.4594$; $-0.0168 \pm j0.3246$; -0.0168 обеспечивается с помощью регулятора вида

$$C(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -1.8382 & 0.5753 \\ 0.5761 & -0.1375 \\ 0.9230 & -0.2965 \end{bmatrix}.$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2.8589}{s} & \frac{-27.0437}{s} \\ \frac{0.8456}{s} & \frac{8.3674}{s} \\ \frac{1.4331}{s} & \frac{13.5321}{s} \end{bmatrix}.$$

Переходные процессы в системе представлены на рис.4.6, причем цифрой 1 помечены процессы в системе с регулятором, рассчитанным по данной методике, а цифрой 2 - по методике из [46]. Как видно из рисунка, переходные характеристики отличаются незначительно.

4.2.5. О синтезе регуляторов пониженного порядка в криволинейных локальных координатах

При модальном синтезе систем автоматического управления, когда параметров регулятора недостаточно для точного назначения полюсов системы приходится решать оптимизационную задачу, т.е. на множестве допустимых решений искать ближайшее к оптимальному (наилучшему) множеству. В общем случае получается неограниченная задача. Примем в качестве оптимального решения множество вещественных кратных корней, а все множество полиномов разобьем на подмножества, в которых введем криволинейные локальные координаты, связанные со значениями корней. В этом частном случае задача является одноэкстремальной. Приведем некоторые положения, разъясняющие данную методику.

Для множества полиномов порядка n пространство коэффициентов размерности n разбивается $(n-1)$ -мерными поверхностями, соответствующими многообразиям полиномов с кратными корнями (см. главу 2 данного исследования). Для наглядности рассмотрим трехмерное пространство коэффициентов, соответствующее множеству нормированных полиномов третьего порядка. В пространстве коэффициентов поверхность, соответствующая трем вещественным корням два из которых кратные, разбивает его на две области, в одной из них лежит множество полиномов только с вещественными корнями

$\{r_1, r_2, r_3\}$, в другой – множество полиномов с корнями, два из которых являются комплексно-сопряженными $\{\text{Re}, \text{Im}, r\}$. Параметризуем пространство с помощью введения в этих областях криволинейных координат (R, I, r) и (r_1, r_2, r_3) , однозначно описывающих все множество полиномов третьего порядка. Поочередно фиксируя одну из координат в (r_1, r_2, r_3) либо в (R, I, r) и изменяя другие, получаем поверхности, изображенные на рис.4.8. Здесь Ω_1, Ω_2 - поверхности, соответствующие множеству полиномов третьего порядка с двумя комплексно-сопряженными корнями и одним вещественным; $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ - множества полиномов с вещественными корнями; L - линия, построенная по трем кратным корням.

Воспользуемся вышесказанным для построения оптимизационной процедуры синтеза регулятора, которая заключается в приближении при помощи параметров регулятора в допустимом множестве решений точки, соответствующей полиному замкнутой системы, к оптимальному множеству решений. Для решения задачи необходимо ввести понятие расстояния в локальных координатах $\Delta = \|l_1 - l_2\|$, где l_1 - вектор координат точки, соответствующей полиному системы в локальной системе координат; l_2 - вектор координат ближайшей точки в заданной (желаемой) области. Используя введенные нами координаты, получим, что $l_1 = (R \ I \ r)^T$ в случае комплексно-сопряженных корней и $l_1 = (r_1 \ r_2 \ r_3)^T$ в случае вещественных корней.

Пусть оптимальным будет решение, при котором система имеет устойчивые кратные вещественные корни (линия L на рис.4.7). Тогда расстояние до оптимального множества решений¹⁵ определяется следующим образом:

¹⁵ Необходимо отметить, что, так как оптимальным решением является множество кратных вещественных корней и элементы векторов l_1, l_2 - вещественные числа, абсолютно неважно в каком порядке будут располагаться эти координаты внутри векторов.

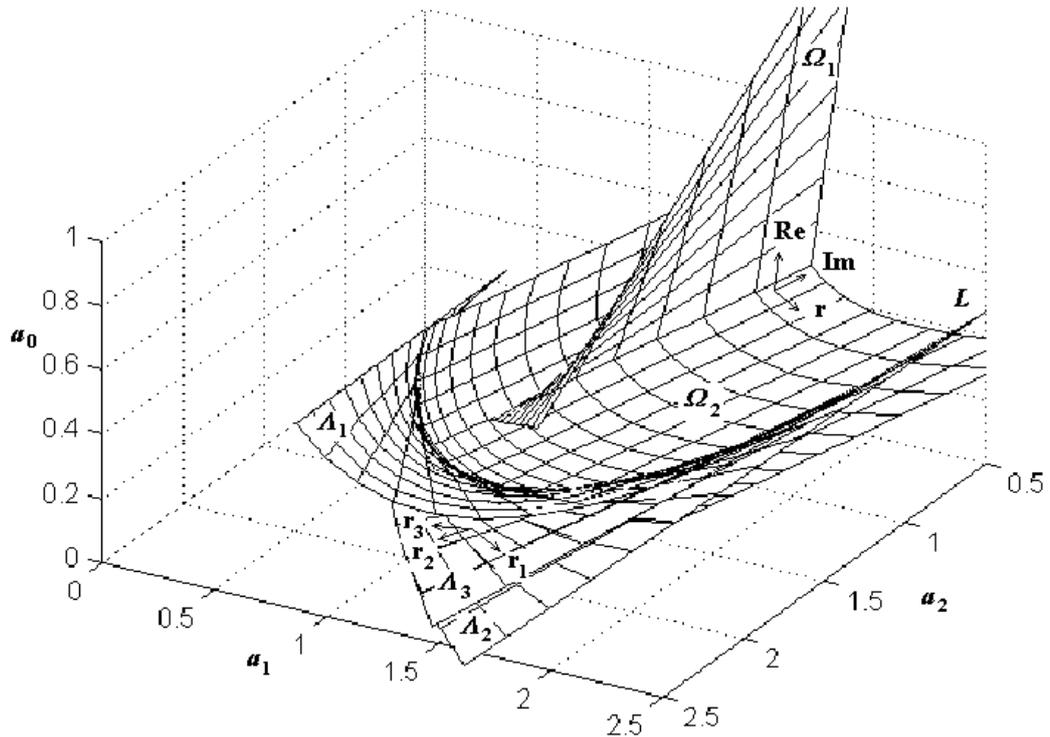


Рис.4.7. Параметризация пространства коэффициентов для множества полиномов третьего порядка

$$\Delta = \left\| \begin{pmatrix} R \\ I \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \right\|_2 ; \Delta = \left\| \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

Откуда координаты ближайшей точки равны

$$x = (R + I + r) / 3 \quad \text{либо} \quad x = (r_1 + r_2 + r_3) / 3 .$$

Решение задачи сводится к поиску ближайшей точки в пространстве коэффициентов, соответствующей полиному замкнутой системы, к линии устойчивых кратных вещественных корней, характеризующей идеальное решение. Тогда, функционал качества может выглядеть следующим образом:

$$J = \min_{(c_0, c_1, \dots, c_k) \in L} (\Delta), \quad (4.5)$$

где c_0, c_1, c_k - параметры регулятора. В качестве иллюстрации приведем пример синтеза регулятора для объекта второго порядка.

Пример 4.5. Пусть задан объект вида

$$W_p(s) = \frac{k_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{2}{s^2 + 2s + 5}.$$

Задача синтеза состоит в следующем: требуется найти такие параметры регулятора $W_c(s) = (c_1s + c_0) / s$, располагающемся в прямом канале, которые бы позволили расположить полюса замкнутой системы как можно ближе к “линии кратных корней”. Тогда имеем характеристический полином замкнутой системы вида

$$h(s) = s^3 + a_1s^2 + (a_0 + k_0c_1)s + k_0c_0 = s^3 + 2s^2 + (5 + 2c_1)s + 2c_0.$$

При выбранной структуре регулятора множество допустимых решений отображается в пространстве коэффициентов с помощью плоскости Φ (рис.4.8). В результате решения получаются параметры регулятора $c_1 = -1.833$, $c_0 = 0.1482$ с корнями $r_{1,2,3} = -0.661$.

Заметим, что так как в данном случае порядок регулятора меньше порядка объекта всего на единицу, точное решение существует. Однако, если выбрать структуру регулятора пониженного порядка, в пространстве коэффициентов для данного случая множеству допустимых

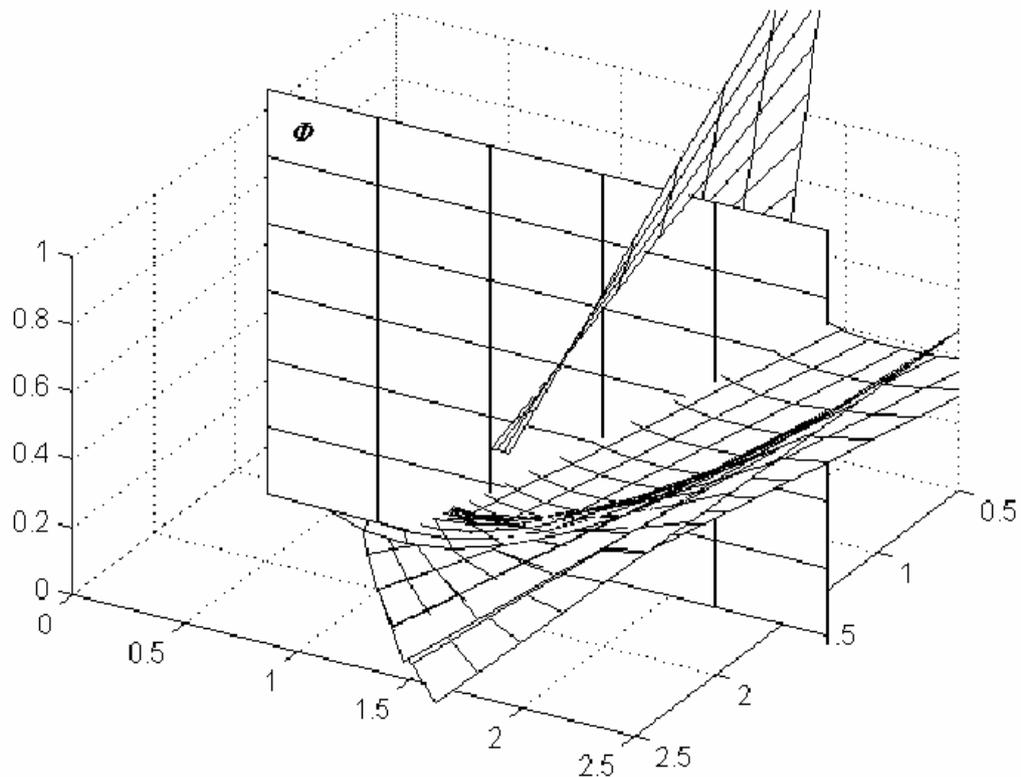


Рис.4.8. Множество допустимых решений для примера 4.5

решений будет соответствовать прямая т.е. уменьшается степень свободы и точного решения может не существовать. Приведем иллюстрацию на следующем примере.

Пример 4.6. Рассмотрим объект управления из примера 4.1

$$W_p(s) = \frac{s^2 + 7s - 2}{s^3 + 12s^2 + 27s - 40}.$$

Как и в первоисточнике будем решать задачу стабилизации с помощью регулятора первого порядка $W_c(s) = (n_{c1}s + n_{c0}) / (s + d_{c0})$, но, кроме того, поставим условие, чтобы корни системы находились как можно ближе к линии кратных корней.

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$d_f(s) = s^4 + (n_{c1} + d_{c0} + 12)s^3 + (7n_{c1} + n_{c0} + 12d_{c0} + 27)s^2 + (7n_{c0} - 2n_{c1} + 27d_{c0} - 40)s - (40d_{c0} + 2n_{c0}).$$

Используя для процедуры минимизации функционал (4.5) с единичными начальными условиями, имеем регулятор

$$W_c(s) = (-0.8495s + 11.0604) / (s - 0.7013),$$

который обеспечивает следующий характеристический полином замкнутой системы¹⁶:

$$d_f(s) = s^4 + 10.4492s^3 + 23.6981s^2 + 20.1852s + 5.9326$$

и корни -7.6985 ; -0.9328 ; -0.9159 ; -0.902 . Получено достаточно близкое решение, учитывая, что при заданной структуре регулятора его параметров недостаточно для обеспечения кратности всех полюсов системы, а только трех.

¹⁶ В первоисточнике предлагается регулятор $W_c(s) = (201s + 1004) / (s - 136)$, который располагает полюса замкнутой системы как -2.584 ; -5.0823 ; -65.3337 ; -4 .

В [46] синтезирован регулятор вида $W_c(s) = (0.2471s + 37.7613) / (s - 2.9426)$, обеспечивающий полюса замкнутой системы -7.6051 ; $-0.6941 \pm j4.1644$; -0.3112 .

4.3. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.3.1. Постановка задачи синтеза

Для стабилизации управляемых и наблюдаемых линейных стационарных объектов управления¹⁷, имеющих интервальную неопределённость в задании параметров, с равным числом входов и выходов требуется разработать оптимизационную методику модального синтеза регуляторов как можно более простой структуры (пониженного порядка).

Задача задается одним из двух вариантов:

- необходимо синтезировать регулятор с постоянными параметрами, обеспечивающий расположение полюсов замкнутой интервальной системы в желаемой симметричной односвязной области D , либо
- при заданной структуре регулятора найти такие его параметры, которые бы обеспечивали наиблизжайшее расположение корней замкнутой интервальной системы к желаемой области.

Таким образом, исходными данными для процедуры D -стабилизации являются желаемая область расположения корней D замкнутой системы, местоположение регулятора в системе (рис.1.2, 1.3, 1.13). Помимо основных требований могут быть заданы дополнительные, как то: астатизм, статический коэффициент усиления, правильность или строгая правильность передаточной функции регулятора и др. Приоритет тех или иных требований устанавливается заказчиком.

Как и при синтезе регуляторов для систем управления с постоянными параметрами оптимизационную процедуру поиска параметров регулятора для систем управления с интервальными параметрами бу-

¹⁷ Объект и регулятор могут быть заданы как с помощью передаточных функций так и в пространстве состояний для одноканального случая и в виде правого (левого) полиномиального разложения, матричных передаточных функций, в пространстве состояний для многоканального случая.

дем осуществлять в корневом пространстве \mathbf{R}^n . Алгоритм построения такого пространства предлагался в главе 2.

Необходимо отметить, что в отличие от алгоритма синтеза регуляторов для систем управления с постоянными параметрами в данном случае большую роль играет выбор начальных условий оптимизационной процедуры. Воспользуемся для получения начальных условий свойствами кривизны годографа Михайлова устойчивого интервального полинома, позволяющими несколько упростить вычисления и увеличить сходимость алгоритма.

4.3.2. О кривизне годографа Михайлова устойчивого интервального полинома

В [46] были предложены новые свойства амплитудно-фазовой характеристики (годографа Михайлова) устойчивого полинома. Ниже эти свойства распространяются на интервальные полиномы, позволяющие предложить алгоритм получения начальных условий для оптимизационной методики синтеза регуляторов.

Напомним, что для параметрически заданной кривой её кривизна определяется соотношением [8]

$$kr(\omega) = \frac{\dot{g}(\omega)\ddot{h}(\omega) - \ddot{g}(\omega)\dot{h}(\omega)}{\sqrt{(\dot{g}(\omega)^2 + \dot{h}(\omega))^3}}, \quad (4.6)$$

где $\dot{g}(\omega)$, $\dot{h}(\omega)$, $\ddot{g}(\omega)$, $\ddot{h}(\omega)$ - производные многочленов $g(\omega)$, $h(\omega)$ с вещественными коэффициентами, полученных из

$$a(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega) \quad (4.7)$$

при подстановке $s = j\omega$ в $a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.

В [46] доказано следующее

Утверждение 4.1 [46]. Пусть $a(s)$ - некоторый полином, а $\dot{a}(s)$ - его производная по s . При подстановке $s = j\omega$ получается

$$a(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega); \quad \dot{a}(j\omega) = \tilde{g}(\omega) + j\tilde{h}(\omega).$$

Тогда справедливо

$$\tilde{g}(\omega) = \dot{h}(\omega); \quad \tilde{h}(\omega) = -\dot{g}(\omega). \quad (4.8)$$

Согласно теоремам Харитонова и следствиям из них для определения устойчивости интервального полинома в общем случае достаточно проверки четырех специальным образом построенных полинома (1.3)-(1.6). Тогда введем следующие определения.

Определение 4.1. *Под амплитудно-фазовой характеристикой интервального полинома будем понимать семейство характеристик построенных по четырем харитоновским полиномам.*

Определение 4.2. *Кривизной годографа Михайлова интервального полинома будем называть семейство характеристик построенных на основе (4.6) для четырех харитоновских полиномов.*

Распространим результаты, приведенные в [46], на случай интервальных полиномов.

Теорема 4.1. *(О кривизне годографа Михайлова устойчивого интервального полинома). Пусть $a(s)$ - некоторый устойчивый интервальный полином, тогда кривизна его амплитудно-фазовой характеристики положительна для всех ω .*

Доказательство. Пусть $s = j\omega$, тогда $a(s)$ можно представить как $a(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega)$. Согласно леммам [53] и теоремам 1.1, 1.2 семейство фазовых характеристик $\varphi(\omega)$ полиномов (1.3)-(1.6) однозначно определено. Дальнейшие рассуждения будем вести из рассмотрения фазовой характеристики только одного харитоновского полинома. Производная фазовой характеристики определена во всех точках. Из устойчивости полинома также следует, что фазовая характеристика монотонно возрастает [53] т.е.

$$\dot{\varphi}(\omega) = \frac{g(\omega)\dot{h}(\omega) - \dot{g}(\omega)h(\omega)}{g(\omega)^2 + h(\omega)^2} > 0. \quad (4.9)$$

Пусть $\dot{a}(s)$ - производная интервального полинома $a(s)$. Тогда, согласно следствию 3.1 вследствие устойчивости исходного интервального полинома производная интервального полинома тоже будет устойчива. Согласно (4.9) фазовая характеристика $\dot{a}(s)$

$$\dot{\tilde{\varphi}}(\omega) = \frac{\tilde{g}(\omega)\dot{\tilde{h}}(\omega) - \dot{\tilde{g}}(\omega)\tilde{h}(\omega)}{\tilde{g}(\omega)^2 + \tilde{h}(\omega)^2} > 0 \quad (4.10)$$

для всех ω . Учитывая выражение (4.8), неравенство (4.10) можно представить в виде

$$\dot{\tilde{\varphi}}(\omega) = \frac{\dot{g}(\omega)\dot{h}(\omega) - \dot{g}(\omega)h(\omega)}{g(\omega)^2 + h(\omega)^2} > 0. \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.6) и (4.11), можно заметить, что неравенства отличаются только степенью знаменателя. Следовательно, если справедливо (4.11) для каждого харитоновского полинома, то кривизна (4.6), построенная для этих полиномов, положительна для всех ω . Теорема доказана.

Проверим утверждения о кривизне годографа Михайлова на примере.

Пример 4.7. Пусть задан устойчивый интервальный полином $a(s) = s^3 + [22.5; 25.4]s^2 + [113; 116]s + [52.5; 55.4]$. Семейство годографов Михайлова, вещественная и мнимая характеристики, кривизна го-

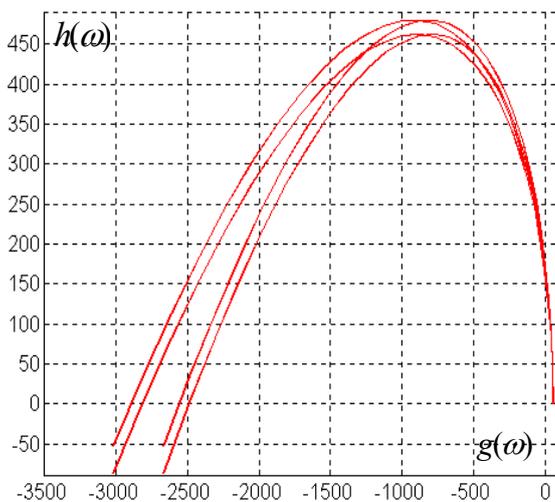


Рис. 4.9. Семейство годографов Михайлова интервального полинома

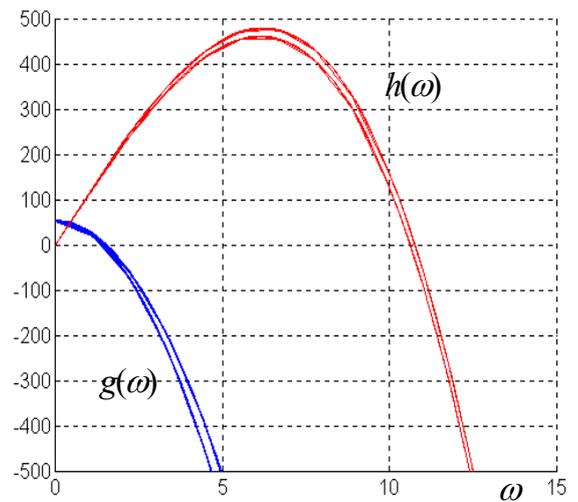


Рис. 4.10. Вещественная и мнимая частотные характеристики

дографа Михайлова интервального полинома показаны на рис.4.9-4.11 соответственно.

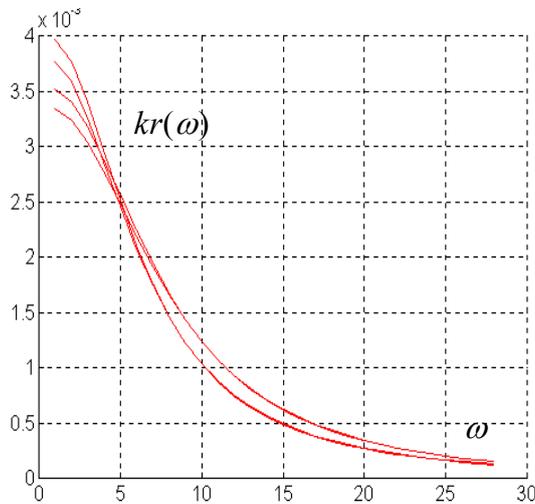


Рис.4.11. Кривизна годографа

Михайлова интервального полинома Михайлова интервального полинома из примера 4.7

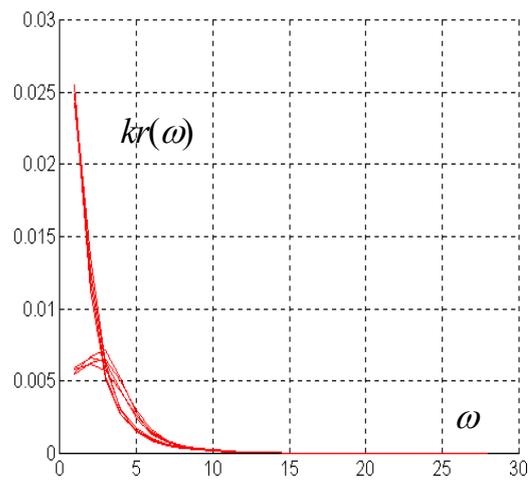


Рис.4.12. Кривизна годографа

из примера 4.8

Следствие 4.1. Если интервальный полином $\tilde{a}(s)$ устойчив, то кривизна годографа Михайлова интервального полинома $a(s) = \int \tilde{a}(s)ds$ положительна для всех ω .

Пример 4.8. Пусть задан устойчивый интервальный полином $\tilde{a}(s) = 20s^3 + [144; 156]s^2 + [252; 270]s + [100; 220]$. После интегрирования подберем такой свободный коэффициент, чтобы в результате получился неустойчивый интервальный полином

$$a(s) = 5s^4 + [48; 52]s^3 + [126; 135]s^2 + [100; 220]s + [500; 600].$$

Однако, как видно из рис.4.12, кривизна неустойчивого интервального полинома все равно положительна.

Предположение 4.1. Для устойчивости интервального полинома $a(s)$ степени не выше 4-й с $a_i > 0$ достаточно, чтобы кривизна амплитудно-фазовой характеристики полинома $\int a(s)ds$ была положительна.

4.3.3. Об использовании свойств кривизны к синтезу регуляторов для систем управления с интервальными параметрами

Как отмечалось ранее, для поиска неизвестных параметров регулятора методами оптимизации при синтезе систем управления с интервальными параметрами начальные условия имеют еще большее значение, чем для систем управления с постоянными параметрами. Воспользуемся для их получения свойствами кривизны амплитудно-фазовой характеристики интервального полинома, которые являются распространением свойств кривизны годографа Михайлова [46] на интервальный случай. Кроме того, основываясь на предположении 4.1, предложим алгоритм решения частного случая задачи синтеза для систем управления с интервальными параметрами не выше четвертого порядка, когда необходимо обеспечить расположение полюсов замкнутой системы в открытой левой комплексной полуплоскости C_-^0 . При решении этой задачи с использованием оптимизационных процедур необходимо, чтобы выбранный функционал качества зависел от расположения полюсов т.е. имел различные значения для гурвицевых и негурвицевых полиномов.

Пусть $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$, где $a_i = [a_i'; a_i'']$ является характеристическим полиномом замкнутой системы, $h_1(s)$, $h_2(s)$, $h_3(s)$, $h_4(s)$ - полиномы Харитонова, построенные исходя из (1.3)-(1.6), $kr_j(\omega)$ - кривизна полинома $\int h_j(s) ds$, $j = \overline{1,4}$. Еще одно условие заключается в том, чтобы коэффициенты полиномов $h_j(s)$ были положительными: $h_{ji} > 0$, $i = \overline{0,n}$. Для реализации оптимизационной процедуры предлагается использовать, например, метод штрафных функций [38]. Тогда функционал качества выглядит следующим образом:

$$J = -\min_{\omega \in \Omega} kr_j(\omega) + \alpha, \quad (4.12)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall i \ h_{ji} > 0; \\ -\beta(\min_i(h_{ji}) - \gamma), & \text{если } \exists i \ h_{ji} \leq 0. \end{cases}$$

Здесь Ω - диапазон частот от нуля до такой частоты, при которой при построении годографа Михайлова полинома преобладает старшая степень $h_j(s)$; β - параметр, влияющий на скорость сходимости, $\beta \gg 0$; γ - параметр, предназначенный для случая, когда $\min_i(h_{ji}) = 0$, $\gamma > 0$.

Отсюда имеем начальные условия для оптимизационной процедуры, представленной далее.

Пример 4.9. Рассмотрим объект управления¹⁸

$$W_p(s) = \frac{[2.7; 3.3]s + [-0.6; 0.6]}{s^2 - [2.5; 3.5]s + [9.5; 10.5]}.$$

Требуется решить задачу стабилизации с помощью регулятора 1-го порядка, находящегося в прямом канале, вида

$$c(s) = n_{c0} / (s + d_{c0}).$$

Тогда характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$d_f(s) = s^3 + ([-3.5; -2.5] + d_{c0})s^2 + ([-3.5; -2.5]d_{c0} + [9.5; 10.5] + [2.7; 3.3]n_{c0})s + ([9.5; 10.5]d_{c0} + [-0.6; 0.6]n_{c0}).$$

Так как $n \leq 4$, воспользуемся предположением 4.1. для решения данной задачи. Согласно следствиям из теоремы 2 Харитонова для устойчивости интервального полинома 3-го порядка достаточно обеспечить устойчивость полинома (П.1.1)

$$h(s) = s^3 + d'_{f2}s^2 + d'_{f1}s + d''_{f0}.$$

Используя для процедуры минимизации функционал (4.12) с $\beta = 10$, $\gamma = 1$ и начальные условия $n_{c0} = d_{c0} = 1$, имеем регулятор¹⁹

¹⁸ Barmish B.R., Shi Z. Robust stability of a class polynomials with coefficients depending multilinearly on perturbations // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1990. - V. 35, № 9. - P. 1040-1043.

$$c(s) = 6.2635 / (s + 14.6139),$$

который обеспечивает следующий характеристический полином замкнутой системы

$$d_f(s) = s^3 + [3.7534 ; 3.7635]s^2 + [33.2355 ; 33.3975]s + [50.7349 ; 50.9753].$$

Расположение корней полинома и график кривизны изображены на рис.4.13, 4.14 соответственно.

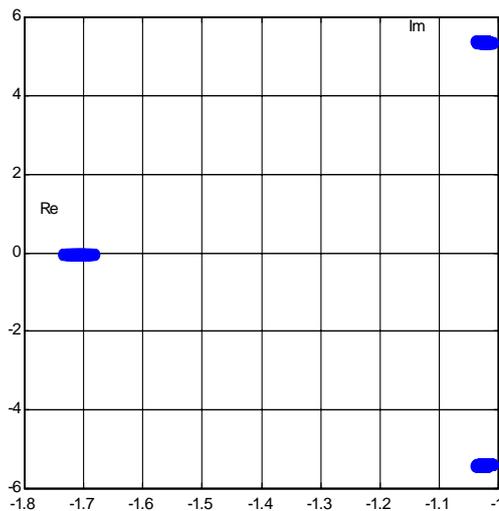


Рис.4.13. Расположение корней системы из примера 4.9

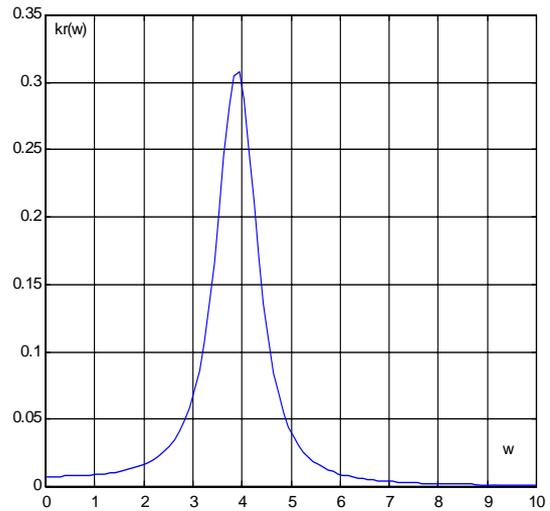


Рис.4.14. Кривизна годографа Михайлова полинома $\int d_f(s) ds$

Отметим, что данный пример не опровергает предположение 4.1.

Пример 4.10. Рассмотрим многоканальный объект управления следующего вида²⁰:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1; 1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & [1.21; 2.31] & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ -0.011 \end{bmatrix}.$$

¹⁹ Авторами статьи предлагается регулятор более высокого порядка вида

$$c(s) = \frac{20s + 23}{s^2 + 10s + 5}.$$

²⁰ Djafaris T.E., Hollot C.V. The stability of a family a polynomials can be deduced from a finite number $0(k^3)$ of frequency checks // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1989. - V. 34, № 9. - P. 982-986.

Как и в первоисточнике попытаемся стабилизировать данный объект с помощью статической обратной связи, тогда характеристический полином замкнутой системы будет определяться соотношением

$$d_f(s) = \det(A + BKC - sI),$$

где K - коэффициентная матрица статической обратной связи размером 1×4 ; I - единичная матрица.

Полином $d_f(s)$ имеет 4-ую степень, следовательно, для стабилизации системы можно воспользоваться предположением 4.1. Кроме того, надо отметить, что для стабилизации интервальной системы необходимо обеспечить устойчивость двух полиномов (П.1.2, П.1.3,) с постоянными коэффициентами вида (см. Приложение 1)

$$a_1(s) = s^4 + a'_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a'_0;$$

$$a_2(s) = s^4 + a''_3s^3 + a''_2s^2 + a''_1s + a''_0.$$

Используя для процедуры минимизации функционал (4.12) с $\beta = 10$, $\gamma = 1$, имеем матрицу регулятора²¹

$$K = [-0.4525 \quad -0.0714 \quad -320.0109 \quad -2.9882],$$

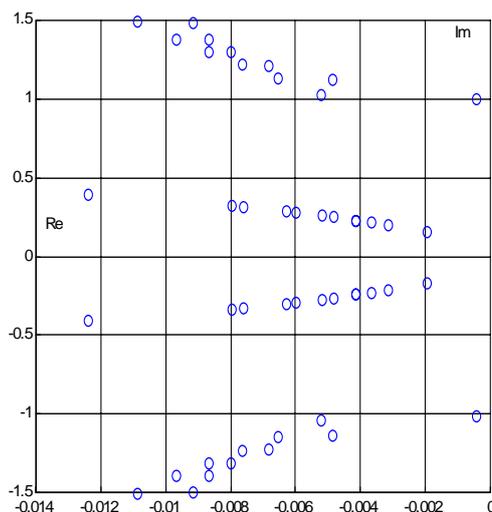


Рис.4.15. Расположение полюсов системы из примера 4.10

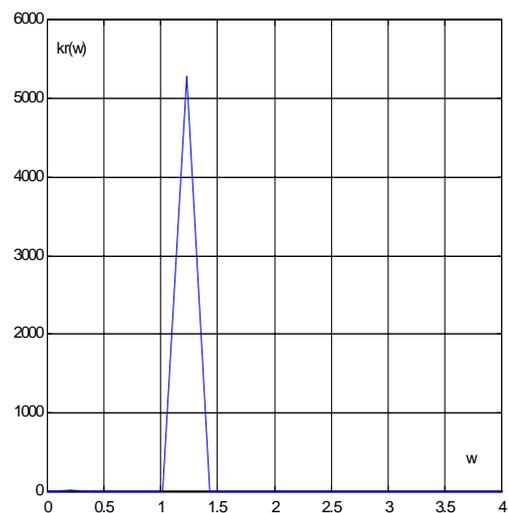


Рис.4.16. Кривизна годографа Михайлова полинома $\int d_f(s) ds$ из примера 4.10

²¹ Авторами статьи предлагается коэффициентная матрица регулятора вида $K = [240 \ 500 \ -900 \ 4000]$.

который обеспечивает характеристический полином системы

$$d_f(s) = s^4 + 0.0257s^3 + [1.5749; 1.7749]s^2 + [0.0153; 0.0191]s + [0.0968; 0.1208].$$

Расположение полюсов системы и график кривизны $kr(\omega)$ приведены на рис. 4.15, 4.16 соответственно. Отметим, что данный пример, как и предыдущий не опровергает предположение 4.1.

4.3.4. Описание алгоритма синтеза регуляторов для систем управления, имеющих интервальную неопределенность

Предлагаемая оптимизационная процедура синтеза систем управления с интервальными параметрами осуществляется в корневом пространстве \mathbf{R}^n , поэтому основные положения, приведенные выше для систем управления с постоянными параметрами справедливы и для этой методики. Поясним некоторые особенности.

Модальная задача синтеза систем управления с интервальными параметрами в общем случае может быть сведена к решению матричного полиномиального диофантова включения вида [10]

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & | & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & | & b_2 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & | & 0 & 0 & \dots & b_n & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & | & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_0 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} (\subseteq) \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n+p-1} \\ f_{n+p} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

где $A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$, $B(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i$ - полиномы, характеризующие объект, с коэффициентами $a_i, b_i \in \mathbf{IR}$; $X(s) = \sum_{i=0}^p x_i s^i$, $Y(s) = \sum_{i=0}^p y_i s^i$ - полиномы, характеризующие регулятор, с неизвестными коэффициентами $x_i, y_i \in \mathbf{R}$; $F(s) = \sum_{i=0}^{n+p} f_i s^i$ - полином, определяющий желаемый

мые свойства замкнутой системы $f_i \in \mathbf{IR}$. Знак включения (\subseteq) показывает, что область расположения корней левой части выражения (4.13) является подобластью области расположения корней интервального полинома $F(s)$. В общем случае левая часть включения является не интервальным полиномом, а полиномом с мультилинейной параметрической зависимостью (*polynomials with multilinear parameter dependence*) [75, 78, 96]. Необходимо отметить, что коэффициенты при старших степенях $X(s)$ и $A(s)$ могут быть равными нулю.

Как было отмечено в главе 1 для устойчивости интервального полинома, характеризующего расположение корней замкнутой системы, достаточно обеспечить устойчивость четырех специальным образом сформированных полиномов Харитонова (1.3-1.6). Для D -устойчивости интервального полинома, в большинстве случаев достаточно, чтобы корни всех полиномов, коэффициенты которых принимают граничные значения из заданных интервалов, находились в области D [30, 66, 74]. Однако, согласно некоторым теоремам [108, 111], если область D имеет вид сектора, трапеции и т.д. количество таких полиномов может быть гораздо меньшим. Воспользуемся этими положениями для построения алгоритма синтеза систем управления с интервальными параметрами. Таким образом, в общем случае, задача поиска неизвестных параметров регулятора сводится к оптимизации функционала (4.2) для каждого из вершинных полиномов. Для общего вида управляемых и наблюдаемых линейных стационарных интервальных объектов управления с одинаковым числом входов и выходов предлагается следующий

Алгоритм синтеза регуляторов для систем управления с интервальными параметрами

Шаг 1. Исходя из требований к системе выбирается местоположение регулятора в системе (см. рис.1.2, 1.3, 1.13). Выбирается регулятор наименьшего возможного порядка. В общем случае, когда от-

существуют дополнительные требования, выбирается регулятор первого порядка²².

Шаг 2. На основе (1.3)-(1.6) строятся четыре харитоновских полинома, характеризующих устойчивость системы.

Шаг 3. Исходя из (4.12) и полученных на 2 шаге полиномов определяются начальные условия x_k и y_j для оптимизационной процедуры синтеза.

Шаг 4. На основе (2.12), определяются ограничения (границы области D) на расположение корней в корневом пространстве R^n в совмещенных декартовых координатах (см. пример 2.6).

Шаг 5. Исходя из заданной желаемой области расположения корней строятся харитоновские полиномы (П.1.1-П.1.6), характеризующие D -устойчивость замкнутой системы (см. Приложение 1).

Шаг 6. Минимизируем функционал (4.1) для семейства харитоновских полиномов.

Шаг 7. Если необходимо обеспечить дополнительные требования к системе, а именно статический коэффициент передачи замкнутой системы, минимизируем функционал (4.2) с ограничениями (4.3) для семейства харитоновских полиномов, иначе - на шаг 8.

Шаг 8. Анализ замкнутой системы.

Шаг 9. Если поставленные требования не выполнены переходим к шагу 10, иначе к шагу 13.

Шаг 10. Если порядок регулятора $m = n - 1$, переходим на шаг 11, иначе изменяем структуру регулятора (увеличиваем его порядок)²³. Возвращаемся к шагу 2.

²² К примеру, если необходимо синтезировать строго правильный регулятор, то минимальное его представление для одноканального случая имеет вид : степень числителя равна нулю, а степень знаменателя - единице, для многоканального случая, представленного правым разложением - столбцовые степени матрицы "числителя" должны быть равны нулю, соответствующие столбцовые степени матрицы "знаменателя" - единице.

Шаг 12. Если возможно, изменяем требования, предъявляемые к системе, переходим на шаг 1. Иначе - в данной постановке регулятор не может быть найден, переход шагу 13.

Шаг 13. Конец алгоритма.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих представленную методику.

Пример 4.11. Рассмотрим двухканальный объект управления, динамические свойства которого характеризуются передаточной матрицей вида²⁴

$$H(s) = \frac{1}{[0.5; 0.6]s + 1} \begin{bmatrix} [0.4; 0.5] & [0.8; 0.9] \\ [0.2; 0.3]s + [0.3; 0.4] & [-0.3; -0.2] \end{bmatrix}.$$

Структура регулятора задана изначально в виде

$$C(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} k_1s + k_2 & 0 \\ 0 & k_3s + k_4 \end{bmatrix},$$

и требуется определить такие его параметры, которые бы обеспечивали расположение корней замкнутой системы в секторе с $\eta \geq 0.4$ и $\varphi \leq 35^\circ$.

Используя (4.12), получаем начальные условия для оптимизационной процедуры

$$k_1 = -1.991; k_2 = 1.8826; k_3 = -0.0034; k_4 = -0.0015.$$

В [112] для обеспечения расположения корней в секторе $\varphi \leq 35^\circ$ требуется сформировать $q = 36$ специальных харитоновских полинома, где $(180 - \varphi) / 180 = p / q$. С другой стороны, порядок характеристического полинома замкнутой системы $n = 4$, поэтому для обеспечения

²³ Вначале изменяем порядок числителя передаточной функции регулятора и устанавливаем $m_{num} = m_{num} + 1$. Осуществляем процедуру с начала (переход на шаг 2). В случае дальнейшего изменения структуры увеличивается порядок знаменателя передаточной функции регулятора $m_{den} = m_{den} + 1$.

²⁴ Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Тляшов Р.З. Синтез алгоритма управления многосвязным объектом с интервальными параметрами // Изв. Вузов СССР. Приборостроение. - 1991. - № 8. - С. 48-54.

поставленного условия требуется проверить на принадлежность корней области D всего $q = 2^n = 16$ граничных полинома, что несомненно меньше первого варианта.

Минимизируем функционал (4.1) для каждого из 16-ти граничных полиномов, с коэффициентами, принимающими крайние значения из интервалов. После действия оптимизационной процедуры по-

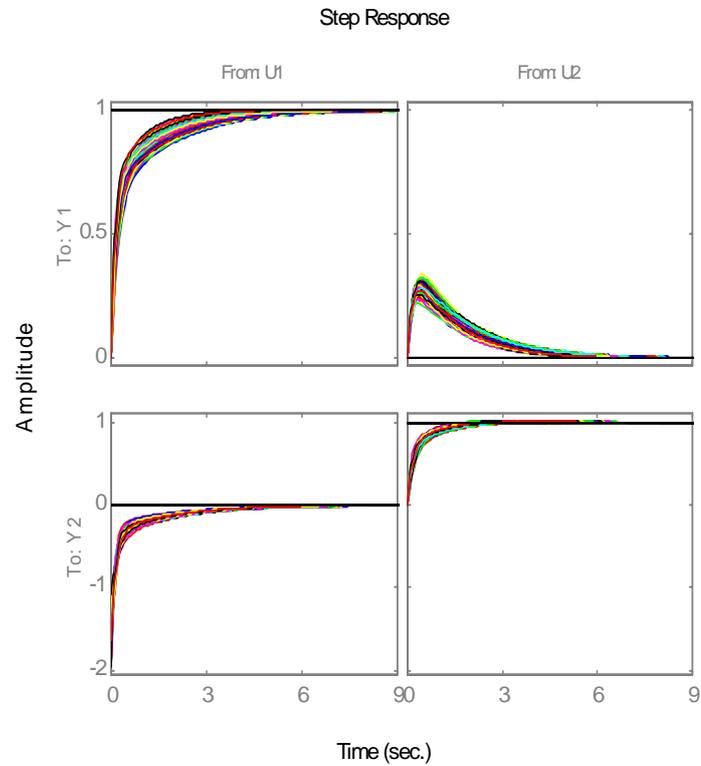


Рис.4.17. Переходные процессы системы для примера 4.11

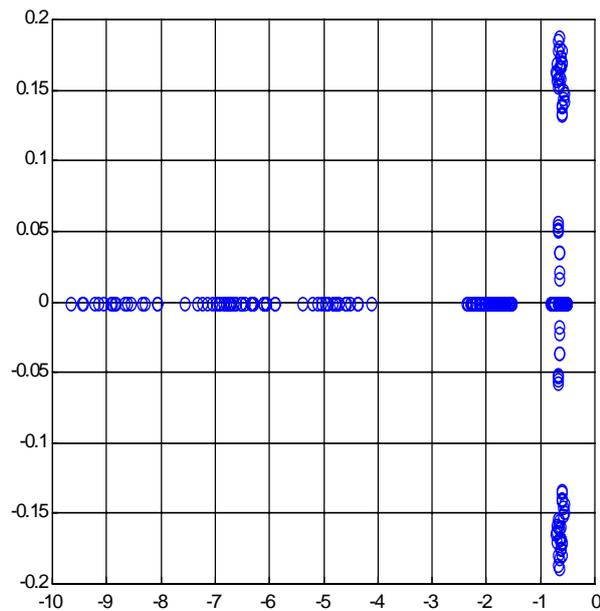


Рис. 4.18. Расположение корней системы из примера 4.11

лучаем регулятор

$$C(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1.5006s + 1.0761 & 0 \\ 0 & -3.273s - 3.8151 \end{bmatrix},$$

обеспечивающий переходные процессы системы и расположение корней, представленные на рис. 4.17, 4.18. Учитывая, что поставленные требования на расположение корней системы были ослаблены, задача синтеза решена успешно, синтезирован регулятор пониженного порядка.

В [36] синтезирован регулятор вида

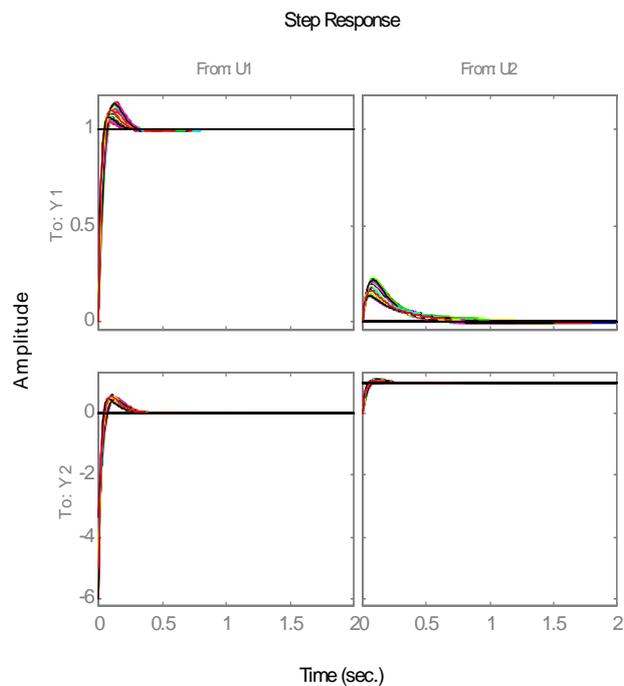


Рис.4.19. Переходные процессы в системе из примера 4.11 с регулятором, предлагаемым в [33]

$$C(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 5s + 50 & 0 \\ 0 & -10s - 40 \end{bmatrix},$$

который обеспечивает переходные процессы в системе, изображенные на рис. 4.19, и расположение корней, представленное на рис.4.20.

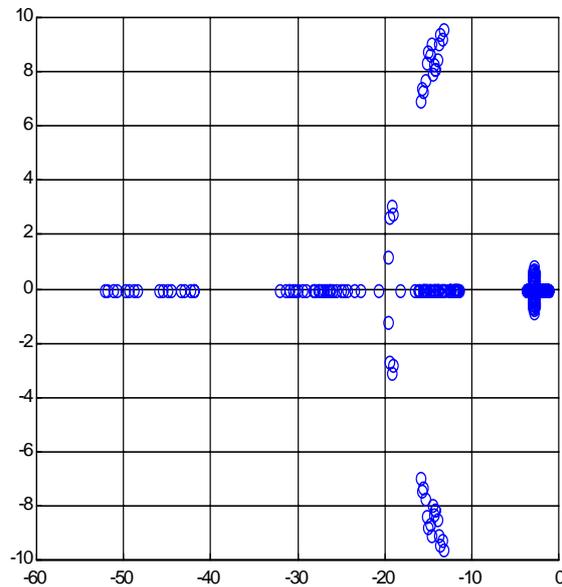


Рис.4.20. Расположение корней системы из примера 4.11 с регулятором, предлагаемым в [33]

Сравнивая параметры регуляторов, полученных по предлагаемой нами методике и методике из [36], стоит отметить, синтезированный нами регулятор обеспечивает не только расположение корней в заданном секторе, но и апериодические процессы в системе, лучшую автономность каналов системы.

Пример 4.12. Рассмотрим объект управления, описывающий боковое движение вертолетного буксировочного комплекса для транспортировки буксируемых объектов различного назначения (грузов, рыболовных приспособлений) по водной поверхности. Система уравнений, описывающая боковое движение вертолетного буксировочного комплекса выглядит следующим образом²⁵

$$\Delta \dot{V}_z = \bar{z}^{V_z} \Delta V_z + \bar{z}^{\omega_x} \Delta \omega_x + \bar{z}^{\gamma} \Delta \gamma + \bar{z}^{\delta_k} \Delta \delta_k;$$

²⁵ Хлебалин Н.А. Синтез регулятора стабилизации бокового движения вертолетного буксировочного комплекса с учетом неопределенности параметров его математической модели // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. - Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1982.- С. 109-122.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\omega}_x &= \overline{\overline{M}}_x^{V_z} \Delta V_z + \overline{\overline{M}}_x^{\omega_x} \Delta \omega_x + \overline{\overline{M}}_x^{\gamma} \Delta \gamma + \overline{\overline{M}}_x^{\delta_k} \Delta \delta_k; \\ \Delta \dot{\gamma} &= -\Gamma^{\omega_y} / L \cdot \Delta V_z + \Delta \omega_x; \\ \Delta \dot{z}_{\delta_0} &= \Delta V_z + V / L \cdot \Delta z_{\delta_0} - V / L \cdot \Delta z_{\delta_0}; \\ \Delta \dot{z}_{\delta_0} &= V / L \cdot \Delta z_{\delta_0} - V / L \cdot \Delta z_{\delta_0},\end{aligned}\quad (4.14)$$

где $\Delta \delta_k$ - отклонение органов управления креном; M_x - момент, создаваемый силой F относительно связанных осей вертолета; $\Delta \gamma$ - приращение угла крена вертолета; ΔV_z - боковая составляющая скорости вертолета в связанных осях; $\Delta \omega_x$ - угловая скорость крена вертолета; L - длина троса; V - скорость буксировки;

Для вертолетного буксировочного комплекса, боковое движение которого описывается системой дифференциальных уравнений (4.14) с коэффициентами, зависящими от неопределенных параметров V , L , F , v_0 , δ_0 , требуется построить регулятор

$$\Delta \delta_k = i_{V_z} \Delta V_z + i_{\omega_x} \Delta \omega_x + i_{\gamma} \Delta \gamma + i_{z_{\delta_0}} \Delta z_{\delta_0} + i_{z_{\delta_0}} \Delta z_{\delta_0},$$

где i_{V_z} , i_{ω_x} , i_{γ} , $i_{z_{\delta_0}}$, $i_{z_{\delta_0}}$ - постоянные числа, обеспечивающие расположение корней характеристического полинома замкнутой системы в заданной области комплексной плоскости, имеющей вид трапеции.

Пусть динамика объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

а закон управления задан в виде

$$U = kx.$$

Тогда выражение (4.13) после некоторых преобразований в вышеприведенной работе имеет следующий вид

$$Pk + d = D,$$

где P - интервальная матрица, элементами которой являются некоторые функции от коэффициентов матрицы A и вектора; b - искомый вектор коэффициентов регулятора; d - в общем случае интервальный вектор, составленный из выражений для коэффициентов характеристического полинома объекта; D - интервальный вектор, элементами

которого являются коэффициенты желаемого интервального характеристического полинома замкнутой системы. Матрицы заданы в следующем виде

$$d = [1.8882; 1.9064] \quad [0.2; 0.562] \quad [0.2785; 0.3616] \quad 0 \quad 0]^T;$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{12} & p_{11} & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{22} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{54} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -17.64; \quad p_{12} = -33.49; \quad p_{21} = 67.2751; \quad p_{31} = [-361.67; -330.275]; \\ p_{22} &= [-5.61; -4.999]; \quad p_{44} = [-355.4435; -322.8]; \quad p_{35} = [-1.9598; -1.6335]; \\ p_{34} &= [65.3152; 65.646]; \quad p_{45} = [6.23; 7.4743]; \quad p_{54} = [-40.182; -30.5835]. \end{aligned}$$

Задача синтеза заключается в следующем: необходимо найти такие параметры регулятора, чтобы корни системы попадали в сектор 60° и $-2 < \mathbf{Re} \lambda_i < -0.1$.

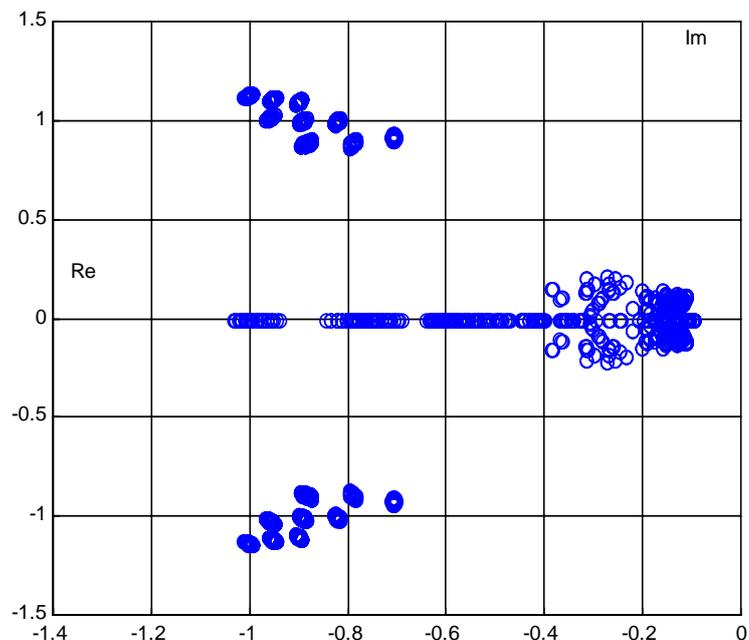


Рис. 4.21. Расположение корней системы из примера 4.12

Для обеспечения поставленных требований необходимо, чтобы корни шести харитоновских полиномов (П.1.5) попадали в заданную область. В результате действия оптимизационной процедуры получаем регулятор²⁶

$$k = [-0.0035 \quad -0.0211 \quad -0.0987 \quad -0.0012 \quad 0.0003]^T,$$

обеспечивающий расположение корней, изображенное на рис.4.21. Как видим, поставленные требования выполнены.

4.4. ВЫВОДЫ

По результатам главы можно сказать следующее.

1. Предложена оптимизационная процедура модального метода синтеза регуляторов пониженного порядка для стационарных линейных непрерывных объектов управления с интервальными параметрами, заключающаяся в последовательном сдвиге в корневом пространстве \mathbf{R}^n точек, характеризующих расположение корней харитоновских полиномов, в заданную область D . Полученная методика основана на процедуре модального метода синтеза регуляторов пониженного порядка для стационарных линейных непрерывных объектов управления с постоянными параметрами.

2. Выявлен ряд критериев, учитывающих расположение полюсов динамической системы, используемых в оптимизационной процедуре сдвига корней характеристического полинома замкнутой системы в корневом пространстве \mathbf{R}^n .

3. На основе известных свойств кривизны амплитудно-фазовой характеристики предложено использование новых свойств кривизны к синтезу регуляторов пониженного порядка для объектов с интерваль-

²⁶ В первоисточнике регулятор, обеспечивающий заданное расположение корней имеет следующий вид:

$$k = [-0.0186 \quad -0.05866 \quad -0.26567 \quad -0.00827 \quad -0.0013]^T.$$

ными параметрами в качестве определения начальных условий оптимизационной процедуры.

ГЛАВА 5

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ РЕАЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе будет показано применение предлагаемой методики синтеза регуляторов пониженного порядка для систем управления с интервальными параметрами к синтезу промышленных систем. Решается задача синтеза регулятора, обеспечивающего устойчивость механической двухмассовой системы, находящей свое применение в робототехнике, проектировании виброзащитных систем. Для многоканальной линейной интервальной системы управления температурным режимом в колонне синтеза аммиака АМ-70 на КОО «Азот» рассчитывается регулятор, который обеспечивает выполнение требований, предъявляемых к системе.

5.2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ

В настоящее время задача стабилизации механической системы возникает во многих областях современной техники, связанных с управлением манипуляторов, роботов, с виброзащитой объектов от

источников колебаний. Задача стабилизации системы заключается в синтезе такого регулятора, который бы уменьшал колебания объекта, вызванных силами, возникающими в связях, соединяющих объект с источником колебаний.

Пусть задана несколько упрощенная механическая система, состоящая из двух масс и двух пружин (см. рис.5.1) и имеющая неопределенности в задании некоторых параметров¹. Требуется синтезировать регулятор, обеспечивающий стабилизацию системы за короткий промежуток времени при следующих допущениях: сила тяжести и сила притяжения между объектами не учитывается, колебания грузов происходят в невесомости, пружины идеальные (потерь энергии нет).

Объект управления описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_1 = U_1 + k_2 \cdot (x_2 - x_1) - k_1 \cdot x_1; \\ m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_2 = U_2 + k_2 \cdot (x_2 - x_1), \end{cases}$$

где k_1, k_2 - коэффициенты сжатия пружин; m_1, m_2 - массы грузов; U_1, U_2 - силы, действующие на грузы; x_1, x_2 - величины вертикальных смещений грузов.

После некоторых преобразований получим описание объекта в пространстве состояний

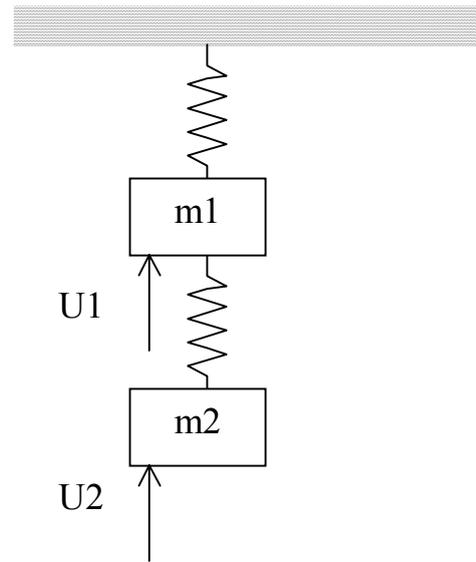


Рис.5.1. Схема механической двухмассовой системы

¹ Мижидон А.Д. Математическое и программное обеспечение в задачах автоматизации проектирования виброзащитных систем: Дис. ... док. техн. наук. - Новосибирск: НГТУ, 1997.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -(k_2 + k_1)/m_1 & 0 & k_2/m_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2/m_2 & 0 & -k_2/m_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметры объекта имеют неопределенность и заданы в виде $k_1 = [8; 12]$; $k_2 = [8; 12]$; $m_1 = [0.8; 1.2]$; $m_2 = [0.8; 1.2]$. Переходные процессы объекта представлены на рис.5.2.

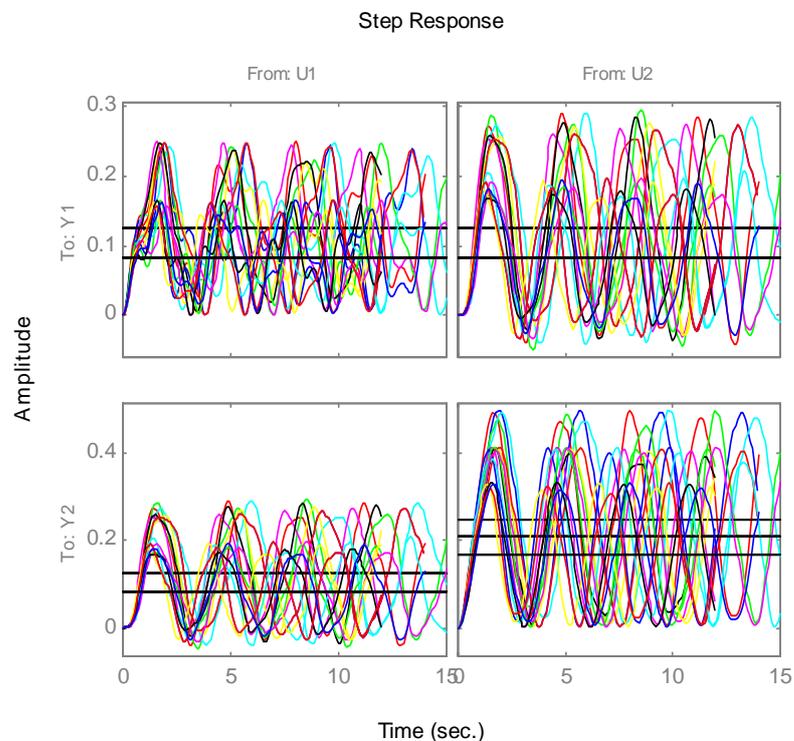


Рис.5.2. Переходные процессы объекта

Требуется для заданного объекта синтезировать регулятор как можно меньшего порядка, обеспечивающего устойчивость системы, переходные процессы минимальной длительности и условие $\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) < -0.4$.

После некоторых преобразований с использованием правил интервальной математики имеем интервальную матричную передаточную функцию объекта

$$W_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{[0.8333;1.25]s^2 + [5.556;18.75]}{s^4 + [20;40]s^2 + [40;225]} & \frac{[5.556;31.25]}{s^4 + [20;40]s^2 + [40;225]} \\ \frac{[5.556;18.75]}{s^4 + [20;40]s^2 + [40;225]} & \frac{[0.8333;1.25]s^2 + [11.11;37.5]}{s^4 + [20;40]s^2 + [40;225]} \end{bmatrix}.$$

На первом этапе выберем структуру регулятор первого порядка вида

$$W_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{n_{c0}^{11}}{s + d_{c0}^{11}} & \frac{n_{c0}^{12}}{s + d_{c0}^{12}} \\ \frac{n_{c0}^{21}}{s + d_{c0}^{21}} & \frac{n_{c0}^{22}}{s + d_{c0}^{22}} \end{bmatrix}.$$

Для обеспечения устойчивости интервального характеристического полинома замкнутой системы порядка $n = 6$ необходимо обеспечить устойчивость четырех харитоновских полиномов (1.3)-(1.6). После действия оптимизационной процедуры с функционалом (4.1) получаем регулятор

$$W_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1.746}{s + 3.007} & \frac{-2.608}{s + 0.4322} \\ \frac{4.287}{s + 0.8041} & \frac{-10.73}{s + 2.842} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

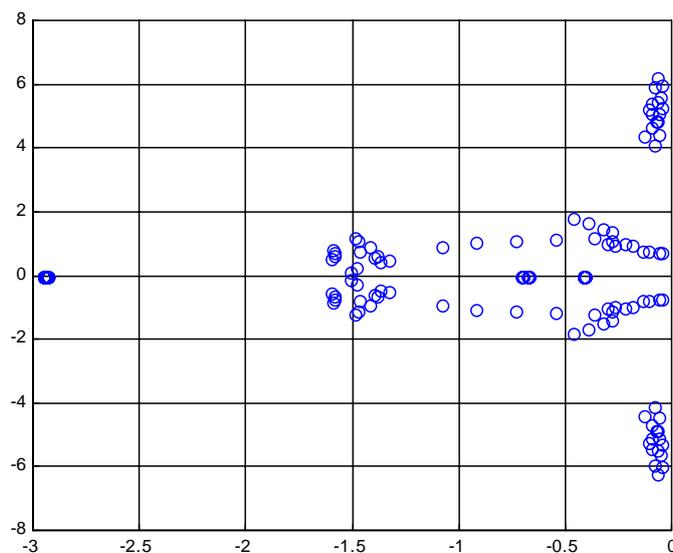


Рис.5.3. Расположение полюсов системы с регулятором (5.1)

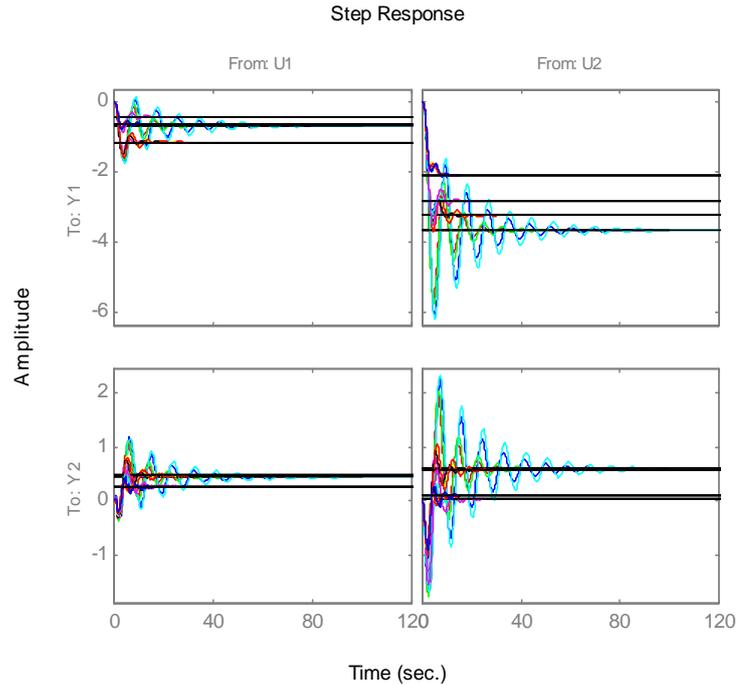


Рис.5.4. Переходные процессы в системе с регулятором (5.1) располагающий полюса замкнутой системы в области, представленной на рис.5.3 и переходные процессы, изображенные на рис.5.4. Как видим из рисунков, требуемое качество переходных процессов не достигнуто. Увеличим порядок числителя матричной передаточной функции регулятора на единицу и примем

$$W_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{n_{c1}^{11}s + n_{c0}^{11}}{d_{c1}^{11}s + 1} & \frac{n_{c1}^{12}s + n_{c0}^{12}}{d_{c1}^{12}s + 1} \\ \frac{n_{c1}^{21}s + n_{c0}^{21}}{d_{c1}^{21}s + 1} & \frac{n_{c1}^{22}s + n_{c0}^{22}}{d_{c1}^{22}s + 1} \end{bmatrix}.$$

Из эмпирических соображений выберем коэффициенты

$$d_{c1}^{11} = 0.5; \quad d_{c1}^{12} = 0.5; \quad d_{c1}^{21} = 0.5; \quad d_{c1}^{22} = 0.5.$$

После действия оптимизационной процедуры имеем

$$W_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{68.3286s - 36.3521}{0.5s + 1} & \frac{-24.7311s - 72.4166}{0.5s + 1} \\ \frac{-14.3616s + 29.3918}{0.5s + 1} & \frac{46.2679s + 29.7378}{0.5s + 1} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

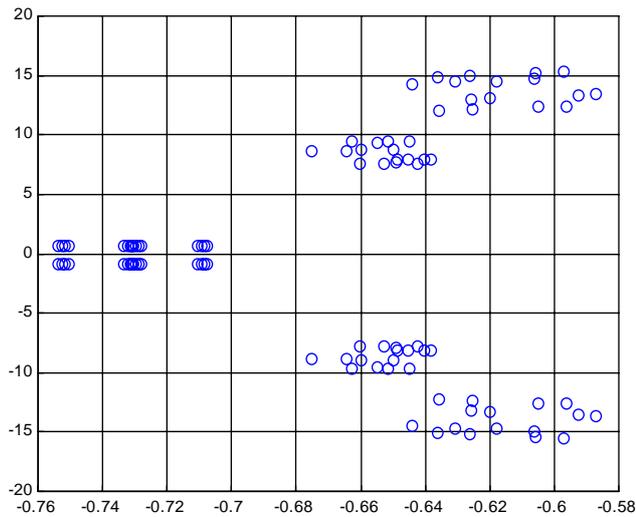


Рис.5.5. Расположение полюсов системы с регулятором (5.2)

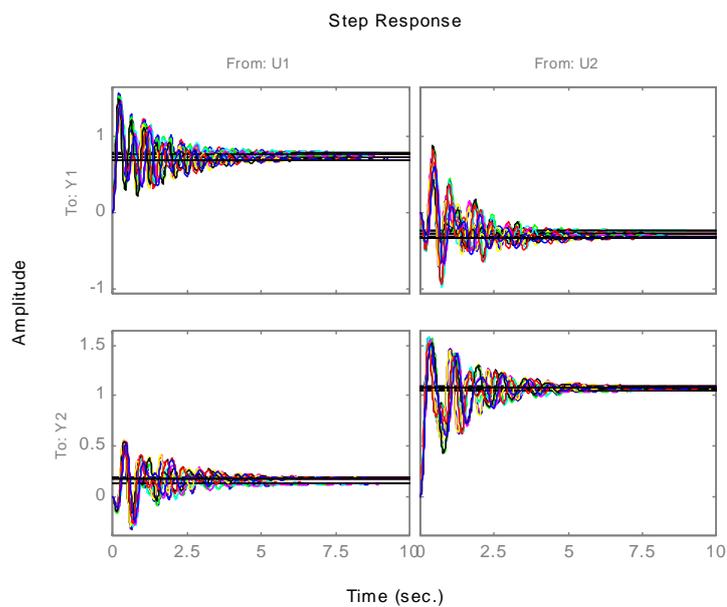


Рис.5.6. Переходные процессы в системе с регулятором (5.2.)

Полученный регулятор обеспечивает расположение полюсов системы и переходные процессы, изображенные на рис.5.5, 5.6 соответственно. Как видно из рисунков, поставленные требования выполнены. Дальнейшее увеличение порядка регулятора не приводит к существенному улучшению качества переходных процессов, поэтому итерационная процедура на этом останавливается.

5.3. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ 4-Х ПОЛОЧНОЙ КОЛОННЫ АММИАКА

Одной из технологических стадий производства синтетического аммиака является каталитический синтез аммиака в колонне. В колонне синтеза имеются четыре полки с катализатором. Важнейшим регулируемым параметром является температура в зоне катализатора. Регулирование температурным режимом в катализаторных слоях колонны синтеза осуществляется путем изменения подачи газа по четырем байпасам при помощи заслонок, установленных на каждом байпасе (рис.5.7). Температура на первой полке обычно не регулируется. Управление температурным режимом достаточно сложная задача, так как существующие математические модели из-за сложности физико-

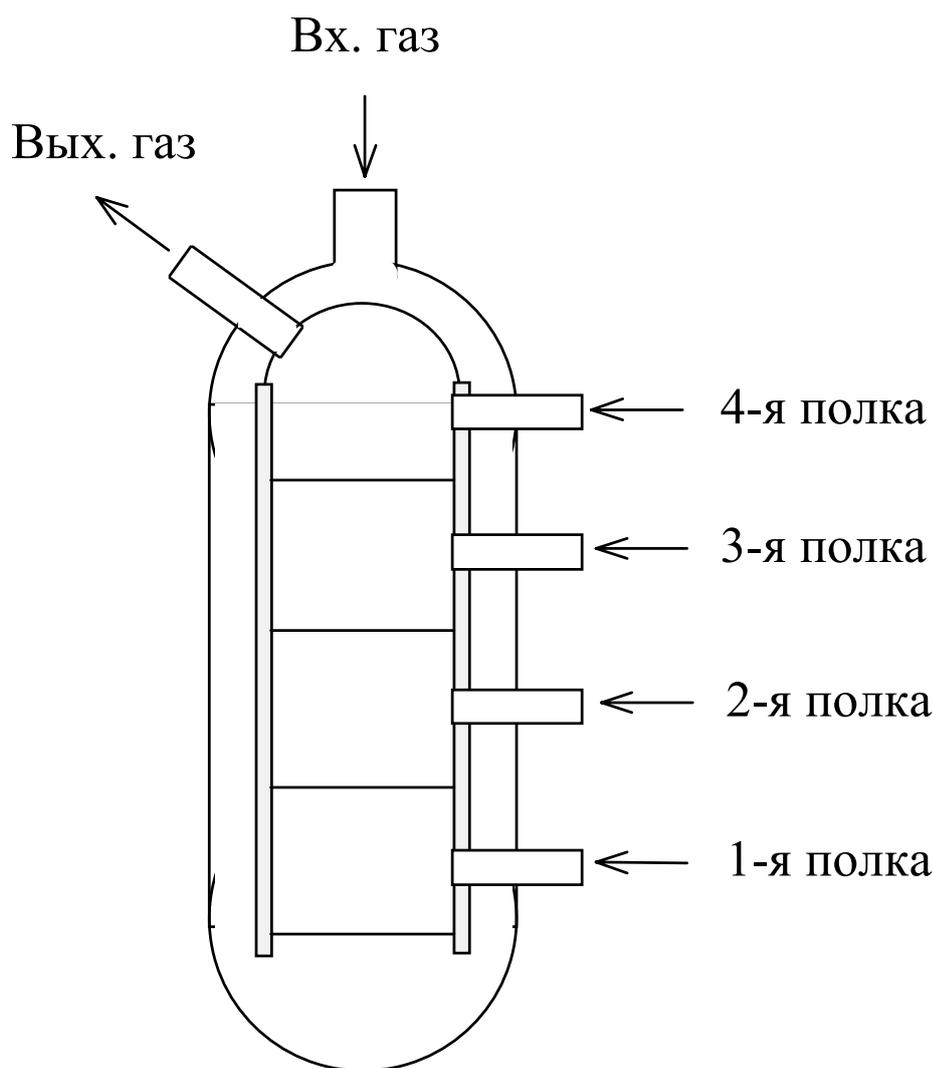


Рис.5.7. Схематичный вид колонны синтеза аммиака

химических зависимостей трудно реализовать. Кроме того, все параметры колонны синтеза аммиака изменяются во времени.

В настоящее время в промышленных производствах для управления технологическими объектами используются ПИ(Д) регуляторы. Так как технологические параметры систем чаще всего взаимосвязаны между собой, автономные регуляторы для стабилизации температуры колонны синтеза аммиака не достаточно полно удовлетворяют технологическим требованиям. В результате возникла потребность в создании многоканального регулятора, учитывающего существующее температурное влияние полок, неопределенность и варьирование некоторых параметров системы.

С целью создания модели системы управления температурным режимом колонны были проведены экспериментальные исследования объекта управления в нормальном режиме функционирования в предположении малых отклонений по каналам “расход газа - температура газа в зоне катализа”. Дополнительно использовалась программа-тренажер, разработанная НПО “Восток” (г. Томск) на основе статической модели колонны синтеза аммиака. В результате процесса идентификации по рабочим характеристикам была получена линеаризованная интервальная модель объекта управления в режиме поддержания заданных температурных режимов полок². Таким образом, передаточная функция колонны синтеза аммиака в виде полиномиального матричного разложения имеет следующий вид:

$$W_p(s) = D_p^{-1}(s)N_p(s) = \begin{pmatrix} 1 + [0.07; 0.2]s & 0 & 0 \\ 0 & 1 + [0.07; 0.2]s & 0 \\ 0 & 0 & 1 + [0.07; 0.2]s \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1.47 & -0.15 & -0.07 \\ -1.5 & -0.71 & -0.08 \\ -1.38 & -0.68 & -0.42 \end{pmatrix}.$$

2 Степаненко С.В. Построение многоканального ПИ-регулятора для управления температурным режимом в колонне синтеза аммиака // Сб. науч. тр. НГТУ. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. - № 1(18). - С. 156-159.

Требуется разработать многоканальный ПИ-регулятор вида

$$W_c(s) = N_{cl}(s)D_c^{-1}(s)N_{cr}(s).$$

Структура системы управления температурным режимом с выбранным регулятором представлена на рис.5.8. Матрицы регулятора имеют следующий вид³:

$$N_{cr}(s) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}; \quad N_{cl}(s) = \begin{pmatrix} 1 + n_1s & 0 & 0 \\ 0 & 1 + n_2s & 0 \\ 0 & 0 & 1 + n_3s \end{pmatrix};$$

$$D_c^{-1}(s) = \frac{1}{s} [k_{ij}]^{-1},$$

где

$$[k_{ij}]^{-1} = \begin{pmatrix} -0.8607 & 0.0544 & 0.1331 \\ 1.8344 & -1.8386 & 0.0445 \\ -0.1419 & 2.7981 & -2.8903 \end{pmatrix};$$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3$ - неизвестные параметры регулятора, которые необходимо найти.

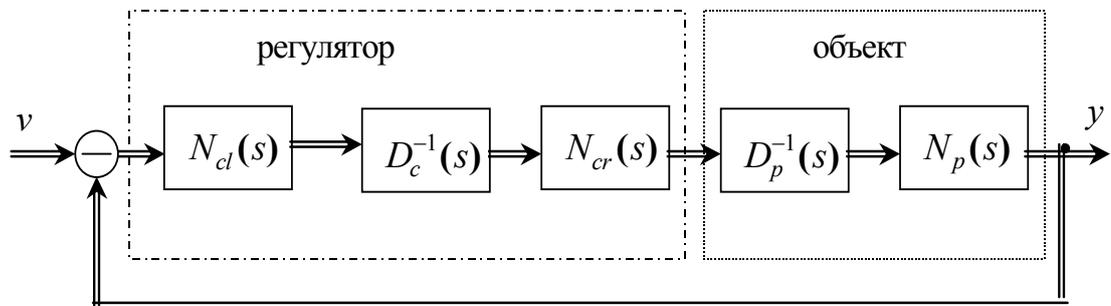


Рис.5.8. Структура системы управления температурным режимом

Будем решать задачу синтеза в следующей постановке:

1. $\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) < -0.4;$
2. $\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda_i)}{\operatorname{Re}(\lambda_i)}\right) \leq 45^\circ;$

³ Воевода А.А. Матричные передаточные функции: Учеб. пособие. - Новосибирск: НГТУ, 1994. - 94 с.

$$3. \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) - \min_j \operatorname{Re}(\lambda_j) \rightarrow 0.$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет порядок $n = 6$. Для обеспечения условия расположения корней характеристического полинома замкнутой системы в заданном секторе необходимо чтобы корни восьми специальным образом построенных харитоновских полиномов (П.1.6) располагались в желаемой области D . Минимизируем функционал

$$f(\Lambda) = \mu,$$

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \in D; \\ \rho(\lambda, D), & \text{если } \lambda \notin D, \end{cases}$$

для каждого из этих восьми полиномов. В результате оптимизации имеем $k_1 = 4.2624$, $k_2 = 2.1174$, $k_3 = 0.7972$, $n_1 = 0.149$, $n_2 = -0.0156$, $n_3 = 1.1873$ и структуру регулятора вида

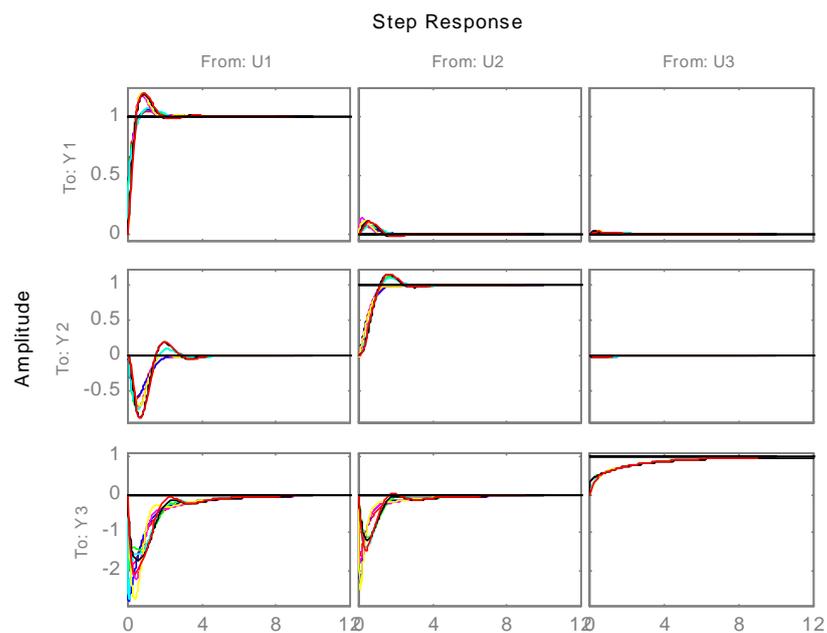


Рис.5.9. Переходные функции системы с регулятором (5.3)

$$C(s) = \begin{pmatrix} \frac{-0.5466s - 3.67}{s} & \frac{0.017s + 0.115}{s} & \frac{0.0158s + 0.1061}{s} \\ \frac{-0.122s + 7.819}{s} & \frac{0.0073s - 3.893}{s} & \frac{-0.0006s + 0.035}{s} \\ \frac{-0.7182s - 0.6049}{s} & \frac{7.034s + 5.925}{s} & \frac{-2.736s - 2.304}{s} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

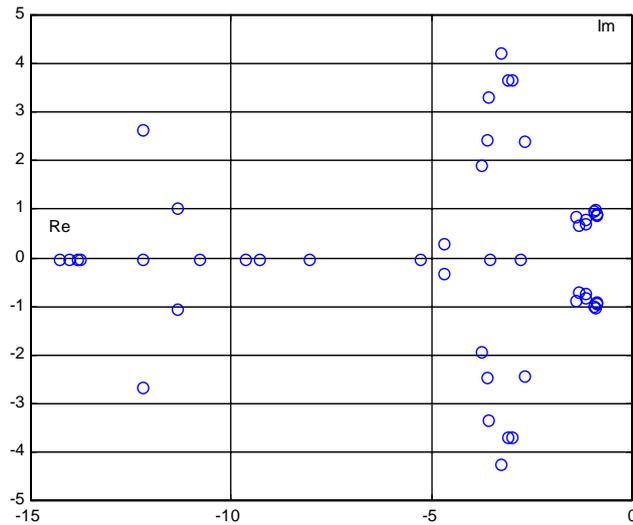


Рис.5.10. Расположение корней системы с регулятором (5.3)

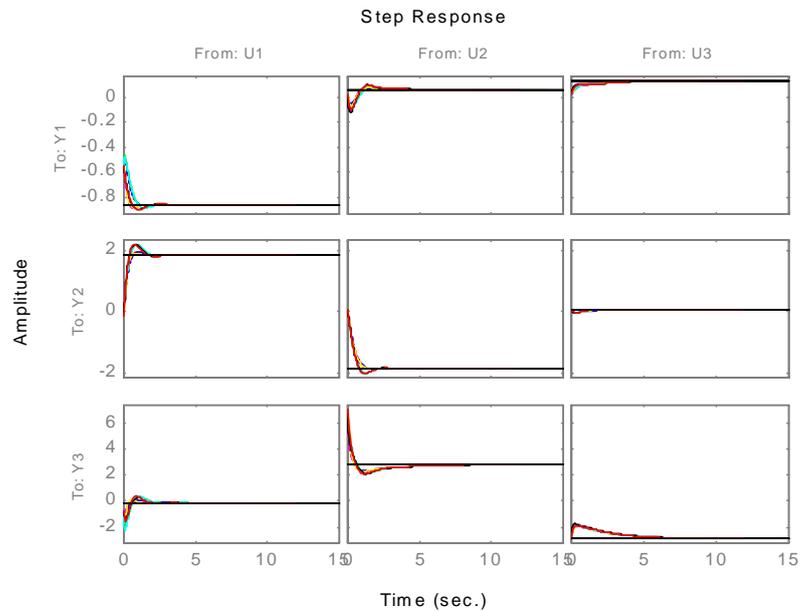


Рис.5.11. Сигнал управления в системе управления температурным режимом с регулятором (5.3)

Для системы с регулятором (5.3) реакция системы на ступенчатое воздействие представлена на рис.5.9, а расположение корней системы на рис.5.10. Реакция регулятора на ошибку изображена на рис.5.11.

У Степаненко С.В.⁴ получен регулятор, обеспечивающий переходные процессы в системе, изображенные на рис.5.12, и располагающий полюса системы в области, представленной на рис.5.13, вида

$$C(s) = \begin{pmatrix} \frac{-0.08607s - 0.8607}{s} & \frac{0.0054s + 0.054}{s} & \frac{0.01331s + 0.1331}{s} \\ \frac{0.1834s + 1.834}{s} & \frac{-0.1839s - 1.839}{s} & \frac{0.0044s + 0.0445}{s} \\ \frac{-0.0142s - 0.1419}{s} & \frac{0.2798s + 2.798}{s} & \frac{-0.289s - 2.89}{s} \end{pmatrix} \quad (5.4).$$

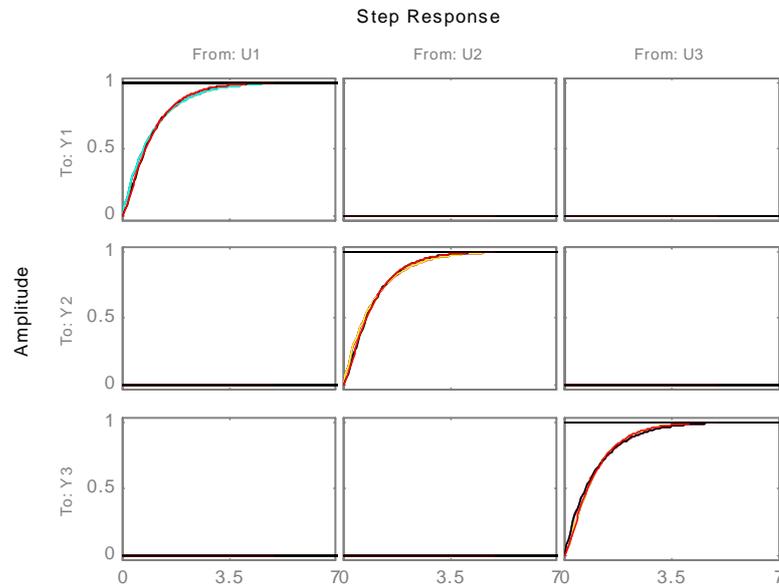


Рис.5.12. Переходные процессы в системе с регулятором (5.4)

Однако, каким образом, по какой методике получены эти параметры регулятора в источнике не указано.

⁴ Степаненко С.В. Построение многоканального ПИ-регулятора для управления температурным режимом в колонне синтеза аммиака // Сб. науч. тр. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. - № 1(18). - С.156-159.

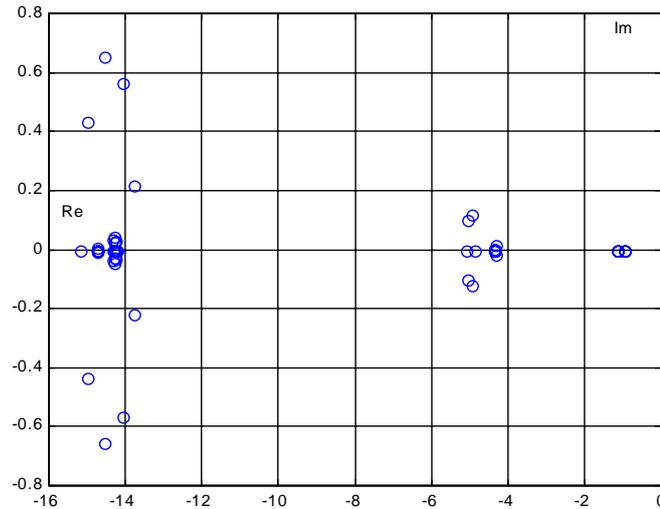


Рис.5.13. Расположение корней системы с регулятором (5.4)

Несколько изменим постановку задачи синтеза. Внесем некоторые изменения в требования, предъявляемые к системе, а именно: потребуем обеспечения бóльшей автономности каналов системы и ослабим третье вышеприведенное требование. Для обеспечения поставленных условий будем минимизировать функционал

$$J = \|W(s)\|_{\infty}; \quad \lambda_k \in D,$$

используя полученные выше параметры регулятора как начальные условия для оптимизационной процедуры. В результате

$$k_1 = 3.3611; \quad k_2 = 3.3392; \quad k_3 = 2.8563;$$

$$n_1 = 1.4045; \quad n_2 = 1.0259; \quad n_3 = 1.3106.$$

Структура регулятора с полученными параметрами имеет вид

$$C(s) = \begin{pmatrix} \frac{-4.063s - 2.893}{s} & \frac{0.255s + 0.1815}{s} & \frac{0.5339s + 0.3802}{s} \\ \frac{6.325s + 6.165}{s} & \frac{-6.298s - 6.139}{s} & \frac{0.1303s + 0.1271}{s} \\ \frac{-0.6252s - 0.477}{s} & \frac{12.25s + 9.344}{s} & \frac{-10.82s - 8.255}{s} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Переходные процессы в системе с регулятором (5.5) изображены на рис.5.14, а расположение корней системы на рис.5.15.

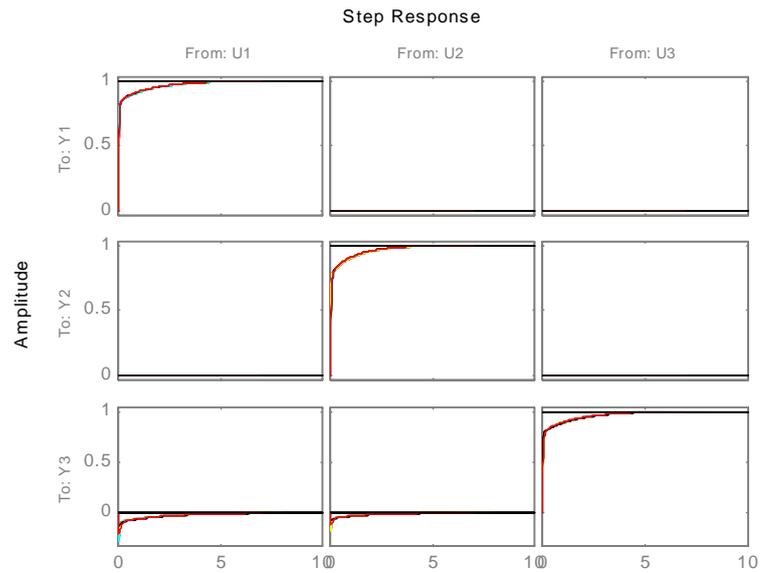


Рис.5.14. Переходные процессы в системе с регулятором (5.5)

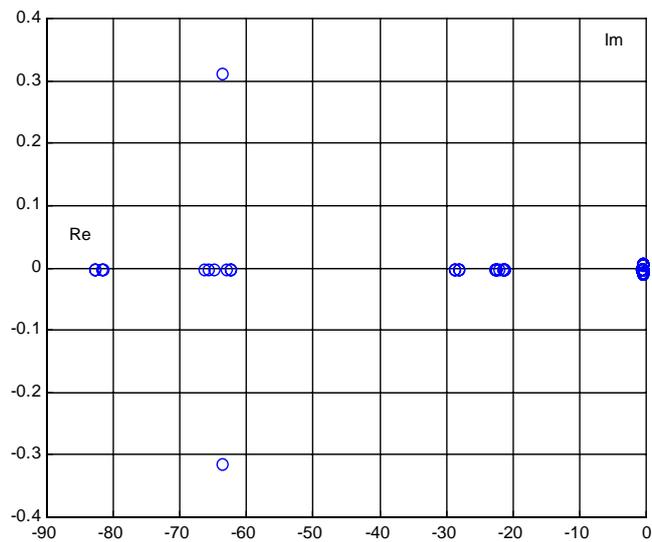


Рис.5.15. Расположение корней системы с регулятором (5.5)

Как видно из приведенных рисунков поставленные требования выполнены, достигнуто хорошее качество регулирования. Для иллюстрации возможностей данного алгоритма синтеза была изменена постановка задачи и проведен расчет регулятора, отвечающего новым требованиям.

5.4. ВЫВОДЫ

В главе 5 приведены примеры синтеза регулятора пониженного порядка для реально существующих многоканальных систем управления с интервальными параметрами: механической двухмассовой системы и системы управления температурным режимом колонны синтеза аммиака. С помощью предлагаемой в данном исследовании методики синтеза систем управления с интервальными параметрами был рассчитан регулятор, учитывающий неопределенности и неточности в задании параметров объекта. Все поставленные требования, предъявляемые у системам были выполнены.

Было осуществлено моделирование системы управления температурным режимом колонны синтеза аммиака с полученным регулятором на ЭВМ и рабочем стенде. Система управления была реализована на базе программируемых микроконтроллеров Simatic S5 с использованием программных средств этого семейства контроллеров. Результаты работы позволили упростить по сравнению с одноканальными контурами регулирования по каждому параметру алгоритм управления системой парообразования, существенно снизить затраты по эксплуатации системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная диссертационная работа отражает результаты исследований, направленных на разработку алгоритмов синтеза стабилизирующих регуляторов пониженного порядка для систем управления с интервальными параметрами. Сформулируем основные положения и результаты диссертации.

1. Для управляемых и наблюдаемых линейных стационарных объектов управления, имеющих в задании параметров интервальную неопределенность, с равным числом входов и выходов предложен метод синтеза регуляторов пониженного порядка. Идея метода заключается в последовательном сдвиге корней интервального характеристического полинома замкнутой системы в желаемую область D в специальном образом выстраиваемом корневом пространстве \mathbf{R}^n . По сравнению с существующими алгоритмами данный метод позволяет упростить численную процедуру синтеза, получать регуляторы, порядок которых меньше чем в других существующих подходах.

2. Предложен алгоритм, устанавливающий взаимнооднозначное соответствие между множеством полиномов (коэффициентов полиномов) и корневым пространством \mathbf{R}^n полиномов, позволяющий осуществлять оптимизационную процедуру в данном пространстве, что уменьшает неоднозначности при решении задачи синтеза.

3. Самостоятельным результатом является алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка для объектов с сосредоточенными параметрами в корневом пространстве \mathbf{R}^n .

4. На основе свойств полиномов, полученных из рассмотрения пространства коэффициентов полиномов, предложен алгоритм построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней. На основе некоторых предположений эта методика упрощена для построения D -устойчивых интервальных полиномов низкого порядка.

5. Распространены полученные ранее свойства амплитудно-фазовой характеристики (годографа Михайлова) на случай, когда полиномы являются интервальными. А именно, сформулирована и доказана теорема о положительности кривизны годографа Михайлова устойчивых интервальных полиномов и следствия из неё. Данные следствия связывают устойчивость интегрального, производного и исходного интервальных полиномов и кривизну их годографов Михайлова.

6. Получены новые свойства интервальных липатовских полиномов. Исходя из полученных свойств и свойства включения области расположения корней производного интервального полинома в область расположения корней исходного интервального полинома предложены алгоритмы построения D -устойчивых интервальных полиномов с желаемым расположением корней.

7. Результаты диссертационного исследования использованы для синтеза промышленных систем, что подтверждено актами о внедрении. Научные результаты, полученные в диссертации, используются при проведении лабораторных работ в НГТУ по курсу “Основы теории автоматического управления”.

Разработанные на основе представленных методик синтеза одноканальные и многоканальные регуляторы позволяют повысить экономичность управления технологическими процессами за счёт уменьшения параметров регулятора - упростить процесс его настройки. Кроме того, данные регуляторы позволяют учитывать неопределенность в задании параметров объектов, связанную с погрешностями измерений, старением оборудования, возмущениями, влиянием шумов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Александров А.Г.** *Синтез регуляторов многомерных систем.* - М.: Машиностроение, 1986. - 263 с.
- [2] **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** *Введение в интервальные вычисления / Пер. с англ.* - М.: Мир, 1987.
- [3] **Андреев Ю.Н.** *Управление конечномерными линейными объектами.* - М.: Наука, 1976. - 424 с.
- [4] **Анисимов А.С.** *Коррекция динамики следящих систем: учеб. пособие / Новосиб. электротехн. ин-т.* - Новосибирск, 1986. - 79 с.
- [5] **Бесекерский В.А.** *Динамический синтез систем автоматического регулирования.* - М.: Наука, 1970.
- [6] **Бесекерский В.А., Попов Е.П.** *Теория систем автоматического регулирования.* - М.: Наука, 1975. - 768 с.
- [7] **Бимбиреков Б.Л.** *Локальное D-разбиение пространства свободных параметров регулятора для линейной системы и выбор его параметров по частотным критериям // Автоматика и телемеханика.* - 1994. - № 4. - С. 3-13.
- [8] **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* - М.: Наука, 1986. - 544 с.
- [9] **Ван дер Варден Б.Л.** *Алгебра.* - М.: Наука, 1975.
- [10] **Воевода А.А.** *Синтез робастных линейных систем управления для объектов с интервальными параметрами // Информатика и процессы управления: Межвуз. сб.* - Красноярск: КГТУ, 1995. - С. 12-16.
- [11] **Воевода А.А., Мелешкин А.И.** *Синтез регуляторов пониженного порядка // Научн. вестник НГТУ.* - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1997. - № 3. - С. 41-58.
- [12] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *О методике синтеза регуляторов для объектов с интервальными параметрами // Сб. науч. тр.* - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. - № 3. - С.157-160.
- [13] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *О множестве корней произ-*

- водных интервального полинома* // Сб. науч. тр. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. - № 4(17). - С. 27-31.
- [14] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *О свойствах интервальных липатовских полиномов* // Тр. V Межд. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения». - Новосибирск, 2000. - Т.3. - С. 5-7.
- [15] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *О свойствах кривизны годографа Михайлова устойчивых интервальных полиномов* // Тр. Межд. Науч.-техн. конф. «Информационные системы и технологии». - Новосибирск, 2000. - Т.2. - С. 390-392.
- [16] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *О свойствах отображения области корней полинома в пространство коэффициентов* // Сб. науч. тр. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. - № 3(16). - С. 44-49.
- [17] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *Об использовании криволинейных локальных координат в пространстве полиномов* // Научн. вестник. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. - № 2(9). С. 190-192.
- [18] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *Об установлении взаимно однозначного соответствия между множествами коэффициентов и корней полиномов* // Сб. науч. тр. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. - № 2(19). - С. 159-161.
- [19] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *Синтез систем управления с интервальными параметрами* // Матер. Научно-практ. семинара «Проблемы синтеза и проектирования систем автоматического управления». - Новосибирск, 2001. - С. 9-11.
- [20] **Воевода А.А., Плохотников В.В., Чехонадских А.В.** *О совмещенных декартовых координатах в пространстве корней многочленов с действительными коэффициентами* // Сб. науч. тр. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. - № 1(23). - С.153-156.
- [21] **Воевода А.А., Пономарев К.Н., Чехонадских А.В.** *Об устойчивости производной устойчивого многочлена* // Науч. вест. НГТУ. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. - № 1(4). - С. 185-186.
- [22] **Воронов А.А.** *Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем.* - М.: Энергия, 1980. - 312 с.
- [23] **Воронов А.А.** *Синтез минимальных модальных регуляторов, действующих от измеримых входа и выхода линейного объекта* // Автоматика и телемеханика. - 1993. - № 2. - С. 34-51.
- [24] **Воронов А.А.** *Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.* - М.: Наука, 1979. - 336 с.

- [25] **Востриков А.С.** *Синтез нелинейных систем методом локализации.* - Новосибирск.: Изд-во Новосиб. ун-та, 1990. - 120 с.
- [26] **Востриков А.С.** *Управление динамическими объектами: Учеб. пособие* // Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1971. - 112 с.
- [27] **Востриков А.С., Воевода А.А., Жмудь В.А.** *Управление линейными динамическими объектами по методу разделения движений: Препринт № 467.* - Новосибирск: Ин-т автоматизации и электрометрии СО АН СССР, 1991. - 40 с.
- [28] **Востриков А.С., Французова Г.А.** *Теория автоматического управления. Линейные системы: Учеб. пособие* // Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1997. - 123 с.
- [29] **Воевода А.А., Плохотников В.В.** *О модальном синтезе регуляторов пониженного порядка в локальных криволинейных координатах* // Матер. II-ой Межд. науч.-техн. конф. «Измерение, контроль, информатизация». - Барнаул, 2001. - С. 14-17.
- [30] **Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю.** *Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов. II. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов* // Техническая кибернетика. - 1991. - № 1,2.
- [31] **Дилигенский С.Н., Ефремов А.Ю.** *К синтезу робастных законов стабилизации движения летательных аппаратов* // Автоматика и телемеханика. - 1992. - № 8. - С. 31-38.
- [32] **Домбровский В.В.** *Понижение порядка линейных многомерных систем при H^∞ -ограничениях* // Автоматика и телемеханика. - 1994. - № 4. - С. 123-132.
- [33] **Домбровский В.В.** *Синтез динамических регуляторов пониженного порядка при H^∞ -ограничениях* // Автоматика и телемеханика. - 1996. - № 11. - С. 10-17.
- [34] **Дугарова И.В., Смагина Е.М.** *Асимптотическое слежение за постоянным сигналом в системе с неопределенными параметрами* // Тез. докл. VI Всесоюз. совещ. «Управление многосвязными системами». - М.: ИПУ, 1990.
- [35] **Ермаченко А.И.** *Методы синтеза систем управления низкой чувствительности* / М.: Радио и связь, 1981.
- [36] **Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Тляшов Р.З.** *Синтез алгоритма управления многосвязным объектом с интервальными параметрами* // Изв. Вузov СССР. Приборостроение. - 1991. - № 8. - С. 48-54.
- [37] **Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Тляшов Р.З.** *Синтез много-*

- уровневых систем управления динамическими объектами с неопределенными параметрами // Тез. докл. VI Всесоюз. совещ. - М.: ИПУ, 1990.*
- [38] **Зайченко Ю.П.** *Исследование операций.* - Киев: «Вища школа», 1975. - 320 с.
- [39] **Захаров А.В., Шокин Ю.И.** *Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математической модели // ДАН СССР.* - 1998. - Т. 299, № 2.
- [40] **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** *Методы интервального анализа.* - Новосибирск: Наука, 1986.
- [41] **Квакернаак К., Сиван Р.** *Линейные оптимальные системы управления.* - М.: Мир, 1977. - 650 с.
- [42] **Корн Г., Корн Т.** *Справочник по математике (для научных работников).* - М.: Наука, 1978. - 832 с.
- [43] **Липатов А.В.** *О параметрах, характеризующих качество линейной системы // Тр. МАИ.* - М.: МАИ, 1972. - Вып. 240.
- [44] **Липатов А.В., Соколов Н.И.** *О некоторых достаточных условиях устойчивости линейных непрерывных стационарных систем // Автоматика и телемеханика.* - 1978. - № 9. - С. 30-37.
- [45] **Мееров М.В.** *Системы многосвязного регулирования.* - М.: Наука, 1965. - 384 с.
- [46] **Мелешкин А.И.** *Модальный синтез регуляторов пониженного порядка: Дис. ... канд. техн. наук.* - Новосибирск: НГТУ, 1999. - 166 с.
- [47] **Моисеев А.Н.** *Модальное управление многомерной динамической системой с параметрическими неопределенностями интервального типа: Дис. ... канд. техн. наук.* - Томск: ТГУ, 1999. - 143 с.
- [48] **Невский А.Е., Сиек Ю.Л.** *Синтез робастных законов управления многомерными линейными динамическими объектами с интервальными параметрами // Изв. вузов СССР. Приборостроение.* - 1998. - № 6. - С. 26-30.
- [49] **Немировский А.С., Поляк Б.Т.** *Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование // Автоматика и телемеханика.* - 1994. - № 11. - С. 113-119.
- [50] **Плохотников В.В.** *О минимальном интервальном полиноме, включающем все множество D-устойчивых интервальных полиномов // Сб. науч. тр.* - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. - № 5(22). - С.151-154.
- [51] **Плохотников В.В.** *Обеспечение устойчивости систем управления с интервальными параметрами // Тез. IV Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике.* - Но-

- восибирск, 2000. - Ч. IV. - С. 40.
- [52] **Полиа Г., Сеге Г.** *Задачи и теоремы из анализа.* - М.: Наука, 1978.
- [53] **Постников М.М.** *Устойчивые многочлены.* - М.: Наука, 1981. - 176 с.
- [54] *Синтез многоканальных систем управления объектами с нестационарными параметрами / Отчет о НИР (заключит.) / НГТУ; Руководитель А.А. Воевода. - № ГР 01.9.90 002067; Инв. № 02.20.00 02914. - Новосибирск, 1999. - 89 с.*
- [55] *Синтез многоканальных систем управления объектами с нестационарными параметрами. Разработка аппарата интервальной математики для задачи синтеза многоканальных систем управления пониженного порядка / Отчет о НИР (промежуточ.) / НГТУ; Руководитель А.А. Воевода. - № ГР 01.9.90 002067; Инв. № 02.09.90 001438. - Новосибирск, 1998.*
- [56] **Смагина Е.М.** *Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы.* - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. - 160 с.
- [57] **Смагина Е.М.** *Условия существования ПИ-регулятора в многомерной системе с неполной информацией // Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1991. - № 6. С 40-45.*
- [58] **Смагина Е.М., Дугарова И.В.** *К проблеме стабилизации многомерной системы с неопределенными параметрами // X Всесоюз. совещ. по проблемам управления: Тез. докл. - М.: ИПУ, 1986. - - Кн. 1.*
- [59] **Смагина Е.М., Дугарова И.В.** *Синтез модального регулятора для системы с неопределенными параметрами. - Деп. в ВИНТИ № 789-В87. - М., 1987. - 37 с.*
- [60] **Смагина Е.М., Моисеев А.Н.** *Методы модальной стабилизации интервальной динамической системы // Изв. вузов. Приборостроение. - 1998. - Т.41, № 5. С. 16-22.*
- [61] *Теория автоматического управления. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. - М.: Высшая школа, 1986. - Ч.1.*
- [62] **Уонэм М.** *Линейные многомерные системы управления.* - М.: Наука, 1980.
- [63] **Харитонов В.Л.** *Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. - 1978. - Т.14, № 11. - С. 2086-2094.*
- [64] **Хлебалин Н.А.** *Анализ и обеспечение устойчивости систем с одним неопределенным параметром // Аналитические методы*

- синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. - Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1985.- С. 70-72.
- [65] **Хлебалин Н.А.** *Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта* // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. - Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1981. - С. 107-123.
- [66] **Хлебалин Н.А.** *Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта управления* / Дисс. ... канд. - Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1984.
- [67] **Хлебалин Н.А.** *Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней* // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. - Саратов: Сарат. Политехн. ин-т, 1982.- С. 92-98.
- [68] **Хлебалин Н.А.** *Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления* // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. - Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1988.- С. 26-30.
- [69] **Ходько С.Т.** *Проектирование систем управления с нестабильными параметрами.* - Л.: Машиностроение, 1987.
- [70] **Цыпкин Я.З., Бромберг П.В.** *О степени устойчивости линейных систем* // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. - 1945. - № 12.
- [71] **Шарый С.П.** *Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью* // Изв. АН. Теория и сист. управ. - 1997. - № 3. - С. 51-61.
- [72] **Шашихин В.Н.** *Робастная стабилизация интервальных динамических систем* // Изв. АН. Теория и системы управления. - 1996. - № 6. - С. 47-53.
- [73] **Шокин Ю.И.** *Интервальный анализ.* - Новосибирск: Наука, 1981. - 112 с.
- [74] **Abdul-Wahab A.** *Extending Kharitonov's theorem to eigenvalues clustering in subregions of the complex plane* // Int. J. Contr. - 1990. - V. 21, ¹ 12. - P. 2589-2601.
- [75] **Ackermann J., Hu H.Z., Kaesbauer D.** *Robustness analysis: a case study* // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1990. - V. 35, № 3. - P. 352-356.
- [76] **Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M.** *On robust Hurwitz Polynomials* // IEEE Trans. on Automatic Control. - 1987. - V. AC-32. - ¹ 10.
- [77] **Argoun M.B.** *On the stability of low-order polynomials* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 2. - P. 180-182.
- [78] **Barmish B.R.** *A generalization of Kharitonov's four-polynomials concept for robust stability problems with linearly dependent coeffi-*

- cient perturbations* // IEEE Trans. On Automatic Control. - 1989. - V. 34, № 2. - P. 157-165.
- [79] **Barmish B.R.** *Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1984. - V. 29. - P. 935-936.
- [80] **Bialas S.** *A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices* // Int. J. Contr. - 1983. - V. 37, ¹ 4.
- [81] **Bialas S., Garloff J.** *Stability of polynomials under coefficient perturbations* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1985. - V. 30. - P. 310-312.
- [82] **Bouguerra H., Chang B.C., Yeh H.H., Banda S.S.** *Fast stability checking for the convex combination of stable polynomials* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 5. - P. 586-588.
- [83] **Chapellat H., Bhattacharyya S.P.** *An alternative proof of Kharitonov's theorem* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1989. - V. 34, № 4. - P. 448-450.
- [84] **Chapellat H., Dahleh M., Bhattacharyya S.P.** *Robust stability under structured and unstructured perturbations* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 10. - P. 1100-1107.
- [85] **Chen C.T.** *Linear system theory and design.* - N.Y.: Holt, Rinehart and Winston, 1984. - 636 p.
- [86] **Chen L.C., Munro N.** *Calculation of largest generalized stability hypersphere in the robust stability problem for the maximum setting-time and minimum damping-ratio cases* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1991. - V. 36, № 6. - P. 756-759.
- [87] **Daniel R.W., Kouvaritakis A.** *A new robust stability criterion for linear and nonlinear multivariable feedback systems* // Int. J. Contr. - 1985. - V. 41. - ¹ 6.
- [88] **Desoer C.A.** *Notes for a second course on linear system.* - N.Y., 1970.
- [89] **Evans R.J., Xianya X.** *Robust regulator design* // Int. J. Contr. - 1985. - V. 41, ¹ 2.
- [90] **Foo Y.K., Soh Y.C.** *A generalization of strong Kharitonov theorems to polytopes of polynomials* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1991. - V. 35, № 8. - P. 936-939.
- [91] **Foo Y.K., Soh Y.C.** *Stability of a family of polynomials with coefficients bounded in a diamond* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1991. - V. 36, № 12. - P. 1501-1502.
- [92] **Fu M.** *A class of weak Kharitonov for robust stability of linear uncertain systems* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1991. - V. 36, № 8. - P. 975-978.
- [93] **Galimidi A.R., Barmish B.R.** *The constrained Lyapunov problem*

- and its application to robust output feedback stabilization // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1986. - V. 31, № 5.*
- [94] **Hansen E.** *A generalized interval arithmetic / Interval mathematics. Lectures notes in computer science, 29. - Heidelberg: Springer-Verl., 1975. - P. 7-18.*
- [95] **Kaucher E.** *Interval analysis in the extended interval space IR // Computing suppl. - 1980. - ¹ 2.*
- [96] **Kraus F.J., Anderson B.D.O., Mansour M.** *Robust stability of polynomials with multilinear parameter dependence // Int. J. Contr. - 1989. - V. 50, ¹ 5. - P. 1745-1762.*
- [97] **Markov S.M.** *Extended interval arithmetic // C. R. Acad. Bulgare Sci. - 1977. - V.30. - P. 1239-1242.*
- [98] **Moore R.E.** *Interval Analysis. - N.Y.: Prentice-Hall, 1966.*
- [99] **Mori T., Kokame H.** *Aperiodicity conditions for polynomials with uncertain coefficients parameters // Int. J. Contr. - 1990. - V. 51, ¹ 5. - P. 1147-1150.*
- [100] **Mori T., Kokame H.** *Stabilization of perturbed systems via linear optimal regulator // Int. J. Contr. - 1988. - V. 47, ¹ 1.*
- [101] **Petersen I.R.** *A class of stability regions for which a Kharitonov like theorem holds // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1989. - V. 34, № 10. - P. 1111-1115.*
- [102] **Pugh A.C., Hayton G.E., Walker A.B.** *System matrix characterization of input-output equivalence // Int. J. Control. - 1990. - V.51, ¹ 6. - P. 1319-1326.*
- [103] **Rosenbrock H.H.** *State space and multivariable theory. - London: Nelson, 1970. - 275 p.*
- [104] **Soh C.B.** *Invariance of the aperiodic property for polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 5. - P. 616-618.*
- [105] **Soh C.B., Berger C.S.** *Damping margins of polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1988. - V. 33, № 5. - P. 509-511.*
- [106] **Soh C.B., Berger C.S., Dabke K.P.** *Addendum to «On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients» // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1987. - V. 32, № 3.*
- [107] **Soh C.B., Berger C.S., Dabke K.P.** *On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1985. - V. 30, № 10.*
- [108] **Soh C.B., Foo Y.K.** *Damping margins of interval polynomials // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 4. - P. 477-479.*
- [109] **Soh Y.C.** *Strict Hurwitz property of polynomials under coefficient perturbation // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1989. - V. 34, №*

6. - P. 629-632.
- [110] **Soh Y.C.** *Zero locations of an entire family of polytope polynomials* // Int. J. Contr. - 1989. - V. 49, ¹ 6. - P. 1851-1859.
- [111] **Soh Y.C., Foo Y.K.** *Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 12. - P. 1378-1382.
- [112] **Soh Y.C., Foo Y.K.** *Kharitonov regions: it suffices to check a subset of vertex polynomials* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1991. - V. 36, № 9. - P. 1102-1105.
- [113] **Tempo R.** *A dual result to Kharitonov's theorem* // IEEE Trans. on Automat. Contr. - 1990. - V. 35, № 2. - P. 195-198.
- [114] **Vicino A.** *Robustness of pole location in perturbed systems* // Automatica. - 1989. - V. 25, ¹ 1. - P. 109-113.
- [115] **Vidyasagar M.** *Control systems synthesis: a factorization approach.* - The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England, 1985. - 426 p.
- [116] **Voevoda A.A., Meleshkin A.I.** *Lower-order regulator design* // Proc. of the 13th International conference on systems science. - Wroclaw, 1998. - Vol. 1. - P. 198-205.
- [117] **Voevoda A.A., Plokhonnikov V.V.** *On using interval arithmetics with various axiomatic for design of control systems with perturbed parameters* / Proc. Of the 3rd Russian-Korean International Symposium on Science and Techology. - Novosibirsk, 1999. - V.1. - P.229.
- [118] **Wang S.-D., Kuo T.-S., Lin Yu.-H., Hsu C.-F., Juang Ya.-T.** *Robust control for linear systems with uncertain parameters* // Int. J. Contr. - 1987. - V. 46, ¹ 5.
- [119] **Wolowich W.A.** *Linear multivariable systems.* - N.Y.: Springer-Verlag, 1974. - 358 p.
- [120] **Yeung K.S.** *Linear system stability under parameter uncertainties* // Int. J. Contr. - 1988. - V. 38, ¹ 2. - P. 459-464.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1**СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ,
ПРИНЯТЫХ В ДИССЕРТАЦИИ**

\mathbf{R} - множество действительных чисел;

\mathbf{IR} - множество интервальных чисел;

$a = [a' ; a'']$ - интервальное число, где a' - нижняя граница интервала;

a'' - верхняя граница интервала;

$\omega(a)$ - ширина интервала a ;

$p(s) = [a'_n ; a''_n]s^n + [a'_{n-1} ; a''_{n-1}]s^{n-1} + \dots + [a'_1 ; a''_1]s + [a'_0 ; a''_0]$ - интервальный полином;

$\mathbf{deg} a(s)$ - порядок (степень) полинома $a(s)$;

D - область расположения корней полинома на комплексной плоскости, в корневом пространстве

\mathbf{A}^n - пространство коэффициентов полиномов;

\mathbf{C}^n - комплексное пространство;

\mathbf{C} - комплексная плоскость;

\mathbf{C}_- - левая полуплоскость комплексной плоскости;

$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_0]$ - координаты точки в $n + 1$ - мерном пространстве;

\subset - знак включения;

$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ символ взаимнооднозначного соответствия;

$\dot{a}(s)$ - первая производная многочлена $a(s)$;

$H(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)$ - представление матричной передаточной функции в виде левого (правого) матричного разложения;

$kr(\omega)$ - кривизна годографа Михайлова;

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА. О СВОЙСТВАХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

• Операции над интервалами

Под интервалом будем понимать замкнутое ограниченное подмножество R вида

$$[a, b] = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b\},$$

где R - множество вещественных чисел. Арифметические операции над интервальными числами определяются следующим образом:

$$A * B = \{a * b | a \in A, b \in B\},$$

где $A, B \in I(R)$; $*$ $\in \{+, -, \cdot, /$. Это выражение можно переписать в следующем виде:

$$A + B = [a', a''] + [b', b''] = [a' + b', a'' + b''];$$

$$A - B = [a', a''] - [b', b''] = [a' - b'', a'' - b'];$$

$$A \cdot B = [a', a''] \cdot [b', b''] = [\min\{a'b', a'b'', a''b', a''b''\},$$

$$\max\{a'b', a'b'', a''b', a''b''\}];$$

$$A / B = [a', a''] / [b', b''] = [a', a''] \cdot [1/b'', 1/b'].$$

В классической интервальной арифметике отсутствуют некоторые свойства, характерные для арифметики вещественных чисел, в частности не всегда выполняется закон дистрибутивности

$$A(B + C) = AB + AC,$$

однако всегда справедливо включение

$$A(B + C) \subseteq AB + AC,$$

называемое *субдистрибутивностью*.

• **Условия устойчивости интервальных полиномов низкого порядка**

Для устойчивости интервального полинома третьего порядка ($n = 3$) вида

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0,$$

где $a_i \in [a'_i, a''_i]$, $0 < a'_i \leq a''_i$, $i \in \{0, n-1\}$ необходимо и достаточно, чтобы полином

$$a(s) = s^3 + a'_2s^2 + a'_2s + a'' \tag{П.1.1}$$

был гурвицевым. При $n = 4$ на устойчивость необходимо и достаточно проверить следующих два полинома

$$a_1(s) = s^4 + a'_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a''_0; \tag{П.1.2}$$

$$a_2(s) = s^4 + a''_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a''_0. \tag{П.1.3}$$

Интервальный полином пятого порядка устойчив, если устойчивы полиномы вида

$$a_1(s) = s^5 + a'_4s^4 + a'_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a'_0;$$

$$a_2(s) = s^5 + a''_4s^4 + a'_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a''_0; \tag{П.1.4}$$

$$a_3(s) = s^5 + a''_4s^4 + a''_3s^3 + a'_2s^2 + a'_1s + a''_0.$$

• **Условия D -устойчивости интервальных полиномов**

Теорема. (Соh Y.C., Foo Y.K. [111]). Пусть левый сектор будет таким, что $\varphi = (p/q)\pi$, где p и q простые положительные числа и $1 > p/q \geq 1/2$. Тогда $S^n \subset H_D$ если и только если $2q$ специальным образом выбранных вершинных полинома S^n являются членами H_D .

Предположим задан угол $\varphi = 2\pi/3$, тогда согласно теореме, для того чтобы $S^n \subset H_D$, необходимо и достаточно, чтобы следующих шесть полиномов принадлежали множеству H_D :

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= a_0'' + a_1''s + a_2' s^2 + a_3''s^3 + \dots ; \\
 p_2(s) &= a_0'' + a_1' s + a_2' s^2 + a_3''s^3 + \dots ; \\
 p_3(s) &= a_0'' + a_1' s + a_2''s^2 + a_3''s^3 + \dots ; \\
 p_4(s) &= a_0' + a_1' s + a_2''s^2 + a_3' s^3 + \dots ; \\
 p_5(s) &= a_0' + a_1''s + a_2''s^2 + a_3' s^3 + \dots ; \\
 p_6(s) &= a_0' + a_1''s + a_2' s^2 + a_3' s^3 + \dots .
 \end{aligned}
 \tag{П.1.5}$$

Для установления принадлежности интервального полинома множеству H_D при угле $\varphi = 3\pi/4$ необходимо и достаточно проверить на принадлежность этому множеству восемь полиномов вида

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= a_0'' + a_1''s + a_2' s^2 + a_3''s^3 + a_4' s^4 + a_5' s^5 + a_6''s^6 + a_7' s^7 + a_8''s^8 + \dots ; \\
 p_2(s) &= a_0'' + a_1' s + a_2' s^2 + a_3''s^3 + a_4' s^4 + a_5''s^5 + a_6''s^6 + a_7' s^7 + a_8''s^8 + \dots ; \\
 p_3(s) &= a_0'' + a_1' s + a_2''s^2 + a_3''s^3 + a_4' s^4 + a_5''s^5 + a_6' s^6 + a_7' s^7 + a_8''s^8 + \dots ; \\
 p_4(s) &= a_0'' + a_1' s + a_2''s^2 + a_3' s^3 + a_4' s^4 + a_5''s^5 + a_6' s^6 + a_7''s^7 + a_8' s^8 + \dots ; \\
 p_5(s) &= a_0' + a_1' s + a_2''s^2 + a_3' s^3 + a_4''s^4 + a_5''s^5 + a_6' s^6 + a_7''s^7 + a_8' s^8 + \dots ; \\
 p_6(s) &= a_0' + a_1''s + a_2''s^2 + a_3' s^3 + a_4''s^4 + a_5' s^5 + a_6' s^6 + a_7''s^7 + a_8' s^8 + \dots ; \\
 p_7(s) &= a_0' + a_1''s + a_2' s^2 + a_3' s^3 + a_4''s^4 + a_5' s^5 + a_6''s^6 + a_7''s^7 + a_8' s^8 + \dots ; \\
 p_8(s) &= a_0' + a_1''s + a_2' s^2 + a_3''s^3 + a_4''s^4 + a_5' s^5 + a_6''s^6 + a_7' s^7 + a_8' s^8 + \dots .
 \end{aligned}
 \tag{П.1.6}$$

• **Условия аперiodичности интервального полинома (Mori T., Kokame H. [99])**

Для того чтобы интервальный полином

$$g(s) = s^{2n} + b_1s^{2n-1} + b_2s^{2n-2} + \dots + b_{2n}, \quad c_i \leq a_i \leq d_i$$

был аперiodическим, достаточно чтобы были устойчивыми полиномы вида

$$\begin{aligned}
 g_1(s) &= s^{2n} + b_1's^{2n-1} + b_2''s^{2n-2} + b_3's^{2n-3} + b_4's^{2n-4} + b_5's^{2n-5} + \dots ; \\
 g_2(s) &= s^{2n} + b_1''s^{2n-1} + b_2''s^{2n-2} + b_3's^{2n-3} + b_4's^{2n-4} + b_5''s^{2n-5} + \dots ; \\
 g_3(s) &= s^{2n} + b_1's^{2n-1} + b_2's^{2n-2} + b_3''s^{2n-3} + b_4''s^{2n-4} + b_5's^{2n-5} + \dots ;
 \end{aligned}$$

$$g_4(s) = s^{2n} + b_1''s^{2n-1} + b_2's^{2n-2} + b_3's^{2n-3} + b_4''s^{2n-4} + b_5''s^{2n-5} + \dots,$$

где коэффициенты $b_{2k} = a_k$; $b_{2k-1} = (n-k+1)a_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$ удовлетворяют условиям

$$b'_{2k} = c_k \leq b_{2k} \leq d_k = b''_{2k};$$

$$b'_{2k-1} = (n-k+1)c_{k-1} \leq b_{2k-1} \leq (n-k+1)d_{k-1} = b''_{2k-1}.$$