

ISSN 0013-5380

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1999

10

# Интервальный анализ в задачах теории электрических цепей

КИНШТ Н.В., КАЦ М.А.

Анализируется проблема расчета электрических цепей (ЭЦ) при априорной неопределенности информации об ее параметрах. Рассматриваются возможности применения методов интервального анализа для решения задач теории электрических цепей. Вводится понятие об интервальных вольт-амперных характеристиках элементов ЭЦ. Рассматривается закон Ома в интервальной форме для обобщенной ветви. Показано, что в отличие от классической теории ЭЦ в общем случае в интервальной форме невозможно эквивалентное преобразование источника тока в источник ЭДС. Проведен сравнительный анализ элементарных методов анализа интервальных цепей (ИЦ), дано формальное описание сложной ИЦ и намечены общие принципы итерационного анализа ИЦ. Рассмотрены особенности анализа активных ИЦ, ИЦ в комплексной области и диагностирования характеристик ИЦ. Приведены примеры.

Ключевые слова: электрические цепи, неопределенность информации, интервальный анализ, интервальные цепи

*The problem of the analysis of electrical circuits, in the case of a priori uncertainty of the information about its parameters, is discussed. The possibility of using interval analysis methods to solve problems of electrical circuit theory is considered. The concept of interval voltage-current characteristics of the components of electrical circuits is introduced. Ohm's law in an interval form is considered for a generalized branch. It is shown that, unlike the classical electrical circuit theory, the transformation of a current source into an emf source is, in the general case, impossible in an interval form. A comparative analysis of elementary methods of the analysis of interval circuits is carried out, a formal description of a complex interval circuit is given and general principles of iterative analysis of interval circuits are outlined. The peculiarities of the analysis of active interval circuits are outlined. The peculiarities of the analysis of active interval circuits and interval circuits in the complex region and the specifics of the diagnosis of the characteristics of interval circuits are considered. Some examples are given.*

Key words: electrical circuits, information, uncertainty, interval analysis, interval circuits.

1. Введение. Многие задачи расчета электрических цепей (ЭЦ) характеризуются заданием интервальных значений параметров элементов и режимов работы, обусловленным их естественным разбросом, вариацией в процессе функционирования, погрешностями измерений режимов или другими факторами. В качестве критерия решения таких задач требуется описание пределов вариации искомым характеристик ЭЦ. Поскольку такие задачи часто встречаются на практике, есть все основания обратить на них специальное внимание. Попытки сформулировать общие принципы интервального анализа в терминах теории ЭЦ предпринимались как отечественными исследователями, так и за рубежом [1—5]. Не задаваясь целью проводить подробный критический обзор полученных результатов, отметим лишь, что к настоящему времени отсутствует методология, основанная на постулатах теории ЭЦ и являющаяся органической ее частью.

Обратим внимание лишь на одно достаточно авторитетное зарубежное исследование, претендующее на решение проблемы интервального анализа линейных систем [2—4]. Главным научным результатом данной серии статей является утверждение, что данные расчета режимов на последовательности все более подробных сеток значений интервальных параметров сходятся к некоторым предельно достижимым параметрам ре-

жима со сколь угодно малой ошибкой. После этого исследования работы в области интервального анализа надолго исчезли из поля зрения (например, на 1993 IEEE Int.Symp. on CS [6] не было ни одного доклада по этой теме).

Собственно теория ЭЦ заключена в учете особенностей цепи на уровне идеализированных элементов, обобщенных ветвей, подсхем, многополюсников, преобразований фрагментов ЭЦ с учетом топологии, аппроксимации схемных функций; использование всех этих теоретических построений приводит к повышению эффективности традиционных и созданию новых методов расчета. Поскольку учет возможной вариации параметров ЭЦ носит достаточно общий характер, естественно стремление заложить эту идею в условие задачи исследования ЭЦ на возможно более раннем этапе. Однако здесь остро ощущается недостаток систематичности, так присущей теории ЭЦ в целом.

Следуя традиции теории ЭЦ, представляется логичным рассматривать задачи, начиная с простейших. Известны различные способы учета вариации параметров. Так, если вариации сравнительно малы, то решение задачи естественно производить с помощью методов теории чувствительности. Метод Монте-Карло можно рассматривать как комбинацию упомянутого выше способа расчета характеристик ЭЦ на некоторой

мелкой сетке значений интервально заданных параметров и экономии вычислительных ресурсов за счет анализа, организованного и оцениваемого с помощью некоторых теоретико-вероятностных соображений. Другим формально-математическим подходом является интервальный анализ [7]. В теории диагностики ЭЦ аналогичные задачи решались с помощью формирования системы ограничений и исследования получившейся области возможных решений методами математического программирования [8].

В реализации каждого из подходов есть свои проблемы. Создается впечатление, что разумный метод решения поставленной задачи лежит где-то посередине между простотой и грубостью интервальной арифметики, с одной стороны, и сложностью и подробностью математического программирования — с другой. В настоящей работе ограничимся анализом применимости традиционных методов анализа режимов в преимущественно резистивных ЭЦ (намечая при этом возможные расширения постановок задач) и возможностей их модификации применительно к интервальной постановке.

**2. Интервальные переменные и интервальная арифметика.** Следуя [7], введем (справочно) основные понятия. Пусть имеется некоторая переменная  $X \in [X_\alpha, X_\beta] \equiv \hat{X}$ . Будем называть ее интервальной переменной. Две интервальные переменные считаются равными, если определяющие их интервалы равны (в теоретико-множественном смысле). Для интервальных переменных справедлива интервальная арифметика, обобщающая арифметику вещественных чисел; так, если заданы две интервальные переменные  $\hat{X} = [X_\alpha, X_\beta]$  и  $\hat{Y} = [Y_\alpha, Y_\beta]$ , то результаты арифметических действий над ними могут быть определены:

$$\hat{X} + \hat{Y} = [X_\alpha + Y_\alpha, X_\beta + Y_\beta];$$

$$\hat{X} - \hat{Y} = [X_\alpha - Y_\beta, X_\beta - Y_\alpha] = \hat{X} + [-1, -1] \hat{Y}.$$

Если  $\hat{X} = \hat{Y}$ , то  $\hat{X} - \hat{Y} \neq 0$  (хотя  $0 \in \hat{X} - \hat{Y}$ ); однако в алгебраических преобразованиях следует принимать  $\hat{X} - \hat{X} = 0$ . Далее,

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = [\min(X_\alpha Y_\alpha, X_\alpha Y_\beta, X_\beta Y_\alpha, X_\beta Y_\beta);$$

$$\max(X_\alpha Y_\alpha, X_\alpha Y_\beta, X_\beta Y_\alpha, X_\beta Y_\beta)];$$

$$\hat{X} / \hat{Y} = [X_\alpha, X_\beta] \cdot [1/Y_\beta, 1/Y_\alpha].$$

Ясно, что вычитание не обратимо сложению, деление — умножению; при использовании интервальной арифметики дистрибутивный закон не имеет силы, так что результат вычислений существенно зависит от их порядка и эквивалентным алгебраическим преобразованиям соот-

ветствуют различные результаты вычислений. К примеру,

$$\begin{aligned} \hat{X} - \hat{Y} + \hat{Y} &= [X_\alpha - Y_\beta + Y_\alpha, X_\beta - Y_\alpha + Y_\beta] \supset \\ &\supset \hat{X} - (\hat{Y} - \hat{Y}) = [X_\alpha, X_\beta], \end{aligned}$$

что демонстрирует факт: при прочих условиях формулы с меньшим количеством арифметических действий предпочтительнее с точки зрения численного результата вычислений. Если в формулы обычной арифметики подставить интервальные переменные, то полученные выражения (интервальные расширения обычных формул) будут верны при пользовании правилами интервальной арифметики.

Очевидно, в интервальных выражениях (в нашем случае — во всех соотношениях, описывающих законы и режимы ЭЦ) естественно одновременное употребление как интервальных, так и обычных переменных. Формально обычная переменная ассоциируется с интервалом, выродившимся в точку; введение интервальных переменных соответствует записи двухсторонних неравенств для обычных переменных. Имея в виду анализ схемных функций, простые преобразования ЭЦ и другие аналогичные задачи, полезно обратить внимание на важный частный случай. Если алгебраическое выражение является монотонной функцией некоторой интервальной переменной, то результат алгебраических вычислений, независимо от их порядка, будет улучшаем.

Вообще, нахождение значения интервально-значимой функции переменных  $\hat{X}_k$  формально приводится к паре задач — минимизации и максимизации:

$$\hat{F}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n) = \hat{F} = [F_\alpha, F_\beta] =$$

$$= [\min_{X_k \in \hat{X}_k} F(X_1, \dots, X_n); \max_{X_k \in \hat{X}_k} F(X_1, \dots, X_n)], \quad (1)$$

однако такое сведение задачи интервального анализа к паре задач нахождения экстремума в общем случае неконструктивно. Поскольку различные алгоритмы вычислений  $\Lambda_j$  значения одной и той же интервально-значимой функции  $\hat{F}$  могут приводить к различным результатам  $\hat{F}_j$ , а значение  $\hat{F}$  в (1) представляет собой наилучшим образом оцениваемый результат ( $\hat{F} \subseteq \hat{F}_j$ ), то можно сформулировать следующий принцип.

**Принцип пересечения оценок.** При отыскании наилучшей интервальной оценки функции на любом этапе расчета за наилучшее текущее значение интервальной переменной следует принимать интервал, являющийся пересечением оценок этой переменной, полученных на предыдущих этапах

расчета:  $\hat{F} \subseteq \hat{F}_j$ . На этом принципе основывается идея итерационной корректировки результатов интервальных вычислений.

**3. Интервальные вольт-амперные характеристики элементов ЭЦ.** В качестве элементного базиса интервальной резистивной ЭЦ примем резистор, источники ЭДС и тока; параметры их могут лежать в интервалах:

$$R \in [R_\alpha, R_\beta] \equiv \hat{R}, \quad E \in [E_\alpha, E_\beta] \equiv \hat{E}, \quad J \in [J_\alpha, J_\beta] \equiv \hat{J}.$$

Опираясь с интервальными токами и напряжениями  $\hat{I}$  и  $\hat{U}$ , ведя речь об элементах с интервально заданными параметрами, будем говорить об «интервальных» элементах; в противном случае будет говорить об «обычных» элементах. В этом же смысле будем говорить об интервальной ЭЦ (ИЦ). Множество возможных режимов интервального элемента назовем интервальной вольт-амперной характеристикой (ИВАХ). Для идеальных интервальных источников ЭДС и резистора имеем ИВАХ, соответственно (рис. 1):

$$\Omega_E = \{U/U \in [E_\alpha, E_\beta] = \hat{E}\}, \quad \Omega_J = \{I/I \in [J_\alpha, J_\beta] = \hat{J}\},$$

$$\Omega_R = \{U/U \in [\min(R_\alpha I, R_\beta I), \max(R_\alpha I, R_\beta I)] = \hat{U} = \hat{R}I\} =$$

$$= \{I/I \in [\min(G_\alpha U, G_\beta U), \max(G_\alpha U, G_\beta U)] = \hat{I} = \hat{G}U\}.$$

Здесь  $\Omega_E$ ,  $\Omega_J$  и  $\Omega_R$  — множества точек, соответствующих ИВАХ. Если априори не задано ограничений на напряжение и (или) ток элемента, то ветви ИВАХ простираются в бесконечность; если же они заданы:

$$\Omega_U = \{U \in (U_\alpha \leq U \leq U_\beta)\} \quad \text{и} \quad \Omega_I = \{I \in (I_\alpha \leq I \leq I_\beta)\},$$

$$\Omega_U \cap \Omega_I = \Omega_{UI},$$

то такую ИВАХ будем называть ограниченной. Здесь также можно ввести понятие интервального обобщенного источника, имеющего своей ИВАХ  $\Omega_{UI}$ .

Интервальную ВАХ как интервальную функцию обычной переменной можно задавать либо в виде  $\hat{U}(I)$  (1) (вольт-амперной), либо в виде  $\hat{I}(U)$  (ампер-вольтной) характеристик; это соот-

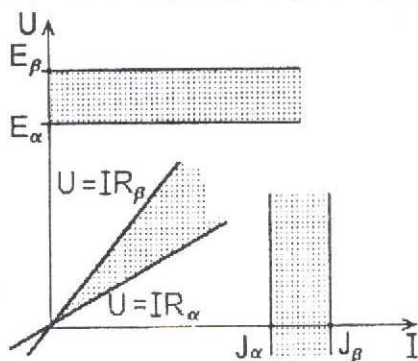


Рис. 1. ИВАХ простейших элементов ЭЦ

ветствует заданию пары функций: мажоранты и миноранты:

$$\hat{U}(I) = [U_\alpha(I), U_\beta(I)] \quad \text{либо} \quad \hat{I}(U) = [I_\alpha(U), I_\beta(U)].$$

Будем считать для простоты, что миноранты и мажоранты ИВАХ элементов непрерывны и однозначны. Естественным распространением этой идеи оказывается описание нелинейных элементов (НЭ) с помощью ИВАХ, которые могут учитывать как технологический разброс характеристик НЭ от экземпляра к экземпляру, так и вариацию характеристики элемента под действием внешних факторов. Более того, такой взгляд позволяет понимать под линейной ИВАХ множество характеристик нелинейного элемента, имеющее линейные границы в качестве мажоранты и миноранты. Используя аналогию с простейшими преобразованиями характеристик нелинейных элементов, можно установить правила преобразования ИВАХ при последовательно-параллельном соединении элементов. В конечном итоге, основная идея интервального анализа ЭЦ заключена в том, чтобы, оперируя с мажорантами и минорантами ИВАХ элементов, рассчитывать мажоранты и миноранты обобщенных характеристик ЭЦ в целом.

**4. Закон Ома в интервальной форме. Обобщенная ветвь.** Под законом Ома в теории ЭЦ обычно понимают связь между напряжением и током ветви, содержащей сопротивление. В данном случае предметом анализа является построение ИВАХ ветви с резистором.

Обратимся к анализу неограниченной ИВАХ обобщенной ветви (ОВ), заданной тройкой параметров  $\{\hat{E}, \hat{J}, \hat{R}\}$  (рис. 2). В соответствии с выбранными положительными направлениями токов и напряжений имеем выражение для закона Ома ОВ:

$$\hat{U} = \hat{E} + (\hat{J} - \hat{I})\hat{R}$$

или

$$\Omega_{ОВ} = \{U/U \in [\min(((J_\alpha - I)R_\alpha + E_\alpha), ((J_\alpha - I)R_\beta + E_\alpha));$$

$$\max(((J_\beta - I)R_\alpha + E_\beta), ((J_\beta - I)R_\beta + E_\beta))]\} =$$

$$= \{U/U \in [U_{ОВ\alpha}, U_{ОВ\beta}]\}. \quad (2)$$

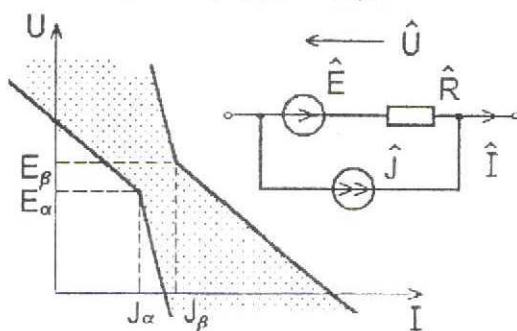


Рис. 2. ИВАХ обобщенной ветви

Как видно из построения величин  $\Omega_{ОВ}$ , интервальная ОВ однозначно задается шестью дискретными параметрами [две пары параметров  $(J_\alpha, E_\alpha)$  и  $(J_\beta, E_\beta)$  задают точки излома миноранты и мажоранты, а два параметра  $(R_\alpha$  и  $R_\beta)$  определяют углы наклона ветвей граничных характеристик].

Здесь уместно напомнить свойства ОВ в классической теории ЭЦ, где обобщенная ветвь может быть преобразована, имея континуум эквивалентов, включающих в себя преобразование источника ЭДС в источник тока и обратно:

$$\{E, J, R\} \equiv \{(E + JR), 0, R\} \equiv \{0, (E/R + J), R\}. \quad (3)$$

Относительно ИВАХ ОВ можно сделать важные выводы.

**Вывод 1.** Интервальная ОВ имеет невыпуклую ИВАХ и в общем случае не имеет эквивалентов.

**Следствие.** Эквивалентное преобразование интервального источника ЭДС в интервальный источник тока в общем случае невозможно.

**Вывод 2.** Задачу преобразования ветвей с интервальными резисторами имеет смысл ставить и решать лишь приближенно.

Вывод о неэквивалентности интервальных источников напряжения и тока наводит на далеко идущие размышления. Так, еще со времен Кирхгофа фундаментальный постулат о возможной эквивалентности источников лежит в основе целого ряда преобразований и методов анализа ЭЦ и составляет мощную поддержку традиционной теории ЭЦ множеством методов и алгоритмов решения научных и инженерных задач. При интервальном описании ЭЦ от этого основополагающего постулата приходится отказываться, и в этом заключается существенная теоретическая новизна постановки задачи анализа ИЦ. Во избежание методических погрешностей необходимо решить вопрос о возможности корректного применения либо о введении существенных корректив в традиционные методы анализа ЭЦ при их интервальной модификации.

**5. Анализ простейших ИЦ.** 5.1. *Графический расчет ИЦ.* Понятие об ИВАХ как о множестве возможных режимов работы двухполюсника естественно ассоциируется с понятием о вольт-амперной характеристике нелинейного элемента, используемом в традиционной теории ЭЦ. При этом становятся очевидными преобразования при простейших соединениях пары элементов — последовательном и параллельном. При последовательном соединении двух элементов результирующих ИВАХ получается «сложением» характеристик по напряжениям, а при параллельном соединении — «сложением» по токам (рис. 3):

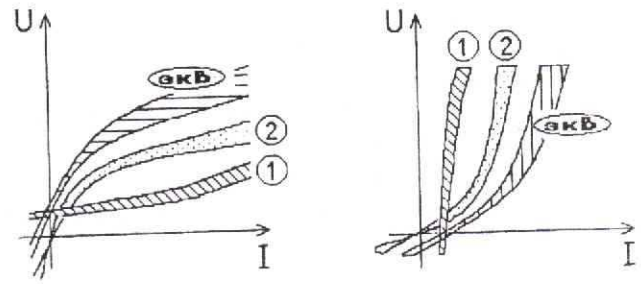


Рис. 3. Преобразование ИВАХ НЭ при последовательном и параллельном соединении элементов

$$\hat{U}(I) = \hat{U}_1(I) + \hat{U}_2(I);$$

$$\hat{I}(U) = \hat{I}_1(U) + \hat{I}_2(U).$$

Применив эти принципы, можно строить ИВАХ последовательно-параллельных интервальных двухполюсников, в том числе эффективно иллюстрировать расчеты простых линейных ИЦ.

5.2. *Интервальный двигатель напряжения (ИДН).* В качестве простого и вместе с тем интересного примера графического анализа ИЦ рассмотрим ИВАХ ИДН (рис. 4). В соответствии с положительными направлениями токов и напряжений построим ИВАХ ветви  $\hat{E}, \hat{R}_1$  (вертикальная штриховка) и ветви  $\hat{R}_2$  (горизонтальная штриховка). Учитывая параллельное соединение ветвей, произведем соответствующее сложение характеристик и получим результирующую ИВАХ ИДН.

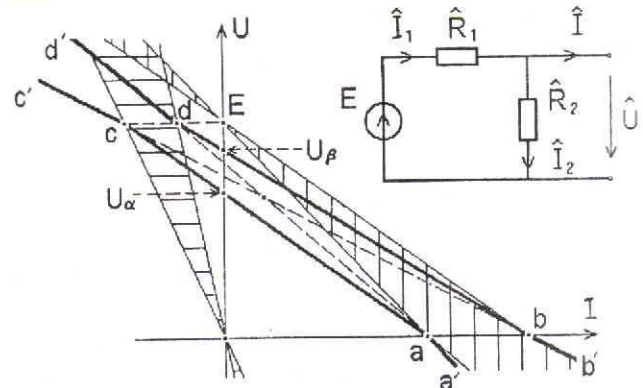


Рис. 4. К анализу ИВАХ интервального делителя напряжения

На ИВАХ можно выделить три характерных участка:  $\{U \geq E\}$ ,  $\{E \geq U \geq 0\}$ ,  $\{0 \geq U\}$ . На первом участке все токи отрицательны и сложение характеристик дает две ветви:  $cc'$  и  $dd'$ , причем очевидно, что ветвь  $cc'$  формируется двумя нижними оценками сопротивлений  $R_{1\alpha}$  и  $R_{2\alpha}$ , а ветвь  $dd'$  — верхними оценками сопротивлений  $R_{1\beta}$  и  $R_{2\beta}$ . Аналогичные заключения можно сделать относительно третьего участка, учитывая, что на нем все три тока положительны. Уравнения рассмотренных лучей попарно совпадают; так, для лучей  $aa'$  и  $dd'$  и для лучей  $cc'$  и

bb' соответственно:

$$U = ER_{2\beta} / (R_{1\beta} + R_{2\beta}) - R_{1\alpha} R_{2\alpha} / (R_{1\alpha} + R_{2\alpha}) I;$$

$$U = ER_{2\alpha} / (R_{1\alpha} + R_{2\alpha}) - R_{1\beta} R_{2\beta} / (R_{1\beta} + R_{2\beta}) I.$$

Обратимся ко второму участку. Мажорантой ИВАХ на этом участке окажется отрезок db, а минорантой — отрезок ca. Уравнения мажоранты и миноранты:

$$U + IR_{1\alpha} R_{2\beta} / (R_{1\alpha} + R_{2\beta}) = ER_{2\beta} / (R_{1\alpha} + R_{2\beta}) = U_{\beta};$$

$$U + IR_{1\beta} R_{2\alpha} / (R_{1\beta} + R_{2\alpha}) = ER_{2\alpha} / (R_{1\beta} + R_{2\alpha}) = U_{\alpha}.$$

Заметим, что вообще  $R_{ca} \neq R_{db}$ , однако возможна параллельность анализируемых отрезков. Пара  $[U_{\alpha}; U_{\beta}]$  является интервальным напряжением холостого хода ИДН. Таким образом, ИВАХ ИДН представляет собой неограниченную полосу между ломаными  $d'dbb'$  и  $c'caa'$ .

5.3. Аналитические расчеты простых ИЦ. Исследуем на простом численном примере проблемы и возможности, возникающие при аналитических расчетах при вариации алгоритма анализа. Используем в качестве объекта простую ИЦ (рис. 5), в которой интервальная ЭДС включена на три последовательно-параллельных резистора. Пусть параметры ее заданы (в безразмерных единицах):

$$\hat{E} = 12 = [12; 12]; \quad \hat{R}_1 = \hat{R}_2 = \hat{R}_3 = [1; 2].$$

Алгоритм 1. Интервальные расширения традиционных формул преобразования. Используем цепочку стандартных формул для последовательно-параллельной ЭЦ, применив к ним интервальную арифметику, по следующей схеме: рассчитаем общее сопротивление, ток неразветвленной части, напряжения на элементах и токи в разветвлении (результаты расчета занесены в первую строку табл. 1):

$$\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_{23} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \hat{R}_3 / (\hat{R}_2 + \hat{R}_3); \quad \hat{I}_1 = \hat{E} / \hat{R};$$

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1 \hat{R}_2; \quad \hat{U}_{23} = \hat{I}_1 \hat{R}_{23}; \quad \hat{I}_2 = \hat{I}_3 = \hat{U}_{23} / \hat{R}_2.$$

Как нетрудно видеть, результаты расчетов возможно скорректировать, применив принцип пересечения оценок. Именно, значение постоянной

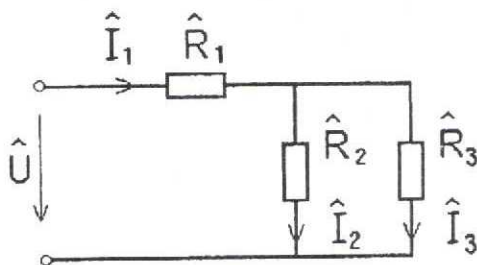


Рис. 5. Схема простой интервальной ЭЦ

ЭДС можно считать оценкой сверху для всех напряжений ветвей. Скорректированные на этих основах ответы приведены во второй строке табл. 1. Корректировки в принципе можно было бы продолжить.

Таблица 1

Строка	Алгоритм	$\hat{I}_1$	$\hat{U}_1$	$\hat{U}_{23}$	$\hat{I}_2 = \hat{I}_3$
1-я	1	[6; 9,55]	[3; 19,2]	[0,75; 19,2]	[0,375; 9,55]
2-я	Корректировка 1	[6; 9,6]	[3; 12]	[0,75; 12]	[0,375; 9,55]
3-я	2	[4; 8]	[4; 16]	[2; 8]	[1; 8]
4-я	Корректировка 2	[4; 8]	[4; 12]	[2; 8]	[1; 8]
5-я	3	[4; 8]	[6; 9,6]	[2,4; 6]	[1,5; 4,8]
6-я	4	[4; 8]	[6; 9,6]	[2,4; 6]	[1,5; 4,8]

Алгоритм 2. Поэтапные преобразования ИЦ. Произведем расчеты, поэтапно применяя простейшие преобразования. Рассчитаем проводимости ветвей, эквивалентные проводимость и сопротивление разветвления, общее сопротивление, общий ток, напряжение на разветвлении и токи в параллельных ветвях:

$$\hat{G}_2 = \hat{G}_3 = 1 / \hat{R}_2; \quad \hat{G}_{23} = \hat{G}_2 + \hat{G}_3; \quad \hat{R}_{23} = 1 / \hat{G}_{23};$$

$$\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_{23}; \quad \hat{I}_1 = \hat{E} / \hat{R}; \quad \hat{U}_1 = \hat{I}_1 \hat{R}_2;$$

$$\hat{U}_{23} = \hat{I}_1 \hat{R}_{23}; \quad \hat{I}_2 = \hat{I}_3 = \hat{U}_{23} \hat{G}_2.$$

Результаты расчета занесем в третью строку, а после корректировки — в четвертую строку табл. 1. Как видно, результаты расчета дают более узкие границы для искомых величин.

Алгоритм 3. Использование формул с монотонным входением переменных. Предварительно представим формулы анализа в специальном виде. Так, для последовательно-параллельной ЭЦ в ряде задач удобно представление входной функции в виде цепной дроби. Используем эту идею для представления всех искомых переменных в совокупности формул:

$$\hat{I}_1 = \hat{E} (\hat{R}_1 + (\hat{R}_2^{-1} + \hat{R}_3^{-1})^{-1})^{-1};$$

$$\hat{U}_1 = \hat{E} (1 + \hat{R}_1^{-1} (\hat{R}_2^{-1} + \hat{R}_3^{-1})^{-1})^{-1};$$

$$\hat{U}_{23} = \hat{E} (1 + \hat{R}_1 (\hat{R}_2^{-1} + \hat{R}_3^{-1}))^{-1};$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_3 = \hat{E} (\hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 \hat{R}_3^{-1})^{-1}.$$

Анализ показывает, что расчет по алгоритму 3 дает неулучшаемые оценки (пятая строка табл. 1). (Заметим, что здесь остаются в стороне вопросы, связанные с погрешностями вычислений, когда различные алгоритмы вносят заведомо различные ошибки в конечный результат расчетов.) Эффективность последних выражений интерваль-

ных вычислений определяется тем, что они являются монотонными функциями своих интервальных переменных.

Алгоритм 4. В заключение примера приведем результаты исследования полной системы уравнений и ограничений задачи (шестая строка табл. 1).

5.4. Сравнительный анализ элементарных методов анализа. Некоторый опыт численного моделирования, накопленный при решении простого примера, уже позволяет сформулировать достаточно общие выводы.

Наиболее подробный и точный анализ дает расчет на основе полной системы уравнений и ограничений задачи. Следует отметить его громоздкость. Если использовать формулы, в которых переменные входят заведомо монотонным образом, то интервальная арифметика дает верные результаты, которые совпадают с результатами анализа полной системы уравнений и ограничений. Однако здесь встает вопрос о том, что необходимо получать эти формулы для каждой из искоемых переменных в отдельности. Такая постановка задачи придает особое значение символично-аналитическим методам. Традиционные формулы преобразований, используемые в теории ЭЦ, даже в простейших случаях оказываются неэффективными.

Поэтапные численно-аналитические преобразования, моделирующие своим процессом вывод традиционных формул, позволяют, по сравнению с последними, получать лучшие результаты. Графические методы для линейных ЭЦ, по существу, лишь являются графической копией соответствующих численно-аналитических методов. Следует отметить процесс корректировки оценок, который должен служить одной из основ для итерационных уточнений решения. Следует ожидать, что при расчете сложных интервальных ЭЦ эффективным окажется комплексное использование различных приемов и методов.

6. Формальное описание сложной ИЦ. Полная система уравнений линейной ЭЦ постоянного тока (в матричной форме) включает уравнения по законам Кирхгофа и Ома:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0}; \quad (3)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{0}; \quad (4)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} + \mathbf{R}(\mathbf{J} - \mathbf{I}) \quad \text{либо} \quad \mathbf{I} = \mathbf{J} + \mathbf{G}(\mathbf{E} - \mathbf{U}), \quad (5)$$

где, как обычно,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  — матрицы инцидентий и контуров ЭЦ;  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$  — матрицы-столбцы напряжений, токов, источников ЭДС и источников токов ветвей соответственно;  $\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$  — квадратные матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей; размеры упомянутых матриц оп-

ределяются количеством ветвей ЭЦ  $p$  и узлов  $q$ .

Накладывая ограничения на переменные, выражение для закона Ома следует заменить на условие принадлежности возможного режима некоторой точке ИВАХ:

$$(I_k, U_k) \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, p}. \quad (6)$$

В общем случае ставим задачи определения максимумов и минимумов с учетом ограничений (3), (4), (6):

$$\max, \min (I_k, U_k), \quad k = \overline{1, p}. \quad (7)$$

Если в формулах (3)–(5) перейти от обычных переменных к интервальным, то сразу можно получить интервальные аналоги общепринятых методов расчета, например, метода узловых потенциалов:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}^T\hat{\phi} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}, \quad (8)$$

где  $\hat{\phi}$  — интервальный вектор узловых потенциалов размером  $(q-1)$ , и вектор напряжений ветвей связан с ним через матрицу инцидентий  $\hat{\mathbf{U}} = -\mathbf{A}^T\hat{\phi}$ . Формальное решение для векторов токов и напряжений может быть записано как

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{J}}; \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{I}} = (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A})\hat{\mathbf{J}}. \quad (10)$$

Ясно, что попытка непосредственной реализации алгоритма, описываемого соотношениями (9), (10), скорее всего, не приведет к успеху, поскольку при перемножении и обращении интервально-значных матриц с помощью интервальной арифметики результат вычислений приведет к широким интервальным оценкам переменных, не представляющим интереса. На первый взгляд, категоричность последнего утверждения приводит к выводу о бесполезности традиционных методов анализа ЭЦ при интервальных исходных данных. Проблема заключается в том, что, как было показано выше, ограничения ИВАХ ОВ нелинейны и невыпуклы даже для линейных ЭЦ, и все это усугубляется «проклятием размерности».

В этой связи необходимо, обратившись к теории ЭЦ, использовать идеи и способы декомпозиции задачи, ее планомерных преобразований для получения эффективного решения. При этом учитываем, что нелинейность и невыпуклость ограничений сосредоточены в описаниях элементов, а общесистемные законы сохранения — законы Кирхгофа по своей сути линейны всегда и должны выполняться для любого сочетания переменных, принадлежащих  $\Omega$ . Таким образом, решение проблемы следует искать на пути оптимизации представления ИВАХ ветвей, дающего

возможность воспользоваться плодами опыта теории ЭЦ.

Поскольку ясно, что задачу (8) в общем случае придется решать с помощью итерационной процедуры, в основу ее положим следующие принципы: приведение ограничений к выпуклым, линеаризация ограничений и принцип пересечения оценок.

**7. Эквивалентирование обобщенной ветви.** Эквивалентная замена элементов и фрагментов ЭЦ играет важную роль в теории и практике анализа ЭЦ. Обратимся к некоторым случаям, когда удастся положительно решать вопрос о точной или приближенной замене элементов ИЦ.

Для ОВ с точным резистором  $\{\hat{E}, \hat{J}, R\}$  ИВАХ представляет полосу (рис. 6):

$$((J_\alpha - I)R + E_\alpha) \leq U \leq (J_\beta - I)R + E_\beta;$$

аналогично (3), возможны эквивалентные преобразования источников:

$$\{\hat{E}, \hat{J}, R\} \equiv \{(\hat{E} + \hat{J}R), 0, R\} \equiv \{0, (\hat{E}/R + \hat{J}), R\}.$$

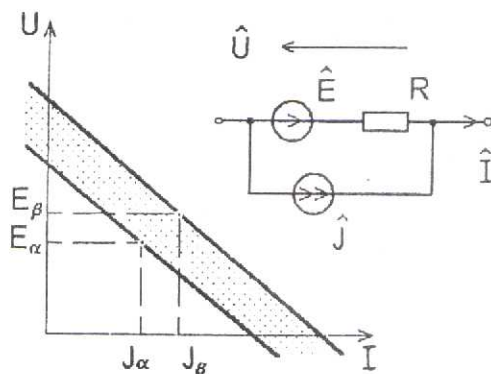


Рис. 6. ИВАХ обобщенной ветви с точным сопротивлением

Другой класс частных случаев связан с тем, что эквивалентность различных ОВ можно попытаться обеспечить на подмножестве режимов  $\Omega \subset \Omega_{ОВ}$ . К примеру, если для ОВ  $\{\hat{E}, \hat{J}, \hat{R}\}$  принять  $I \geq J_\beta$ , то можно найти эквивалентную с точными источниками ЭДС и тока и интервальным резистором:

$$\{\hat{E}, \hat{J}, \hat{R}\} \equiv \{E_0, J_0, \hat{R}\},$$

где

$$E_0 = (E_\beta R_\beta - E_\alpha R_\alpha) / (R_\beta - R_\alpha);$$

$$J_0 = (E_\alpha - E_\beta) / (R_\beta - R_\alpha).$$

Такое представление не единственно и является первым шагом к постановке задачи аппроксимации ИВАХ некоторой ветви. Если добавить к ИВАХ ОВ естественные ограничения на ток и напряжение, получим:

$$\Omega_0 = \Omega_{ОВ} \cap \Omega_{UI} = \{[\max(U_\alpha, U_{ОВ\alpha})]$$

$$\min(U_\beta, U_{ОВ\beta})\}, I \in [I_\alpha, I_\beta]\}.$$

Однако из идей интервального анализа — нахождение некоторого минимального объемлющего множества режимов, которое можно описать удобной моделью. Простейший вариант — аппроксимация ИВАХ описанным прямоугольником, т.е. замена  $\Omega_0$  на  $\Omega_{UI}$ , которую можно интерпретировать как интервальный аналог теоремы о компенсации. Однако такая аппроксимация далеко не всегда конструктивна.

Значительный интерес представляет аппроксимация произвольной ОВ  $\{\hat{E}, \hat{J}, \hat{R}\}$  другой ОВ  $\{\hat{E}', \hat{J}', R'\}$  с обычным (точным) резистором. При итерационном процессе уточнения оценок режимов ИЦ на каждом этапе в наиболее громоздкой вычислительной части алгоритмов, построенных на соотношениях типа (9), (10), в вычислениях будут фигурировать обычные переменные, а интервальные векторы — использоваться лишь однажды, на последнем этапе расчета. Такая задача аппроксимации сводится к заключению ИВАХ между двумя параллельными прямыми. Она решается неоднозначно. В качестве достаточно разумного критерия оптимальности аппроксимации примем минимум относительной вариации эквивалентного источника (например, источника тока):

$$\min_{\Omega} \delta = \min_{\Omega} [(J_\beta - J_\alpha) / ((J_\beta + J_\alpha) / 2)].$$

Попутно отметим, что аналогичным образом можно аппроксимировать интервальную ветвь в комплексной области, разделив действительные и мнимые части.

**8. Общие принципы анализа интервальной ЭЦ.** Общий алгоритм решения задачи анализа интервальной ЭЦ можно сформулировать в виде итерационной процедуры, включающей три блока: оптимальную аппроксимацию ИВАХ с помощью пары параметров  $[G_{\text{опт}}, \hat{J}]$  либо  $[R_{\text{опт}}, \hat{E}]$ , решение системы уравнений ЭЦ вида (9), (10) и окончательное согласование ограничений.

Сведем эти результаты воедино. Итак, интервальная ЭЦ задана множеством ОВ, априори имеющими заданные ИВАХ  $\{\Omega_k\}$ ; эти ИВАХ включают в себя интервальные оценки параметров ветви: сопротивлений, источников ЭДС и тока, априорные оценки напряжений и токов и, быть может, еще некоторые дополнительные ограничения (к примеру, нелинейные ограничения на мощности). Все перечисленные ограничения априори считаем согласованными. Схема соединения задается матрицей инцидентий  $A$ , с которой ассоциируем также матрицу независимых контуров  $B$ .



1-й шаг итерации.

а) Находим оптимизированные значения параметров аппроксимации ОБ:

$$\{\Omega_k\} \Rightarrow \{[G_k^{(1)}, \hat{J}_k^{(1)}], [R_k^{(1)}, \hat{E}_k^{(1)}]\}.$$

б) Составляем соответствующие матрицы  $G_b^{(1)}$ ,  $R_b^{(1)}$ ,  $\hat{J}_b^{(1)}$ ,  $\hat{E}_b^{(1)}$  и решаем уравнения

$$\hat{U}_b^{(1)} = A^T [(A G_b^{(1)} A^T)^{-1} A \hat{J}_b^{(1)}];$$

$$\hat{I}_b^{(1)} = B^T [(B R_b^{(1)} B^T)^{-1} B \hat{E}_b^{(1)}].$$

в) Используя принцип пересечения оценок, согласовываем полученные результаты:

$$\{\Omega_k^{(1)}\} = \{\Omega_k \cap \hat{U}_k^{(1)} \cap \hat{I}_k^{(1)}\};$$

$$U_{k \text{ согл}}^{(1)} = [\min_{\Omega_k^{(1)}} U_k, \max_{\Omega_k^{(1)}} U_k];$$

$$I_{k \text{ согл}}^{(1)} = [\min_{\Omega_k^{(1)}} I_k, \max_{\Omega_k^{(1)}} I_k].$$

j-й шаг итерации.

а)

$$\{\Omega_k^{(j-1)}\} \Rightarrow \{[G_k^{(j)}, \hat{J}_k^{(j)}], [R_k^{(j)}, \hat{E}_k^{(j)}]\}. \quad (11)$$

б) Составляем матрицы  $G_b^{(j)}$ ,  $R_b^{(j)}$ ,  $\hat{J}_b^{(j)}$ ,  $\hat{E}_b^{(j)}$  и решаем уравнения:

$$\hat{U}_b^{(j)} = A^T [(A G_b^{(j)} A^T)^{-1} A \hat{J}_b^{(j)}]; \quad (12)$$

$$\hat{I}_b^{(j)} = B^T [(B R_b^{(j)} B^T)^{-1} B \hat{E}_b^{(j)}]. \quad (13)$$

в) Согласовываем результаты:

$$\{\Omega_k^{(j)}\} = \{\Omega_k^{(j-1)} \cap \hat{U}_k^{(j)} \cap \hat{I}_k^{(j)}\} \quad (14)$$

$$U_{k \text{ согл}}^{(j)} = [\min_{\Omega_k^{(j)}} U_k, \max_{\Omega_k^{(j)}} U_k], \quad I_{k \text{ согл}}^{(j)} = [\min_{\Omega_k^{(j)}} I_k, \max_{\Omega_k^{(j)}} I_k]. \quad (15)$$

Критерием окончания итерационного процесса может служить, как обычно, либо количество итераций, либо практическое окончание сходимости процесса.

Сделаем два замечания. Первое из них — утверждение, что процесс не будет расходиться, поскольку здесь реализован принцип сжатых отображений (принцип пересечения оценок), хотя, строго говоря, данный алгоритм носит эвристический характер. Второе — представляется, что одновременное параллельное решение задачи в нескольких (здесь в двух) координатных базисах может давать достаточно оптимистичные перспективы решения задачи.

9. Интервальные четырехполосники. Можно назвать три обычных способа задания линейных

четырёхполосников: в виде схемы замещения, с помощью какой-либо из матриц параметров, и, наконец, графический — в виде семейств характеристик. Для линейных ЭЦ последний способ практически не применяется, но, учитывая особый интерес к графической интерпретации расчетов при анализе интервальных ЭЦ, обратим на него внимание.

Для четырехполосника имеем пару уравнений, например в Z-форме:

$$U_1 = f_1(I_1, I_2); \quad U_2 = f_2(I_1, I_2).$$

Нелинейные четырехполосники отличаются лишь нелинейностью функций  $f_1$  и  $f_2$ . Для интервальных четырехполосников эта система уравнений имеет тот же вид, лишь функции оказываются интервально-значными (в общем случае интервально-значными оказываются как токи, так и параметры четырехполосника):

$$\hat{U}_1 = \hat{f}_1(\hat{I}_1, \hat{I}_2); \quad \hat{U}_2 = \hat{f}_2(\hat{I}_1, \hat{I}_2).$$

Так, например, представленное семейство характеристик четырехполосника может оказаться в виде, изображенном на рис. 7. Интервальное представление идеального активного четырехполосника (зависимого источника) элементарно. Оно заключается в переходе к интервальному

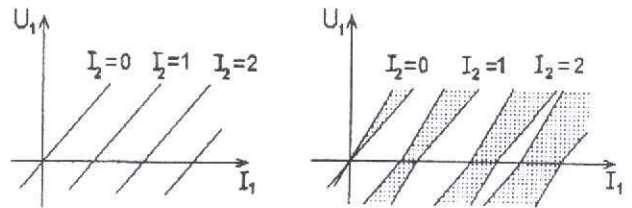


Рис. 7. Сравнение семейств характеристик точного и интервального четырехполосников

коэффициенту передачи  $\hat{K}$ .

10. Пример анализа интервальной активной ЭЦ. Рассмотрим (рис. 8) простую ЭЦ с зависимым источником. Имея достаточно размытую информацию о параметрах ЭЦ, следует качественно оценить возможные режимы в данной

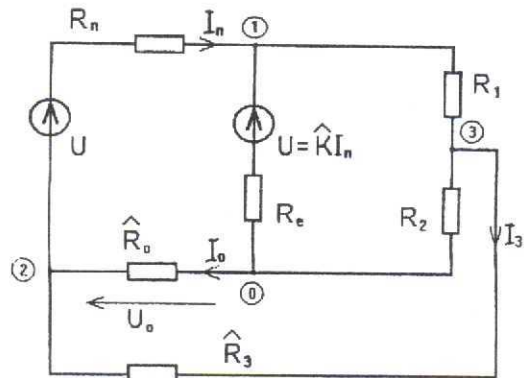


Рис. 8. Разветвленная активная интервальная ЭЦ

системе. Эта ЭЦ интересна тем, что представляет эквивалентную схему простой реальной системы теплоснабжения. Сопротивления  $R_{\Pi}$  и  $R_0$  представляют собой сопротивления прямого и обратного трубопроводов. Для обеспечения надлежащего режима в системе имеется элеватор, представленный зависимым источником напряжения (управляется током  $I_{\Pi}$  с коэффициентом передачи  $K$ ), создающий циркуляцию теплоносителя по контуру элеватор — потребитель. Имеется также информация о том, что у потребителя возможен дополнительный отвод с отдельной обратной трассой ( $R_3$ ). Интерес к этой, в принципе достаточно несложной, задаче обусловлен наблюдавшимися в практической эксплуатации некоторыми странными эффектами. В этой связи была поставлена задача аналитически исследовать цепь, подтвердить или опровергнуть корректность экспериментальных данных и при их подтверждении сделать попытку их объяснить. Не останавливаясь на деталях, отметим лишь, что задача была сведена к оценке возможности перемены направления потока в обратной ветви.

Численные значения параметров схемы замещения выбирались (в относительных единицах), исходя из заданного примерного распределения расходов и напоров в «нормальном» режиме работы, без дополнительного отбора. В качестве точных элементов приняты напор источника  $U$ , суммарное расчетное сопротивление нагрузки ( $R_1 + R_2 = 1$ ), сопротивление ветви элеватора  $R_E = 0,05$ . Интервальные параметры:  $\hat{R}_2 = [0,25; 0,5]$ ,  $\hat{R}_3 = [0,9; 1,5]$ ,  $\hat{K} = [1,15; 1,2]$ . Описав приведенную электрическую схему замещения гидравлической цепи уравнениями по законам Кирхгофа и Ома, получим решение. Для наглядности приведем его в координатах  $(U_0, I_0)$  на рис. 9. Область возможных решений заштрихована темным цветом, откуда следует, что  $I_0$  в реальности может принимать отрицательные значения и этот фактор необходимо учитывать при проектировании расположения контрольно-

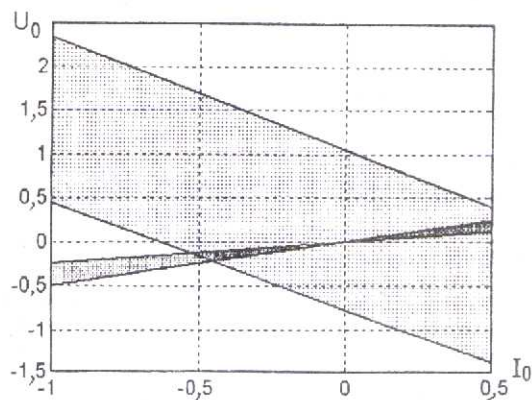


Рис. 9. Области возможных режимов ЭЦ

измерительных приборов.

**11. Интервальные ограничения в комплексной области.** В основе описания цепей установившегося синусоидального тока лежит символический метод, когда при решении задач используются комплексные изображения токов и напряжений; эти понятия обобщаются на интервальные параметры:

$$\hat{U}_k = \hat{U}_k \angle \hat{\varphi}_k = [U_{k\alpha}; U_{k\beta}] \angle [\varphi_{k\alpha}; \varphi_{k\beta}] = \hat{U}'_k + j\hat{U}''_k.$$

(Здесь штриховые обозначения применены для обозначения вещественной и мнимой частей комплексной величины.)

Поскольку анализ ЭЦ в комплексной области приводится к вычислениям в действительной области с разделяемыми вещественными и мнимыми частями переменных, распространение идей, заложенных в понятиях ИВАХ, их аппроксимации, применения для расчета интервальных ЭЦ не встречает методических проблем. Связанные с этим построения становятся более громоздкими, увеличивается размерность задач, и, ясно, ухудшаются условия сходимости итерационного процесса решения. В задачах возникают свои особенности, которые могут представить специальный интерес.

В соответствии со способом представления комплексных величин в показательной или алгебраической форме эта область, соответственно, имеет вид либо секторного фрагмента комплексной области, либо прямоугольного. Если ограничения заданы в виде сектора, то придется иметь дело с нелинейными ограничениями и при необходимости область придется аппроксимировать. Кстати, эта нелинейность ограничений является типичным ограничением, здесь же естественно вспомнить об ограничениях на мощность.

В цепях с высокой добротностью можно положить резистивные составляющие (действительные) комплексных сопротивлений равными нулю и задача распадается на две. В одной из них от вещественных составляющих заданных источников напряжения и мнимых составляющих заданных источников тока находим мнимые составляющие искомого тока, в другой — от мнимых составляющих заданных источников напряжения и вещественных составляющих заданных источников тока находим вещественные составляющие искомого тока, и описание каждой из двух названных задач формально совпадает с описанием интервальной задачи в резистивной цепи.

**12. Длинная линия с интервальным участком.** Проиллюстрируем изложенные выше принципы на примере описания уравнений длинной линии с учетом интервальности некоторого ее внут-

решеного фрагмента. Ясно, что здесь придется применять комплекснозначную арифметику. Рассмотрим модель однопроводной линии, в которой ее внутренний участок, к примеру, поражен гололедом. Начальный и конечный участки свободны от гололедных покрытий, их параметры известны. В схеме замещения среднего участка параметр  $b_{л}$  — емкостная проводимость, отражающая емкость провода на землю при условии, что часть диэлектрика, непосредственно примыкающая к проводнику, — слой льда. Активная проводимость  $g_{л}$  моделирует потери энергии в слое льда (рис. 10). Параметры  $g_{л}$  и  $b_{л}$  введем как интервальные:

$$\hat{g}_{л} = [g_{ла}; g_{лб}]; \quad \hat{b}_{л} = [b_{ла}; b_{лб}].$$

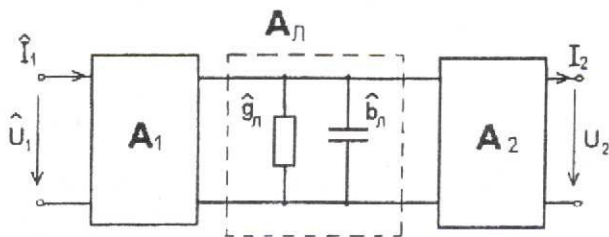


Рис. 10. Представление длинной линии с интервальным участком

Теперь объединим в один четырехполюсник  $A_1$  начальный участок и во второй четырехполюсник  $A_2$  конечный участок линии. При этом их комплексные  $A$ -параметры:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, образуем еще один четырехполюсник  $A_{л}$  (отражающий влияние гололеда), в состав которого входит комплексная проводимость  $\hat{Y}_{л} = \hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}$ :

$$A_{л} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л} & 1 \end{bmatrix}.$$

Каскадное соединение четырехполюсников  $A_1$ ,  $A_{л}$  и  $A_2$  эквивалентно одному четырехполюснику  $A_0$  с параметрами, определяемыми произведением:

$$A_0 = A_1 A_{л} A_2 = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 B_2 + (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) A_2 B_1 & A_1 B_2 + B_1 D_2 + (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) B_1 B_2 \\ A_2 C_1 + C_2 D_1 + (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) A_2 D_1 & B_2 C_1 + D_1 D_2 + (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) B_2 D_1 \end{bmatrix}.$$

Из алгебраического вида элементов матрицы  $A_0$  следует, что она может быть представлена

с помощью суммы:

$$A_0 = A_{0и} + (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) \Delta,$$

где

$$A_{0и} = \begin{bmatrix} A_{0и} & B_{0и} \\ C_{0и} & D_{0и} \end{bmatrix} = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 B_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ A_2 C_1 + C_2 D_1 & B_2 C_1 + D_1 D_2 \end{bmatrix};$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 B_1 & B_1 B_2 \\ A_2 D_1 & B_2 D_1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с этим представлением выходные величины получим в виде суммы точного и дополнительного интервального слагаемых:

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = A_{0и} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} + (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) \Delta \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\hat{U}_1 = \dot{U}_{1и} + \hat{U}_{1доп}; \quad \hat{I}_1 = \dot{I}_{1и} + \hat{I}_{1доп},$$

где точные слагаемые

$$\dot{U}_{1и} = A_{0и} \dot{U}_2 + B_{0и} \dot{I}_2; \quad \dot{I}_{1и} = C_{0и} \dot{U}_2 + D_{0и} \dot{I}_2$$

и интервальные слагаемые

$$\hat{U}_{1доп} = (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) (\Delta_{11} \dot{U}_2 + \Delta_{12} \dot{I}_2);$$

$$\hat{I}_{1доп} = (\hat{g}_{л} - j\hat{b}_{л}) (\Delta_{21} \dot{U}_2 + \Delta_{22} \dot{I}_2).$$

Поставленная задача получения простого описания решена, поскольку здесь минимизировано количество действий с интервальными величинами. Можно лишь добавить следующее. Учитывая, что наибольший интерес в данном исследовании представляют собой именно интервальные слагаемые, можно при желании осуществлять их дальнейшую детализацию.

**13. Объединение несвязных фрагментов ИВАХ.** Рассмотрим вопросы объединения нескольких несвязных фрагментов ИВАХ-областей возможных режимов, полученных для одного и того же элемента на основе различных экспериментов. Такие задачи носят, как правило, характер диагностических. Существенное значение здесь приобретают специальные предположения о виде элемента и свойствах ИВАХ. Хорошо иллюстрирует эту ситуацию рис. 11, когда требуется восстановить ИВАХ по ее двум фрагментам при естественном требовании, чтобы любая реализация ВАХ проходила через оба фрагмента. Если эти фрагменты характеризуют един-

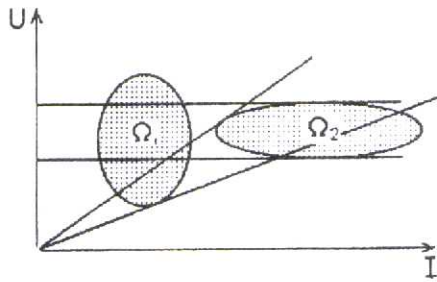


Рис. 11. Сравнение вариантов аппроксимации фрагментов ИВАХ

ственный линейный интервальный элемент, то естественно их заключить в сектор с вершиной в начале координат, а если речь идет об интервальном источнике ЭДС то — в полосу, параллельную оси токов.

В идеальном случае область возможных электрических режимов элемента стягивается в точку, и для линейного элемента с известным характером можно точно указать значение его параметра; для нелинейного элемента получаем одну точку на ВАХ. На основе  $p$  экспериментов можно получить лишь  $p$  точек искомой ВАХ, при наличии отождествляемых параметров (предположение об идентичности некоторых характеристик различных элементов) число точек ВАХ будет большим. При диагностировании нелинейных характеристик естественно использовать гипотезы достаточно общего вида относительно их аналитических свойств. В качестве таких простейших и вместе с тем фундаментальных свойств можно назвать, например, монотонность самой характеристики и (или) ее производных ограниченность (как сверху, так и снизу) первой и (или) высших производных и т.п.

Другая сторона проблемы состоит в том, что практически в результате обработки  $j$ -го ( $j=1, \dots, p$ ) диагностического эксперимента вместо точки получаем область  $\Omega_j$  на плоскости  $(U, I)$ . При этом считается, что она обязательно содержит хотя бы одну точку ИВАХ:

$$\exists \Omega_j \exists a_i \in \Omega_j (a_i \in \text{ВАХ}). \quad (16)$$

Рассмотрим задачу построения допустимой области для всех возможных ВАХ нелинейных элементов (т.е. ИВАХ), одновременно удовлетворяющих априори заданным аналитическим свойствам искомой функции и соотношению (16).

Пусть ВАХ должна удовлетворять свойству  $S$ . Тогда с каждой точкой  $a \in \Omega_j$  можно ассоциировать область  $R(a)$  точек, не противоречащих этому свойству, и с каждой областью  $\Omega_j$  ассоциируем область «разрешенных» точек ВАХ:

$$R(\Omega_j) = UR(a), \quad a \in \Omega_j$$

и область «запрета»:

$$Z(\Omega_j) = \bar{R}(\Omega_j).$$

Поскольку ВАХ не должна противоречить всем  $\Omega_j$  полная область «запрета» на ВАХ получается:

$$Z = \cup Z(\Omega_j) = \bar{R}. \quad (17)$$

Пусть, например, известно, что ВАХ — монотонная кривая (для определенности — неубывающая). Допустим также, что в результате  $p$  диагностических экспериментов получено множество ее точек  $a_j = ((U_j, I_j))$ ,  $j=1, p$ , принадлежащих искомой ВАХ. Тогда запрещенная зона  $Z(a)$ , ассоциированная с точкой  $a = (U_a, I_a)$ , представляет совокупность точек на плоскости  $(U, I)$ , определяемых соотношением

$$Z(a) = \{(U, I) = (U < U_a, I > I_a) \vee (U > U_a, I < I_a)\}. \quad (18)$$

Это соотношение отражает свойство неубывания искомой характеристики.

Очевидно, что, во-первых, разрешенная зона  $R$  для монотонной ВАХ представляет собой совокупности прямоугольников, «склеенных» вершинами в точках  $a_j$ , и, во-вторых, необходимым условием существования связной зоны является возможность упорядочения точек  $a_j$  в соответствии с принципом монотонности. При невыполнении этого условия, т.е. при появлении несовместных точек, разрешенная зона оказывается несвязной, а задача построения ВАХ — противоречивой. Теперь предположим, что в результате  $j$ -го эксперимента получен фрагмент ИВАХ  $\Omega_j$ , который заведомо содержит в себе хотя бы одну точку ВАХ. Для каждой пары  $(U_k^j, I_k^j) \in \Omega_j$  имеем область запрета  $Z_k^j$  и область разрешенных точек  $\bar{Z}_k^j$ . Суммарную разрешенную область от всех точек  $(U_k^j, I_k^j) \in \Omega_j$  получим объединением  $\cup \bar{Z}_k^j$  и, в конечном итоге, образуем область запрета, ассоциированную с  $\Omega_j$  (рис. 12):

$$Z(\Omega_j) = (U < \min U, I > \max I) \vee (U > \max U, I < \min I). \quad (19)$$

Принцип монотонности является частным случаем ограничения на первую производную (се неотрицательность). В более общем случае  $(dU/dI \in [U'_\alpha, U'_\beta])$  для множества экспериментальных точек  $\{a_j\}$  некоторой ВАХ, суммарная разрешенная зона представляет собой связную область («склеенную» вершинами параллелограмма в точках  $a_j$ ). Когда в результате  $j$ -го эксперимента на плоскости  $(U, I)$  получаем замкнутую область  $\Omega_j$ , то зону запрета, ассоциированную с ней,

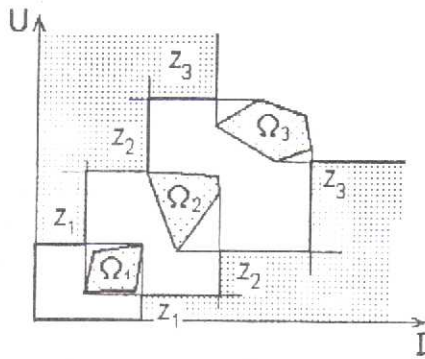


Рис. 12. Объединение фрагментов ИВАХ по принципу монотонности

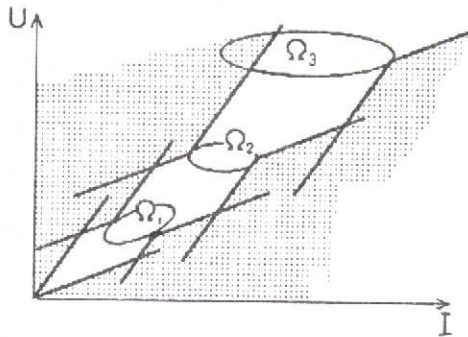


Рис. 13. Объединение фрагментов ИВАХ при ограничениях на первую производную

следует искать в соответствии с (17), и множество допустимых решений получим по аналогии с (19), как показано на рис. 13. Аналогичные рассуждения позволяют учитывать свойства выпуклости ВАХ.

14. **Пример задачи диагностирования ИВАХ.** Задана нелинейная ЭЦ (рис. 14) с двумя идентичными нелинейными резисторами НЭ1 и НЭ2, ВАХ которых подлежат определению. Заданы R-параметры линейного пассивного четырехполюсника:

$$R = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}.$$

Априорная информация о нелинейных зависимостях: заданы ограничения на токи, напряжения и статические сопротивления  $R_{ст}$  —

$$2 \leq R_{ст} \leq 20, \quad 0 \leq U \leq 15, \quad 0 \leq I \leq 6.$$

Кроме того, известно, что ВАХ выпукла к оси напряжения.

Пять диагностических экспериментов отлич

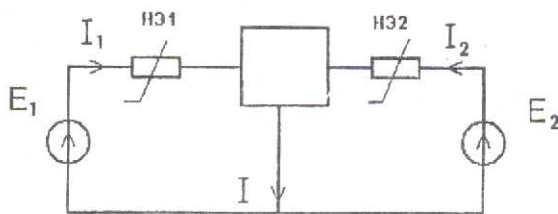


Рис. 14. Схема к примеру диагностирования ИВАХ НЭ

чаются векторами источников ( $E_1, E_2$ ), измеряется только ток  $I$  (первая — третья колонки табл. 2).

Таблица 2

$j$	$E_1$	$E_2$	$I$	$a_j$	$b_j$	$c_j$	$d_j$
1	17,5	22,5	1,0	4,29 0,643	6,0 0,3	2,0 0,7	7,14 0,357
2	35,0	45,0	2,0	8,57 1,29	12,0 0,6	4,0 1,4	14,3 0,714
3	42,5	92,0	3,5	4,0 0,7	6,0 0,3	9,0 3,2	15,0 2,8
4	75,0	149,0	6,0	4,93 1,07	11,2 0,765	10,5 5,24	15,0 4,93
5	139,0	189,0	10,0	13,7 5,07	15,0 4,8	11,0 5,2	15,0 4,93

Формальное описание задачи  $j$ -го эксперимента:

$$\text{Уравнения: } U_1 + I_1 R_{11} + I_2 R_{12} = E_1; \quad U_2 + I_1 R_{21} + I_2 R_{22} = E_2; \quad I_1 + I_2 = I.$$

$$\text{Ограничения: } 0 \leq U_1, U_2 \leq 15, \quad 0 \leq I_1, I_2 \leq 6, \\ U_1 - 2I_1 \geq 0; \quad -U_1 + 20I_1 \geq 0; \\ U_2 - 2I_2 \geq 0; \quad -U_2 - 20I_2 \geq 0$$

(здесь, для краткости, индекс  $j$ -номера эксперимента опущен).

В результате анализа системы для каждого  $j$  получим области значений  $\{U_{1j}, I_{1j}\} \in \Omega_{1j}$  и  $\{U_{2j}, I_{2j}\} \in \Omega_{2j}$ , причем в данном случае эти области вырождаются в отрезки прямых  $a_j b_j$  и  $c_j d_j$ . (Координаты точек:  $a_j = (U_{1\min}, I_{1\max})$ ,  $b_j = (U_{1\max}, I_{1\min})$ ,  $c_j = (U_{2\min}, I_{2\max})$ ,  $d_j = (U_{2\max}, I_{2\min})$ ) приведены в (четвертой—шестой колонках табл. 2.)

Поскольку ИВАХ элементов подразумеваются идентичными, все эти области строим в общей системе координат на рис. 15. Мажоранту и миноранту результирующей ИВАХ получаем, руководствуясь идеями, изложенными выше с учетом выпуклости характеристики к оси напряжений.

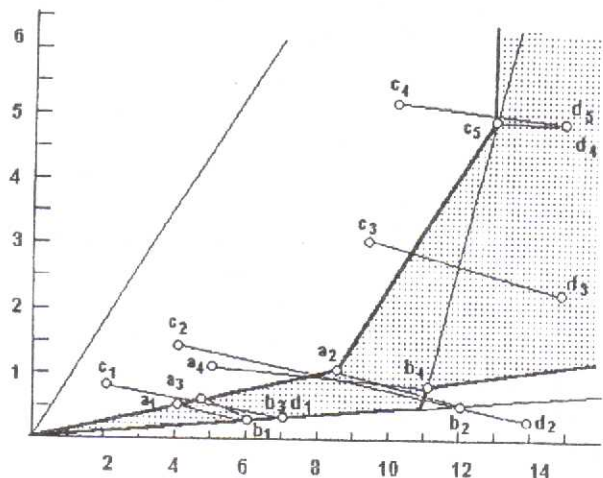


Рис. 15. Результат диагностирования ИВАХ НЭ

**Выводы.** 1. Опыт теории ЭЦ свидетельствует, что при всякой новой формализации задачи, при систематическом введении в ее условие дополнительных факторов либо при применении новых математических методов возникают как новые возможности, так и новые проблемы в эквивалентировании ЭЦ (схемном представлении идеализированными моделями) и в применении традиционных методов решения задач. Интервальная постановка задачи анализа ЭЦ приобретает явно выраженную специфику, отражающую неоднозначность (неопределенность) в связях между токами и напряжениями, характеризующими режимы работы элементов.

2. В своих элементарных постановках теория интервального анализа ЭЦ демонстрирует возможности методического обобщения, ориентированного на классические основы традиционной теории ЭЦ.

3. Представляется, что в курсах теоретической электротехники для студентов и аспирантов есть определенные возможности ввести специальные главы, посвященные интервальному анализу ЭЦ, которые интегрировали бы опыт решения таких задач.

4. Несмотря на то, что в представленной статье намечены некоторые основы постановки и методов решения простых задач интервального анализа ЭЦ, неисследованные области в этой проблеме представляют собой обширное поле деятельности. Достаточно назвать лишь проблему интервального анализа переходных процессов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolev L. Interval analysis — a new tool for modelling and investigating system. — Proceeding Int. AMSNE cong. Modeling and simulation, Athens, 1984, June 27—29, vol. 1.2.
2. Edward P. Oppenheimer, Antony N. Michel. Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems: Part 1 —

Fundamental results. — IEEE Trans. on Circuit and Systems, 1988, vol. 35, № 9.

3. Edward P. Oppenheimer, Antony N. Michel. Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems: Part 2 — Interval Matrix Exponential Function. — IEEE Trans. on Circuit and Systems, 1988, vol. 35, № 10.

4. Edward P. Oppenheimer, Antony N. Michel. Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems: Part 3 — Initial Value Problems. — IEEE Trans. on Circuit and Systems, 1988, vol. 35, № 9.

5. Манусов В.В., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ режимов электрических систем. — Изв. вузов. Электромеханика, 1998, № 9.

6. 1993 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems.

7. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления /Пер. с англ., под ред. Матиясевича Ю.В. — М.: Мир, 1987.

8. Киншт Н.В., Герасимова Г.Н., Кац М.А. Диагностика электрических цепей. — М.: Энергоатомиздат, 1983.

[23.04.98]

*Авторы: Киншт Николай Владимирович окончил электромеханический факультет Новосибирского электротехнического института в 1960 г. Защитил докторскую диссертацию в 1986 г. в Московском энергетическом институте на тему «Диагностика электрических цепей (теория и методы)». Заведующий лабораторией электрофизики и электроэнергетики Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН (г. Владивосток).*

*Кац Марат Аврамович окончил электромеханический факультет Ленинградского политехнического института (ЛПИ) в 1953 г. Защитил кандидатскую диссертацию в 1969 г. на тему «Колебания в главной цепи инвертора с последовательно соединенными конденсаторами». Профессор кафедры ТОЭ Дальневосточного государственного технического университета (г. Владивосток).*

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ И ЧИТАТЕЛЕЙ!

Каждый автор имеет право бесплатно получить 1 экз. журнала с его статьей.

Экземпляры номеров журнала «Электричество» за последние годы можно приобрести в редакции журнала.