Т. И. НАЗАРЕНКО, Л. В. МАРЧЕНКО

$x \in [a, b]$

ВВЕДЕНИЕ

В ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

$f(x) \in \mathcal{F}([a, b])$

Т.И.Назаренко, Л.В.Марченко

ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Издательство Иркутского университета
1982

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета им.А.А.Жданова

Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Введение в интервальные методы вычислительной математики. / Учеб.пособие. - Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1982. - с.108.

Настоящее учебное пособие написано по материалам спецкурса, который читался авторами в течение ряда лет на математическом факультете Иркутского государственного университета им.А.А.Жданова.

Здесь изложены основы интервальной арифметики и интервального анализа и рассмотрены возможности успешного использования этого нового математического аппарата при решении различных задач вычислительной математики.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области вычислительной и прикладной математики, но будет весьма полезным и для специалистов различных областей, использующих вычислительные методы в своей работе.

Научный редактор В.А.Срочко
Рецензент Ю.Е.Бояринцев

© Издательство Иркутского университета, 1982

Оглавление

Введение

Одним из основных вопросов вычислительной математики является вопрос об оценке погрешности величины, найденной тем или иным приближенным методом. Возникающие при решении этого вопроса трудности и возможные пути их преодоления видны на следующем примере.

Пусть рассматривается начальная задача для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y);\ y(a)=y_0\ ;\ x\in[a,b]. \qquad (I)$$

Если $y(x)$ и $y^*(x)$ означают соответственно точное (неизвестное) и приближенное (известное) решения задачи (I), то неравенство вида

$$|y(x)-y^*(x)|\leq b,\ x\in[a,b],$$

$$(\text{или } |y(x)-y^*(x)|\leq b(x)\ ), \qquad (2)$$

где b - достаточно малая величина, формально решает вопрос об оценке погрешности приближенного решения $y^*(x)$. Так как неравенство (2) равносильно неравенствам $y^*(x)-b\leq y(x)\leq$ $\leq y^*(x)+b,\ x\in[a,b]$, то можно утверждать, что точное решение $y(x)$ задачи (I) заключено между $y^*(x)-b$ и $y^*(x)+b$.

В.К.Саульев [II] отмечает, что оценки погрешности типа (2) широко распространены в теории приближенного решения дифференциальных уравнений. Однако их практическая ценность весьма ограничена ввиду сложности фактического определения величины ε. Положение осложняется еще и тем, что величина ε в неравенстве (2) является часто слишком завышенной.

Кроме того, в большинстве случаев неравенство типа (2) нельзя использовать на практике, так как в типичных случаях величина ε явно зависит от искомого решения $y(x)$ или его производных.

Вопрос об оценке погрешности решается автоматически и наилучшим образом, если находить вместо одной функции $y^*(x)$ две достаточно близкие друг к другу функции $y^{(1)}(x)$ и $y^{(2)}(x)$, удовлетворяющие неравенствам: $y^{(1)}(x) \le y(x) \le y^{(2)}(x)$, $x \in [a, b]$.

В этом случае функции $y^{(1)}(x)$ и $y^{(2)}(x)$ называют соответственно нижним и верхним приближениями к функции $y(x)$.

Очевидно, что величина $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}[y^{(1)}(x) + y^{(2)}(x)]$ дает приближение к $y(x)$ повышенной точности.

Если положить $y(x) \approx \tilde{y}(x)$, то справедлива будет оценка $|y(x) - \tilde{y}(x)| \le \frac{1}{2}(y^{(2)}(x) - y^{(1)}(x)) \equiv \varepsilon(x)$, или

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \le \varepsilon, \quad x \in [a, b], \tag{3}$$

где $\varepsilon = \max\limits_{a \le x \le b} \varepsilon(x)$.

Ясно, что оценки вида (3), получаемые автоматически при реализации какого-либо двустороннего метода решения рассматриваемой задачи, имеют неоспоримую практическую ценность.

Более перспективными, с точки зрения использования на ЭВМ, являются численные методы.

В последние 10-15 лет для получения двусторонних численных приближений к решениям различных математических задач стали использовать так называемую интервальную арифметику, в которой оперируют не числами, а интервалами. Применение интервальных методов позволяет заключить в достаточно узкие интервалы значения точных решений рассматриваемых задач.

При этом, в отличие от других известных двусторонних методов, интервальные методы, при реализации их на ЭВМ, дают возможность учитывать погрешности во входных данных, а также погрешности округления, неизбежные в процессе счета.

Впервые основы этого направления в вычислительной математике детально были изложены в монографии американского автора R.E. Moore [16]. Его книга послужила толчком для многочисленных исследований в области интервального анализа и его приложений.

Большое число работ на эту тему появилось за рубежом. В нашей же стране первые эксприменты по применению аппарата интервальной арифметики в практике вычислительной математики проводились в Новосибирском и Иркутском университетах. Полученные результаты были опубликованы [1-9].

Настоящее "Введение в интервальные методы вычислительной математики" написано на основе работы R.E. Moore [16]. Некоторые разделы изложены иначе или введены авторами дополнительно, отдельные сведения взяты из другой литературы.

Глава I
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИНТЕРВАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

§ I. Множество интервальных чисел

Определим интервальное число как упорядоченную пару вещественных чисел $[a, b]$, где всегда $a \le b$.

Если $a = b$, то интервал $[a, a]$ будем называть вырожденным интервалом.

Вырожденный интервал вида $[a,a]$ есть просто вещественное число a.

Иначе, интервальное число $[a,b]$ можно трактовать как множество вещественных чисел x таких, что $a \le x \le b$, $[a,b]=\{x: a\le x\le b\}$.

В дальнейшем символы $\in, \subset, \cup, \cap$ будут использованы в обычном смысле теории множеств, причем через $[a,b]\subset[c,d]$ обозначим, что $c\le a\le b\le d$, т.е. факт включения интервала $[a,b]$ в интервал $[c,d]$.

Множество всевозможных закрытых интервалов - интервальных чисел - обозначим симоволом $\mathcal{J}$. Если $\mathcal{Y}=[a,b]$, то $\mathcal{Y}\in\mathcal{J}$.

Длину интервала $[a,b]$, равную $b-a$, будем обозначать символом $W([a,b])=b-a$.

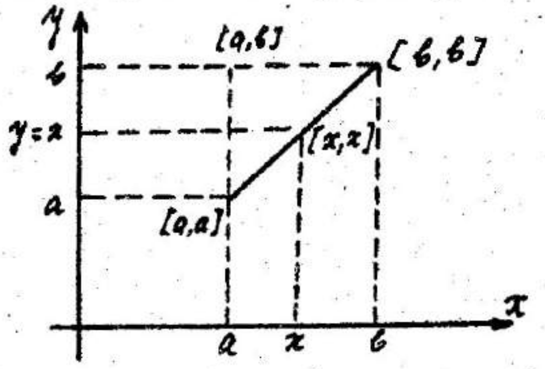
Определим модуль интервала $[a;b]$, $|[a,b]|$ равенством $|[a,b]|=max\{|a|,|b|\}$.

Множество $\mathcal{J}$ представляет собой частично упорядоченное множество. Частичную упорядоченность, как известно, принято обозначать символом $\le$. Частичное упорядочение элементов множества $\mathcal{J}$ мы также будем обозначать этим символом: $[a,b]\le[c,d]$, если $[a,b],[c,d]\in\mathcal{J}$. При этом будем писать $[a,b]<[c,d]$, если и только если $b<c$; $[a,b]=[c,d]$ в том и только в том случае, когда $a=c$ и $b=d$.

Очевидно, что введенное нами отношение порядка определено не для всякой пары интервальных чисел. Поэтому мы и говорим о частичной упорядоченности множества $\mathcal{J}$.

Например, $[1,5]<[7,10]$; $[2,3]=[2,3]$; $[0,4]$ и $[2,6]$ - несравнимые интервалы.

Интерпретируя интервальное число $[a,b]$ как точку (a,b) на плоскости (с абциссой a и ординатой b), можно дать геометрическое толкование отношению между точкой, представляющей интервал, и вещественными числами, содержащимися в данном интервале (рис. I).



$x=[x,x]$
$a \le x \le b$

Рис.I

§ 2. Интервальные арифметические операции

Введем в рассмотрение арифметику для элементов множества Φ, т.е. арифметику для интервальных чисел (интервалов).

Эта арифметика, как мы видим, представляет собой обобщение арифметики для вещественных чисел.

Пусть $*$ есть один из символов: $+, -, \cdot, /$, т.е. $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. Тогда по определению положим

$$[a,b]*[c,d]=\{x*y : a\le x\le b,\ c\le y\le d\}, \qquad (I.I)$$

причем, в случае операции деления предполагается, что $0 \notin [c,d]$. ($[a,b]/[c,d]$ неопределено, если $0\in[c,d]$).

Определение арифметических операций над интервалами, данное в форме (I.I), является теоретико-множественным. Здесь подчеркивается тот факт, что сумма, разность, произведение, частное двух интервалов есть именно множество сумм, разностей, произведений, частных всевозможных пар вещественных чисел, взятых соответственно по одному из участвующих в операции интервалов.

Определению (I.I) можно поставить в соответствие определение арифметических операций над интервалами алгебраического характера, а именно:

I) $[a,b]+[c,d]=[a+c,\ b+d]$,

2) $[a,b]-[c,d]=[a-d,\ b-c]$,

3) $[a,b]\cdot[c,d]=$

$$=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)], \qquad (I.2)$$

4) $[a,b]/[c,d]=[a,b]\cdot[\frac{1}{d},\frac{1}{c}]$,

если $0\notin[c,d]$.

Из определений (I.I), (I.2) ясно, что в случае вырожденных интервалов, которые отождествляются с вещественными числами $[a,a]\equiv a$, интервальная арифметика сводится к обыкновенной вещественной арифметике (арифметике над вещественными числами).

Примеры.

I) $[-1,2]+[3,5]=[2,7]$,

2) $[3,4.1]-[0,0.1]=[2.9,\ 4.1]$,

3) $[-2,6]\cdot[3,7]=[-14,42]$,

4) $[-1,1]/[-2,-\frac{1}{3}]=[-1,1]\cdot[-3,-\frac{1}{2}]=[-3,3]$.

Следствия:

I. Если $c=d$, т.е. $[c,d]=[c,c]\equiv c$, то

$[a,b]\cdot c\equiv c\cdot[a,b]$,

$$[a,b]\cdot[c,c]=\begin{cases}[ca,cb], & \text{если } c>0,\\ [cb,ca], & \text{если } c<0,\end{cases}$$

т.е. вещественный множитель можно вводить под знак интервала, оставив неизменными или поменяв местами его концы, в зависимости от знака данного множителя.

2. В соответствии с первым следствием $[a,b]-[c,d]=[a,b]+(-1)[c,d]=[a,b]+[-d,-c]$, т.е. операцию вычитания можно заменить операцией сложения.

§ 3. Свойства интервальной арифметики

I. Из определения (I.2) и соответствующих свойств вещественной арифметики непосредственно следует, что интервальное сложение и интервальное умножение обладают сочетательными и переместительными (ассоциативным и коммутативным) свойствами, т.е. если $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ - интервалы, то справедливы следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}+(\mathcal{J}+\mathcal{K})=(\mathcal{I}+\mathcal{J})+\mathcal{K};\\
&\mathcal{I}\cdot(\mathcal{J}\cdot\mathcal{K})=(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})\cdot\mathcal{K};\\
&\mathcal{I}+\mathcal{J}=\mathcal{J}+\mathcal{I};\\
&\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}=\mathcal{J}\cdot\mathcal{I}.
\end{aligned}
\tag{I.3}
$$

2. В множестве Φ роль нулевого элемента играет вещественный нуль $0\equiv[0,0]$, а роль единичного элемента - вещественная единица $1\equiv[1,1]$, т.е. для любого $\mathcal{I}\in\Phi$ справедливы равенства: $\mathcal{I}+0=0+\mathcal{I}=\mathcal{I}$; $\mathcal{I}\cdot 1=1\cdot\mathcal{I}=\mathcal{I}$.

3. Особенностью интервальной арифметики является то, что в общем случае здесь не имеет места дистрибутивный закон, т.е., если $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ - любые интервалы из Φ, то $\mathcal{I}(\mathcal{J}+\mathcal{K})\neq\mathcal{I}\mathcal{J}+\mathcal{I}\mathcal{K}$.

Например, $[1,2]([1,3]+[-2,2])=[-2,10]$, тогда как $[1,2]\cdot[1,3]+[1,2]\cdot[-2,2]=[1,6]+[-4,4]=[-3,10]$.

Нарушение дистрибутивного закона есть редкий случай среди алгебраических систем в математиках. С этой точки зрения интервальная арифметика, как абстрактная математическая система - еще мало изученный объект.

4. Интервальная арифметика обладает так называемым субдистрибутивным свойством, которое заключается в следующем: если $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ – любые интервалы из $\mathcal{J}$, то

$$\mathcal{I}(\mathcal{J}+\mathcal{K}) \subset \mathcal{I}\mathcal{J} + \mathcal{I}\mathcal{K}. \tag{I.4}$$

Соотношение (I.4) можно установить, исходя из теоретико-множественного определения интервальных арифметических операций. Следует отметить некоторые случаи, когда имеет место дистрибутивный закон:

а) если t – вещественное число, то $t(\mathcal{I}+\mathcal{J}) = t\mathcal{I} + t\mathcal{J}$;

б) если интервалы $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ содержат вещественные числа только одного и того же знака, так что $\mathcal{J}\mathcal{K} > 0$, то $\mathcal{I}(\mathcal{J}+\mathcal{K}) = \mathcal{I}\mathcal{J} + \mathcal{I}\mathcal{K}$.

5. В интервальной арифметике противоположные и обратные элементы (числа) имеют только вырожденные интервалы (т.е. вещественные числа). Это непосредственно усматривается из определения (I.I) интервальных арифметических операций.

Покажем, например, что не существует невырожденного интервала $\mathcal{J} = [c, d]$, такого, чтобы для данного интервала $\mathcal{I} = [a, b]$, $a < b$, имело место равенство $\mathcal{I} + \mathcal{J} = 0 \equiv [0, 0]$.

Действительно, $[a, b] + [c, d] = [a+c, b+d]$. Предположим, что $a + c = 0$ и $b + d = 0$. Тогда $c = -a$, $d = -b$. Но $-a > -b$ (так как $a < b$), а значит $c > d$, что противоречит определению интервального числа $[c, d]$.

Точно так же можно показать, что не существует невырожденного интервала $\mathcal{J}$, такого, чтобы для данного интервала $\mathcal{I}$ имело место равенство $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 1$.

6. Важным свойством интервальной арифметики является монотонность арифметических операций относительно знака включения, что означает следующее:

если $\quad \mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \quad и \quad \mathcal{J} \subset \mathcal{L};$

то

$$\begin{aligned} &\mathcal{Y} + \mathcal{J} \subset \mathcal{X} + \mathcal{L}; \\ &\mathcal{Y} - \mathcal{J} \subset \mathcal{X} - \mathcal{L}; \\ &\mathcal{Y} \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{X} \cdot \mathcal{L}; \\ &\mathcal{Y}/\mathcal{J} \subset \mathcal{X}/\mathcal{L},\ 0 \notin \mathcal{J},\ 0 \notin \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{I.5}$$

Соотношения (I.5) следуют непосредственно из определения (I.I) интервальных арифметических операций.

§ 4. Монотонность интервальных рациональных выражений. Понятие интервального расширения вещественно-значной рациональной функции

Известно, что отношение включения обладает свойством транзитивности, т.е., если $\mathcal{Y} \subset \mathcal{J}$ и $\mathcal{J} \subset \mathcal{X}$, то $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. (I.6)

На основании свойств (I.5) и (I.6) получается следующий важный результат, который мы сформулируем в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА I.I.</u> Если $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$ есть рациональное выражение относительно интервальных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т.е. конечная комбинация из конечного числа переменных X_j, $j=\overline{1,n}$, и некоторых постоянных интервалов, полученная с помощью интервальных арифметических операций, то включения $X_1' \subset X_1, \ldots, X_n' \subset X_n$ влекут за собой включение $\mathcal{F}(X_1', X_2', \ldots, X_n') \subset \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

и это верно для всяких совокупностей интервальных чисел X_i, $i=\overline{1,n}$ для которых интервальные арифметические операции в выражении $\mathcal{F}$ определены.

В частном случае, если $X_1', \ldots, X_n'$ и постоянные интервалы в выражении $\mathcal{F}$ есть вещественные числа, т.е. вырожденные интервалы, то величина $\mathcal{F}(X_1', \ldots, X_n')$ есть вещественное число, содержащееся в интервале $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$.

Это обстоятельство позволяет использовать интервальную арифметику для нахождения границ областей значений вещественных рациональных функций.

Так, например, если $f(x_1,\ldots,x_n)$ – вещественная рациональная функция с областью определения $x_i \in X_i$, $i=\overline{1,n}$, а $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$ – интервальное рациональное выражение относительно $X_1,\ldots,X_n$, полученное из f заменой x_i на X_i, то в соответствии с теоремой I.I будет иметь место включение

$$\{f(x_1,\ldots,x_n): x_1 \in X_1,\ldots, x_n \in X_n\} \subset \mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n). \quad (\text{I.7})$$

При этом, если в структуру f каждая из переменных $x_1,\ldots,x_n$ входит только один раз, (например, исключается вхождение $x_1^2 = x_1 \cdot x_1$), то соответствующее интервальное выражение $\mathcal{F}$ является фактической областью значений функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ при $x_i \in X_i$, $i=\overline{1,n}$, т.е. в этом случае $\{f(x_1,\ldots,x_n): x_i \in X_i,\ i=\overline{1,n}\} \equiv \mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$.

Это утверждение непосредственно следует из теоретико-множественного определения (I.I) интервальных арифметических операций.

<u>Определение I.I.</u> Интервально-значную функцию $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$ интервальных аргументов $X_1,\ldots,X_n$ будем называть интервальным расширением вещественно-значной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ вещественных аргументов $x_1,\ldots,x_n$, если

1. $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n) \supset \{f(x_1,\ldots,x_n): x_i \in X_i,\ i=\overline{1,n}\}$

и

2. $\mathcal{F}([x_1,x_1],\ldots,[x_n,x_n]) \equiv \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$.

Если $f(x_1,\dots,x_n)$ – рациональная вещественно-значная функция, то в соответствии с включением (I.7) её интервальное расширение $F(X_1,\dots,X_n)$ получается непосредственно из f заменой вещественных аргументов x_i интервальными аргументами X_i и заменой вещественных арифметических операций соответствующими интервальными операциями.

Примеры

Используя интервальные расширения, вычислить интервалы, содержащие в себе области значений следующих вещественных рациональных функций с заданными областями определения:

I. $f(x)=\frac{x}{2+x}$, $0\le x\le 1$;

2. $f(x,y)=2xy+3$, $-2\le x\le 2$, $-1\le y\le 1$.

Решение

I. а) Полагаем $F(X)=\frac{X}{2+X}$, тогда

$$\left\{\frac{x}{2+x}: x\in[0,1]\right\}\subset\frac{[0,1]}{2+[0,1]}=\frac{[0,1]}{[2,3]}=[0,1]\cdot\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

б) Так как $f(x)=\frac{x}{2+x}=1-\frac{2}{2+x}$, то целесообразно положить $F(X)=1-\frac{2}{2+X}$, тогда

$$\left\{\frac{x}{2+x}=1-\frac{2}{2+x}: x\in[0,1]\right\}=1-\frac{2}{2+[0,1]}=1-2\cdot\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]=$$
$$=[1,1]-\left[\frac{2}{3},1\right]=\left[0,\frac{1}{3}\right].$$

2. Полагаем $F(X,Y)=2XY+3$, тогда

$$\{2xy+3: x\in[-2,2],\ y\in[-1,1]\}\subset$$
$$\subset 2\cdot[-2,2]\cdot[-1,1]+3=[-4,4]+[3,3]=[-1,7]$$

§ 5. Округленная интервальная арифметика

При реализации арифметических операций на вычислительной машине с фиксированной длиной слов, как сами исходные числа, так и результаты операций над ними являются не точными, а округленными. И даже в том случае, если исходные числа являются точными, результат, как правило, является приближенным. Например, точное значение произведения двух машинных чисел, каждое из которых состоит из s двоичных разрядов, имеет $2s$ двоичных разрядов (цифр) в своем представлении. Машина же выдает результат с точностью до s первых двоичных разрядов (цифр).

Аналогичное положение имеет место и в случае деления. В случае сложения и вычитания на машине с фиксированной запятой число разрядов после запятой в результате этих операций не меняется.

При сложении и вычитании на машине с плавающей запятой присутствие ненулевого остатка, т.е. второго ряда s цифр в результате операций, показывается в доступном регистре.

Очевидно, можно так программировать вычислительную процедуру, чтобы самой программой было предусмотрено обнаружение присутствия ненулевого остатка в результате каждой из арифметических операций и так, чтобы программой было предусмотрено определение знака разности между машинным и точным результатом той или иной арифметической операции. С использованием такой программы для контроля остатков машинной арифметики, можно составлять подпрограммы для каждой конкретной машины так называемой округленной интервальной арифметики, основанные на формулах (I.2). Вместо точных значений концевых точек интервалов, входящих в формулы (I.2), указанные подпрограммы должны обеспечивать получение округленных значений этих концевых точек, округляя при этом положительно (с избытком результат) правые концы и отрицательно (с недостатком результат) левые концы интервалов.

Вычислительная программа, выполненная в округленной интервальной арифметике, будет давать результат в виде ряда интервалов, представленных парами машинных чисел, таких, что каждый интервальный результат содержит в себе точный результат, т.е. результат, соответствующий точной интервальной арифметической операции.

Округленная интервальная арифметика позволяет учитывать ошибки округления, неизбежные при машинном решении той или иной задачи.

Ясно, что длины интервалов, полученных таким путем, могут в отдельных случаях становиться очень большими.

Однако, если использовать многоразрядную машинную арифметику для вычисления концевых точек интервалов, можно получить интервалы приемлемой длины для данной конечной последовательности арифметических операций.

Заметим, что интервальная арифметика, реализуемая на ЭВМ, сама по себе не дает ещё верхнюю и нижнюю границы к точным решениям большинства тех задач, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Но при использовании различных приемов решения отдельных задач, включающих в себя интервально-значные функции, интервальная арифметика дает возможность программировать различные алгоритмы, использующие округленную интервальную арифметику, с таким расчетом, чтобы ошибки округления и ошибки в исходных данных могли быть учтены в ходе решения задач. Интервальная арифметика производит при этом такие интервалы, которые содержат в себе не только точные результаты, но также неокругленные машинно-арифметические результаты.

Поэтому интервал, вычисленный с помощью округлённой интервальной арифметики, дает границы разности между точным результатом и машинным (вычисленным) т.е. результатом, на котором сказались ошибки округления, вызванные машинной точностью.

Отсюда вывод: для того, чтобы с помощью конечного числа арифметических операций получить интервал достаточно малой длины, необходимо, чтобы соответствующие вычисления в машинной арифметике могли привести к результатам, близким к тем, которые могли бы получиться с использованием точной вещественной арифметики.

Глава II
МНОЖЕСТВО ИНТЕРВАЛОВ КАК МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ I. Введение метрики. Необходимые леммы

Обратим множество интервальных чисел ϕ в метрическое пространство.

<u>Определение 2.I</u>. Назовем расстоянием между парой интервалов $[a,b],[c,d]\in\phi$ неотрицательную функцию вида

$$\rho([a,b],[c,d])=\max\{|a-c|,|b-d|\}. \qquad (2.I)$$

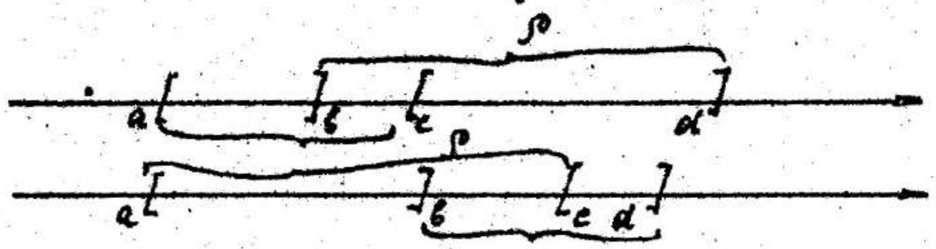


Рис.2

Легко видеть, что для всяких интервалов $I, J\in\phi$

I. $\rho(I,J)=\rho(J,I)$,

2. $\rho(I,J)=0$

тогда и только тогда, когда $I=J$.

3. Можно доказать, что и неравенство треугольника для всяких интервалов $I, J, K\in\phi$ выполняется, т.е.

$$\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})+\rho(\mathcal{J},\mathcal{K})\geq\rho(\mathcal{I},\mathcal{K}). \qquad (2.2)$$

Действительно, пусть $\mathcal{I}=[a,b]$, $\mathcal{J}=[c,d]$, $\mathcal{K}=[l,m]$.

Тогда неравенство (2.2) примет вид

$$\max\{|a-c|,|b-d|\}+\max\{|c-l|,|d-m|\}\geq$$
$$\geq\max\{|a-l|,|b-m|\}. \qquad (2.3)$$

Докажем справедливость неравенства (2.3).

Пусть например,

$$\max\{|a-c|,|b-d|\}=|a-c|,$$
$$\max\{|c-l|,|d-m|\}=|c-l|. \qquad (2.4)$$

Тогда левая часть неравенства (2.3) будет равна величине

$$|a-c|+|c-l|. \qquad (2.5)$$

Покажем, что величина (2.5) больше любого из чисел $|a-l|$, $|b-m|$, а значит, будет выполняться неравенство (2.3). В самом деле, $|a-l|=|a-c+c-l|\leq|a-c|+|c-l|$,

$$|b-m|=|b-d+d-m|\leq|b-d|+|d-m|\leq|a-c|+|c-l|,$$

откуда следует, что $\max\{|a-l|,|b-m|\}\leq|a-c|+|c-l|$, что и означает справедливость неравенства (2.3).

Аналогично рассматриваются и другие случаи вида (2.4).

Заметим, что $\rho([x,x],[y,y])=|x-y|$, поэтому метрика вида (2.1) приводит для случая вырожденных интервалов к обыкновенному расстоянию между двумя вещественными числами и, таким образом, непротиворечива с отождествлением вырожденного интервала $[x,x]$ с вещественным числом x. Следовательно, вещественная линия является изометрически вложенной в метрическое интервальное пространство $(\mathcal{I},\rho)$.

Пространство $\mathcal{I}$ интервалов геометрически может быть интерпретировано как замкнутая верхняя полуплоскость евклидовой (x,y) плоскости, включающая в себя линию $y=x$, (рис. 3).

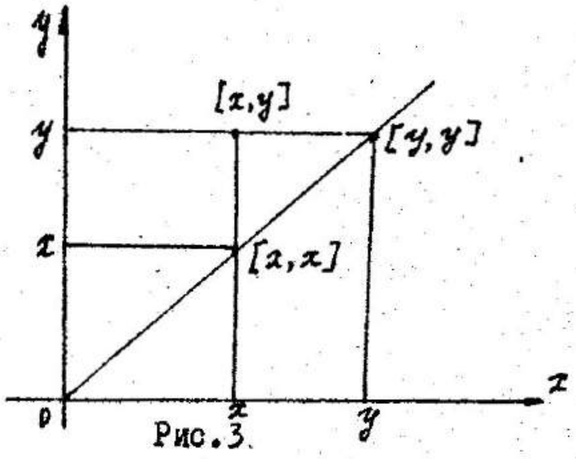


Рис.3

Точки прямой $y=x$, заключенные между $[x,x]$ и $[y,y]$, изображают вещественные числа, содержащиеся в интервале $[x,y]$.

Два интервальных числа близки в смысле расстояния (2.I), если близки соответствующие им точки на плоскости (x, y).

Геометрически $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})=\rho([a,b],[c,d])$ есть длина большего из катетов прямоугольного треугольника, построенного на отрезке $\mathcal{I}\mathcal{J}$ как на диагонали (рис.4).

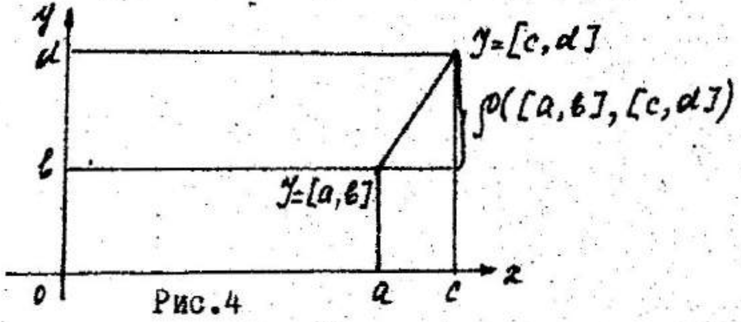


Рис.4

Для обозначения множества интервалов, содержащихся в данном интервале $\mathcal{I}=[a,b]$, в дальнейшем будем пользоваться символом $\Phi_{[a,b]}=\Phi_{\mathcal{I}}$, так что $\Phi_{[a,b]}=\{[x,y]: a\le x\le y\le b\}$.

На рисунке 3 $\Phi_{[x,y]}$ представляется множеством точек, образующих замкнутый треугольник с вершинами $[x,x]$, $[y,y]$ и $[x,y]$.

ЛЕММА 2.I. Пусть $\mathcal{I},\mathcal{J}\in(\Phi,\rho)$ и $\varepsilon>0$-const. Тогда для того, чтобы $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})\le\varepsilon$ $(<\varepsilon)$, необходимо и достаточно:

I) чтобы для всякого вещественного числа $x\in\mathcal{I}$ существовало вещественное число $y \in \mathcal{J}$, такое, что $|x-y| \le \ell (<\ell)$;

2) чтобы для всякого вещественного числа $y \in \mathcal{J}$ существовало вещественное число $x \in \mathcal{I}$, такое, что $|x-y| \le \ell (<\ell)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

I. Необходимость. Пусть $\mathcal{I}=[a,b]$, $\mathcal{J}=[c,d] \in (\phi, \rho)$; зададим $\ell>0$ и предположим, что $\rho(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \le \ell$.

Докажем, что тогда утверждения первое и второе имеют место. Допустим противное, т.е. предположим, что для некоторого вещественного числа $x \in [a,b]$ и любого вещественного числа $y \in [c,d]$ $|x-y|>\ell$. Отсюда, в частности, имеем $|x-c|>\ell$ и $|x-d|>\ell$.

Тогда или $x<c-\ell$, или $x>d+\ell$. Если $x<c-\ell$ и так как $a \le x \le b$, то $a<c-\ell$ $(c-a>\ell)$ и, следовательно, $\rho([a,b],[c,d]) = max\{|a-c|, |b-d|\}>\ell$, т.е. $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})>\ell$. Получили противоречие. Значит, неравенство $|x-y|>\ell$ невозможно для всех вещественных чисел $y \in \mathcal{J}$. Утверждение первое доказано.

Так как $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J}) = \rho(\mathcal{J},\mathcal{I})$, то утверждение второе тоже доказано.

2. Достаточность. Предположим теперь, что утверждения первое и второе выполняются. Покажем, что тогда $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J}) \le \ell$.

Допустим противное, т.е. положим $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})>\ell$. Тогда или $|a-c|>\ell$, или $|b-d|>\ell$.
Если $|a-c|>\ell$, $c<a-\ell \le x-\ell$ т.е. $x-c>\ell$, и, следовательно, не существует вещественного числа $x \in [a,b]$ такого, что $|x-c| \le \ell$.

Если же $|a-c|>\ell$, $a<c-\ell \le y-\ell$, т.е. $y-a>\ell$, то не существует вещественного числа $y \in [c,d]$ такого, что $|y-a| \le \ell$. Получили противоречие. Неравенство $|b-d|>\ell$

также противоречит одному из утверждений.

Поэтому утверждения первое и второе вместе влекут за собой соотношение: $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})\le\varepsilon$.

<u>ЛЕММА 2.2.</u> Если $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$ и $\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})\le\varepsilon$, то $W(\mathcal{J})\le W(\mathcal{I})+2\varepsilon$ (рис.5).

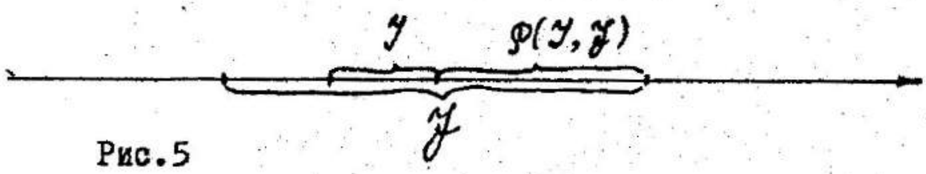


Рис.5

Доказательство. Пользуясь геометрической иллюстрацией условий леммы (см. рис.5), имеем $W(\mathcal{J})=W(\mathcal{I})+$ $+(a-c)+(d-b)\le W(\mathcal{I})+2\max\{|a-c|,|d-b|\}=W(\mathcal{I})+$ $+2\rho(\mathcal{I},\mathcal{J})\le W(\mathcal{I})+2\varepsilon$; лемма доказана.

§ 2. Непрерывность интервально-значных функций. Понятие объединенного расширения функций вещественных аргументов

Прямое (топологическое) произведение двух множеств S_1 и S_2 обозначим символом $S_1\otimes S_2$. Если $x\in S_1$, $y\in S_2$, то будем писать $(x,y)\in S_1\otimes S_2$.

Утверждение вида: " f есть функция, определенная на множестве S и имеющая область значений в множестве T ", будем записывать символически так: $f: S\to T$ (если $x\in S$, то $f(x)\in T$).

Принятая нами метрика ρ в пространтсве ϕ позволяет ввести в рассмотрение понятие непрерывности интервально-значных функций.

Пусть $\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_n\in\phi$, $\mathcal{M}=\phi_{\mathcal{I}_1}\otimes\ldots\otimes\phi_{\mathcal{I}_n}$,

$X=(X_1,\ldots,X_n)$, $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$ - n- мерные интервальные точки (векторы), $X, Y \in \mathcal{M}$.

Введем метрику на множестве $\mathcal{M}$ по формуле

$$\tilde{\rho}(X,Y) = \max_{1 \le i \le n} \rho(X_i, Y_i).$$

Определение 2.2. Интервально-значная функция $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}: \mathcal{M} \to \mathcal{J}$, определенная на множестве $\mathcal{M}$, называется непрерывной в точке $X^0 \in \mathcal{M}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, X^0) > 0$ такое, что для всех $X \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих условию $\tilde{\rho}(X, X^0) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X^0)) < \varepsilon$.

Определение 2.3. Интервально-значная функция $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}: \mathcal{M} \to \mathcal{J}$, определенная на множестве $\mathcal{M}$, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякой пары $X', X'' \in \mathcal{M}$, удовлетворяющей условию $\tilde{\rho}(X', X'') < \delta$ выполняется неравенство $\rho(\mathcal{F}(X'), \mathcal{F}(X'')) < \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n \in \mathcal{J}$, R - множество вещественных чисел.

Если $f: \mathcal{I}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{I}_n \to \mathcal{J}(R)$ есть непрерывная вещественно-значная или интервально-значная функция, определенная на прямом произведении интервалов $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$, то можно ввести в рассмотрение расширение f до интервальной функции, определенной на области $\mathcal{J}_{\mathcal{I}_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{J}_{\mathcal{I}_n}$.

Определение 2.4. Объединенным расширением функции f назовем функцию $\bar{f}: \mathcal{J}_{\mathcal{I}_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{J}_{\mathcal{I}_n} \to \mathcal{J}$, определяемую равенством

$$\bar{f}(X_1, \dots, X_n) = \cup f(x_1, \dots, x_n), \tag{2.6}$$

где объединение берется по $x_i \in X_i$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание. В частности, если f - вещественно-значная функция, $f: \mathcal{J}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{J}_n \to R$, то равенство (2.6) равносильно следующему:

$$\bar{f}(X_1, \ldots, X_n) = \{ f(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \}.$$

§ 3. Теоремы о непрерывности интервально-значных функций

<u>ТЕОРЕМА 2.I.</u> Если $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_n \in \oint$ и $f: \mathcal{J}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{J}_n \to \oint(R)$ есть непрерывная функция, то её объединенное расширение $\bar{f}: \oint_{\mathcal{J}_1} \oplus \ldots \oplus \oint_{\mathcal{J}_n} \to \oint$ есть также непрерывная функция.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $X_i \in \oint_{\mathcal{J}_i}$, $X'_i \in \oint_{\mathcal{J}_i}$, $i = \overline{1,n}$. Так как f непрерывна, то существует такое $\delta > 0$, что для всяких вещественных чисел $x' \in X'$, $x'' \in X''$, таких, что

$$\tilde{\rho}(x', x'') < \delta, \tag{2.7}$$

выполняется неравенство

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon, \tag{2.8}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, что здесь имеется ввиду равномерная непрерывность, так как из непрерывности f на компактном множестве следует равномерная её непрерывность. Положим $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

На основании леммы 2.I заключаем, что

$$\rho(\bar{f}(X'), \bar{f}(X'')) < \varepsilon \tag{2.9}$$

тогда и только тогда, когда:

I) для всякого вещественного числа $t' \in \bigcup_{x \in X'} f(x) = \bar{f}(X')$ существует вещественное число $t'' \in \bigcup_{x \in X''} f(x) = \bar{f}(X'')$ такое, что $|t' - t''| < \varepsilon$,

2) для всякого вещественного числа t'' существует вещественное число t' с таким же самым свойством.

Покажем, что выполнение условий первого и второго равносильно выполнению условия

$$\bar{\rho}(X', X'') < \delta, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0. \tag{2.10}$$

Тогда по лемме 2.I из условия (2.I0) следует неравенство (2.9), что, в свою очередь, означает равномерную непрерывность функции $\bar{f}$ в заданной области её определения.

I). Положим вещественное число $t' = f(x')$, таким, что $x' \in X'(x_i \in X_i', i=\overline{1,n})$ и пусть при некотором X'' выполняется условие (2.I0). Тогда существует такая точка $x'' \in X''$, что $\bar{\rho}(x', x'') < \delta$. Отсюда, на основании неравенства (2.7) следует неравенство (2.8). Полагая $t'' = f(x'') \in \bar{f}(X'')$ неравенство (2.8) можно записать в виде

$$|t' - t''| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Таким образом, условие (2.II) есть следствие условия (2.I0).

2). Точно так же, полагая $t'' = f(x'')$, можно указать такое вещественное число t', что условие (2.II) будет следствием условия (2.I0). Теорема доказана.

<u>ТЕОРЕМА 2.2.</u> Интервальные арифметические операции как функции двух аргументов, определенные на множестве $\mathcal{J}$, есть непрерывные функции, исключая деление на интервалы, содержащие в себе нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F}(X_1, X_2) = X_1 * X_2$, где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Из определения (I.I) следует, что интервальная арифметическая операция, т.е. функция $\mathcal{F}(X_1, X_2)$, есть объединенное расширение вещественной функции $f(x_1, x_2) = x_1 * x_2$, которая в области её определения является непрерывной. Следовательно, по теореме 2.I непрерывной является и функция $\mathcal{F}(X_1, X_2)$.

<u>ТЕОРЕМА 2.3.</u> Интервальные функции-проекции, т.е. функции вида $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(X_1, \dots, X_n) = X_k$, $1 \le k \le n$ есть функции непрерывные.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы, как и предыдущей, легко проводится на основании теоремы 2.I.

ТЕОРЕМА 2.4. Постоянные интервальные функции есть функции непрерывные в области их определения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F}(X)=[c,c]$, где c-$const$, $X\subset \mathcal{J}_{\mathcal{J}}$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$, для любых интервалов $X, X'\in \mathcal{J}_{\mathcal{J}}$, $\rho(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(X'))=0<\varepsilon$.
Следовательно, согласно определению 2.I непрерывности, функция $\mathcal{F}(X)$ непрерывна в каждой точке $X\in \mathcal{J}_{\mathcal{J}}$.

Используя теоремы 2.2 – 2.4 и конечную индукцию, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.5. Рациональные интервальные функции есть функции непрерывные в области их определения.

Так как область определения рациональной интервальной функции есть компакт, то такие функции являются равномерно непрерывными в заданных областях.

§ 4. Вещественное сужение интервальной функции. Теорема о сходимости объединения интервальных расширений

Как было установлено ранее, интервальные расширения вещественных рациональных функций дают возможность получать интервалы, содержащие в себе области значений функций.

Однако, в общем случае, указанные интервалы получаются значительно шире истинной области значений соответствующей вещественной функции.

Ниже приводится теорема, которая позволяет вычислять интервалы, сколь угодно близкие к области значений рациональной вещественной функции многих переменных.
Предварительно рассмотрим идею вопроса на примере функции одного аргумента.

Итак, пусть $f(x)$ есть вещественная рациональная функция, определенная на отрезке $[a,b]$, а $\mathcal{F}(X)$, где $X\subset[a,b]$ – ее интервальное расширение; тогда

$$\mathcal{F}([a,b])\supset\{f(x):x\in[a,b]\}. \quad (2.12)$$

Разобъем интервал $[a,b]$ на подынтервалы $[a_{i-1},a_i],\ i=\overline{1,n}$, так, что $[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^{n}[a_{i-1},a_i]$, $a_0=a$, $a_n=b$.

В соответствии с (2.12) получим включения

$$\mathcal{F}([a_{i-1},a_i])\supset\{f(x):x\in[a_{i-1},a_i]\},\ i=\overline{1,n}. \quad (2.13)$$

Рассматривая объединения левых и правых частей соотношений (2.13), получим, как следствие соотношений (2.13), включение

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{F}([a_{i-1},a_i])\supset\{f(x):x\in[a,b]\}\equiv\bar{f}([a,b]). \quad (2.14)$$

Если ввести в рассмотрение интервал $E_n=[-b_1,b_2]$, где $b_1,b_2>0$ –параметры, зависящие от n , то включение (2.14) можно записать в виде равенства

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{F}([a_{i-1},a_i])=\bar{f}([a,b])+E_n. \quad (2.15)$$

Относительно равенства (2.15) справедливо утверждение $\lim\limits_{n\to\infty}W(E_n)=0$, а значит, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{F}([a_{i-1},a_i])\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\bar{f}([a,b])$.

Пример

Подразделяя интервал $[0,4]$ на один, два, четыре подынтервала равной длины и используя включение (2.14), вычислить интервалы, содержащие в себе $\{f(x)=x(1-x):x\in[0,4]\}$.

Решение

В данном случае $\mathcal{F}(X)=X(1-X)$, $[a,b]=[0,4]$.

1. Положим $n=1$, тогда $[a_0,a_1]=[0,4]$ и
$\mathcal{F}([0,4])=[0,4](1-[0,4])=[-12,4]\supset\bar{f}([0,4])$.

2. Положим $n=2$, тогда $[a_0,a_1]=[0,2],[a_1,a_2]=[2,4]$ и
$\bigcup\limits_{i=1}^{2}\mathcal{F}([a_{i-1},a_i])=\mathcal{F}([0,2])\cup\mathcal{F}([2,4])=[0,2](1-[0,2])\cup$
$\cup[2,4](1-[2,4])=[-2,2]\cup[-12,-2]=[-12,-2]\supset\bar{f}([0,4])$.

3. Если $n=4$, тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{4} \mathcal{F}([a_{i-1}, a_i]) = \mathcal{F}([0,1] \cup \cup \mathcal{F}([1,2]) \cup \mathcal{F}([2,3]) \cup \mathcal{F}([3,4]) = [0,1] \cup [-2,0] \cup [-6,-2] \cup \cup [-12,-6] = [-12,1] \supset \bar{f}([0,4])$.

Как видим, с увеличением n интервалы, содержащие в себе $\bar{f}([0,4])$, сужаются, приближаясь к $\bar{f}([0,4])$. Для данной функции $\bar{f}([0,4]) = [-12, \frac{1}{4}]$.

<u>Определение 2.5.</u> Если функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$ таковы, что на вырожденных интервалах выполняется равенство $\mathcal{F}([x_1, x_1], \ldots, [x_n, x_n]) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется вещественным сужением интервальной функции $\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$.

<u>ТЕОРЕМА 2.6.</u> Пусть $\mathcal{F}: \oint_{\mathcal{J}_1} \otimes \ldots \otimes \oint_{\mathcal{J}_n} \to \oint$ есть рациональная интервальная функция, $f(x_1, \ldots, x_n), x_i \in \mathcal{J}_i, i=\overline{1,n}$ – её вещественное сужение, а $\bar{f} = \bar{f}(X_1, \ldots, X_n), X_i \in \oint_{\mathcal{J}_i}, i=\overline{1,n}$ – объединенное расширение функции f. Разобъем каждый из интервалов X_i на частичные так, что $X_i = \bigcup\limits_{j=1}^{N} X_{ij}$ и $W(X_{ij}) = 1/N \, W(X_i)$.

Тогда существуют интервал $E_N \ni 0$ и вещественное число $k>0$, такие, что

$$\bigcup \mathcal{F}(X_{1j_1}, \ldots, X_{nj_n}) = \bar{f}(X_1, \ldots, X_n) + E_N \tag{2.16}$$

(объединение берется по $j_1, \ldots, j_n$, пробегающим независимо друг от друга значения $1, 2, \ldots, N$) и

$$W(E_N) \leq k/N \max_{1 \leq i \leq n} W(X_i). \tag{2.17}$$

Доказательство.

I. Утверждение (2.16) говорит о том, что область значений функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $\{f(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i,\ i=\overline{1,n}\}$ содержится в объединении $\bigcup \mathcal{F}(X_{1j_1}, \ldots, X_{nj_n})$. Справедливость этого следует из теоремы I.I и того положения, что для всякой функции f, определенной на некоторой области вида $S=\bigcup S_i$, справедливо равенство

$$\{f(x) : x \in S\} = \bigcup_{S_i} \{f(x) : x \in S_i\}. \qquad (2.18)$$

2. Теперь остается доказать справедливость неравенства (2.17).

По теореме I.I существует интервал $E_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$, такой, что $\mathcal{F}(X_{1j_1},\ldots,X_{nj_n}) = \bar{f}(X_{1j_1},\ldots,X_{nj_n}) + E_{j_1,\ldots,j_n}, 0 \in E_{j_1,\ldots,j_n}$. Поэтому E_N в равенстве (2.16) представим в виде $E_N = \bigcup E_{j_1,\ldots,j_n}$, откуда $|E_N| = \max |E_{j_1,\ldots,j_n}|$. Следует учесть, что $W(E_N) \le 2|E_N|$ (так как $W([a,b]) = b-a \le 2\max\{|a|,|b|\} = 2|[a,b]|$).

Следовательно, $W(E_N) \le 2\max|E_{j_1,\ldots,j_n}| = 2\max \rho(\mathcal{F}(X_{1j_1},\ldots,X_{nj_n}), \bar{f}(X_{1j_1},\ldots,X_{nj_n}))$. (2.19)

Покажем теперь, что

$$\rho(\mathcal{F}(X_{1j_1},\ldots,X_{nj_n}), \bar{f}(X_{1j_1},\ldots,X_{nj_n})) \le \mathcal{Z}/2N \max_{1\le i\le n} W(X_i), \qquad (2.20)$$

где $\mathcal{Z}>0$ и не зависит от $N, j_1,\ldots,j_n$. Для этого приведем следующие рассуждения.

В рациональное интервальное выражение $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$ каждая переменная X_i входит ограниченное число раз (это число может равняться и нулю). Пусть p_i есть число вхождений переменной X_i в выражение $\mathcal{F}$. Сделаем замену переменных так, чтобы каждая новая переменная входила в выражение $\mathcal{F}$ один раз. Пусть новые переменные есть $X_i^{(p)}$, $p=1,2,\ldots,p_i$. Тогда из выражения $\mathcal{F}$ относительно этих новых переменных получим рациональное интервальное выражение $\mathcal{H}(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_1^{(p_1)}, \ldots, X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(p_n)})$.

В выражения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ могут ещё входить в ограниченном количестве интервальные константы $C_1, C_2, \dots, C_q$. Для каждого набора вещественных констант $c_1, c_2, \dots, c_q$, таких, что $c_m \in C_m$, $m=\overline{1,q}$, существует вещественная рациональная функция h_c, где $c=(c_1,\dots,c_q)$, удовлетворяющая условию

$$\bigcup_{\substack{c_m \in C_m \\ (m=1,2,\dots,q)}} h_c(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(p_1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p_n)}) = \bar{h}(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \dots, X_1^{(p_1)}, \dots, X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(p_n)}),$$

где $\bar{h}$ есть объединенное расширение h, а h есть вещественное сужение функции $\mathcal{H}$.

Множество рациональных функций h_c равномерно (относительно $c_m \in C_m$, $m=\overline{1,q}$), ограничено и имеет общую постоянную Липшица на своей компактной области определения.

Следовательно, существует положительное вещественное число $K/2$, не зависящее от значений c, и такое, что для всех $x_i, x_i^{(p)} \in X_i$, $i=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,p_n}$ имеет место неравенство

$$|h_c(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(p_1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p_n)}) - h_c(x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n)| \le K/2 \max_{i,p} |x_i^{(p)} - x_i|. \quad (2.21)$$

Так как каждая переменная X_i в выражение $\mathcal{H}$ входит только один раз, то на основании уже известного нам положения,

$$\mathcal{H}(X_1, \dots, X_1, \dots, X_n, \dots, X_n) = \bigcup_{x_i^{(p)} \in X_i} \bar{h}(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(p_1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p_n)}).$$

Учтем теперь, что $\mathcal{H}(X_1, \dots, X_1, \dots, X_n, \dots, X_n) = F(X_1, \dots, X_n)$;

$$\bar{h}(X_1, \dots, X_1, \dots, X_n, \dots, X_n) = \bar{f}(X_1, \dots, X_n);$$

$$\max_{x_i^{(p)}, x_i \in X_i} |x_i^{(p)} - x_i| = W(X_i).$$

Неравенство (2.21) в частности имеет место и для $x_i, x_i^{(p)} \in X_{ij}$, причем в этом случае правая часть данного неравенства принимает вид

$$K/2 \max_{i,p} |x_i^{(p)} - x_i| = K/2\, W(X_{ij}) = K/2N\, W(X_i). \quad (2.22)$$

Теперь, зная, что

$$h_c(x_1^{(1)},\dots,x_1^{(p_1)},\dots,x_n^{(1)},\dots,x_n^{(p_n)})\in$$
$$\in\bigcup_{x_i^{(p)};x_i\in X_{ij_i}}\bar{h}(x_1^{(1)},\dots,x_1^{(p_1)},\dots,x_n^{(1)},\dots,x_n^{(p_n)})=$$
$$=\mathcal{H}(X_{1j_1},\dots,X_{1j_n},\dots,X_{nj_1},\dots,X_{nj_n})\equiv$$
$$\equiv\mathcal{F}(X_{1j_1},\dots,X_{nj_n})$$

и

$$h_c(x_1,\dots,x_1,\dots,x_n,\dots,x_n)\in$$
$$\in\bar{h}(X_1,\dots,X_1,\dots,X_n,\dots,X_n)=\bar{f}(X_{1j_1},\dots,X_{nj_n}),$$

из оценок (2.21), (2.22) на основании леммы 2.1 заключаем, что

$$\rho(\mathcal{F}(X_{1j_1},\dots,X_{nj_n}),\bar{f}(X_{1j_1},\dots,X_{nj_n}))\le$$
$$\le \varkappa/2\max_{x_i^{(p)},x_i\in X_{ij_i}}|x_i^{(p)}-x_i|=\varkappa/2\cdot 1/N\, W(X_i). \quad (2.23)$$

С использованием оценки (2.23) из неравенства (2.19) получаем $W(E_N)\le\varkappa/N\max_{1\le i\le n}W(X_i)$, и теорема доказана.

Следствие 1. Для вещественно-значного сужения $\bar{f}$ интервально-значной функции $\mathcal{F}$, определенной на множестве $\Phi_{\mathcal{Y}}$, существует постоянная $\varkappa>0$, такая, что для всех интервалов $X\subset\mathcal{Y}$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}(X)=\bar{f}(X)+E, \quad (2.24)$$

где $E\ni 0$ и $W(E)\le\varkappa W(X)$.

Следствие 2. Для рациональной интервальной функции $\mathcal{F}$, определенной на множестве $\Phi_{\mathcal{Y}}$ и имеющей вещественно-значное сужение $\bar{f}$, существует постоянная $\varkappa>0$, такая, что для всех интервалов $X\subset\mathcal{Y}$ справедливо неравенство

$$W(\mathcal{F}(X))\le\varkappa W(X). \quad (2.25)$$

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы 2.6 при $n=N=1$, а следствие 2 получается из равенства (2.24) с учетом того, что вещественное сужение f функции $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Липшица в области $\mathcal{Y}$.

Действительно, $f(X)=\{f(x): x\in X\}$, $W(f(X))=$
$=\max\limits_{x_1,x_2\in X}|f(x_1)-f(x_2)|\le \mathcal{L}\max\limits_{x_1,x_2\in X}|x_1-x_2|=\mathcal{L}W(X)$.

Следовательно $W(\mathcal{F}(X))=W(f(X))+W(E)\le\mathcal{L}W(X)+\mathcal{L}_1W(X)=$
$=(\mathcal{L}+\mathcal{L}_1)W(X)=\varkappa W(X)$.

Неравенство (2.25) представляет собой интервальный аналог условия Липшица для рациональной функции $\mathcal{F}(X)$ одного интервального аргумента.

Соответствующие интервальные аналоги условий Липшица по отдельным (или по всем) переменным имеют место и для рациональных интервальных функций многих переменных.

Заметим, что практическая значимость теоремы 2.6 невелика в связи с медленной сходимостью $W(E_\nu)$ к нулю.

В главе Ш будут рассмотрены некоторые более эффективные методы получения интервалов, достаточно близких к областям значений вещественно-значных функций.

Глава Ш
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ К ЗНАЧЕНИЯМ И ОБЛАСТЯМ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

§ I. Понятие областного расширения вещественно-значной функции. Некоторые элементарные практические приемы "сужения" областных расширений

Пусть вещественно-значная функция $f=f(x_1,\dots,x_n)$ определена на области $\mathcal{B}=\mathcal{Y}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{Y}_n$ и
$X=X_1\oplus\dots\oplus X_n$, $X_i\in\mathcal{Y}_i$, $i=\overline{1,n}$.

R.J. Hanson [13] называет областным расширением функции f на множестве $X\subset\mathcal{B}$ всякий интервал $\mathcal{F}=\mathcal{F}(X)$ такой,

что $$\mathcal{F} \supset \{f(x_1,\dots,x_n) : (x_1,\dots,x_n) \in X\} \equiv$$
$$\equiv \bar{f}(X) \equiv \bar{f}(X_1,\dots,X_n).$$

В качестве областного расширения функции f, в частности, можно рассматривать её интервальное расширение $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X_1,\dots,X_n)$, определяемое, как известно, условиями:

I) $\mathcal{F}(X) \supset \bar{f}(X_1,\dots,X_n)$,

2) $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n), x_i \in X_i, i = \overline{1,n}$.

Наибольшее практическое значение имеют областные расширения вещественно-значных функций, достаточно близкие к их объединенным расширениям.

Элементарными практическими приемами нахождения по возможности более узких областных расширений вещественно-значных функций являются следующие:

I. Если для данной функции f найдены два интервала $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, таких, что $\mathcal{F}_1 \supset \bar{f}$ и $\mathcal{F}_2 \supset \bar{f}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \supset \bar{f}$.

2. Для построения достаточно узкого интервального расширения $\mathcal{F}(X)$ функции f следует с помощью элементарных преобразований привести предварительно данную функцию к виду, содержащему по возможности наименьшее число вхождений каждого из аргументов.

Например, для построения областного расширения функции $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $x \in X \subset [a,b]$, $y \in Y \subset [c,d]$ полезно сначала преобразовать её к виду $f(x,y) = 1 + \frac{2}{\frac{x}{y} - 1}$.
В этом случае $\mathcal{F}(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y) = 1 + \frac{2}{\frac{X}{Y} - 1} = \bar{f}(X,Y)$.

3. Этот прием основан на использовании свойства субдистрибутивности интервальной арифметики: если $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} \in \mathcal{J}$, то

$$\mathcal{I}(\mathcal{J} + \mathcal{K}) \subset \mathcal{I}\mathcal{J} + \mathcal{I}\mathcal{K}. \tag{3.I}$$

Пусть заданная вещественно-значная функция f есть например, алгебраический полином вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \; x \in X \subset [a, b] . \quad (3.2)$$

Строим для этого полинома областное расширение, в качестве которого можно взять его непосредственное интервальное расширение $\mathcal{F}_1(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$.

Представим теперь полином (3.2) во вложенной форме записи:

$$f(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_n))\ldots) , \quad (3.3)$$

Теперь строим интервальное расширение для функции f , заданной в форме (3.3): $\mathcal{F}_2(X) = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + \ldots + X(a_n))\ldots)$ На основании свойства (3.I) имеем $\mathcal{F}_2(X) \subset \mathcal{F}_1(X)$, и следовательно, можно положить $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}_2(X) \supset \bar{f}(X), X \subset [a, b]$

Если исходная вещественно-значная функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ приведена к виду, содержащему каждую из переменных x_i , $i = \overline{1, n}$, по возможности минимальное число раз, то используя эту, так называемую кононическую форму записи, можно получить для функции f наилучшее, в смысле ширины, интервальное расширение.

Рассмотрим некоторые методы построения областных (интервальных) расширений, в основу которых положено предварительное приведение исходной вещественной функции к каноническому, или близкому к нему виду.

§ 2. Среднезначная форма интервального расширения

Рассмотрим сначала случай функции одной переменной.

Пусть заданная на $[a, b]$ непрерывная, вещественно-значная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$. Пусть далее x_0 -фиксированная, а x -текущая точка из интервала $X \subset [a, b]$. Применим к функции $f(x)$ на $[x_0, x]$ $([x, x_0])$ теорему Лангража о конечных приращениях. Получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0), \; 0 \le \theta \le 1. \quad (3.4)$$

Используя интервальное расширение $\mathcal{F}'$ для функции $f'(x)=f'(x,\theta), x\in X, \theta\in[0,1]$, имеем включение

$$f(x)\in f(x_0)+\mathcal{F}'(x_0+[0,1](X-x_0))(X-x_0),\ x\in X \qquad (3.5)$$

или

$$\{f(x): x\in X\}=\bar{f}(X)\subset f(x_0)+\mathcal{F}'(x_0+[0,1](X-x_0))(X-x_0). \qquad (3.6)$$

Обычно в качестве x_0 выбирают среднюю точку интервала X, $x_0=m(X)$. Полагая

$$\mathcal{F}(X)=f(m(X))+\mathcal{F}'(m(X)+[0,1](X-m(X)))(X-m(X)), \qquad (3.7)$$

на основании включения (3.6) имеем $\bar{f}(X)\subset\mathcal{F}(X)$.

Равенство (3.7) называют среднезначной формой интервального (в общем случае областного) расширения вещественно-значной функции $f(x)$.

Аналогичные результаты можно получить и для случая вещественно-значных функций многих переменных. Действительно, пусть вещественно-значная функция $f=f(x_1,\dots,x_n)$, $x_i\in[a_i,b_i]$, $i=\overline{1,n}$, определена и непрерывна в области $B=[a_1,b_1]\otimes\dots\otimes[a_n,b_n]$ и имеет в ней непрерывные частные производные по всем аргументам. Пусть далее $X=X_1\otimes\dots\otimes X_n$ и $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\overset{\circ}{x}=(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_n)\in X$.

Используя формулу Лагранжа применительно к функциям многих переменных, имеем

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_n)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{x=\xi}(x_j-\overset{\circ}{x}_j), \qquad (3.8)$$

где

$$\xi=(\overset{\circ}{x}_1+\theta(x_1-\overset{\circ}{x}_1),\dots,\overset{\circ}{x}_n+\theta(x_n-\overset{\circ}{x}_n)),\ \theta\in[0,1],\ \xi\in X.$$

Через $\mathcal{F}_j(X_1,\dots,X_n)$ обозначим интервальные расширения функций $\frac{\partial f}{\partial x_j}=f'_j(x_1,\dots,x_n,\theta)$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда, полагая

$$\mathcal{F}(X_1,\dots,X_n)=f(m(X_1),\dots,m(X_n))+ \qquad (3.9)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j(\overset{\circ}{x}_1+[0,1](X_1-m(X_1)),\dots,\overset{\circ}{x}_n+[0,1](X_n-m(X_n)))(X_j-m(X_j)),$$

где $x_i^0 = m(X_i)$, получим включение $\{f(x_1,\ldots,x_n): (x_1,\ldots,x_n)\in X\} = f(X_1,\ldots,X_n) \subset F(X_1,\ldots,X_n)$.

Интервал, определенный равенством (3.9), может быть более узким, чем интервальное расширение, полученное непосредственно для исходной формы заданной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Пример

Найти интервал, содержащий в себе область значений функций $f(x) = x - x^2$ при $x \in [0,1]$.

Решение. Построим интервальные расширения данной функции при $X = [0,1]$, используя различные её формы записи:

I) $f(x) = x - x^2$;

$F_1(X) = X - X^2$, $F_1([0,1]) = [0,1] - [0,1]^2 = [-1,1]$

2) $f(x) = x(1-x)$ – вложенная форма записи;

$F_2(X) = X(1-X)$, $F_2([0,1]) = [0,1]\cdot(1-[0,1]) = [0,1]$.

3) $f(x) = \{x - x_0^2\} + \{1 - 2(x_0 + \theta(x - x_0))\}(x - x_0)$,

$x_0 = m(X)$ – среднезначная форма записи;

$F_3(X) = \{x_0 - x_0^2\} + \{1 - 2(x_0 + [0,1](X - x_0))\}(X - x_0)$,

$F_3([0,1]) = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\} + \{1 - 2(\frac{1}{2} + [0,1]([0,1] - \frac{1}{2}))\}([0,1] - \frac{1}{2}) = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Сравним ширины полученных интервалов: $W(F_1) = 2$, $W(F_2) = 1$, $W(F_3) = \frac{1}{2}$. Очевидно, что среднезначная форма интервального расширения порождает для данной функции самый узкий искомый интервал.

§ 3. Центральная форма интервального расширения

Пусть вещественно-значная функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ рациональна, определена и непрерывна на множестве $B = J_1 \otimes \ldots \otimes J_n \supset X$, где $X = X_1 \otimes \ldots \otimes X_n$, $x_i \in X_i$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть далее точка $C = (c_1,\ldots,c_n)$ – некоторая фиксированная точка из множества X .

Введем вместо x_i новые переменные y_i, $i = \overline{1,n}$

по формулам: $x_i = c_i + y_i,\quad i=\overline{1,n}$, и положим

$$g(y_1,\dots,y_n) \equiv f(c_1+y_1,\dots,c_n+y_n) - f(c_1,\dots,c_n). \qquad (3.10)$$

Равенство (3.10) преобразуем так, чтобы в выражение $g(y_1,\dots,y_n)$ каждая из переменных $y_i,\ i=\overline{1,n}$ входила по возможности минимальное число раз. После этого возвращаемся к старым переменным и согласно равенству (3.10) получаем

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(c_1,\dots,c_n) + g(x_1-c_1,\dots,x_n-c_n). \qquad (3.11)$$

Полагая $c_i = m(X_i),\ i=\overline{1,n}$, будем равенство (3.11) рассматривать как центральную форму записи функции f.

Отправляясь от равенства (3.11), строим интервальное расширение этой функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X_1,\dots,X_n) = f(m(X_1),\dots,m(X_n)) + \\ + g(X_1 - m(X_1),\dots,X_n - m(X_n)). \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Равенство (3.12) представляет собой центральную форму интервального расширения для исходной вещественно-значной функции $f(x_1,\dots,x_n)$.

Пример. Найти интервал, содержащий в себе область значений функции $f(x) = x - x^2$ при $x \in [0,1]$, используя центральную форму её интервального расширения.

Решение. Полагая в равенстве (3.12) $n=1,\ x_1 = x$ имеем $\mathcal{F}(X) = f(m(X)) + g(X - m(X))$.

Здесь $$\begin{aligned} g(y) &= f(y+c) - f(c) = \{(y+c)-(y+c)^2\} - (c-c^2) = \\ &= y - y^2 - 2cy = y(1-2c-y). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{F}(X) = \{m(X) - (m(X))^2\} + (X - m(X))(1 - 2m(X) - X + m(X))$ и $\mathcal{F}([0,1]) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + ([0,1] - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2} - [0,1]) = [0, \frac{1}{2}]$.

Таким образом, $\{x - x^2 : x \in [0,1]\} \subset [0, \frac{1}{2}]$.

§ 4. Интервальная операция возведения в целую положительную степень

Пусть задана степенная функция $f(x)=x^n$, где n – натуральное число. Её интервальное расширение есть $\mathcal{F}(X)=X^n\equiv X\cdot\ldots\cdot X$. Очевидно, что в общем случае $\bar{f}(X)=\{x^n : x\in X\}\neq\mathcal{F}(X)$.

Если же ввести операцию возведения в степень интервалов как самостоятельную интервальную операцию, то можно добиться того, чтобы $\bar{f}(X)=\mathcal{F}(X)\equiv X^n$.

В связи с этим, полагая $X=[x_1,x_2]$, по определению примем:

$$X^n=[x_1,x_2]^n=\begin{cases}[x_1^n,x_2^n], & \text{если } x_1>0,\\ [0,\max\{x_1^n,x_2^n\}], & \text{если } 0\in[x_1,x_2], n\text{ - четное},\\ [x_1^n,x_2^n], & \text{если } 0\in[x_1,x_2], n\text{ -нечетное}\\ [x_2^n,x_1^n], & \text{если } x_2<0,\ n\text{ -четное}\\ [x_1^n,x_2^n], & \text{если } x_2<0,\ n\text{ -нечетное}\end{cases} \quad (3.13)$$

так что справедливо равенство $X^n=\{x^n : x\in X\}$.

В несложных частных случаях операцию (3.13) можно использовать для получения объединенных расширений алгебраических полиномов.

§ 5. Об определении областных расширений нерациональных функций

Как уже известно, областное расширение вещественной рациональной функции получается из неё непосредственно в виде интервального расширения путем замены вещественных аргументов и обычных арифметических операций интервальными. Этот прием не приемлем для нерациональных функций.

Заметим однако, что большинство из широко используемых нерациональных функций являются монотонными или кусочно-монотонными с легко определяемыми интервалами монотонности.

Пусть, например, $f(x)$ - вещественно-значная нерациональная функция одного аргумента, определенная на $[a,b]\supset X$ и $X=\bigcup_{i=1}^{p} X_i$, где X_i, $i=\overline{1,p}$ есть интервалы монотонности этой функции. Тогда $\bar{f}(X)=\bigcup_{i=1}^{p}\bar{f}(X_i)$. Если положить $X_i=[x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}]$, то $\bar{f}(X_i)=[f(x_i^{(1)}), f(x_i^{(2)})]$, для монотонно возрастающей и $\bar{f}(X_i)=[f(x_i^{(2)}), f(x_i^{(1)})]$ для монотонно убывающей на X_i функции.

Практически вычисление нерациональных функций на концах частичных интервалов X_i, $i=\overline{1,p}$ производится приближенно с некоторой вычислительной погрешностью $\varepsilon>0$.

Пусть $f^*(x_i^{(1)})$ и $f^*(x_i^{(2)})$ есть вычисленные с погрешностью ε значения $f(x_i^{(1)})$ и $f(x_i^{(2)})$, так что

$$f^*(x_i^{(1)})-\varepsilon\le f(x_i^{(1)})\le f^*(x_i^{(1)})+\varepsilon$$

и $$f^*(x_i^{(2)})-\varepsilon\le f(x_i^{(2)})\le f^*(x_i^{(2)})+\varepsilon.$$

Поэтому для монотонно-возрастающей на X_i функции имеет место включение $\bar{f}(X_i)\subset[f^*(x_i^{(1)})-\varepsilon, f^*(x_i^{(2)})+\varepsilon]\equiv \mathcal{F}_i(X)$, а для монотонно-убывающей - включение $\bar{f}(X_i)\subset[f^*(x_i^{(2)})-\varepsilon,$
$f^*(x_i^{(1)})+\varepsilon]\equiv \mathcal{F}_i(X)$.

Полагая $\mathcal{F}(X)=\bigcup_{i=1}^{p}\mathcal{F}_i$, получаем $\bar{f}(X)=$
$=\bigcup_{i=1}^{p}\bar{f}(X_i)\subset\mathcal{F}(X)$ и, следовательно, функция $\mathcal{F}(X)$ является областным расширением для функции $f(x)$.

Имея дело с определенной нерациональной элементарной функцией, помимо монотонности, можно использовать и другие известные её свойства - периодичность, известные пределы её значений на рассматриваемых интервалах. Например, при конструировании областных расширений для тригонометрических функций, можно учитывать, что $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$. Учитывая свойство периодичности рассматриваемых функций, можно искать для неё областное расширение лишь на некотором стандартном интервале длины её периода.

Глава IУ
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ I. Постановка задачи. Понятие решения, интервального решения, оптимального интервального решения системы

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$A x = b, \qquad (4.1)$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица размера $n \times n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – заданный, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – искомый векторы-столбцы.

Предположим, что элементы матрицы A и вектора b или получены экспериментально с известными границами погрешности, или округляются при счете на ЭВМ, так что границы погрешности округления известны. В обоих случаях можно считать, что коэффициенты системы (4.I) находятся в пределах известных интервалов

$$\mathcal{A}_{ij} = [a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}], \quad \mathcal{B}_j = [b_j^{(1)}, b_j^{(2)}],$$
$$a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}, \quad b_j \in \mathcal{B}_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (4.2)$$

Введем в рассмотрение интервальную матрицу $[A] = (\mathcal{A}_{ij})$ и интервальный вектор-столбец $[b] = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$.

Тогда условия (4.2) можно записать в виде

$$A \in [A], \quad b \in [b], \qquad (4.3)$$

а систему (4.I) при условиях (4.3) – в форме системы

$$[A] x = [b]. \qquad (4.4)$$

Будем говорить, что система (4.4) есть линейная алгебраическая система с интервальными коэффициентами.

Предположим, что $\det \mathcal{A} \neq 0$ при любых $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$.

Определение 4.I. Решением системы (4.4) называется множество векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, определяемое равенством $\{x\} = \{x : \mathcal{A}x = b,\ \mathcal{A} \in [\mathcal{A}],\ b \in [b]\}$.

Определение 4.2. Интервальным решением системы (4.4) будем называть такой интервальный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$, при котором $\{x_i\} \subset X_i$, где $\{x_i\} = \{x_i : x \in \{x\}\}$, $i = \overline{1,n}$.

Очевидно, $\{x\} \subset X_1 \otimes \ldots \otimes X_n$, что символически можно записать в виде $\{x\} \subset X$.

Обычно интервальное решение системы (4.4) получается как интервальное расширение решения системы (4.I) с вещественными коэффициентами на области (4.2) изменения этих коэффициентов.

Так как интервальное расширение для вещественных рациональных функций можно получить неоднозначно, то и интервальные решения системы (4.4) являются неоднозначными.

Практический интерес представляет так называемое оптимальное интервальное решение системы (4.4) [I2, I4].

Определение 4.3. Интервальное решение $X^{\circ} = (X_1^{\circ}, \ldots, X_n^{\circ})$ системы (4.4) будем называть её оптимальным интервальным решением, если

$$X_i^{\circ} = [\inf\{x_i\}, \sup\{x_i\}],\ i = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

что будет равнозначно записи $X^{\circ} = [\inf\{x\}, \sup\{x\}]$.

Очевидно, что если $X = (X_1, \ldots, X_n)$ - произвольное, а $X^{\circ} = (X_1^{\circ}, \ldots, X_n^{\circ})$ - оптимальное решения системы (4.4), то справедливо соотношение $X^{\circ} \subset X$.

Для случая $n=2$ приведем геометрическую интерпретацию решения, интервального и оптимального решений системы (4.4).

Итак, рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что её решение $\{x\}$ есть множество двумерных точек, образующих заштрихованную фигуру (рис.6.). Пусть $X=(X_1, X_2)$ - некоторое произвольное, а $X^0=(X_1^0, X_2^0)$ - оптимальное решение данной системы. Тогда прямоугольник $ABCD$ представляет $X_1^0 \otimes X_2^0$, а прямоугольник $A_1B_1C_1D_1 - X_1 \otimes X_2$, так что $\{x\} \subset X^0 \subset X$.

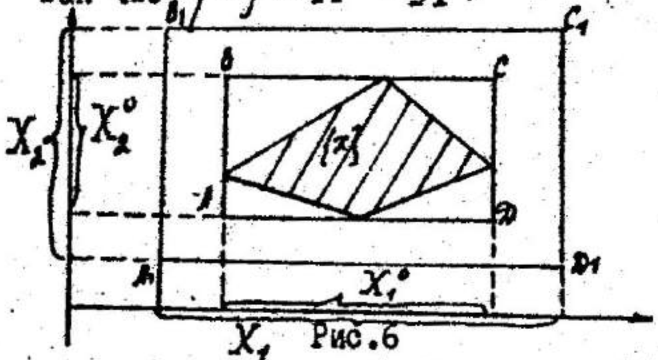


Рис.6

При этом
$$X_1^0=[\inf\{x_1\}, \sup\{x_1\}]=\text{пр}_{ox_1}\{x\};$$
$$X_2^0=[\inf\{x_2\}, \sup\{x_2\}]=\text{пр}_{ox_2}\{x\}.$$

Заметим, что в случае большой размерности системы (4.4) получение её решения $\{x\}$, является технически сложной задачей. Получение же интервального решения - задача, равнозначная задаче решения системы (4.I) с вещественными коэффициентами.

Имея интервальное решение системы (4.4), мы можем получить приближенные решения системы (4.I) с гарантированной оценкой погрешности, обусловленной погрешностями во входных данных этой системы.

Действительно, если $x=(x_1,\ldots, x_n)$ - точное решение системы (I.4), а $X=(X_1,\ldots, X_n)$ - интервальное решение системы (4.4), то $x^* \approx x$ определится равенством $x^* = (x_1^* = m(X_1), \dots, x_n^* = m(X_n))$, и при этом справедлива оценка $|x_i - x_i^*| \le \frac{1}{2} W(X_i), \quad i = \overline{1,n}$.

§ 2. Интервальный аналог метода Крамера решения систем

Для простоты выкладок рассмотрим построение интервального решения системы (4.4) на базе известного метода Крамера применительно к системе двух уравнений, которую запишем в скалярной форме:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 = B_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = B_2 \end{aligned} \right\} \qquad (4.6)$$

Система (4.6) эквивалентна системе

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{aligned} \right\} \qquad (4.7)$$

с условиями

$$a_{ij} \in A_{ij}, \quad b_j \in B_j, \quad i,j = 1,2. \qquad (4.8)$$

По формулам Крамера решение системы (4.7) имеет вид:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \qquad (4.9)$$

Рассматривая $a_{ij}, b_j, i,j = 1,2$, как переменные с заданными областями изменения (4.8), получим для них интервальные расширения:

$$X_1 = \frac{B_1 A_{22} - A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}},$$

$$X_2 = \frac{A_{11} B_2 - B_1 A_{21}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}. \qquad (4.10)$$

На основании определения интервального расширения справедливы включения:

$$\{x_1\}=\left\{\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}:a_{ij}\in A_{ij},\ b_j\in B_j,\ i,j=1,2\right\}\subset X_1,$$

$$\{x_2\}=\left\{\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}:a_{ij}\in A_{ij},\ b_j\in B_j,\ i,j=1,2\right\}\subset X_2.$$

Следовательно, интервальный вектор $X=(X_1,X_2)$, компоненты которого определяются равенствами (4.I0), является интервальным решением системы (4.6).

Замечания

I) В частном случае, когда переменные коэффициенты системы (4.7) будут входить в выражения (4.9) только по одному разу, интервальные расширения (4.I0) и объединенные расширения рациональных выражений (4.9) будут заведомо совпадать, т.е. $\{x_1\}=X_1$, $\{x_2\}=X_2$, а значит, $X=(X_1,X_2)$ будет представлять собой оптимальное интервальное решение системы (4.6).

2) Для получения более узких интервальных расширений для выражений (4.9) целесообразно, по возможности, представлять их в такой форме записи, при которой число вхождений в формулы (4.9) каждой из переменных величин a_{ij}, b_j, $i,j=1,2$ является минимальным.

Пример. Найти интервальное решение системы (4.7) при условиях

$$a_{11}=a_{21}=1,\ a_{12}=2,\ a_{22}\in[10,12],\ b_1=1,\ b_2=0.$$

Решение. Запишем формулы (4.9) для данной системы:

$$x_1=\frac{a_{22}}{a_{22}-2},\quad x_2=-\frac{1}{a_{22}-2}. \tag{4.II}$$

1. По формулам (4.10) получаем

$$X_1 = \frac{\mathcal{A}_{22}}{\mathcal{A}_{22}-2}, \quad X_2 = \frac{-1}{\mathcal{A}_{22}-2},$$

где $\mathcal{A}_{22} = [10, 12]$. Отсюда

$$X_1 = \frac{[10, 12]}{[10, 12]-2} = [1, \tfrac{3}{2}]$$

$$X_2 = \frac{-1}{[10, 12]-2} = [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{10}]$$

$$X = (X_1, X_2) = ([1, \tfrac{3}{2}], [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{10}]).$$

2. Предварительно преобразуем выражения (4.11):

$$x_1 = 1 + \frac{2}{a_{22}-2}, \quad x_2 = -\frac{1}{a_{22}-2}. \tag{4.12}$$

В формулы (4.12) переменная a_{22} входит по одному разу. Следовательно, интервальные расширения выражений (4.12) порождают оптимальное интервальное решение рассматриваемой системы:

$$X_1^0 = 1 + \frac{2}{[10, 12]-2} = [\tfrac{6}{5}, \tfrac{5}{4}],$$

$$X_2^0 = -\frac{1}{[10, 12]-2} = [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{10}],$$

$$X^0 = (X_1^0, X_2^0) = ([\tfrac{6}{5}, \tfrac{5}{4}], [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{10}]).$$

§ 3. Матричный метод решения систем. Обращение интервальных матриц

Вернемся к системе (4.1). Известно, что если $\det A \neq 0$, то решение этой системы представляется в виде

$$x = A^{-1}b. \tag{4.13}$$

Пусть, как и прежде, система (4.I) рассматривается при условиях (4.3), а значит, в форме (4.4). Тогда определение 4.I решения системы (4.4) может быть представлено в записи

$$\{x\}=\{x: x=\mathcal{A}^{-1}b,\ \mathcal{A}\in[\mathcal{A}],\ b\in[b]\}. \qquad (4.I4)$$

Множеству (4.I4) ставится в соответствие множество матриц, обратных матрице $\mathcal{A}$:

$$\{\mathcal{A}^{-1}\}=\{\mathcal{A}^{-1}: \mathcal{A}\in[\mathcal{A}]\}. \qquad (4.I5)$$

Ясно, что практическая ценность формул (4.I4), (4.I5) невелика.

Поэтому введем в рассмотрение интервальную матрицу, обратную матрице $[\mathcal{A}]$.

Пусть $\mathcal{A}^{-1}=(q_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$, и

$$\{q_{ij}\}=\{q_{ij}: a_{ij}\in A_{ij},\ i,j=\overline{1,n}\}. \qquad (4.I6)$$

<u>Определение 4.4.</u> Матрицу $[\mathcal{A}^{-1}]=(Q_{ij})$ будем называть обратной интервальной матрице $[\mathcal{A}]=(A_{ij})$, если для её элементов выполняется условие

$$\{q_{ij}\}\subset Q_{ij},\ i,j=\overline{1,n}. \qquad (4.I7)$$

Условие (4.I7) будем считать равнозначным включению

$$\{\mathcal{A}^{-1}\}\subset[\mathcal{A}^{-1}]. \qquad (4.I8)$$

Обычно матрица $[\mathcal{A}^{-1}]$ получается как своего рода интервальное расширение матрицы $\mathcal{A}^{-1}$ с вещественными переменными элементами на области их изменения.

Например, если $q_{ij}=q_{ij}(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},a_{n2},\ldots,a_{nn})$, где $a_{ij}\in A_{ij}$, и $Q_{ij}=q_{ij}(A_{11},A_{12},\ldots,A_{1n},\ldots,A_{n1},A_{n2},\ldots,A_{nn})$ – одно из возможных интервальных расширений рациональной функции q_{ij} аргументов $a_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$, то $[\mathcal{A}^{-1}]=(Q_{ij})$.

Процесс, заключающийся в нахождении $[\mathcal{A}^{-1}]$, обратной матрице $[\mathcal{A}]$, называется обращением интервальной матрицы $[\mathcal{A}]$.

Очевидно, что обращение интервальных матриц является операцией неоднозначной в виду неоднозначности интервального расширения для одной и той же рациональной функции.

Определение 4.5. Матрицу $[A^{-1}]^o = (Q_{ij}^o)$ назовем оптимальной обратной матрицей интервальной матрице $[A]$, если $Q_{ij}^o = [\inf\{q_{ij}\}, \sup\{q_{ij}\}], \ i, j = \overline{1,n}$, что будем считать равнозначным записи $[A^{-1}]^o = [\inf\{A^{-1}\}, \sup\{A^{-1}\}]$.

Справедливо соотношение $[A^{-1}]^o \subset [A^{-1}]$, где $[A^{-1}]$ – произвольная матрица, обратная матрице $[A]$.

ТЕОРЕМА 4.1. Если $[A^{-1}]$ есть некоторая матрица, обратная матрице $[A]$, то интервальное решение системы (4.4) можно представить в виде

$$X = [A^{-1}][b], \tag{4.19}$$

где операция умножения интервальной матрицы на интервальный вектор осуществляется по известному правилу, но с использованием интервальной арифметики.

Доказательство теоремы элементарно. Действительно, используя свойство монотонности интервальных рациональных выражений и соотношения (4.3), (4.18) из (4.13) получаем включение $x = A^{-1}b \in [A^{-1}][b] \equiv X$, справедливое для всех $x \in \{x\} = \{x : Ax = b, A \in [A], b \in [b]\}$, т.е. включение $\{x\} \subset X$.

Отсюда, в соответствии с определением 4.2, вектор X, определяемый равенством (4.19), есть интервальное решение системы (4.4). Теорема доказана.

Замечание. Если $X = (X_1, \dots, X_n)$ есть интервальное решение системы (4.4), определяемое равенством (4.19), то

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} B_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.20}$$

Следствие. Если $[A^{-1}]^o$ – оптимальная матрица, обратная матрице $[A]$, то

$$X^0 = [A^{-1}]^0 [b] \tag{4.21}$$

есть оптимальное интервальное решение системы (4.4).

Пример. Найти матричным методом интервальное решение системы (4.7) при условиях:

$$a_{11} = a_{21} = 1\ , \ a_{12} = 2\ , \ a_{22} \in [10, 12]\ , \ b_1 = 1, \ b_2 = 0. \tag{4.22}$$

Решение будем искать в форме (4.19). В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

найдем, например, с помощью алгебраических дополнений D_{ji} элементов матрицы A , полагая $q_{ij} = \frac{D_{ji}}{\det A}$, $i,j=1,2$. Имеем:

$$q_{11} = \frac{a_{22}}{\det A}\ , \quad q_{12} = -\frac{a_{12}}{\det A},$$

$$q_{21} = -\frac{a_{21}}{\det A}\ , \quad q_{22} = \frac{a_{11}}{\det A}.$$

С учетом условий (4.22) получаем:

I)

$$q_{11} = \frac{a_{22}}{a_{22}-2} \in \frac{[10,12]}{[10,12]-2} = [1, \tfrac{3}{2}] = Q_{11},$$

$$q_{12} = -\frac{1}{a_{22}-2} \in -\frac{1}{[10,12]-2} = [-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{10}] = Q_{21},$$

$$q_{21} = -\frac{1}{a_{22}-2} \in -\frac{1}{[10,12]-2} = [-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}] = Q_{12},$$

$$q_{22} = \frac{1}{a_{22}-2} \in \frac{1}{[10,12]-2} = [\tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{8}] = Q_{22}.$$

Таким образом,

$$[A^{-1}] = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, \frac{3}{2}] & [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}] \\ [-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}] & [\frac{1}{10}, \frac{1}{8}] \end{pmatrix}$$

и

$$X=[A^{-1}][b]=\begin{pmatrix}[1,\frac{3}{2}] & [-\frac{1}{4},-\frac{1}{5}]\\ [-\frac{1}{8},-\frac{1}{10}] & [\frac{1}{10},\frac{1}{8}]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1,\frac{3}{2}]\\ [-\frac{1}{8},-\frac{1}{10}]\end{pmatrix},$$

т.е.

$$X=(X_1,X_2)=([1,\tfrac{3}{2}],[-\tfrac{1}{8},-\tfrac{1}{10}]).$$

2) Предварительно преобразуем выражение для q_{11}, полагая

$$q_{11}=\frac{a_{22}}{a_{22}-2}=1+\frac{2}{a_{22}-2}\in 1+\frac{2}{[10,12]-2}=[\tfrac{6}{5},\tfrac{5}{4}].$$

Теперь получаем оптимальное интервальное решение:

$$X^{\circ}=[A^{-1}]^{\circ}[b]=$$

$$=\begin{pmatrix}[\frac{6}{5},\frac{5}{4}] & [-\frac{1}{4},-\frac{1}{5}]\\ [-\frac{1}{8},-\frac{1}{10}] & [\frac{1}{10},\frac{1}{8}]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[\frac{6}{5},\frac{5}{4}]\\ [-\frac{1}{8},-\frac{1}{10}]\end{pmatrix},$$

т.е.

$$X^{\circ}=(X_1^{\circ},X_2^{\circ})=([\tfrac{6}{5},\tfrac{5}{4}],[-\tfrac{1}{8},-\tfrac{1}{10}]).$$

§ 4. О методах, заведомо порождающих оптимальное интервальное решение системы

Остановимся коротко на методах, позволяющих получать заведомо оптимальное интервальное решение для одного частного случая систем вида (4.4).

Приведем необходимые определения и леммы.

<u>Определение 4.6.</u> Матрица $A=(a_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ с вещественными элементами a_{ij} называется M-матрицей, если $a_{ij}\le 0$ для $i\ne j$ и выполняется одно из эквивалентных условий:

I) $\det A\ne 0$ и $A^{-1}\ge 0$;

2) матрица $D=(a_{ii})$, составленная из диагональных элементов матрицы A, положительна и спектральный радиус

$\rho(E-\mathcal{D}^{-1}\mathcal{A})<1$;

3) все собственные числа матрицы $\mathcal{A}$ имеют положительную вещественную часть;

4) из того, что $\mathcal{A}x\geq 0$ следует, что $x\geq 0$.

<u>ЛЕММА 4.I.</u> Если $\mathcal{B}$-$\mathcal{M}$-матрица, такая, что $\mathcal{B}\leq\mathcal{A}$ и $a_{ij}\leq 0$ при $i\neq j$, то $\mathcal{A}$ есть $\mathcal{M}$-матрица.

<u>ЛЕММА 4.2.</u> Если для матрицы $\mathcal{A}=(a_{ij})$ со знакоопределенными элементами $a_{ij}\leq 0\leq a_{ii}$ $(i\neq j)$ выполняется условие $|a_{ii}|>\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\ i=\overline{1,n}$, то $\mathcal{A}$ есть $\mathcal{M}$-матрица.

<u>Определение 4.7.</u> Интервальная матрица $[\mathcal{A}]=(\mathcal{A}_{ij}),i,j=\overline{1,n}$, называется $\mathcal{M}$-матрицей, если всякая матрица $\mathcal{A}\in[\mathcal{A}]$ есть $\mathcal{M}$-матрица.

<u>ЛЕММА 4.3.</u> Пусть $[\mathcal{A}]=(\mathcal{A}_{ij})\equiv[\underline{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{A}}]$, где $\mathcal{A}_{ij}=[a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)}]$.

Тогда, в соответствии с леммой 4.I, матрица $[\mathcal{A}]$ есть $\mathcal{M}$-матрица, если $\underline{\mathcal{A}}$ $\mathcal{M}$-матрица и $a_{ij}^{(2)}\leq 0$ при $i\neq j$.

Используя понятие $\mathcal{M}$-матрицы и опираясь на приведенные леммы, можно доказать следующие теоремы.

<u>ТЕОРЕМА 4.2.</u> Если матрица $[\mathcal{A}]$ системы (4.4) есть $\mathcal{M}$-матрица, то применение алгоритма Гаусса в интервальном его варианте приводит к оптимальному интервальному решению этой системы.

Иными словами, в теореме 4.2 утверждается следующее: интервальные расширения расчетных формул метода Гаусса, примененного к системе (4.I), определенной на области (4.2), порождают оптимальное интервальное решение системы (4.4).

Алгоритм интервального варианта метода Гаусса применительно к системе (4.4) представляется следующими формулами:

$$
A_{ij} := \begin{cases} 0, & j=k,\ i\in \mathcal{J}, \\ A_{ij} - \dfrac{A_{ik}\cdot A_{kj}}{A_{kk}}, & j>k,\ i\in\mathcal{J}, \\ A_{ij}, & \text{для остальных } j\ ; \end{cases}
$$

$$
B_i := \begin{cases} B_i - \dfrac{A_{ik}}{A_{kk}}\cdot B_k, & i\in\mathcal{J}, \\ B_i, & i\notin\mathcal{J} \end{cases} \tag{4.23}
$$

$$
i,j,k=\overline{1,n},\quad \mathcal{J}=\{i: i>j\},
$$

в конце прямой прогонки $i=j=k=n$;

$$
X_{n-i} = \frac{B_{n-i} - \sum_{j=0}^{i-1} A_{n-i,n-j}\cdot X_{n-j}}{A_{n-i,n-i}},\ i=\overline{0,(n-1)},
$$

$$
X=(X_1,\ldots,X_n).
$$

<u>ТЕОРЕМА 4.3.</u> Если матрица $[A]$ системы (4.4), представленная в виде суммы трех матриц – нижней треугольной $[L]$, диагональной $[D]$ и верхней треугольной $[U]$, так что $[A]=[L]+[D]+[U]$, есть M-матрица, то итерационный процесс вида

$$
X^{m+1}=\{[D^{-1}]([B]-([L]+[U])X^m)\}\cap X^m, \tag{4.24}
$$

$m=0,1,\ldots,$ X^0 – задано, сходится к оптимальному интервальному решению $X^0=(X_1^0,\ldots,X_n^0)$, т.е. $X^0=\lim\limits_{m\to\infty} X^m$, при условии $X^0\supset\{x\}$.

Доказательство теорем 4.2 и 4.3 можно найти в работах W.Barth, E.Nuding, M.Hebgen [I2, I4].

В заключение отметим, что для получения интервальных решений систем вида (4.4) можно использовать, как исходные, и другие, не упомянутые здесь, как прямые, так и итерационные методы решения линейных алгебраических систем с вещественными коэффициентами.

Так, например, в случае систем с трехдиагональной матрицей целесообразно использовать интервальный аналог метода прогонки, построение и обоснование которого приведены в работах [4, IO].

Если система решается матричным методом, то, точно так же, можно использовать различные приемы обращения интервальных матриц. Однако, наибольшую практическую ценность имеют те интервальные методы, которые порождают оптимальные интервальные решения или близкие к ним. Иногда неплохие результаты можно получить, решая систему различными методами и беря в качестве окончательного решения пересечение полученных.

Глава У
ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ I. Постановка задачи. Выделение подынтервалов, содержащих вещественные корни уравнений

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \tag{5.I}$$

где $f(x)$ есть целая рациональная функция с вещественными коэффициентами вида

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \tag{5.2}$$

Требуется найти вещественные корни уравнения (5.I) на заданном интервале $[a,b]$.

Как известно, точное решение поставленной задачи возможно лишь в простейших случаях. Поэтому мы будем решать уравнение (5.I) приближенно, используя аппарат интервальной математики.

В основе предлагаемого метода лежит понятие интервального сжатия.

Определение 5.I. Интервально-значную функцию $\mathcal{F}(X)$, определенную на $\mathcal{J}_{[a,b]}$, будем называть интервальным сжатием, если для всех $X\in\mathcal{J}_{[a,b]}$ выполняется условие

$$\mathcal{F}(X) \subset X. \tag{5.3}$$

<u>Определение 5.2.</u> Интервальное сжатие $\mathcal{F}(X)$ будем называть <u>строгим интервальным</u> сжатием, если существует такое вещественное число $0<q<1$, что

$$W(\mathcal{F}(X)) \leq q W(X). \tag{5.4}$$

Заметим, что здесь функция $\mathcal{F}$ играет роль оператора, осуществляющего сжатое отображение области $\mathcal{J}_{[a,b]}$ в себя.

Предположим теперь, что уравнение (5.I) записано в виде

$$X = \varphi(X) \tag{5.5}$$

и $\mathcal{F}(X)$ есть интервальное расширение функции $\varphi(x)$, обладающее свойствами (5.3), (5.4).

Тогда последовательность интервалов, определяемых равенством

$$X^{n+1} = \mathcal{F}(X^n), \ n=0,1,\dots, \tag{5.6}$$

удовлетворяет условиям

$$X^0 \supset X^1 \supset \dots \supset X^n \supset X^{n+1} \supset \dots \tag{5.7}$$

и

$$W(X^{n+1}) = W(\mathcal{F}(X^n)) \leq \tau W(X^n), \quad 0<\tau<1. \tag{5.8}$$

Из условий (5.7), (5.8) следует сходимость последовательности $\{X^n\}$ к вещественному числу $x=\alpha$:

$$\lim X^n = \alpha, \ \alpha \in X^n, \ n=0,1,\dots. \tag{5.9}$$

Следовательно, в пределе из равенства (5.6) получаем $\alpha = \mathcal{F}(\alpha)$.

Но по определению интервального расширения $\mathcal{F}(\alpha) = \varphi(\alpha)$, а значит,

$$\alpha = \varphi(\alpha), \tag{5.10}$$

т.е. α есть неподвижная точка вещественной функции $\varphi(x)$.

Таким образом, если функция $\varphi(x)$ имеет неподвижную точку $x=\alpha$, удовлетворяющую условию

$$\alpha \in X^0, \qquad (5.11)$$

то уравнение $f(x)\equiv x-\varphi(x)=0$ имеет α своим корнем.

Формула (5.6) может быть использована для нахождения приближенного значения α с гарантированной оценкой погрешности.

Действительно, пусть в равенстве (5.6) $n=p$ - достаточно большое фиксированное натуральное число. Полагая $\alpha^p=m(X^p)$ и $\alpha\approx\alpha^p$, будем иметь оценку

$$|\alpha-\alpha^p|\le\frac{1}{2}W(X^p). \qquad (5.12)$$

Если $\varepsilon>0$ - наперед заданное сколь угодно малое число, то, выбирая p так, чтобы выполнялось соотношение $\frac{1}{2}W(X^p)\le\varepsilon$, будем иметь необходимую оценку

$$|\alpha-\alpha^p|\le\varepsilon. \qquad (5.13)$$

Рассмотрим теперь вопрос о выделении из $[a,b]$ таких, по возможности достаточно узких, подынтервалов, которые содержат в себе вещественный корень уравнения (5.1).

Пусть $\mathcal{F}(X)$ есть интервальное расширение функции $f(x)$. Разобьем интервал $[a,b]$ на частичные интервалы X_i, $i=\overline{1,m}$, так, что $[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^{m}X_i$, и вычислим $\mathcal{F}(X_i)$, $i=\overline{1,m}$.

При этом возможны случаи:

1) если $\mathcal{F}(X_j)\not\ni 0$, то на отрезке X_j не имеется вещественного корня уравнения (5.1), X_j исключается из рассмотрения;

2) если $\mathcal{F}(X_k)\ni 0$, то отрезок X_k может содержать в себе вещественный корень уравнения (5.1);

3) если $\mathcal{F}(X_{k-1})\gtrless 0$, а $\mathcal{F}(X_{k+1})\lessgtr 0$, то в силу непрерывности $\mathcal{F}(X)\ni f(x)$, $x\in X$, X_k содержит в себе вещественный корень уравнения (5.1). В этом случае отрезок X_k

в свою очередь можно разбить на части X_{ki}, так, что $X_k = \bigcup_{i=1}^{\ell} X_{ki}$ и, вычисляя $F(X_{ki})$, выделить уже более узкие интервалы, содержащие в себе вещественные корни уравнения (5.I).

На рисунке 7 дана геометрическая иллюстрация третьего случая. Здесь кривая – график функции $f(x)=y$.

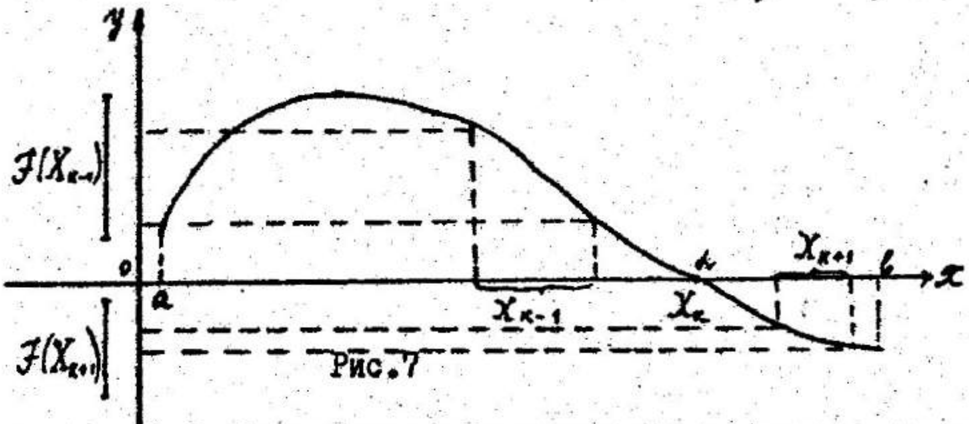


Рис.7

§ 2. Построение интервального варианта метода Ньютона

Для нахождения вещественных корней уравнения (5.I) построим интервальный метод вида (5.6), являющийся интервальным аналогом известного метода Ньютона решения нелинейных численных уравнений.

Пусть X^0 есть некоторый подынтервал интервала $[a,b]$ содержащий в себе вещественный корень α уравнения (5.I). Если x^0 – фиксированная, а x – любая точка из интервала X^0, $x^0, x \in X^0$, то по теореме Лагранжа о конечных приращениях,

$$f(x) = f(x^0) + f'(\xi)(x - x^0), \qquad (5.14)$$

где $\xi \in X^0$.

С использованием равенства (5.I4) уравнение (5.I) принимает вид

$$f(x^0) + f'(\xi)(x - x^0) = 0,$$

или

$$x = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(\xi)}, \qquad (5.15)$$
$$\xi = x^0 + \theta(x - x^0),\ 0 \le \theta \le 1,$$

когда $f'(x) \neq 0$ при $x \in X^0$.

Если $x = \alpha$ есть нуль функции $f(x)$, то из равенства (5.15) получаем:

$$\alpha = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0 + \theta(\alpha - x^0))}. \qquad (5.16)$$

Пусть $\mathcal{F}'(X)$ есть рациональное интервальное расширение функции $f'(x)$, так что $\{f'(x) : x \in X\} \subset \mathcal{F}'(X)$ и $\mathcal{F}'(x) = f'(x)$, $x^0 = m(X^0)$. Тогда из равенства (5.16), используя свойство монотонности интервальной арифметики, получаем:

$$\alpha \in m(X^0) - \frac{f(m(X^0))}{\mathcal{F}'(X^0)}. \qquad (5.17)$$

Введем в рассмотрение интервальную функцию

$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{\mathcal{F}'(X)} \qquad (5.18)$$

и положим

$$\mathcal{N}(X) = N(X) \cap X. \qquad (5.19)$$

Тогда соотношение (5.17) имеет вид $\alpha \in N(X^0)$, а интервал $X^1 = N(X^0) \cap X^0 \equiv \mathcal{N}(X^0)$ будет обладать свойствами: $\alpha \in X^1$ и $X^1 \subset X^0 \subset [a, b]$.

Располагая теперь интервалом $X^1 \ni \alpha$ как исходным, аналогично предыдущему можно получить $X^2 = N(X^1) \cap X^1 \equiv \mathcal{N}(X^1)$, $\alpha \in X^2$, $X^2 \subset X^1 \subset [a, b]$.

В общем случае, если

$$\alpha \in X^n \subset [a, b],$$

то

$$X^{n+1} = N(X^n) \cap X^n \equiv \mathcal{N}(X^n),$$

$$\alpha \in X^{n+1} \subset X^n \subset [a,b] \;, n=0,1,\ldots \quad (5.20)$$

Из соотношений (5.20) следует, что функция $\mathcal{F}(X)$ является интервальным сжатием. При определенных условиях, о которых будет сказано в § 3, функция $\mathcal{F}(X)$ является строгим интервальным сжатием.

В этом случае справедливо равенство $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} X^n$. Запишем расчетные формулы для получения последовательности $\{X^n\}$ в развернутом виде:

$$X^{n+1} = \{m(X^n) - \frac{f(m(X^n))}{F'(X^n)}\} \cap X^n, \quad (5.21)$$

$$X^0 \text{ - задано, } \alpha \in X^n, \; n=0,1,\ldots$$

Пользуясь формулой (5.21) и полагая $\alpha \approx \alpha^n$, получаем:

$$\alpha^n = m(X^n),$$

$$|\alpha - \alpha^n| \leq \frac{1}{2} W(X^n). \quad (5.22)$$

Замечание. Если полином $f(x)$ в уравнении (5.1) имеет интервальные коэффициенты, то вместо формулы (5.21) следует пользоваться формулой

$$X^{n+1} = \{m(X^n) - \frac{\mathcal{F}(m(X^n))}{\mathcal{F}'(X^n)}\} \cap X^n, \quad (5.23)$$

$$X^0 \text{ - задано, } n=0,1,\ldots \; .$$

Здесь
$$\mathcal{F}(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n \ni f(x),$$

если $a_i \in A_i \,, i = \overline{0,n}$.

Формулами (5.21), (5.23) и представляется интервальный вариант метода Ньютона.

Пример I. Найти положительный вещественный корень уравнения $x^2 - 2 = 0$.

Решение. $f(x)=x^2-2$, $f'(x)=2x$, $\mathcal{F}(X)=X^2-2$;

$\mathcal{F}'(X)=2X$, $[a,b]=[0,\infty)$.

Найдем интервал X^0, содержащий в себе искомый корень.

1. Пусть $X_i=[i,i+1]$, $i=0,1,\ldots$, так что $[0,\infty)=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} X_i$.

$$\mathcal{F}(X_1)=\mathcal{F}([0,1])=[0,1]^2-2=[-2,-1]<0;$$

$$\mathcal{F}(X_2)=\mathcal{F}([1,2])=[1,2]^2-2=[-1,2]\ni 0;$$

$$\mathcal{F}(X_3)=\mathcal{F}([2,3])=[2,3]^2-2=[2,7]>0.$$

Следовательно, искомый корень $\alpha\in X_2=[1,2]$.

Положим $X^0=[1,2]$.

2. Формула (5.21) для этого примера имеет вид

$$X^{n+1}=\left\{m(X^n)-\frac{[m(X^n)]^2-2}{2X^n}\right\}\cap X^n,\ n=0,1,\ldots,$$

откуда

$$X^1=\left\{\frac{3}{2}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}{2\cdot[1,2]}\right\}\cap[1,2]=$$

$$=\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]\cap[1,2]=\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]=[1.3710,1.4375];$$

$$X^2=\left\{\frac{45}{32}-\frac{\left(\frac{45}{32}\right)^2-2}{2\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]}\right\}\cap\left[\frac{22}{16},\frac{23}{16}\right]=$$

$$=[1.41406\ldots,1.41441\ldots]$$

и т.д.

Для данного примера последовательность $\{X^n\}$ быстро сходится к точному корню $\alpha=\sqrt{2}$.

Если положить $X^2\subset\tilde{X}^2=[1.4140,1.4145]$ и $\alpha^2=m(\tilde{X}^2)$, то $\alpha^2=1.41425$ и $|\alpha-\alpha^2|\le\frac{1}{2}W(\tilde{X}^2)=0.00025$.

Пример 2. Найти корни уравнения $x^2-c=0$, находящиеся в интервале $[1,2]$, для всех $c\in[2,3]$.

Решение.

Воспользуемся формулой (5.23). Здесь

$$\mathcal{F}(X)=X^2-[2,3], \quad \mathcal{F}'(X)=2X,$$

$$X^0=[1,2],$$

$$X^{n+1}=\left\{m(X^n)-\frac{[m(X^n)]^2-[2,3]}{2X^n}\right\}\cap X^n,$$

$$n=0,1,\dots,$$

откуда $X^1=[1.39,\ 1.76]$.

Итак, на первом приближении имеем $\{x: x^2-c=0,\ c\in[2,3]\}\cap$ $\cap[1,2]=[\sqrt{2},\sqrt{3}]\subset[1.39,\ 1.76]$.

§ 3. Основные леммы и теорема о сходимости метода

Сформулируем в виде лемм основные свойства интервального отображения (5.I8), на котором базируется итерационный метод (5.2I).

ЛЕММА 5.I. Для того, чтобы функция $N(X)$, заданная формулой (5.I8), была определена на интервале X:

I) необходимо, чтобы интервал X содержал в себе не более одного вещественного нуля функции $f(x)$, причем этот нуль должен быть простым; 2) достаточно, чтобы $\mathcal{F}'(X)\not\ni 0$.

Доказательство.

I). Предположим, что $f(x)$ определена на интервале $[a,b]$ и $X\subset[a,b]$. Из того, что функция $N(X)$ определена на интервале X, следует, что функция $\mathcal{F}'(X)\not\ni 0$. Но $\mathcal{F}'(X)\supset\{f'(x): x\in X\}$, значит $f'(x)\neq 0$ при всех $x\in X$. Поэтому, если на интервале X имеется вещественный нуль функции $f(x)$, то он должен быть простым. Кроме того, такой нуль должен быть единственным, так как, если $f(x_1)=f(x_2)=0$, $x_1, x_2\in X$ и $x_1\neq x_2$, то в промежутке между x_1 и x_2 найдется такая точка $\xi\in X$, что $f'(\xi)=0$, а это противоречит условию.

2). Достаточность условия $\mathcal{F}'(X)\not\ni 0$ для существования функции $N(X)$ очевидна.

<u>ЛЕММА 5.2</u>. Если X есть интервал, содержащий в себе единственный простой корень функции $f(x)$, $f(\alpha)=0$, $\alpha\in X$, и функция $N(X)$ определена, то $\alpha\in N(X)$.

Справедливость леммы следует из построения формулы (5.2I) и соотношения (5.I7).

<u>ЛЕММА 5.3</u>. Пусть функция $N(X)$ определена на интервале $X=X^0$. Тогда:

I) или $N(X^0)\cap X^0$ пусто, и X^0 не содержит в себе нуля функции $f(x)$;

2) или $N(X^0)\cap X^0$ есть интервал, который содержит в себе α, $f(\alpha)=0$, если $\alpha\in X^0$.

Данная лемма является следствием леммы 5.2.

<u>ТЕОРЕМА 5.I.</u> Пусть уравнение (5.I) имеет в некотором интервале $X\subset[a,b]$ простой вещественный корень α и $\mathcal{F}'(X)\not\ni 0$. Тогда существует интервал X^0, $\alpha\in X^0\subset X$ и вещественное число $\varkappa>0$, такие, что для последовательности $\{X^n\}$, определяемой формулой (5.2I), справедлива оценка

$$W(X^{n+1})\le\varkappa[W(X^n)]^2,\ n=0,1,\dots, \qquad (5.24)$$

выражающая квадратическую сходимость интервального варианта метода Ньютона (5.2I).

Доказательство этой теоремы, основанное на использовании лемм 5.I - 5.3, можно найти в работе R.E. Moore [I6].

Покажем теперь, что при выполнении условий теоремы 5.I интервальная функция $\mathcal{F}(X)$, определяемая равенством (5.I9), при $X\subset X^0$ является строгим интервальным сжатием.

Действительно, полагая интервал X^0 удовлетворяющим условию $\varkappa W(X^0)=q<1$ (теоремой 5.I предусматривается, что X^0 достаточно узкий интервал), из оценки (5.24) с учетом формулы (5.20) для всех $X^n \subset X^0$ получаем

$$W(\mathcal{F}(X^n)) = W(X^{n+1}) \leq q W(X^n), \quad (5.25)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad 0 < q < 1.$$

Согласно определению 5.2 условие (5.25) означает, что функция $\mathcal{F}(X)$ на $X^n \subset X^0$ есть строгое интервальное сжатие.

Следовательно, выбирая для метода (5.20) достаточно узкий интервал $X^0 \ni \alpha$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} X^n = \alpha$, $f(\alpha) = 0$. (см. (5.6)-(5.9)).

Интервальный вариант метода Ньютона можно распространить и на системы уравнений вида (5.1), (5.2) [15].

Глава VI
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Постановка задачи. Интервальный вариант метода механических квадратур первого порядка точности

Рассмотрим определенный интеграл

$$\mathcal{J} = \int_a^b f(x)\,dx, \quad (6.1)$$

где рациональная функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, b]$.

Поставим задачу о нахождении интервала $\mathcal{J}_n$, содержащего в себе значение интеграла $\mathcal{J}$. Если такой интервал будет найден, то в качестве приближенного значения $\mathcal{J}$ можно взять $\tilde{\mathcal{J}} = m(\mathcal{J}_n)$, причем будет справедлива оценка $|\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}}| \leq \frac{1}{2} W(\mathcal{J}_n)$.

Для решения указанной задачи нанесем на отрезок $[a, b]$ равномерную сетку, состоящую из узлов $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, где $h > 0$ - шаг сетки, и представим интеграл (6.1) в виде суммы интегралов по каждому частичному отрезку:

$$X_j = [x_{j-1}, x_j], \quad j=\overline{1,n}.$$
$$\mathcal{Y} = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx.$$

Используя теперь теорему о среднем для интеграла $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$, имеем:

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \quad x_{j-1} \le \xi_j \le x_j. \qquad (6.2)$$

Пусть $\mathcal{F}(X)$ есть интервальное расширение функции $f(x)$, т.е. такая рациональная интервально-значная функция, определенная при всех $X \subset [a,b]$, что $\mathcal{F}(X) \supset \{f(x) : x \in X\}$ и $\mathcal{F}(x) = f(x)$.

Известно, что рациональные интервальные функции удовлетворяют своего рода условию Липшица, т.е. существует такая вещественная постоянная $\mathcal{L} > 0$, что при любых $X \subset [a,b]$ выполняется соотношение

$$W(\mathcal{F}(X)) \le \mathcal{L} W(X). \qquad (6.3)$$

Используя свойство монотонности интервальных арифметических операций, из равенства (6.2) получим:

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \in \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}(X_j) . W(X_j).$$

Таким образом, полагая

$$\mathcal{Y}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}(X_j) W(X_j), \qquad (6.4)$$

имеем включение $\mathcal{Y} = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathcal{Y}_n$.

Формула (6.4) представляет собой интервальный вариант метода механических квадратур для интеграла (6.1).

Оценим $W(\mathcal{Y}_n)$, используя условие (6.3) и справедливое для любых интервалов $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ соотношение

$$W(\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) = W(\mathcal{Y}) + W(\mathcal{Z}):$$

$$W(\mathcal{Y}_n) = \sum_{j=1}^{n} W(X_j) W(\mathcal{F}(X_j)) \le \mathcal{L} \sum_{j=1}^{n} W(X_j) W(X_j). \qquad (6.5)$$

Учитывая, что $W(X_j)=h$, а $\sum_{j=1}^{n} h = b-a$, из неравенства (6.5) получим:

$$W(\mathcal{I}_n) \le \mathcal{L}(b-a)h$$

и, значит,

$$W(\mathcal{I}_n) = O(h). \tag{6.6}$$

Оценка (6.6) свидетельствует о том, что формула (6.4) имеет первый порядок точности относительно h. В связи с этим можно говорить, что формула (6.4) является для интеграла (6.I) интервальным аналогом метода механических квадратур первого порядка точности.

Полагая $\tilde{\mathcal{I}} = m(\mathcal{I}_n)$, имеем оценку

$$|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}| \le \frac{1}{2} W(\mathcal{I}_n). \tag{6.7}$$

Из оценки (7.6) следует, что за счет выбора достаточно большого номера n (достаточно малого h) можно с помощью формулы (6.4) вычислить приближенное значение интеграла (6.I) с любой наперед заданной степенью точности.

Пример I. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Решение. Заметим, что

$$\mathcal{I} = \ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}. \tag{6.8}$$

Поэтому решение сводится к построению для интеграла (6.8) интервала вида (6.4) и выбора в нем такого n, чтобы выполнялось неравенство

$$|\mathcal{I} - m(\mathcal{I}_n)| \le 0.01 \tag{6.9}$$

В этом случае $\mathcal{F}(X) = 1/X$, $a=1$, $b=2$, $h=1/n$,

$$X_j = [1+(j-1)h,\ 1+jh] = \left[\frac{n+(j-1)}{n},\ \frac{n+j}{n}\right].$$

Следовательно, $\mathcal{F}(X_j) = \dfrac{1}{X_j} = \left[\dfrac{n}{n+j},\ \dfrac{n}{n+j-1}\right]$

и формула (6.4) принимает вид

$$\mathcal{I}_n = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j},\ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j-1}\right]. \tag{6.10}$$

Из формулы (6.IO) имеем
$$W(\mathcal{J}_n)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n+j-1}-\frac{1}{n+j}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}.$$

Удовлетворим неравенство (6.9), используя оценку (6.7):
$$\tfrac{1}{2}W(\mathcal{J}_n)=\frac{1}{4n}\le 10^{-2}$$, откуда $n\geqslant 25$.

Итак, полагая, например, $n=25$, имеем
$$\mathcal{J}_{25}=\left[\sum_{j=1}^{25}\frac{1}{25+j},\ \sum_{j=1}^{25}\frac{1}{25+j-1}\right]\ni \ln 2,$$

и $|\ln 2 - m(\mathcal{J}_{25})|\le 0.01.$

Замечание. Если в интеграле (6.I) функция $f(x)$ не является рациональной, то для построения формулы (6.4) можно использовать один из следующих приемов:

I) вместо интервального расширения $\mathcal{F}(X)$ использовать при возможности какое-либо областное расширение $\mathcal{F}_0(X)$ для $f(x)$;

2) предварительно "рационализировать" интеграл (6.I), т.е. соответствующей подстановкой привести к виду $\int_c^d \psi(x)\,dx$, где $\psi(x)$ – рациональная функция.

Например,
$$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=\left\{\begin{array}{l} x+1=t^2,\ dx=2t\,dt\\ x=0\Rightarrow t=1;\ x=3\Rightarrow t=2\end{array}\right\}=$$
$$=\int_1^2\frac{2\,dt}{t}\equiv\int_1^2\frac{2\,dx}{x}.$$

§ 2. Понятие интервального интеграла.

Свойство монотонности интервальных интегралов

Формула (6.4) ввиду низкого порядка точности имеет незначительную практическую ценность, поэтому в дальнейшем будут построены интервальные варианты формул механических квадратур высших порядков точности.

Формулу (6.4) используем сейчас как базу для введения понятия интервального интеграла.

Пусть $f(x)$ - интервально-значная функция вещественного аргумента $x \in [a,b]$. Предположим, что эта функция рациональна, определена и непрерывна на интервале $[a,b]$. Введем понятие определенного интеграла на интервале $[a,b]$ от этой функции $f(x)$

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.11}$$

Эквивалентными являются следующие три формы определения интеграла (6.11).

<u>Определение 6.1.</u> Пусть интервальные коэффициенты $[C_i]$, $i=\overline{1,l}$ функции $f(x)$ образуют интервальный вектор $[C]=([C_1],\ldots,[C_l])$, а $C=(C_1,\ldots,C_l)$ есть вещественный вектор, такой, что $C_i \in [C_i]$, $i=\overline{1,l}$.

Например, $f(x)=[1,2]x^2+[-1,4]$, $x \in [0,1]$. Интервальный вектор $[C]$ имеет вид $[C]=([1,2],[-1,4])$, а вещественный вектор $C \in [C]$, например, такой $C=(1.5,1)$. Если в выражении $f(x)$ заменить интервальные коэффициенты $[C_i]$ на вещественные C_i, $i=\overline{1,l}$, то получается вещественно-значная функция $f_C(x)$, такая, что $f_C(x) \in f(x)$ при всех значениях $C \in [C]$.

Интеграл $\int_a^b f_C(x)\,dx$ есть обычный определенный интеграл. Интервальный интеграл (6.11) определим равенством

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \left\{ \int_a^b f_C(x)\,dx : C \in [C] \right\}. \tag{6.12}$$

<u>Определение 6.2.</u> Если в равенстве (6.11) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то можно указать такие две функции $f^{(1)}(x)$ и $f^{(2)}(x)$ вещественного аргумента, что

$$f^{(1)}(x) \le f_C(x) \le f^{(2)}(x) \tag{6.13}$$

при всех значениях $x \in [a,b]$ и $c \in [c]$.

Отсюда следует, что функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = [f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)]$, $x \in [a,b]$.

Из неравенств (6.13) имеем:

$$\int_a^b f^{(1)}(x)dx \le \int_a^b f_c(x)dx \le \int_a^b f^{(2)}(x)dx, \quad x \in [a,b], \ c \in [c]. \tag{6.14}$$

С учетом неравенств (6.14) равенству (6.12) можно придать вид

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \left[\int_a^b f^{(1)}(x)dx, \int_a^b f^{(2)}(x)dx\right]. \tag{6.15}$$

Формула (6.15) позволяет свести вычисление интервального интеграла к вычислению определенных интегралов от вещественнозначных функций.

Пример 2. Вычислить интервальный интеграл

$$\mathcal{Y} = \int_{[0,1]} \{[1,2]x^2 + [-1,4]\} dx.$$

Здесь $f(x) = [1,2]x^2 + [-1,4] = [x^2 - 1, 2x^2 + 4]$.

Следовательно, $f^{(1)}(x) = x^2 - 1$ и $f^{(2)}(x) = 2x^2 + 4$.

Поэтому, согласно формуле (6.15), имеем

$$\mathcal{Y} = \left[\int_0^1 (x^2-1)dx, \int_0^1 (2x^2+4)dx\right] = \left[-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right],$$

причем $W(\mathcal{Y}) = \frac{16}{3}$.

Замечание. Так как не для всякой функции $f(x)$ легко выделить функции $f^{(1)}(x)$ и $f^{(2)}(x)$, то полезно иметь некоторый способ, позволяющий находить приближенное значение интервального интеграла. В связи с этим приведем еще одну форму определения интервального интеграла.

<u>Определение 6.3.</u> Для функций $f_c(x)$ и $f(x)$ построим интервальные расширения $\mathcal{F}_c(X)$ и $\mathcal{F}(X)$, соответственно, и заметим, что

$$\mathcal{F}_c(X) \subset \mathcal{F}(X) \tag{6.16}$$

для всех значений $c \in [c]$

Используя формулу (6.4), имеем

$$\int_a^b f_c(x)\,dx \in \sum_{j=1}^{n} F_c(X_j)W(X_j). \qquad (6.17)$$

Из соотношений (6.16) и (6.17) следуют включения:

$$\int_a^b f_c(x)\,dx \in \sum_{j=1}^{n} F_c(X_j)W(X_j) \subset \sum_{j=1}^{n} F(X_j)W(X_j), \qquad (6.18)$$

справедливые для всех значений $c \in [c]$.

На основании определения 6.1, равенства (6.12) и включений (6.16) получаем

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx \subset \sum_{j=1}^{n} F(X_j)W(X_j), \qquad (6.19)$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$, а, значит,

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} F(X_j)W(X_j). \qquad (6.20)$$

Равенство (6.20) и есть третья форма определения интервального интеграла (6.11).

Формула (6.19) дает возможность приближенно вычислять интервальные интегралы.

Пример 3. С помощью формулы (6.19) вычислить интервал, содержащий в себе интеграл $\mathcal{Y} = \int\limits_{[0,1]} \{[1,2]x^2 + [-1,4]\}\,dx$.

Решение. Полагаем $x_j = jh$, где $h = \frac{1}{n}$, так что $X_j = [x_{j-1}, x_j] = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ а, $F(X_j) =$
$= [1,2]X_j^2 + [-1,4] = [1,2]\cdot[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]^2 + [-1,4] =$
$= [\frac{(j-1)^2}{n^2} - 1,\ \frac{2j^2}{n^2} + 4]$.

Используя формулу (6.19), имеем

$$\mathcal{Y} = \int\limits_{[0,1]} \{[1,2]x^2 + [-1,4]\}\,dx \subset$$

$$\subset \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\frac{(j-1)^2}{n^2} - 1,\ \frac{2j^2}{n^2} + 4\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^2 - n^2}{n^3},\ \sum_{j=1}^{n} \frac{2j^2 + 4n^2}{n^3}\right] \equiv \mathcal{Y}_n \qquad (6.21)$$

Вычислим $W(\mathcal{J}_n)$,
$$W(\mathcal{J}_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{2j^2+4n^2}{n^3}-\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)^2-n^2}{n^3}.$$

Учитывая, что
$$\sum_{j=1}^{n} j^2=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$
$$\sum_{j=1}^{n}(j-1)^2=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

получаем $$W(\mathcal{J}_n)=\frac{32n^2+9n+1}{6n^2},$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} W(\mathcal{J}_n)=\frac{16}{3}$.

Следовательно, приближенное значение интервального интеграла, даваемое формулой (6.21), при $n\to\infty$ стремится к его точному значению (сравни с примером 2).

Приведем теперь теорему, выражающую свойство монотонности интервальных интегралов.

<u>ТЕОРЕМА 6.1.</u> Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные интервально-значные функции вещественной переменной $x\in[a,b]$, такие, что
$$f(x)\subset\varphi(x) \tag{6.22}$$
при всех значениях $x\in[a,b]$, то
$$\int\limits_{[a,b]} f(x)dx\subset\int\limits_{[a,b]}\varphi(x)dx. \tag{6.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $f(x)=[f^{(1)}(x),f^{(2)}(x)]$ и $\varphi(x)=[\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x)]$. Тогда по условию (6.22) имеем: $\varphi^{(1)}(x)\le f^{(1)}(x)\le f^{(2)}(x)\le\varphi^{(2)}(x)$, $x\in[a,b]$, откуда $\int_a^b\varphi^{(1)}(x)dx\le\int_a^b f^{(1)}(x)dx\le\int_a^b f^{(2)}(x)dx\le\int_a^b\varphi^{(2)}(x)dx$,

а значит, $[\int_a^b f^{(1)}(x)dx,\int_a^b f^{(2)}(x)dx]\subset[\int_a^b\varphi^{(1)}(x)dx,\int_a^b\varphi^{(2)}(x)dx]$

На основании определения 6.2 интервального интеграла, последнее включение равносильно включению (6.23). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $f(x)$ – вещественно-значная функция вещественного аргумента $x \in [a,b]$ и $\mathcal{F}(X)$ – её интервальное расширение. Тогда $\int_a^b f(x)dx \in \int\limits_{[a,b]} \mathcal{F}(X)dx$.

§ 3. Интервальный вариант метода механических квадратур k -го порядка точности

Как и в § I, рассмотрим определенный интеграл $\mathcal{Y}=\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - рациональная, вещественно-значная функция. Представим данный интеграл в виде суммы интегралов по частичным отрезкам $X_j=[x_{j-1}, x_j]$, где $x_j=a+jh$, $j=\overline{0,n}$, $h=\frac{b-a}{n}$:

$$\mathcal{Y}=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx. \tag{6.24}$$

Далее, функцию $f(x)$ при $x \in X_j$ разлагаем по формуле Тейлора в окрестности точки x_{j-1} :

$$f(x)=f(x_{j-1})+\frac{f'(x_{j-1})}{1!}(x-x_{j-1})+\frac{f''(x_{j-1})}{2!}(x-x_{j-1})^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(k-2)}(x_{j-1})}{(k-2)!}(x-x_{j-1})^{k-2}+R_{j-1}^{(k-1)}(x)=$$
$$=\sum_{r=0}^{k-2}\frac{f^{(r)}(x_{j-1})}{r!}(x-x_{j-1})^r+R_{j-1}^{(k-1)}(x), \tag{6.25}$$

где
$$R_{j-1}^{(k-1)}(x)=\frac{f^{(k-1)}(\xi_{j-1})}{(k-1)!}(x-x_{j-1})^{k-1},$$
$$\xi_{j-1}\in[x_{j-1}, x]\subset X_j. \tag{6.26}$$

С использованием представления (6.25) равенство (6.24) принимает вид

$$\mathcal{I}=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\sum_{r=0}^{k-2}\frac{f^{(r)}(x_{j-1})}{r!}(x-x_{j-1})^r dx+\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\ell_{j-1}^{(k-1)}(x)dx,$$

или

$$\mathcal{I}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{k-2}\frac{f^{(r)}(x_{j-1})}{(r+1)!}[W(X_j)]^{r+1}+\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\ell_{j-1}^{(k-1)}(x)dx. \quad (6.27)$$

Пусть $\mathcal{F}^{(k-1)}(X)$ есть интервальное расширение функции $f^{(k-1)}(x)$. Тогда $f^{(k-1)}(\xi_{j-1})\in\mathcal{F}^{(k-1)}(X_j)$, так как $\xi_{j-1}\in X_j$ для каждого $j=\overline{1,n}$.

Отсюда, на основании следствия из теоремы 6.I, имеем

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j}\ell_{j-1}^{(k-1)}(x)dx\in\int_{X_j}\frac{\mathcal{F}^{(k-1)}(X_j)}{(k-1)!}(x-x_{j-1})^{k-1}dx=$$

$$=\frac{\mathcal{F}^{(k-1)}(X_j)}{k!}[W(X_j)]^k.$$

Положим

$$\mathcal{I}_{nk}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{k-2}\frac{f^{(r)}(x_{j-1})}{(r+1)!}[W(X_j)]^{r+1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathcal{F}^{(k-1)}(X_j)}{k!}[W(X_j)]^k. \quad (6.28)$$

Сравнивая равенства (6.27) и (6.28), получим

$$\mathcal{I}\in\mathcal{I}_{nk}\,. \quad (6.29)$$

Оценим теперь $W(\mathcal{I}_{nk})$ в предположении, что рациональная интервальная функция $\mathcal{F}^{(k-1)}(X)$ определена и непрерывна при $X\subset[a,b]$, а значит, удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица:

$$W(\mathcal{F}^{(k-1)}(X))\le\mathcal{L}_k W(X),\ X\subset[a,b],\ \mathcal{L}_k>0. \quad (6.30)$$

Из соотношений (6.28), (6.30) получаем

$$W(\mathcal{I}_{nk})=\sum_{j=1}^{n}\frac{[W(X_j)]^k}{k!}W(\mathcal{F}^{(k-1)}(X_j))\le$$

$$\le\mathcal{L}_k\sum_{j=1}^{n}\frac{[W(X_j)]^k}{k!}W(X_j)\le$$

$$\le \frac{L_k}{k!}(b-a)\max_{1\le j\le n}[W(X_j)]^k.$$

Так как у нас $W(X_j)\le C_k h^k$, то последнему неравенству можно придать вид $W(J_{nk})\le C_k h^k$, где $C_k=\frac{L_k}{(k+1)!}$.
Следовательно,

$$W(J_{nk})=O(h^k), \tag{6.31}$$

поэтому формула (6.28) представляет собой интервальный вариант метода механических квадратур k-го порядка точности.

Заметим, что формула (6.4) с оценкой (6.6) является частным случаем формулы (6.28), когда $k=1$.

Полагая в формуле (6.28), например, $k=2$, получим метод второго порядка точности

$$J_{n2}=\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})W(X_j)+\sum_{j=1}^{n}\frac{F^{(1)}(X_j)}{2!}[W(X_j)]^2. \tag{6.32}$$

Пример 4. Используя формулу (6.32), вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Решение. $J=\ln 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$, здесь $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $F^{(1)}(X)=-1/X^2$. Полагая $x_j=1+\frac{j}{n}$, $X_j=[x_{j-1},x_j]$ по формуле (6.32) имеем:

$$J_{n2}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(j-1)}{n}}-\frac{1}{2n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{j}{n})^2},\frac{1}{(1+\frac{(j-1)}{n})^2}\right],$$

откуда

$$W(J_{n2})=\frac{1}{2n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{j-1}{n})^2}-\frac{1}{(1+\frac{j}{n})^2}\right]=\frac{3}{8n^2}. \tag{6.33}$$

Выберем n таким, чтобы выполнялось условие $|J-m(J_{n2})|\le\frac{1}{2}W(J_{n2})\le 0.01$, которое с учетом формулы (6.33) принимает вид $\frac{3}{8n^2}\le 0.02$.
Отсюда $n\ge\frac{5}{2}\sqrt{3}$. Полагая, например, $n=\frac{5}{2}\sqrt{4}=5$, имеем

$$J_{5,2}=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\frac{1}{1+\frac{j-1}{5}}-\frac{1}{50}\sum_{j=1}^{5}\left[\frac{1}{(1+\frac{j}{5})^2},\frac{1}{(1+\frac{(j-1)}{5})^2}\right]\ni\ln 2,$$

$$\ln 2 \approx m(J_{5,2}),$$
$$|\ln 2 - m(J_{5,2})| \le 0.01.$$

(сравни с результатом примера I.).

§ 4. Интервальный аналог квадратурной формулы трапеций

Квадратурная формула, которая была использована нами для построения её интервального варианта (6.28), предусматривает вычисление всех производных от подынтегральной функции до ($k-2$)-го порядка, не считая производную, входящую в остаточный член.

Однако существует много других квадратурных формул, которые используют лишь значения самой подынтегральной функции и имеют остаточный член в так называемой "среднезначной" форме.

Заменяя производную определенного порядка, входящую в остаточный член формулы, её интервальным расширением, можно получать и другие, отличные от формулы (6.28), интервальные аналоги формул механических квадратур различных порядков точности.

В качестве примера мы рассмотрим метод построения интервального аналога квадратурной формулы трапеций для интеграла $J=\int_a^b f(x)dx$, при тех же условиях, наложенных на функцию $f(x)$, что и в предыдущих случаях.

Квадратурная формула трапеций для данного интеграла имеет вид

$$J=\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]+R(h), \quad (6.34)$$

где $x_i = a+ih,\ i=\overline{0,n},\ x_0=a,\ x_n=b,\ h=\frac{b-a}{n}$

и

$$R(h)=\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi),\quad \xi\in[a,b].$$

Пусть $\mathcal{F}''(X)$ есть интервальное расширение для функции $f''(x)$. Тогда $R(h)=\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\in\frac{b-a}{12}h^2\mathcal{F}''([a,b])=[R(h)]$.

Полагая

$$\mathcal{J}_n=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right]+\frac{b-a}{12}h^2\mathcal{F}''([a,b]), \quad (6.35)$$

имеем включение $\mathcal{Y}\in\mathcal{J}_n$.

Формула (6.35) и есть интервальный аналог квадратурной формулы (6.34).

Покажем теперь, что формула (6.35) есть метод второго порядка точности.

Как и ранее, предположим, что функция $\mathcal{F}''(X)$ удовлетворяет условию Липшица вида (6.30) с константой $\mathcal{L}_2$.

Отправляясь от формулы (6.35), получаем

$$W(\mathcal{J}_n)=\frac{b-a}{12}h^2 W(\mathcal{F}''([a,b]))\le\frac{(b-a)^2}{12}\mathcal{L}_2 h^2$$

или, полагая $C_1=\frac{(b-a)^2}{12}\mathcal{L}_2$, $W(\mathcal{J}_n)\le C_1 h^2$, а значит, $W(\mathcal{J}_n)=O(h^2)$.

Упражнение. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon=0.01$, используя формулу (6.35).

Глава УП
НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ I. Постановка задачи. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений

Дано уравнение

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^u K(x,s,y(s))ds, \quad (7.I)$$

где $f(x)$ и ядро $K(x,s,y(s))$ - известные функции, λ -численный параметр, $y(x)$ - искомая функция, $u\in[x,b]$, $x\in[a,b]$.

При $u=x$ уравнение (7.1) является нелинейным уравнением типа Вольтерра второго рода, при $u=b$ -уравнением типа Фредгольма второго рода.

Ставится задача - используя аппарат интервальной математики, получить приближенное решение уравнения (7.1) с гарантированной оценкой погрешности.

Мы остановимся на двух вариантах решения этой задачи.

В основу первого положен известный итерационный метод получения приближенного решения в аналитической форме, в основу второго - метод механических квадратур, позволяющий получать численное решение рассматриваемого уравнения.

Известно, что если функции $f(x)$ и $K(x,s,y(s))$ определены и непрерывны соответственно в областях $[a,b]$, $\Pi=\{a\le x\le b,$ $a\le s\le b,\ c\le y\le d\}$ и ядро $K(x,s,y(s))$ удовлетворяет в области Π по переменной y условию Липшица с константой L, то уравнение (7.1) имеет единственное непрерывное решение $y(x)$ на отрезке $[a,b]$, которое можно представить в виде предела последовательности $\{y^{(n)}(x)\}$, где $y^{(n)}(x)=$ $=f(x)+\int_a^u K(x,s,y^{(n-1)}(s))ds$, $n=1,2,\ldots$, $y^{(0)}(x)=\frac{c+d}{2}$, сходящейся в общем случае при условии $L(b-a)<1$, так что $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y^{(n)}(x)$, $x\in[a,b]$.

При построении интервальных методов для определенности остановимся на уравнениях типа Вольтерра.

Учитывая, что в таких уравнениях параметр μ не играет существенной роли, рассмотрим непосредственно уравнения вида

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,s,y(s))ds,\quad x\in[a,b]. \tag{7.2}$$

§ 2. Построение интервального аналога метода последовательных приближений для уравнений типа Вольтерра. Сходимость метода

Уравнение (7.2) рассматриваем при тех же условиях, наложенных на известные функции $f(x)$ и $k(x,s,y)$, что и уравнение (7.1).

Пусть $\mathcal{K}(X,S,Y)$ есть интервальное (в общем случае областное) расширение функции $k(x,s,y)$, так что при всяких $X,S\subset[a,b], Y\subset[c,d]$ имеет место включение $\{k(x,s,y): x\in X, s\in S, y\in Y\}\subset \mathcal{K}(X,S,Y)$.

Предположим, что в области определения функция $\mathcal{K}(X,S,Y)$ удовлетворяет по аргументу Y условию Липшица с постоянной L_1:

$$W(\mathcal{K}(X,S,Y))\leq L_1 W(X) \qquad (7.3)$$

и обладает по этому же аргументу свойством монотонности:

$$\mathcal{K}(X,S,Y)\subset\mathcal{K}(X,S,Z), \qquad (7.4)$$

если $Y\subset Z$. Имея в виду, что $\{y(x): x\in[a,b]\}\subset[c,d]$, положим

$$Y^{(0)}(x)\equiv[c,d] \qquad (7.5)$$

и, используя понятие интервального интеграла, определим последовательность $\{Y^{(n)}(x)\}$ интервально-значных функций следующим равенством:

$$Y^{(n)}(x)=f(x)+\int_{[a,x]}\mathcal{K}(x,s,Y^{(n-1)}(s))ds,\ n=1,2,\dots \qquad (7.6)$$

ТЕОРЕМА 7.1. Решение уравнения (7.2) при всех значениях $x\in[a,b]$ и всех $n=1,2,\dots$ удовлетворяет условию

$$y(x)\in Y^{(n)}(x) \quad . \qquad (7.7)$$

Доказательство. Применим метод полной математической индукции. $y(x)\in Y^{(0)}(x)\equiv[c,d]$ – по условию.

Предположим, что при некотором фиксированном $n>1$ $y(x)\in Y^{(n-1)}(x),\ x\in[a,b]$. Тогда, используя следствие из свойства монотонности интервальных интегралов, получим:

$$y(x)=f(x)+\int_a^x k(x,s,y(s))ds\in$$
$$\in f(x)+\int_a^x K(x,s,Y^{(n-1)}(s))ds\equiv Y^{(n)}(x),$$

т.е. $y(x)\in Y^{(n)}(x),\ x\in[a,b]$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.2. При выполнении условия

$$Y^{(1)}(x)\subset Y^{(0)}(x),\ x\in[a,b], \tag{7.8}$$

последовательность $\{Y^{(n)}(x)\}$, определяемая равенствами (7.5), (7.6), является вложенной, т.е.

$$Y^{(n)}(x)\subset Y^{(n-1)}(x),\ x\in[a,b],\ n=1,2,\ldots \tag{7.9}$$

Доказательство. Пусть условие (7.8) имеет место. Предположим, что при некотором фиксированном $n=k$

$$Y^{(k)}(x)\subset Y^{(k-1)}(x);\ x\in[a,b]. \tag{7.10}$$

Используя включения (7.10), (7.4) и свойство монотонности интервальных интегралов, из равенства (7.6) получаем

$$Y^{(k+1)}(x)=f(x)+\int_{[a,x]} K(x,s,Y^{(k)}(s))ds\subset$$
$$\subset f(x)+\int_{[a,x]} K(x,s,Y^{(k-1)}(s))ds\equiv Y^{(k)}(x),$$

т.е.

$$Y^{(k+1)}(x)\subset Y^{(k)}(x),\ x\in[a,b].$$

Отсюда следует, согласно принципу математической индукции, что включение (7.9) справедливо при всех натуральных значениях n. Теорема доказана.

Выясним условия, при которых соотношение (7.8) имеет место. Полагая в формуле (7.6) $n=1$, используя включение

(7.4) и свойство монотонности интервальных интегралов, имеем:

$$Y^{(1)}(x)=f(x)+\int_a^x \mathcal{K}(X,S,Y^{(0)}(s))ds=$$
$$=f(x)+\int_a^x \mathcal{K}(X,S,[c,d])ds\subset \bar{f}([a,b])+\int_a^x \mathcal{K}([a,b],[a,b],[c,d])ds\subset$$
$$\subset \bar{f}([a,b])+[0,b-a]\mathcal{K}([a,b],[a,b],[c,d])\ ,\quad x\in[a,b],$$

где $\bar{f}([a,b])=\{f(x): a\le x\le b\}$.

При заданном интервале $[c,d]$ подберем правый конец b в интервале $[a,b]$ так, чтобы выполнялось включение

$$\bar{f}([a,b])+[0,b-a]\mathcal{K}([a,b],[a,b],[c,d])\subset[c,d]. \quad (7.11)$$

При выполнении соотношения (7.11) включение (7.8) заведомо выполняется.

ТЕОРЕМА 7.3.

Последовательность $\{Y^{(n)}(x)\}$, определяемая равенствами (7.5), (7.6), будучи вложенной, является стягивающейся последовательностью при выполнении условия

$$\mathcal{L}_1(b-a)<1. \quad (7.12)$$

Доказательство. Используя равенство (7.6), определение 6.2 интервального интеграла и условие (7.3), находим:

$$\begin{aligned} W(Y^{(n)}(x)) &= W\Big(\int_{[a,x]}\mathcal{K}(X,S,Y^{(n-1)}(s))ds\Big)=\\ &=\int_{[a,x]}W(\mathcal{K}(X,S,Y^{(n-1)}(s)))ds\le\\ &\le \mathcal{L}_1(b-a)\max_{s\in[a,b]}W(Y^{(n-1)}(s)),\quad x\in[a,b]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Оценка (7.13) справедлива для любых значений $x\in[a,b]$, в частности, и для тех, при которых левая часть неравенства принимает наибольшее значение. Положим $W_n=\max_{x\in[a,b]}W(Y^{(n)}(x))$. Тогда из оценки (7.13) получаем $W_n\le\mathcal{L}_1(b-a)W_{n-1},\ n=1,2,\ldots$, откуда

$$W_n\le\mathcal{L}_1(b-a)W_{n-1}\le\mathcal{L}_1(b-a)\{\mathcal{L}_1(b-a)W_{n-2}\}=$$

$$= \{L_1(b-a)\}^2 W_{n-2} \le \{L_1(b-a)\}^3 W_{n-3} \le \ldots \le$$
$$\le \{L_1(b-a)\}^n W_0,$$

т.е.

$$W_n \le \{L_1(b-a)\}^n (d-c), \quad n=1,2,\ldots \qquad (7.14)$$

Считая выполненным условие (7.12), из оценки (7.14) получаем $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = (d-c)\lim\limits_{n\to\infty}\{<1\}^n = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} W(Y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (7.15)$$

при любом $x \in [a,b]$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. При выполнении условия (7.12) последовательность интервальных функций $\{Y^{(n)}(x)\}$, определяемых равенством (7.6), сходится к вещественной функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (7.2).

Действительно, справедливость данного утверждения есть следствие соотношений (7.7) и (7.15).

Метод, определяемый равенствами (7.5), (7.6) и включением (7.7) представляет собой интервальный вариант метода последовательных приближений для решения интегральных уравнений вида (7.2).

Ограничиваясь в равенстве (7.6) достаточно большим номером $n=q$, можно положить $y(x) \approx m(Y^{(q)}(x)) \equiv \tilde{y}(x)$, тогда $|y(x) - \tilde{y}(x)| \le \frac{1}{2} W(Y^{(q)}(x)),\ x\in[a,b]$.

§ 3. Численная реализация интервального метода последовательных приближений

При практической реализации формулы (7.6) возможно, что интеграл, стоящий в правой части этой формулы, или трудно вычислить точно, или вовсе невозможно, поэтому возникает проблема численной реализации формулы (7.6). Рассмотрим один из методов решения этой проблемы, в основу которого положено определение 6.3 интервального интеграла.

Отрезок $[a,b]$ разделим на p равных интервалов $X_i=[x_{i-1},x_i]$ точками $x_i=a+ih$, $i=\overline{0,p}$, $h=\frac{b-a}{p}$, так что $[a,b]=\bigcup_{i=1}^{p} X_i$ (рис.8).

Применяя формуду (7.6) для $x\in X_i$, $i=\overline{1,p}$,

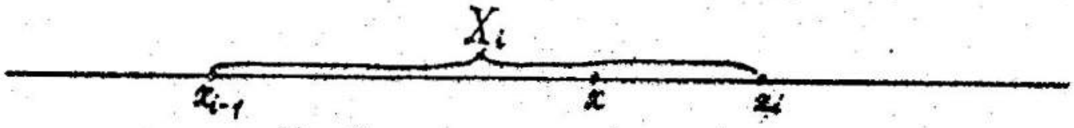


Рис.8

запишем её в виде

$$Y^{(n)}(x)=f(x)+\int_a^{x_{i-1}}\mathcal{K}(x,s,Y^{(n-1)}(s))ds+ \\ +\int_{x_{i-1}}^{x}\mathcal{K}(x,s,Y^{(n-1)}(s))ds\ ,\ y(x)\in Y^{(n)}(x)\ . \tag{7.16}$$

Используя интервальное (областное) расширение $\mathcal{F}(X)$ для функции $f(x)$, определение 6.3 интервального интеграла, включение (7.4) и свойство монотонности интервальных интегралов, из формулы (7.16) получим

$$y(x)\in Y^{(n)}(x)\subset\mathcal{F}(X_i)+ \\ +\sum_{j=1}^{i-1}\mathcal{K}(X_i,X_j,Y^{(n-1)}(X_j))W(X_j)+ \\ +\mathcal{K}(X_i,X_i,Y^{(n-1)}(X_i))(x-x_{i-1})\ .$$

Учитывая, что при $x\in X_i$, $(x-x_{i-1})\in[0,W(X_i)]=[0,h]$, и полагая $Y^{(n-1)}(X_j)=Y_j^{(n-1)}$, из предыдущего соотношения получаем $y(x)\in Y^{(n)}(x)\subset Y_i^{(n)}$, $x\in X_i$, где

$$Y_i^{(n)}=\mathcal{F}(X_i)+h\sum_{j=1}^{i-1}\mathcal{K}(X_i,X_j,Y_j^{(n-1)})+ \\ +[0,h]\,\mathcal{K}(X_i,X_i,Y_i^{(n-1)})\ ,\ i=\overline{1,p}\ . \tag{7.17}$$

Формула (7.17), позволяющая получать интервалы $Y_i^{(n)}$, содержащие в себе $Y^{(n)}(x)$ при $x\in X_i$, $i=\overline{1,p}$, представляет собой алгоритм для численной реализации метода (7.6).

Замечание. Так как $y(x_i)\in Y_i^{(n)}$ и $y(x_i)\in Y_{i+1}^{(n)}$, то $y(x_i)\in Y_i^{(n)}\cap Y_{i+1}^{(n)}$. Положим

$$\mathcal{U}_i = Y_i^{(n)}\cap Y_{i+1}^{(n)},$$

$$y_i = m(\mathcal{U}_i)\approx y(x_i), \qquad (7.18)$$

тогда справедлива оценка

$$|y_i - y(x_i)|\le \frac{1}{2}W(\mathcal{U}_i)\ ,\ i=\overline{1,p}. \qquad (7.19)$$

Формулы (7.17) и (7.18) дают возможность получить численное решение интегрального уравнения (7.2) с гарантированной оценкой погрешности вида (7.19).

Пример I. Используя формулы (7.5) и (7.6), найти приближенное решение уравнения

$$y(x)=1+\int_0^x y^2(s)\,ds\ ,\ x\in[0,b]\ . \qquad (7.20)$$

Решение. Для данного случая формула (7.6) имеет вид

$$Y^{(n)}(x)=1+\int_0^x\left\{Y^{(n-1)}(s)\right\}^2 ds\ ,\ n=1,2,\ldots \qquad (7.21)$$

Положим, например, $[c,d]=[0,2]\ni y(0)=1$.

Используя соотношение (7.11), найдем соответствующее значение b: $1+[0,b][0,2]^2\subset[0,2]$,
$1+[0,4b]\subset[0,2]$; $[1,1+4b]\subset[0,2]$,

откуда $1+4b\le 2$, $b\le\frac{1}{4}$.

Можно показать, что на отрезке $[0,\frac{1}{4}]$ выполняется условие (7.12) сходимости метода (7.21).

Полагаем теперь $Y^{(0)}(x)\equiv[0,2]$ и по формуле (7.21) получаем

$$Y^{(1)}(x)=1+\int_0^x[0,2]^2 ds=$$

$$=1+[0,4]x=[1,1+4x],$$

$$Y^{(2)}(x)=1+\int_0^x[1,1+4s]^2 ds=$$

$$= 1 + \left[\int_0^x ds, \int_0^x (1+4s)^2 ds \right] =$$

$$= \left[1+x, 1+x+4x^2 + \frac{16}{3}x^3 \right].$$

Если ограничиться $Y^{(2)}(x) \ni y(x)$, то, полагая $\tilde{y}(x) = m(Y^{(2)}(x))$, получим $\tilde{y}(x) = 1+x+2x^2+8/3\,x^3$;

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \le \frac{1}{2} W(Y^{(2)}(x)) = 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 \le \frac{1}{6},$$

$$x \in [0, \tfrac{1}{4}].$$

Замечание. Точное решение уравнения (7.20) есть

$$y(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .$$

Можно убедиться, что для всех значений $x \in [0, \frac{1}{4}]$ интервалы $Y^{(1)}(x)$, $Y^{(2)}(x)$ содержат в себе точное решение $y(x)$ (рис.9).

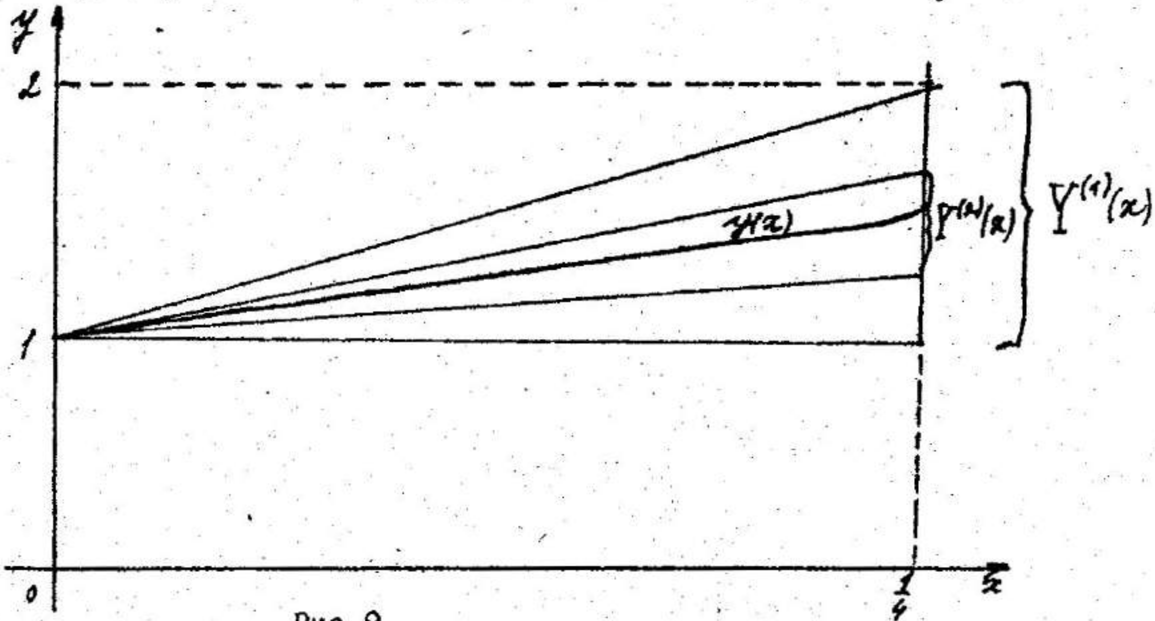


Рис.9

Пример 2. Найти численное решение уравнения (7.20), используя формулы (7.I7) и (7.I8).

Решение. Как и в предыдущем случае, полагаем $[c,d] = [0,2]$, $x \in [0, \frac{1}{4}]$. Тогда $h = \frac{1}{4p}$ и расчетная формула (7.I7) для нашего примера принимает вид

$$Y_i^{(n)} = 1 + \frac{1}{4p}\sum_{j=1}^{i-1}\{Y_j^{(n-1)}\}^2 + [0, \frac{1}{4p}]\{Y_i^{(n-1)}\}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, p},$$

причем $Y_i^{(0)} \equiv [0,2]$, отсюда

$$Y_i^{(1)} = 1 + \frac{1}{4p}\sum_{j=1}^{i-1}[0,2]^2 + [0, \frac{1}{4p}][0,2]^2 =$$

$$= [1, 1 + \frac{i}{p}], \quad i = \overline{1,p};$$

$$Y_i^{(2)} = 1 + \frac{1}{4p}\sum_{j=1}^{i-1}[1, 1 + \frac{j}{p}]^2 + [1, 1 + \frac{i}{p}]^2 \cdot [0, \frac{1}{4p}] =$$

$$= [1 + \frac{i-1}{4p}, 1 + \frac{i}{p} + \frac{i(i+1)}{4p^2} + \frac{i(i+1)(2i+1)}{24p^3}], \quad i = \overline{1,p}.$$

В частности, если положить $p = 3$, то

$$Y_1^{(1)} = [1, \tfrac{4}{3}], \; Y_2^{(1)} = [1, \tfrac{5}{3}], \; Y_3^{(1)} = [1, 2] \quad \text{и}$$

$$\mathcal{U}_1 = Y_1^{(1)} \cap Y_2^{(1)} = [1, \tfrac{4}{3}], \; \mathcal{U}_2 = Y_2^{(1)} \cap Y_3^{(1)} = [1, \tfrac{5}{3}],$$

отсюда

$$y_1 = m(\mathcal{U}_1) = \frac{7}{6}, \quad y_2 = m(\mathcal{U}_2) = \frac{4}{3};$$

$$|y_1 - y(\tfrac{1}{12})| \le \tfrac{1}{2} W(\mathcal{U}_1) = \tfrac{1}{6};$$

$$|y_2 - y(\tfrac{2}{12})| \le \tfrac{1}{2} W(\mathcal{U}_2) = \tfrac{1}{3}.$$

§ 4. Построение интервального аналога метода механических квадратур, использующего квадратную формулу левых прямоугольников

В § 3 численное решение интегрального уравнения с гарантированной оценкой погрешности было получено на основе аналитического метода последовательных приближений.

Если исходить из известных формул механических квадратур с учетом их остаточных членов, то можно непосредственно строить своего рода численные интервальные методы для решения уравнений вида (7.I).

В качестве примера рассмотрим такой подход применительно к уравнению (7.2), отправляясь от простейшей квадратурной формулы - формулы левых прямоугольников, которая имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) + \frac{(b-a)h}{2} f'(\xi), \qquad (7.22)$$

где $h = \frac{(b-a)}{n}$, $\xi \in [a,b]$.

Нанесем на отрезок $[a, b]$ сетку $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots$ с некоторым постоянным шагом h, и запишем уравнение (7.2) в точке x_i этой сетки:

$$y(x_i) = f(x_i) + \int_a^{x_i} k(x_i, s, y(s))\,ds. \qquad (7.23)$$

Применяя к интегралу, входящему в уравнение (7.23), формулу (7.22), имеем

$$\begin{aligned} y(x_i) &= f(x_i) + h\sum_{j=0}^{i-1} k(x_i, x_j, y(x_j)) + \\ &+ \frac{(x-a)}{2} h \frac{d}{ds} k(x_i, \xi_i, y(\xi_i)), \\ &\xi_i \in [a, x_i]. \end{aligned} \qquad (7.24)$$

Введем теперь в рассмотрение интервальные (областные) расширения $\mathcal{K}(X, S, Y)$ и $\mathcal{K}_1^{(1)}(X, S, Y)$ соответственно для функций $k(x, s, y)$ и $\frac{dk}{ds}(x, s, y)$, обладающие свойством монотонности, и предположим известными интервалы $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{i-1}$, такие, что $y(x_j) \in Y_j$, $j = \overline{0, (i-1)}$.

Тогда, полагая

$$\begin{aligned} Y_i &= f(x_i) + h\sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{K}(x_i, x_j, Y_j) + \\ &+ \frac{h(x_i - a)}{2} \mathcal{K}_1^{(1)}(x_i, [a, x_i], [c, d]), \end{aligned} \qquad (7.25)$$

из формулы (7.24) получим

$$y(x_i) \in Y_i \quad, i = \overline{1, p}, \qquad (7.26)$$

где $x_p \le b$, если уравнение (7.2) решается на отрезке $[a, b]$.

Чтобы начать счет по формулам (7.25) и (7.26), надо располагать, как исходным, интервалом $Y_0 \ni y(x_0) = y(a)$.

Так как $y(a) = f(a)$, что следует из уравнения (7.2), то полагаем

$$Y_0 = f(a). \qquad (7.27)$$

Формулы (7.25)-(7.27) представляют собой интервальный аналог метода левых прямоугольников численного решения уравнения (7.2). Вычислив $Y_i,\ i=\overline{1,p}$, как и ранее, можно положить $y_i = m(Y_i) \approx y(x_i)$, так что справедлива будет оценка $|y_i - y(x_i)| \le \frac{1}{2} W(Y_i),\ i=\overline{1,p}$.

§ 5. Сходимость метода прямоугольников

Определение 7.I. Интервальный метод (7.25)-(7.27) решения уравнения (7.2) будем называть сходящимся, если

$$\lim_{h\to 0} W(Y_i) = 0. \qquad (7.28)$$

Очевидно, что условие (7.28) влечет за собой равенство $\lim_{h\to 0} Y_i = y(x_i)$, справедливое для всякого произвольного, но фиксированного $x_i = x \in [a,b]$.

ТЕОРЕМА 7.4. Для сходимости метода (7.25)-(7.27) достаточно выполнения условия

$$\mathcal{L}_1(b-a) < 1, \qquad (7.29)$$

где $\mathcal{L}_1$ - постоянная Липшица для функции $\mathcal{K}(X,S,Y)$.

Доказательство. Предположим, что функции $\mathcal{K}(X,S,Y)$ и $\mathcal{K}_1^{(1)}(X,S,Y)$ удовлетворяют в области определения интервальному условию Липшица по аргументу Y соответственно с постоянными $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Исходя из формулы (7.25), получаем:

$$W(Y_i) \le h\mathcal{L}_1 \sum_{j=0}^{i-1} W(Y_j) + (x_i - a)\frac{h}{2} W([c,d])\mathcal{L}_2 .$$

Или, полагая $W_j = \max_{0\le k\le j} W(Y_k)$, и учитывая, что $ih = x_i - a$ а $x_i - a \le b-a$, $i=\overline{1,p}$, получим

$$W_i \le ih\mathcal{L}_1 W_{i-1} + \frac{h}{2}(b-a)\mathcal{L}_2(d-c) \le$$
$$\le \mathcal{L}_1(b-a)W_{i-1} + \frac{h}{2}(b-a)\mathcal{L}_2(d-c). \qquad (7.30)$$

Вводя обозначения $\alpha = \mathcal{L}_1(b-a)$, $\beta = \frac{h}{2}(b-a)\mathcal{L}_2(d-c)$, и применяя последовательно неравенство (7.30), имеем:

$$W_i \le \alpha W_{i-1} + \beta \le \alpha(\alpha W_{i-2} + \beta) + \beta = \alpha^2 W_{i-2} + \beta(1+\alpha) \le$$
$$\le \ldots \le \alpha^i W_0 + \beta(1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1}) =$$
$$= \beta(1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1}),$$

так как $W_0 = W(Y_0) = W(y(a)) = 0$.

Согласно условию (7.29) теоремы $0 < \alpha < 1$, а значит $1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1} < \frac{1}{1-\alpha}$.

Таким образом, для $W(Y_i)$ получена оценка

$$W(Y_i) < \frac{\beta}{1-\alpha} = C_1 h, \quad i = \overline{1,p}, \qquad (7.31)$$

где $$C_1 = \frac{\mathcal{L}_2(b-a)(d-c)}{2(1-\mathcal{L}_1(b-a))}$$ –

постоянная, не зависящая ни от h, ни от i. Из оценки (7.31) следует равенство (7.28), и теорема доказана.

Замечание. Согласно оценке (7.31) $W(Y_i) = O(h)$ при $ih = const$. Поэтому метод (7.25)-(7.27) можно рассматривать как интервальный метод первого порядка точности относительно шага h, что соответствует порядку точности квадратурной формулы прямоугольников.

Используя квадратурные формулы высших порядков точности, можно для уравнения (7.2) построить интервальные методы порядка точности выше первого.

Пример. Найти численное решение уравнения (7.20), используя формулы (7.25)-(7.27).

Решение. Полагаем $[a,b]=[0,\frac{1}{4}]$, $[c,d]=[0,2]$, $h=\frac{1}{10}$. В данном случае $\mathcal{K}(X,S,Y)=Y^2$, $\mathcal{K}_1^{(1)}(X,S,Y)=2Y^3$, и формула (7.25) принимает вид

$$Y_i = 1+\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{i-1} Y_j^2 + \frac{i}{10^2}[0,8] =$$

$$= 1+\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{i-1} Y_j^2 + [0,\frac{2i}{25}], \quad i=1,2,\ldots \qquad (7.32)$$

Согласно условию (7.27),

$$Y_0 = 1. \qquad (7.33)$$

Используя условие (7.33), из формулы (7.32) получаем

$$Y_1 = 1+\frac{1}{10}+[0,\frac{2}{25}] = [1.100,\ 1.180],$$

$$Y_2 = 1+\frac{1}{10}\cdot(1+[1.100,\ 1.180]^2)+[0,\frac{4}{25}] =$$

$$=[1.221,\ 1.399].$$

Отсюда

$$y_1 = m(Y_1) = 1.140,$$

$$y_2 = m(Y_2) = 1.310,$$

$$|y_1 - y(\tfrac{1}{10})| \le \tfrac{1}{2} W(Y_1) = 0.040,$$

$$|y_2 - y(\tfrac{2}{10})| \le \tfrac{1}{2} W(Y_2) = 0.089.$$

Глава VIII

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ I. Постановка задачи. Сведение к интегральным уравнениям типа Вольтерра

Рассмотрим некоторые подходы к построению интервальных методов решения дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad x\in[a,b], \qquad (8.1)$$

с начальным условием $y(a)=y_0$, (8.2)

где функция $f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до требуемого порядка в области
$$G=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

Предполагается, что в области G решение $y(x)$ задачи (8.I), (8.2) существует и единственно.

В общем случае под $y(x)$ можно понимать неизвестную вектор-функцию $y(x)=\{y^{(1)}(x),\dots,y^{(m)}(x)\}$.

Тогда $f(x,y)=\{f^{(1)}(x,y),\dots,f^{(m)}(x,y)\}$ — заданная вектор-функция и уравнение (8.I) представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно скалярных функций $y^{(j)}(x),\ j=\overline{1,m}$.

Заметим, что к системам уравнений вида (8.I) приводится уравнения и системы уравнений высших порядков, разрешенных относительно старших производных. Поэтому класс рассматриваемых нами задач довольно широк.

Для простоты выкладок уравнение (8.I) будем рассматривать как скалярное уравнение. Полученные для него результаты распространяются и на системы таких уравнений.

Итак, надо найти приближенное численное решение задачи (8.I), (8.2) с гарантированной оценкой погрешности методами интервального анализа.

Один из подходов к решению этой задачи основан на сведении уравнения (8.I) при условии (8.2) к интегральному уравнению типа Вольтерра. Подставляя в уравнение (8.I) его решение $y(x)$ и интегрируя полученное тождество в пределах от a до текущего $x\in[a,b]$, получим:
$$y(x)=y_0+\int_a^x f(s,y(s))\,ds,\quad x\in[a,b]. \qquad (8.3)$$

Уравнение (8.3) можно решать интервальными методами, изложенными в гл. УП.

Теперь перейдем к построению некоторых численных интервальных методов, предназначенных для непосредственного решения задачи (8.I), (8.2).

Пусть функция $\mathcal{F}(X,Y)$ есть областное (интервальное) расширение функции $f(x,y)$, так что $\bar{f}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ при всех $X \subset [a,b]$, $Y \subset [c,d]$.

Предположим, что $\mathcal{F}(X,Y)$ как интервально-значная функция, обладает свойством монотонности относительно знака включения и удовлетворяет в области $\oint_{[a,b]} \otimes \oint_{[c,d]}$ условию Липшица по второму аргументу:

$$W(\mathcal{F}(X,Y)) \leq \mathcal{L} W(Y) . \tag{8.4}$$

Пусть $y_0 \in [c,d]$. Тогда существует такое вещественное число b, что имеет место включение

$$y_0 + [0, b-a] \mathcal{F}([a,b],[c,d]) \subset [c,d] . \tag{8.5}$$

Считая правый конец интервала $[a,b]$ в задаче (8.I) выбранным в соответствии с условием (8.5), нанесем на этот отрезок сетку $x_i = a + ih$, $i = 1,2,\ldots,N_h$, где N_h такое, что $x_{N_h} \leq b$, $h = x_i - x_{i-1} = W(X_i)$, $X_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Поставим задачу: определить достаточно узкие интервалы Y_i, такие, что искомое решение $y(x)$ уравнения (8.I) в сеточной точке x_i удовлетворяет условию $y(x_i) \in Y_i$, $i = 1,2,\ldots,N_h$.

Если такие интервалы будут найдены, то полагая $y(x_i) \approx y_i = m(Y_i)$, будем иметь оценку $|y_i - y(x_i)| \leq \frac{1}{2} W(Y_i)$, $i = \overline{1, N_h}$.

§ 2. Построение интервального аналога метода Эйлера

Пусть в уравнение (8.I) подставлено точное его решение $y(x)$. Тогда, интегрируя почленно по x полученное тождество в пределах от x_{i-1} до x_i и применяя к интегралу в правой части теорему о "среднем", получим:

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y(x))dx =$$
$$= y(x_{i-1}) + hf(\xi_i, y(\xi_i)),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i=\overline{1, N_h}. \quad (8.6)$$

Применяя к величине $y(\xi_i)$ формулу (8.6), имеем:

$$y(\xi_i) = y(x_{i-1}) + (\xi_i - x_{i-1})f(\eta_i, y(\eta_i)), \quad (8.7)$$

где $\eta_i \in [x_{i-1}, \xi_i] \subset [x_{i-1}, x_i],\ i=\overline{1, N_h}$.

Предположим теперь, что Y_{i-1} есть такой интервал, для которого

$$y(x_{i-1}) \in Y_{i-1} \subset [c, d]. \quad (8.8)$$

Тогда, полагая

$$S_{i-1} = Y_{i-1} + [0, h]F(X_i, [c, d]) \subset [c, d] \quad (8.9)$$

и учитывая, что $(\xi_i - x_{i-1}) \subset [0, h]$, $\eta_i \in X_i$, $y(\eta_i) \in [c, d]$, из формулы (8.7) получаем

$$y(\xi_i) \in S_{i-1}. \quad (8.10)$$

Используя включения (8.10) и (8.9), из равенства (8.6) имеем:

$$y(x_i) \in Y_{i-1} + hF(X_i, S_{i-1}) \subset [c, d]. \quad (8.11)$$

Положим

$$Y_i = Y_{i-1} + hF(X_i, S_{i-1}). \quad (8.12)$$

Тогда, в соответствии с включением (8.11),

$$y(x_i) \in Y_i \subset [c, d]. \quad (8.13)$$

Итак, если имеет место условие (8.8), то имеет место и включение (8.13).

Согласно методу математической индукции включение (8.13) будет справедливо при любых значениях $i = \overline{1, N_h}$, если оно справедливо при $i = 1$.

Положим в соотношения (8.9) и (8.12) $i = 1$ и примем

$$Y_0 = y_0 \quad \text{, получим} \quad S_0 = y_0 + [0,h]\,\mathcal{F}(X_1, [c,d]),$$
$$Y_1 = y_0 + h\,\mathcal{F}(X_1, S_0).$$

Так как при условии (8.5) $S_0 \subset [c,d]$, а отсюда $Y_1 \subset S_0 \subset [c,d]$, но $y(x_1) = y_0 + hf(\xi_1, y(\xi_1)) \in$ $\in y_0 + h\,\mathcal{F}(X_1, S_0) = Y_1$.

Следовательно, условие (8.5) влечет за собой включение $y(x_1) \in Y_1 \subset [c,d]$, а значит и включение (8.13) при $i = \overline{1, N_h}$.

Замечание. В качестве начального интервала Y_0 можно брать любой достаточно узкий интервал, такой, что

$$y_0 \in Y_0 \subset [c,d]. \tag{8.14}$$

Тогда условие (8.5) надо заменить условием вида

$$Y_0 + [0, b-a]\,\mathcal{F}([a,b],[c,d]) \subset [c,d]. \tag{8.15}$$

Таким образом, получаем совокупность расчетных формул:

$$\begin{aligned} &Y_0 \ni y_0 \quad (\,Y_0 = y_0), \\ &S_{i-1} = Y_{i-1} + [0,h]\,\mathcal{F}(X_i, [c,d]), \\ &Y_i = Y_{i-1} + h\,\mathcal{F}(X_i, S_{i-1}), \\ &y(x_i) \in Y_i\,, \quad i = \overline{1, N_h}\,, \end{aligned} \tag{8.16}$$

представляющих собой интервальный аналог известного метода Эйлера численного решения задачи (8.1), (8.2).

Полученный нами результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

<u>ТЕОРЕМА 8.1</u>. Пусть для задачи (8.1), (8.2) выполнены условия (8.14), (8.15). Тогда интервалы S_{i-1} и Y_i, представленные равенствами (8.16), определены для всех i, таких, что $x_i \in [a,b]$, и имеет место включение $y(x_i) \in Y_i$.

§ 3. Сходимость интервального решения к точному решению дифференциальной задачи

Определение 8.I. Если при $Y_0 = y_0$ имеет место равенство

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ (ih=const)}} W(Y_i) = 0,$$

то будем говорить, что интервальный метод (8.I6) сходится; при этом, если $W(Y_i) = O(h^k)$, то число k будем называть порядком скорости сходимости, а также порядком точности данного метода.

Ввиду того, что $y(x_i) \in Y_i$, сходимость метода влечет за собой равенство $\lim Y_i = y(x)$, справедливое для всякого произвольного, но фиксированного $x \equiv x_i \in [a,b]$.

Таким образом, если метод (8.I6) сходится, то порождаемое им интервальное решение Y_i, $i=\overline{1,N_h}$ задачи (8.I), (8.2) сходится к её точному решению $y(x)$, $x \in [a,b]$.

ТЕОРЕМА 8.2. При условиях теоремы 8.I для интервалов Y_i, определяемых формулами (8.I6), справедлива оценка

$$W(Y_i) = O(h), \quad i=\overline{1,N_h}, \tag{8.I7}$$

из которой следует сходимость метода (8.I6) со скоростью $k=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем справедливые для любых $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{J}$ соотношения: $W(\mathcal{I}+\mathcal{J}) = W(\mathcal{I}) + W(\mathcal{J})$, $W(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}) \le W(\mathcal{I})\cdot|\mathcal{J}| + |\mathcal{I}|\cdot W(\mathcal{J})$, условие Липшица (8.4), оценку $|\mathcal{F}(X_i,[c,d])| \le |\mathcal{F}([a,b],[c,d])| \le N$, $N>0$ - $const$, имеющую место ввиду ограниченности функции $\mathcal{F}(X,Y)$ на $\mathcal{J}_{[a,b]} \otimes \mathcal{J}_{[c,d]}$, и вложение $\mathcal{F}(X,Y) \subset \mathcal{F}([a,b],[c,d])$, $X \subset [a,b]$, $Y \subset [c,d]$.

Предполагая условия теоремы 8.I выполненными, из соотношений (8.I6) получаем

$$W(S_{i-1}) \le W(Y_{i-1}) + hN + hL(d-c),$$

$$W(Y_i) \le W(Y_{i-1}) + hL\,W(S_{i-1}) \le$$

$$\le (1+hL)\,W(Y_{i-1}) + h^2 L(N + L(d-c)).$$

Полагая для краткости записей $W_i = W(Y_i)$, $\alpha = 1 + hL$, $\beta = L(N + L(d-c))$, имеем:

$$W_i \le \alpha W_{i-1} + h^2\beta \quad, i = \overline{1, N_h} \quad . \tag{8.18}$$

Выражая последующие оценки вида (8.18) через предыдущие, получаем

$$W_i \le \alpha(\alpha W_{i-2} + h^2\beta) + h^2\beta =$$

$$= \alpha^2 W_{i-2} + h^2\beta(1+\alpha) \le$$

$$\le \alpha^3 W_{i-3} + h^2\beta(1+\alpha+\alpha^2) \le \ldots \le$$

$$\le \alpha^i W_0 + h^2\beta(1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1}) =$$

$$= \alpha^i W_0 + h^2\beta\,\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1},$$

или заменив α и β их значениями:

$$W_i \le (1+h\alpha)^i W_0 + h\beta\,\frac{(1+hL)^i - 1}{L}, \quad i = \overline{1, N_h}. \tag{8.19}$$

Следует учесть, что для любого i такого, что $x_i \in [a,b]$, справедливо неравенство

$$(1+hL)^i \le e^{ihL} = e^{(x_i - a)L} \le e^{(b-a)L} = C_1,$$

$$C_1 > 1 - const.$$

Тогда из оценки (8.19 имеем

$$W_i \le C_1 W_0 + h\beta\,\frac{C_1 - 1}{L}, \quad i = \overline{1, N_h}. \tag{8.20}$$

Полагая в соотношениях (8.16) $Y_0 = y_0$, а значит $W_0 = W(Y_0) = W([y_0, y_0]) = 0$ и, вводя обозначение $\beta\,\frac{C_1 - 1}{L} = C$, окончательно получаем $W_i = W(Y_i) \le Ch$, $i = \overline{1, N_h}$, где $C > 0$ – постоянная, не зависящая ни от h, ни от i. Таким образом, $W_i = O(h)$, $i = \overline{1, N_h}$, теорема доказана.

Замечание. Если Y_0 – невырожденный интервал, такой, что $y_0 \in Y_0 \subset [c,d]$, то справедлива оценка (8.20), из которой следует сходимость Y_i, $i=\overline{1,N_h}$, к некоторому функциональному интервалу $Y(x)$, представляющему решение уравнения (8.I) с интервальным начальным условием $Y_0 \ni y(a)$.

Пример. Используя формулы (8.I6), найти численное решение задачи

$$y' = \frac{y}{1+x}, \quad x \in [0,b], \qquad y(0) = 1, \tag{8.21}$$

оценить погрешность приближенного решения.

Решение.

I) Положим $F(X,Y) = \frac{Y}{1+X}$, $Y_0 = y_0 = 1$ и в качестве интервала $[c,d] \supset \{y(x) : x \in [0,b]\}$ возьмем интервал $[0,2] \ni y(0) = 1$.

Найдем теперь b из условия (8.5), которое для данного примера принимает вид $1+[0,b]\frac{[0,2]}{1+[0,b]} \subset [0,2]$, или $[1, 1+2b] \subset [0,2]$.

Отсюда, относительно b должно выполняться неравенство $1+2b \le 2$, а значит, $b \le \frac{1}{2}$.

Таким образом, полагаем $[a,b] = [0,b] = [0,\frac{1}{2}]$.

Пусть h, например, $h = \frac{1}{10}$. Тогда

$$x_i = \frac{i}{10},\ i=\overline{1,5},\ (x_0 = 0,\ x_5 = \tfrac{1}{2} = b),\ X_i = \left[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}\right].$$

2) Запишем расчетные формулы (8.I6):

$$\begin{aligned} &Y_0 = 1, \\ &S_{i-1} = Y_{i-1} + \left[0, \tfrac{1}{10}\right]\frac{[0,2]}{1+\left[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}\right]}, \\ &Y_i = Y_{i-1} + \frac{1}{10}\,\frac{S_{i-1}}{1+\left[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}\right]}, \quad y(x_i) \in Y_i,\ i=\overline{1,5}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Полагая в формулах (8.22) $i=1$, получим :

$$S_0 = 1+\left[0, \frac{1}{10}\right]\frac{[0,2]}{1+\left[0,\frac{1}{10}\right]} = \left[1, \frac{12}{10}\right],$$

$$Y_1 = 1+\frac{1}{10}\,\frac{\left[1,\frac{2}{10}\right]}{1+\left[0,\frac{1}{10}\right]} = \left[\frac{12}{11}, \frac{112}{100}\right],$$

откуда

$$y\left(\frac{1}{10}\right) \approx y_1 = m(Y_1) = m\left(\left[\frac{12}{11}, \frac{112}{100}\right]\right) \approx 1.050$$

и

$$\left|y_1 - y\left(\frac{1}{10}\right)\right| \le \frac{1}{2}W(Y_1) = \frac{1}{2}W\left(\left[\frac{12}{11}, \frac{112}{100}\right]\right) < 0.030.$$

Положим теперь в формулах (8.22) $i=2$, получим

$$S_1 = Y_1 + \left[0, \frac{1}{10}\right]\frac{[0,2]}{1+\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right]} =$$

$$= \left[\frac{12}{11}, \frac{112}{100}\right] + \frac{\left[0,\frac{2}{10}\right]}{\left[\frac{11}{10}, \frac{12}{10}\right]} = \left[\frac{1200}{1100}, \frac{1432}{1100}\right],$$

$$Y_2 = Y_1 + \frac{1}{10}\cdot\frac{S_1}{1+\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right]} =$$

$$= \left[\frac{12}{11}, \frac{112}{100}\right] + \frac{\left[\frac{1200}{11000}, \frac{1432}{11000}\right]}{\left[\frac{11}{10}, \frac{12}{10}\right]} = \left[\frac{13000}{11000}, \frac{14984}{12100}\right] \subset$$

$$\subset [1.181, 1.239].$$

Если вести счет с точностью до третьего десятичного знака после запятой, то можно принять $Y_2 = [1.181, 1.239]$.

Тогда $y\left(\frac{2}{10}\right) \approx y_2 = m(Y_2) = m([1.181, 1.239]) = 1.210$,

и $\left|y_2 - y\left(\frac{2}{10}\right)\right| \le \frac{1}{2}W(Y_2) = \frac{1}{2}W([1.181, 1.239]) = 0.029$.

Далее, полагая в формулах (8.22) $i = 3, 4, 5$, аналогично предыдущему можно найти $y_3,\ y_4,\ y_5$ и соответствующие им оценки погрешности.

§ 4. Распространение метода Эйлера на системы дифференциальных уравнений. Сведение "нерациональных" дифференциальных уравнений к системам "рациональных уравнений

Допустим теперь, что уравнение (8.I) представляет собой векторную форму записи следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dy^{(1)}}{dx} = f^{(1)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy^{(m)}}{dx} = f^{(m)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}), \\ &x \in [a, b], \end{aligned} \tag{8.23}$$

где
$$y = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}\},$$
$$f(x,y) = \{f^{(1)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}), \ldots, f^{(m)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)})\}.$$

Начальные условия (8.2) при этом примут вид

$$y^{(j)}(a) = y_0^{(j)}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{8.24}$$

Пусть $F^{(j)}(X, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)})$ есть интервальные (областные) расширения соответственно функций $f^{(j)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)})$, $[c^{(j)}, d^{(j)}] \supset \{y^{(j)}(x) : x \in [a, b]\}$.

Тогда, вводя в рассмотрение интервальные векторы:

$$\delta_{i-1} = \{\delta_{i-1}^{(1)}, \ldots, \delta_{i-1}^{(m)}\},$$
$$Y_i = \{Y_i^{(1)}, \ldots, Y_i^{(m)}\},$$
$$F(X,Y) = \{F^{(1)}(X, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)}), \ldots, F^{(m)}(X, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)})\},$$

$$[c,d]=\{[c^{(1)},d^{(1)}],\ldots,[c^{(m)},d^{(m)}]\},$$

расчетным формулам (8.I6) можно придать вид

$$
\begin{aligned}
&Y_0^{(j)} \ni y_0^{(j)} \quad (Y_0^{(j)}=y_0^{(j)}),\\
&S_{i-1}^{(k)} = Y_{i-1}^{(k)} + [0,h]\mathcal{F}^{(k)}(X_i,[c^{(1)},d^{(1)}],\ldots,[c^{(m)},d^{(m)}]),\\
&k=\overline{1,m};\\
&Y_i^{(j)} = Y_{i-1}^{(j)} + h\,\mathcal{F}^{(j)}(X_i, S_{i-1}^{(1)},\ldots,S_{i-1}^{(m)}),\\
&y^{(j)}(x_i)\in Y_i^{(j)}, \quad j=\overline{1,m}, \quad i=\overline{1,N_h}.
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

Предполагается, что $(y_0^{(1)},\ldots,y_0^{(m)})\in[c^{(1)},d^{(1)}]\otimes\ldots\otimes[c^{(m)},d^{(m)}]$ и условие (8.5) выполняется покомпонентно.

Заметим теперь, что если в уравнении (8.I) функция $f(x,y)$ является рациональной относительно своих аргументов, то $\mathcal{F}(X,Y)$ есть одно из её интервальных расширений. По возможности надо брать то из них, которое ближе к $\bar{f}(X,Y)$.

Если же $f(x,y)$ – нерациональная функция, то под $\mathcal{F}(X,Y)$ понимается каким-либо образом сконструированное областное расширение функции $f(x,y)$, что не всегда просто сделать.

Условимся уравнения вида (8.I) с рациональной правой частью $f(x,y)$ называть р а ц и о н а л ь н ы м и дифференциальными уравнениями. В противном случае будем такие уравнения называть н е р а ц и о н а л ь н ы м и.

Далее на конкретном примере будет показано, что нерациональные дифференциальные уравнения вида (8.I) заменой переменных можно свести к системам вида (8.23) рациональных дифференциальных уравнений.

Используя для решения таких систем формулы (8.25), в качестве $\mathcal{F}^{(i)}(X,Y^{(1)},\ldots,Y^{(m)})$ можно брать интервальные расширения соответствующих рациональных функций

$f^{(j)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)})$, $j = \overline{1,m}$

Пример. Дифференциальное уравнение $y' = e^{x+y}$, $x \in [0, b]$, с начальным условием $y(0) = -1$ свести к системе рациональных уравнений с соответствующими начальными условиями.

Решение. Положим $x + y = u$, а $e^u = z$. Тогда

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^u(1 + y').$$

Но так как $y' = e^u = z$, то относительно новой функции $z = z(x)$ и искомой функции $y = y(x)$ получаем систему

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dx} = z(1+z), \quad x \in [0, b], \\ &\frac{dy}{dx} = z. \end{aligned} \tag{8.26}$$

с рациональными правыми частями.

Так как $z(0) = y'(0) = e^{y(0)} = e^{-1}$, то начальные условия системы (8.26) имеют вид

$$\begin{aligned} &z(0) = e^{-1}, \\ &y(0) = -1. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Итак, исходная "нерациональная" задача приведена к "рациональной" задаче (8.26), (8.27).

§ 5. Интервальный метод k-го порядка точности как обобщение интервального аналога метода Эйлера

Интервальный метод (8.16) является методом первого порядка точности.

Рассмотрим еще методы высших порядков точности, основанные на разложении искомой функции $y(x)$ по формуле Тейлора в правой полуокрестности сеточной точки x_{i-1}. Эти методы отличаются от имеющихся в работе R.E. Moore [16] и являются прямым обобщением метода (8.I6).

Итак, пусть $y(x)$ есть точное решение задачи (8.I), (8.2). При $x \in X_i = [x_{i-1}, x_i]$ по формуле Тейлора имеем

$$y(x) = y(x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{y^{(j)}(x_{i-1})}{j!}(x - x_{i-1})^j + \\ + \frac{y^{(k)}(\xi_i)}{k!}(x - x_{i-1})^k, \qquad (8.28)$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset X_i$.

Предполагая, что $f(x,y)$ является достаточно гладкой функцией в рассматриваемой области G, из уравнения (8.I) находим

$$y^{(j)}(x) = f^{(j-1)}(x,y), \qquad (8.29)$$

где $f^{(j-1)}(x,y)$ есть полная производная от $f(x,y)$ по x $(j-1)$ - го порядка.

Подставляя условие (8.29) в разложение (8.28) и полагая $x = x_i$, получаем:

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j-1)}(x_{i-1}, y(x_{i-1}))}{j!} h^j + \\ + \frac{f^{(k-1)}(\xi_i, y(\xi_i))}{k!} h^k. \qquad (8.30)$$

Предположим, что Y_{i-1} есть такой интервал, для которого $y(x_{i-1}) \in Y_{i-1} \subset [c,d]$. Тогда, точно так же, как в методе Эйлера, можно ввести в рассмотрение интервал

$$S_{i-1} = Y_{i-1} + [0,h] F(X_i, [c,d]) \subset [c,d] \qquad (8.31)$$

такой, что

$$y(\xi_i) \in S_{i-1}. \qquad (8.32)$$

Пусть $F^{(j)}(X,Y)$, $j = \overline{1,k-1}$ есть интервальные (областные) расширения соответственно функций $f^{(j)}(x,y)$, $j = \overline{1,k-1}$, определенные при всех $X \subset [a,b]$ и $Y \subset [c,d]$, обладающие в этой области свойством монотонности и удовлетворяющие по аргументу Y условию Липшица

$$W(\mathcal{F}^{(j)}(X,Y)) \le L_j W(Y), \tag{8.33}$$

$L_j > 0$ – постоянные, $j = \overline{0, k-1}$ $(L_0 = L)$.

Тогда, исходя из соотношений (8.30)–(8.32), имеем включение

$$y(x_i) \in Y_i, \quad . \tag{8.34}$$

где

$$Y_i = Y_{i-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\mathcal{F}^{(j-1)}(x_{i-1}, Y_{i-1})}{j!} h^j + \\ + \frac{\mathcal{F}^{(k-1)}(X_i, S_{i-1})}{k!} h^k. \tag{8.35}$$

Итак, если

$$Y_0 \ni y_0, \tag{8.36}$$

то, полагая в соотношениях (8.3I) и (8.35) последовательно $i = 1, 2, \ldots, N_h$, можно получить интервалы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_h}$, содержащие в себе соответственно $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_{N_h})$.

Объединяя формулы (8.36), (8.3I), (8.35), (8.34), имеем интервальный метод (8.3I)–(8.36) для решения задачи (8.I), (8.2), являющийся обобщением метода (8.I6).

Действительно, при $k = 1$ формулы (8.3I)–(8.36) превращаются в формулы (8.I6).

Покажем теперь, что в общем случае метод (8.3I)–(8.36) имеет k -ый порядок точности.

Используя условие (8.33), из формулы (8.35) получаем

$$W_i \le W_{i-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{L_{j-1} W_{i-1}}{j!} h^j + \frac{L_{k-1} W(S_{i-1})}{k!} h^k.$$

Для ширины S_{i-1} получена ранее оценка вида $W(S_{i-1}) \le W_{i-1} + h(N + L(d-c))$, с учетом этого неравенства имеем

$$W_i \le \Big(1 + h \sum_{j=1}^{k} \frac{L_{j-1}}{j!} h^{j-1}\Big) W_{i-1} +$$

$$+\frac{L_{k-1}}{k!}(N+L(d-c))h^{k+1}.$$

Пусть $h_0>0$ – такое число, что $0<h\le h_0$. Тогда, вводя обозначения:

$$C_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{L_{j-1}}{j!}h_0^{j-1}>0,\quad D_k=\frac{L_{k-1}}{k!}(N+L(d-c))>0,$$

предыдущему неравенству можно придать вид

$$W_i\le(1+hC_k)W_{i-1}+D_k h^{k+1}. \tag{8.37}$$

Полагая в неравенстве (8.37) последовательно $i=1,2,\ldots$ и выражая последующие оценки через предыдущие, получим:

$$W_i\le(1+hC_k)^i W_0+\frac{D_k}{C_k}\left[(1+hC_k)^i-1\right]h^k.$$

Учитывая, что $(1+hC_k)^i\le e^{(b-a)C_k}=B_k>0$, можем лишь усилить предыдущее неравенство:

$$W_i\le B_k W_0+\frac{D_k}{C_k}(B_k-1)h^k=B_k W_0+M_k h^k,\ i=\overline{1,N_h} \tag{8.38}$$

При $Y_0=y_0$, из неравенства (8.38) получаем $W_i\le M_k h^k,\ i=\overline{1,N_h}$, где $M_k>0$ – постоянная для данного k, не зависящая ни от h, ни от i.

Следовательно,

$$W_i=O(h^k), \tag{8.39}$$

т.е. метод (8.31)-(8.36) имеет k-й порядок точности.

Как и метод (8.16), данный метод легко распространяется на системы дифференциальных уравнений вида (8.23).

Заметим, что в общем случае метод (8.31)-(8.36) применим при счете по шагам до тех пор, пока $Y_i\subset[c,d]$. Поэтому используется он чаще всего, как и его вещественный вариант, для нахождения приближений к $y(x)$ в точках, достаточно близких к $x_0=a$.

Пример. **Решить задачу (8.2I)**, применяя метод (8.3I) – (8.36) при $k=2$.

Решение. Используем те же исходные данные, что и при решении примера из § 3. Дополнительно введем в рассмотрение функцию $\mathcal{F}^{(1)}(X,Y)$.

Для данного примера $f(x,y)=\dfrac{y}{1+x}$, отсюда

$$f^{(1)}(x,y)=\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f=\frac{y}{(1+x)^2}-\frac{y}{(1+x)^2}=\frac{y-y}{(1+x)^2}=0 .$$

Положим

$$\mathcal{F}^{(1)}(X,Y)=\frac{Y-Y}{(1+X)^2}\neq 0. \tag{8.40}$$

Формула (8.35) при $k=2$ принимает вид

$$Y_i=Y_{i-1}+\mathcal{F}(x_{i-1},Y_{i-1})h+\frac{1}{2}\mathcal{F}^{(1)}(X_i,S_{i-1})h^2, \tag{8.4I}$$

где

$$\mathcal{F}(x_{i-1},Y_{i-1})=\frac{Y_{i-1}}{1+\frac{i-1}{10}},$$

$$\mathcal{F}^{(1)}(X_i,S_{i-1})=\frac{S_{i-1}-S_{i-1}}{\left(1+\left[\frac{i-1}{10},\frac{i}{10}\right]\right)^2}. \tag{8.42}$$

Используя формулы (8.42), равенства (8.3I), (8.4I), после преобразований получим следующие расчетные формулы:

$$Y_0=1,$$

$$S_{i-1}=Y_{i-1}+\left[0,\frac{2}{9+i}\right],$$

$$Y_i=\frac{10+i}{9+i}Y_{i-1}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(10+i)^2},\frac{1}{(9+i)^2}\right]\times$$

$$\times\left(S_{i-1}-S_{i-1}\right),\quad y(x_i)\in Y_i,\quad i=\overline{1,5}. \tag{8.43}$$

Положим в формулах (8.43) $i=1$, имеем

$$\mathcal{S}_0 = 1+[0, \tfrac{2}{10}] = [1, 1.2],$$

$$Y_1 = \tfrac{11}{10} + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{11^2}, \tfrac{1}{10^2}]([1, 1.2]+[1, 1.2]) = [1.099, 1.101],$$

$$y(\tfrac{1}{10}) \approx y_1 = m(Y_1) = 1.100,$$

$$|y_1 - y(\tfrac{1}{10})| \le \tfrac{1}{2} W(Y_1) = 0.001.$$

Положим теперь в формулах (8.43) $i=2$, получаем

$$\mathcal{S}_1 = [1.099, 1.101] + [0, \tfrac{2}{11}] \subset [1.099, 1.283],$$

$$Y_2 \subset \tfrac{12}{11}[1.099, 1.101] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{12^2}, \tfrac{1}{11^2}][-0.184, 0.184] \subset [1.198, 1.202] = \tilde{Y}_2,$$

$$y(\tfrac{2}{10}) \approx y_2 = m(\tilde{Y}_2) = 1.200,$$

$$|y_2 - y(\tfrac{2}{10})| \le \tfrac{1}{2} W(\tilde{Y}_2) = 0.002.$$

Полагая, далее, в формулах (8.43) $i=3,4,5$, можно получить y_3, y_4, y_5 и соответствующие им оценки погрешности.

Сравнивая результаты примера из § 3 с полученными результатами, убеждаемся, что в последнем случае гарантированные оценки погрешности приближенного решения рассматриваемой задачи значительно меньше.

В заключение данной главы отметим следующее:

I). При построении интервальных методов решения дифференциальной задачи Коши вида (8.I), (8.2) за основу можно брать и другие вещественные приближенные методы.

Интервальные аналоги разностных методов Адамса и типа Адамса, методов Рунге-Кутта можно найти и в других работах [I-6].

2). Аппарат интервальной математики, использованный нами для решения интегральных уравнений и дифференциальных уравнений с начальными условиями, с успехом можно применять и при решении краевых задач для дифференциальных уравнений, а также начальных и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Постановки некоторых из этих задач и возможных подходов к построению их интервальных решений описаны в работах [5, 7, 8, 10, 17, 18].

Использованная литература

1. Домбровская Л.М., Назаренко Т.И., Чистякова О.Г. Интервальные варианты методов типа Адамса решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн.: Методы оптимизации и их приложения. Иркутск, 1979, с. 130-139.
2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Некоторые интервальные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, - В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, т.7, № 6, с. 62-73.
3. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Об интервально-аналитическом методе второго порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Изв. АН УзССР. Сер. физ.мат., 1976, № 3, с. 28-30.
4. Калмыков С.А., Юлдашев З.Х. Об интервальном варианте метода прогонки. - Вопросы вычислительной и прикладной математики, 1977, № 48, с. 63-71.
5. Назаренко Т.И. К интервальным методам численного решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. - В кн.: Численные методы анализа (прикладная математика). Иркутск, 1976, с. 88-96.
6. Назаренко Т.И., Губарева Е.Б. Интервальные варианты методов типа Рунге-Кутта решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн.: Численные методы оптимизации (прикладная математика). Иркутск, 1978, с. 153-160.
7. Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Некоторые эксперименты по приложению интервального анализа к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными

краевыми условиями. В кн.: Численные методы оптимизации (прикладная математика). Иркутск, 1978, с. 161-175.

8. Н а з а р е н к о Т.И., М а р ч е н к о Л.В. Об одном интервальном методе решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. - В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения, Иркутск, 1975, вып.3, с. 152-160.

9. Н а з а р е н к о Т.И., М а р ч е н к о Л.В., Один интервальный метод решения интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма. - В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск, 1976, вып.4, с. 282-291.

10. Н а з а р е н к о Т.И., М а р ч е н к о Л.В., Х и н д а н о в а И.Н. Интервальный аналог метода прогонки численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн.: Численные методы оптимизации и их приложения. Иркутск, 1981, с. 118-139.

11. С а у л ь е в В.К. Основные особенности и тенденции современной прикладной математики. Москва, 1972, 32 с.

12. B A R T H W., N U D I N G E. Optimallösung von Intervalgleichungssystemen.- Computing, 1974, Bd.12, N 2, S.117-125.

13. H A N S O N R I C H A R D J. Automatic error bounds for real roots of polynomials having interval coefficients.- Comput. J., 1970, vol. 13, N 3, p. 284-288.

14. H E B G E N M. Ein Interationsverfahren, welches die optimale Intervall-Einschliessung des Inversen eines M-Matrixintervalls liefert.-Computing, 1974, Bd.12, N 2, S.107-115.

15. M A D S E N K A J. On the solution of nonlinear equation in interval arithmetic.-BIT (Sver.),1973,vol 13, N 4, p.428-433.

16. M O O R E R.E. Interval analysis. Prentice Hall. New-Jersey, 1966, p.180.

17. O L I V E I R A F. A L E I X O . Interval analysis and two-point boundary value problems.-SIAM J.Numer. Anal.,1974, vol. 11, N 2, p. 382-391.

18. O L I V E I R A F. A L E I X O . Interval-extension of quasilinearization method.- Лect.Notes comput.Sci.,1975, vol 29, p. 270-278.

Таисия Ивановна Назаренко, Лариса Васильевна Марченко

Введение в интервальные методы
вычислительной математики

Учебное пособие

Редактор Л.Н.Заступова
Технический редактор Г.А.Иванова
Корректор Е.Л.Сапронова

ИБ № 56. Подписано в печати 22.04.82. НЕ 01642.
Формат 60х84 I/16. Бумага газетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 6,3. Уч.-изд.л. 4,9. Тираж 500 экз.
Заказ 1973С Цена I5 к.

Издательство Иркутского государственного университета,
г.Иркутск, бульвар Гагарина, 36.

Ангарская городская типография, г.Ангарск, ул.Мира, I8.