63

BMwF - GMD - 11

GESELLSCHAFT
FÜR MATHEMATIK UND DATENVERARBEITUNG

BONN

Nr. 11

Hans-Joachim Ortolf :

Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik

1969

BERICHTE DER GESELLSCHAFT FÜR MATHEMATIK UND DATENVERARBEITUNG

herausgegeben von

K. H. Böhling, F. Krückeberg, E. Peschl, C. A. Petri, H. Unger

im Auftrage und unter Förderung des Bundesministeriums für wissenschaftliche Forschung und des Landesamtes für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen

Als Manuskript gedruckt.

Druck und Vertrieb :
Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung
5201 Birlinghoven
Schloß

Einleitung

Das Ziel dieser vorliegenden Arbeit ist nicht, neue Verfahren und numerische Methoden zu entwickeln, sondern eine zunächst rein theoretische Strukturuntersuchung der Intervallrechnung durchzuführen.

Die Intervallrechnung, wie sie bei Moore [8] und Krückeberg [19]-[22] eingeführt wird, zeigt bei näherer Betrachtung, daß die algebraische Struktur auf der Menge der Intervalle nur wenig Eigenschaften besitzt. So existiert z.B. weder eine Inverse bzgl. der Addition noch eine der Subtraktion, Multiplikation oder Division.

In Arbeiten von Apostolatos, Kulisch, und Nickel z.B. [1] - [4] wird durch die Theorie der abhängigen Intervalle die Intervallrechnung erweitert, und es werden dabei neue Struktureigenschaften gewonnen. Hierbei wird allerdings das Prinzip, nur die Intervallenden zur Berechnung zu verwenden, aufgegeben.

Die vorliegende Arbeit versucht nun, neue Eigenschaften der algebraischen Struktur aufzuzeigen, ohne das erwähnte Prinzip zu verlassen. Das Ziel, Gruppenstrukturen bezüglich Multiplikation und Addition zu gewinnen, wird erreicht

1. durch eine neue Formulierung der bekannten Verknüpfungen und
2. durch die Hinzunahme neuer Verknüpfungen.

Mit der Hinzunahme neuer Verknüpfungen wird auch die Einführung neuer Elemente notwendig, die nicht als Intervalle gedeutet werden können. Doch kann man mit deren Hilfe auf Fragen eingehen, die für die Intervallrechnung von großer Bedeutung sind. Es ergibt sich eine Dualtheorie, die auch gerade im Hinblick auf die in der Bonner Schule angestrebte „Innendarstellung" von Interesse ist.

Die erreichte Gruppenstruktur macht es möglich, die Menge der Intervalle als Teilmenge eines linearen topologischen Raumes, beispielsweise des $\mathbb{R}^2$, aufzufassen. Die Anwendung funktionalanalytischer Methoden auf die Intervallrechnung in weiterem Umfang wird dadurch möglich.

In Kapitel I werden nun verschiedene Standpunkte vorbereitet, von denen ausgehend die Fragestellungen entwickelt und betrachtet werden.

In Kapitel II werden neue Verknüpfungen eingeführt, nämlich die erweiterte Intervalladdition und Multiplikation. Es wird die Gruppeneigenschaft des $\mathbb{R}^2$ bzgl. beider Verknüpfungen nachgewiesen, und die Verknüpfungen werden dabei im mengentheoretischen Sinne erläutert.

Das Fehlen distributiver Gesetze ist ein großer Nachteil des Kalküls. In Kapitel III wird deshalb das Inklusionsverhalten bei gemischten arithmetischen Ausdrücken untersucht, was zu den sogenannten "Subdistributivitäten" führt (in Erweiterung von Moore [8]).

In Kapitel IV wird der Raum $\mathbb{R}^2$ topologisiert und damit auch die Menge der Intervalle. Es lassen sich Bedingungen angeben, unter welchen eine Norm der Schwarzschen Ungleichung genügt. Die Stetigkeit einer Intervallabbildung wird in Beziehung gebracht zu einer mengenwertigen Abbildung des $\mathbb{R}^1$ in sich, die stetig ist im erweiterten Sinne (Berge [23]). Während die Frage nach der Differenzierbarkeit negativ beantwortet werden muß, läßt sich die Lipschitzbeschränktheit jedoch für bestimmte Abbildungen nachweisen.

In Kapitel V werden einige in der Formulierung sehr einfache Sätze, deren praktische Anwendung aber erfolgversprechend ist, angegeben. Diese Sätze garantieren Konvergenz von Iterationsfolgen auf Grund von Monotonieeigenschaften, insbesondere der für Intervallabbildungen charakteristischen Teilmengeneigenschaft

In Kapitel VI wird die in I - III aufgebaute Dualtheorie zur Darstellung der Inneninterval1- und Außenintervallösung eines Gleichungssystems verwendet.

Kapitel VII bringt eine Übertragung von Ergebnissen aus I-VI auf Matrizen. Eine Topologie und gewisse Verknüpfungen werden eingeführt. Daraus resultierende Subdistributivitätsgesetze werden aufgezeigt. Dies liefert die Grundlage für Kapitel VIII, wo ein spezielles Verfahren nach Krückeberg [19] behandelt wird, um die Leistungsfähigkeit der eingeführten Mittel zu demonstrieren.
Dabei werden über bekannte Ergebnisse (Apostolatos - Kulisch [4]) hinaus neue gefunden, die sich insbesondere auf die Konvergenz der numerischen Werte erstrecken.

Das numerische Beispiel in IX zeigt dann auch, daß in Verbindung mit den Ergebnissen aus V numerisch konvergente Verfahren gewonnen werden können.

I Zusammenhang zwischen Intervallrechnung und $\mathbb{R}^2$-Verknüpfungen.

Den Betrachtungen liegen die abgeschlossenen Intervalle aus der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zugrunde.

1.1 Definition:

Sei $\mathbb{R}$ in gewohnter Weise geordnet. Die Menge

$\underset{\smile}{a} := [\underset{\llcorner}{a}, \underset{\lrcorner}{a}] := \{x \mid \underset{\llcorner}{a} \leq x \leq \underset{\lrcorner}{a} \,;\, x, \underset{\llcorner}{a}, \underset{\lrcorner}{a} \in \mathbb{R}\}$

heiße Intervall. $\underset{\llcorner}{a}$ heiße linke, $\underset{\lrcorner}{a}$ rechte Intervallecke.

Die Gesamtheit aller Intervalle sei mit $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Ist $\underset{\smile}{a} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so gilt:

$$\underset{\llcorner}{a} = \inf\{\alpha \mid \alpha \in \underset{\smile}{a}\}$$
$$\underset{\lrcorner}{a} = \sup\{\alpha \mid \alpha \in \underset{\smile}{a}\}$$

Hierbei ist die inf- und sup-Bildung zu verstehen bezüglich der Ordnung in $\mathbb{R}$. Denn auch $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ kann halbgeordnet werden durch die Enthaltenseinsrelation.

1.2 Definition:

Sei $\underset{\smile}{a}, \underset{\smile}{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

$$\underset{\smile}{a} \leq \underset{\smile}{b} :\Longleftrightarrow \underset{\smile}{a} \subset \underset{\smile}{b}.$$

Hieraus folgt sofort die Äquivalenz

1.3 $$\underset{\smile}{a} \leq \underset{\smile}{b} \Longleftrightarrow \underset{\llcorner}{a} \geq \underset{\llcorner}{b} \text{ und } \underset{\lrcorner}{a} \leq \underset{\lrcorner}{b}.$$

Ebenso läßt sich ein Zusammenhang zwischen Durchschnitts- bzw. Vereinigungs- und Infimums- bzw. Supremumsbildung in Bezug auf die Halbordnung 1.2 einsehen:

1.4. Satz:

Sei $\underset{\smile}{a}, \underset{\smile}{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $\underset{\smile}{a} \cap \underset{\smile}{b} \neq \emptyset$. Dann gilt

1.5. $$\underset{\smile}{a} \cap \underset{\smile}{b} = \inf\{\underset{\smile}{a}, \underset{\smile}{b}\},$$

1.6 $$\underset{\smile}{a} \cup \underset{\smile}{b} = \sup\{\underset{\smile}{a}, \underset{\smile}{b}\}.$$

Beweis: $\underline{a} \cap \underline{b} = \{x \mid a_{\llcorner} \leq x \leq a_{\lrcorner} ,\ b_{\llcorner} \leq x \leq b_{\lrcorner}\}$

$= \{x \mid \max\{a_{\llcorner} , b_{\llcorner}\} \leq x \leq \min\{a_{\lrcorner} , b_{\lrcorner}\}\}$

$= \inf\{\underline{a} , \underline{b}\}$

$\underline{a} \cup \underline{b} = \{x \mid a_{\llcorner} \leq x \leq a_{\lrcorner}\} \cup \{x \mid b_{\llcorner} \leq x \leq b_{\lrcorner}\}$

$= \{x \mid \min\{a_{\llcorner} , b_{\llcorner}\} \leq x \leq \max\{a_{\lrcorner} , b_{\lrcorner}\}\}$

$= \sup\{\underline{a} , \underline{b}\}$

q. e. d.

1.7 Korollar:

Sei $\underline{a_i} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

1.8. $\bigcap_{I} \underline{a_i} = \inf_{I} \underline{a_i}$, wenn $\bigcap_{i \in I} \underline{a_i} \neq \emptyset$

1.9. $\bigcup_{I} \underline{a_i} = \sup_{I} \underline{a_i}$, wenn $\bigcup_{I} \underline{a_i} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$

Doch nicht nur in dieser Beziehung bietet sich eine Betrachtung der Intervallecken anstelle der Intervalle an, sondern auch wenn man die in der Intervallrechnung eingeführten Operationen näher untersucht.

In der Literatur (z.B. [8]) sind folgende Intervallverknüpfungen definiert:

Definition:

1.10 $\underline{a} + \underline{b} := [a_{\llcorner} + b_{\llcorner} ; a_{\lrcorner} + b_{\lrcorner}]$

1.11 $\underline{a} - \underline{b} := [a_{\llcorner} - b_{\lrcorner} ; a_{\lrcorner} - b_{\llcorner}]$

1.12 $\underline{a} * \underline{b} := [\min\{a_{\llcorner} b_{\llcorner} , a_{\llcorner} b_{\lrcorner} , a_{\lrcorner} b_{\llcorner} , a_{\lrcorner} b_{\lrcorner}\} ;$
$\max\{a_{\llcorner} b_{\llcorner} , a_{\llcorner} b_{\lrcorner} , a_{\lrcorner} b_{\llcorner} , a_{\lrcorner} b_{\lrcorner}\}]$

1.13 $\underline{a} : \underline{b} := \underline{a} * [\frac{1}{b_{\lrcorner}} , \frac{1}{b_{\llcorner}}]$, $0 \notin \underline{b}$.

Diese vier Relationen können, so wie sie angegeben sind, auch als Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt werden und nicht nur als solche von $\mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Die Elemente von

$\mathbb{I}(\mathbb{R})$ sind ja genau durch die Punkte $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ charakterisiert, für die gilt $a_1 \leq a_2$. Im Folgenden sollen deshalb die Definitionen 1.1o bis 1.13 auch für die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ gelten. Aufgrund der eineindeutigen Beziehung zwischen $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ und der Menge $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq x_2,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ soll auch $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ für die entsprechende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ stehen.

Die Auffassung der Intervalle als Mengen kann jedoch nicht außer Acht gelassen werden. Es ist vielmehr nützlich, die wechselweise Bedeutung zu erleuchten. So kann man die Verknüpfungen 1.1o bis 1.13 deuten:

Sei $\underset{\smile}{a}, \underset{\smile}{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $0 \notin \underset{\smile}{b}$, dann gilt:

1.14 $$\underset{\smile}{a} + \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \; \bigcup_{\beta \in \underset{\smile}{b}} \{\alpha+\beta\}$$

1.15 $$\underset{\smile}{a} - \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \; \bigcup_{\beta \in \underset{\smile}{b}} \{\alpha-\beta\}$$

1.16 $$\underset{\smile}{a} * \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \; \bigcup_{\beta \in \underset{\smile}{b}} \{\alpha\cdot\beta\}$$

1.17 $$\underset{\smile}{a} : \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \; \bigcup_{\beta \in \underset{\smile}{b}} \{\alpha:\beta\}$$

Diese Darstellungen geben das wieder, was in der Intervallrechnung gemeint ist und wovon diese ausgeht. Der Sachverhalt soll aber weiter erleuchtet werden.

(1.15 und 1.17 bleiben unbeachtet, es verläuft hier alles analog wie bei 1.14 und 1.16.)

Für 1.14 und 1.16 schreiben wir zunächst

1.18 $$\underset{\smile}{a} + \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\smile}{b}\}$$

1.19 $$\underset{\smile}{a} * \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \{[\alpha,\alpha] * \underset{\smile}{b}\}$$

Dann kommt man mit 1.7 Korollar leicht zu einer Deutung von 1.1o und 1.12, wenn man die Verknüpfungen im $\mathbb{R}^2$ betrachtet.

1.2o $$\underset{\smile}{a} + \underset{\smile}{b} = \sup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\smile}{b}\}$$

1.21 $$\underset{\smile}{a} * \underset{\smile}{b} = \sup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \{[\alpha,\alpha] * \underset{\smile}{b}\}$$

1.21 spielt eine große Rolle bei der Einführung der Multiplikation im nächsten Kapitel.

Für die Behandlung von Gleichungen ist noch eine Auffassung von 1.1o und 1.12 von Bedeutung, die man aus 1.14 und 1.16 abliest:

1.22 $$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \underline{a} \\ \beta \in \underline{b}}} \quad \bigvee_{\gamma \in \underline{a} + \underline{b}} \quad \alpha + \beta = \gamma$$

1.23 $$\bigwedge_{\gamma \in \underline{a} + \underline{b}} \quad \bigvee_{\substack{\alpha \in \underline{a} \\ \beta \in \underline{b}}} \quad \alpha + \beta = \gamma$$

1.24 $$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \underline{a} \\ \beta \in \underline{b}}} \quad \bigvee_{\gamma \in \underline{a} \ast \underline{b}} \quad \alpha \cdot \beta = \gamma$$

1.25 $$\bigwedge_{\gamma \in \underline{a} \ast \underline{b}} \quad \bigvee_{\substack{\alpha \in \underline{a} \\ \beta \in \underline{b}}} \quad \alpha \cdot \beta = \gamma$$

II Gruppenstruktur des $\mathbb{R}^2$ bezüglich erweiterter Intervalladdition und -multiplikation.

Wir betrachten nun die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ und auf ihr die Intervalladdition 1.1o. Man sieht aus der Definition, daß diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, und daß das Intervall $[0,0]$ das neutrale Element für diese Verknüpfung ist. Eine Gruppeneigenschaft ist jedoch nicht erfüllt die Forderung nach der Existenz des inversen Elements. Denn sei $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ mit $\underline{a} \neq \overline{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so folgt immer $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$ mit $\underline{a} + \underline{b} \neq \overline{a} + \overline{b}$, wohingegen beim neutralen Element $[0,0]$ ja linke und rechte Ecke gleich sind. Ein inverses Element existiert also nur für die Elemente $\mathbf{a} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$, $\underline{a} = \overline{a}$. Im $\mathbb{R}^2$ kann bezüglich 1.1o sofort ein inverses Element zu $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ angegeben werden, und zwar $[-\underline{a}, -\overline{a}]$.
Auch bezüglich 1.11 erhält man eine Inverse zu $[\underline{a}, \overline{a}]$ nämlich $[\overline{a}, \underline{a}]$. Deshalb definieren wir

Definition:

Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

2.1 $\quad \delta(a_1, a_2) := (-a_1, -a_2)$

2.2 $\quad i(a_1, a_2) := (a_2, a_1)$

und in Ergänzung :

2.3. $\quad +(a_1, a_2) := (a_1, a_2)$

2.4. $\quad -(a_1, a_2) := (-a_2, -a_1)$

Dann erhalten wir mit 2.1 bis 2.4 und

2.5. $$(a_1, a_2)\ \sigma\ (b_1, b_2) := (a_1, a_2) + (\sigma(b_1, b_2))$$
$$(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2,\ \sigma \in \{+, -, \delta, i\}$$

vier Verknüpfungen im $\mathbb{R}^2$.

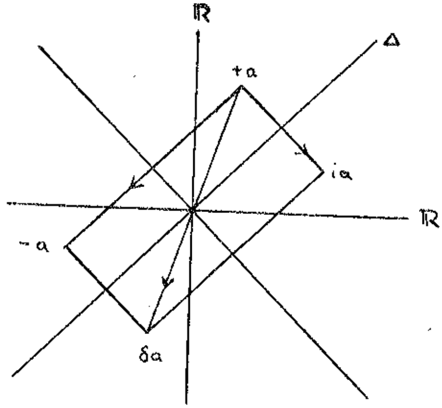
Die durch 2.1 bis 2.4 definierten Abbildungen bilden den Raum $\mathbb{R}^2$ in sich ab. 2.3 ist die Identität in $\mathbb{R}^2$, 2.1 die Spiegelung am Nullpunkt, 2.4 die Spiegelung an der Nebendiagonalen und 2.2 die Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Diese werde im Folgenden mit Δ bezeichnet.

Definition:

2.6. $$\Delta := \{ (\underline{a}, \underline{a}_1) \mid \underline{a} = \underline{a}_1 ; \underline{a}, \underline{a}_1 \in \mathbb{R} \}$$

Bei den Abbildungen +, −, δ, i handelt es sich um eine nichtzyklische Gruppe der Ordnung vier, der Spiegelungsgruppe (vgl.Skizze 1) des $\mathbb{R}^2$, mit folgender Verknüpfungstabelle:

+	−	δ	i
−	+	i	δ
δ	i	+	−
i	δ	−	+



Skizze 1

Die Abbildung i läßt nun neue Aspekte bei den zu Ende des ersten Kapitels aufgeworfenen Fragen aufkommen. Zunächst läßt sich eine duale Aussage zu 1.18 gewinnen:

2.7. Satz:

Sei $\underline{a}, \underline{b}, i\,\underline{a} + \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$i\,\underline{a} + \underline{b} = \bigcap_{\alpha \in \underline{a}} \{ [\alpha', \alpha] + \underline{b} \}$$

Beweis: 1) $i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \subset \bigcap_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b}\}$

Nach Definition 2.2 folgt:

$$i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = [\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}]$$
$$= \{ x \mid \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \leq x \leq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \}$$
$$\subset \{ x \mid \underset{\sim}{b} + \alpha \leq x \leq \underset{\sim}{b} + \alpha, \text{ f.a. } \alpha \in \underset{\sim}{a} \}$$
$$= \bigcap_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b}\}$$

2) $i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \supset \bigcap_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b}\}$

$$x < \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \Longrightarrow x \notin \underset{\sim}{b} + [\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}]$$
$$x > \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \Longrightarrow x \notin \underset{\sim}{b} + [\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}]$$

woraus folgt: $i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \supset \bigcap_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b}\}$

Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

q. e. d

Auch 1.22 und 1.23 haben ihr Dual, das man aus 2.7 Satz ableitet:

2.8. <u>Korollar:</u>

Sei $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt

2.9 $$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \underset{\sim}{a} \\ \gamma \in i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}}} \bigvee_{\beta \in \underset{\sim}{b}} \alpha + \beta = \gamma$$

2.1o $$\bigwedge_{\beta \in b} \bigvee_{\substack{\alpha \in \underset{\sim}{a} \\ \gamma \in i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}}} \alpha + \beta = \gamma$$

Beweis: Nach 2.7 Satz ist $i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \bigcap_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{[\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b}\}$.
Also liegt jedes $\gamma \in i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ in allen $\{[\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b}\}$. Hieraus folgt sofort Behauptung 2.9.
2.1o folgt aus $i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = [\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}]$. Wir wählen β beliebig aus $\underset{\sim}{b}$. Dann gilt entweder 1. $\beta + \underset{\sim}{a} \in i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ oder

2. $\beta + \underset{\sim}{a} \geq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$. Aus 1. folgt die Behauptung sofort. Bei 2. folgt $\beta + \underset{\sim}{a} \leq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \leq \beta + \underset{\sim}{a}$. Also gibt es sicher ein $\alpha \in \underset{\sim}{a}$ mit $\beta + \alpha = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$.

q. e. d.

2.7. Satz und 2.8. Korollar haben natürlich auf Grund des mengentheoretischen Charakters ihrer Aussage keine Bedeutung für die Betrachtung im $\mathbb{R}^2$. Hier dualisieren wir 1.2o und gewinnen eine Deutung:

2.11 Korollar:

Sei $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$i\,\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \inf_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{ [\alpha,\alpha] + \underset{\sim}{b} \}.$$

Beweis: Mit 1.7 Korollar folgt die Behauptung sofort aus 2.7 Satz.

q. e. d.

Der Zusammenhang zwischen 2.11 und 1.2o kann auch dadurch erläutert werden, daß, wie man sich anhand von 1.3 klar machen kann, gilt

$$\underset{\sim}{a} = \sup_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{ [\alpha,\alpha] \} \quad \text{und} \quad i\,\underset{\sim}{a} = \inf_{\alpha \in \underset{\sim}{a}} \{ [\alpha,\alpha] \} .$$

Die Ergebnisse von 2.7 Satz bis 2.11 Korollar lassen sich mit 2.5 sofort auf die Intervallsubtraktion übertragen. Ähnliche Aussagen für die Intervallmultiplikation herzuleiten ist ohne weitere Vorbereitung nicht möglich.

Zunächst gilt es zu beachten, daß die Definition 1.12 natürlich auch für Elemente aus ganz $\mathbb{R}^2$ gelten kann. Die Definition so auf ganz $\mathbb{R}^2$ gelten zu lassen hat Vorteile. Jedoch kann dann keine Inverse gefunden werden. Wie man sofort sieht, gibt 1.12 eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit der weiteren Eigenschaft, daß nur $\Delta * \Delta = \Delta$ ergibt, während für Elemente $x, y \notin \Delta$ auch $x * y \notin \Delta$ gilt. Das Einheitselement $[1,1]$ liegt jedoch in Δ. Also

kann für $x \notin A$ keine Inverse bezüglich 1.12 existieren.
Bei dem Versuch, eine neue Multiplikation aufzubauen, greifen wir auf die skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^2$ zurück.

2.12 Definition:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, dann heiße

$$\alpha \cdot (a_1, a_2) := (\alpha a_1, \alpha a_2)$$

skalare Multiplikation.

Diese skalare Multiplikation ist für die Mengenanschauung sinnlos. Denn ist $(a_1, a_2) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}^-$, dann ist $(\alpha a_1, \alpha a_2) \notin \mathbb{I}(\mathbb{R})$ außer für $a_1 = a_2$. Es soll ja aber das Vielfache, auch das negative Vielfache eines Intervalls ein Intervall sein. So liegt folgende Definition nahe:

2.13 Definition:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann sei

$$\alpha \boxdot (a_1, a_2) := \begin{cases} \alpha \cdot (a_1, a_2) & \text{für } \alpha \geq 0 \\ \alpha \cdot (a_2, a_1) & \text{für } \alpha < 0 \,. \end{cases}$$

2.13 kann man auch so schreiben:

2.14 $$\alpha \boxdot a = \begin{cases} \alpha \cdot a & \alpha \geq 0 \\ \alpha \cdot (ia) & \alpha < 0 \end{cases}$$

Definition 2.13 beinhaltet nun die aus der Intervallrechnung bekannte Multiplikation eines Intervalls mit einer reellen Zahl.
1.19 und 1.21 erhalten mit 2.13 nachfolgende Form für $\underset{\smile}{a}, \underset{\smile}{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$:

2.15 $$\underset{\smile}{a} * \underset{\smile}{b} = \bigcup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \{\alpha \boxdot \underset{\smile}{b}\}$$

2.16 $$\underset{\smile}{a} * \underset{\smile}{b} = \sup_{\alpha \in \underset{\smile}{a}} \{\alpha \boxdot \underset{\smile}{b}\} \,.$$

2.16 nehmen wir als Ausgangspunkt, um zu einer Erweiterung der Intervallmultiplikation auf ganz $\mathbb{R}^2$ zu gelangen. Und zwar ersetzen wir die sup- durch die inf-Bildung. Damit wird eine neue zu 2.16 duale Definition gebildet:

2.17 Definition:

Sei $\underline{a} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$.

$$\underline{a} \diamond \underline{b} := \inf_{\alpha \in \underline{a}} \{\alpha \boxdot \underline{b}\}$$

2.16 gilt nur für $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ im Gegensatz zu 2.17. Wir erweitern 2.16 auf $\underline{a} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$, was ja ohne weiteres möglich ist, und bezeichnen diese Verknüpfung mit $\circledast$.

Ist $\underline{a} \diamond \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so folgt mit Korollar 1.7

2.18 $$\underline{a} \diamond \underline{b} = \bigcap_{\alpha \in \underline{a}} \{\alpha \boxdot \underline{b}\}.$$

2.18 kann also als das Dual von 2.15 angesehen werden. Auch zu 1.24 kann ein Dual gefunden werden:

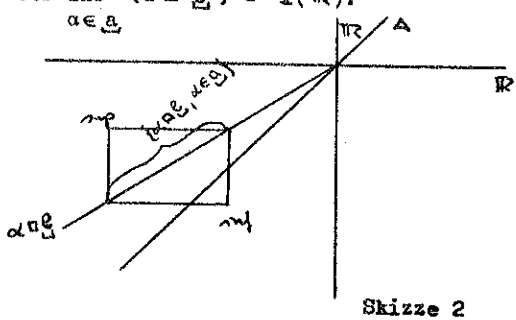
Es gilt für $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \diamond \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$:

2.19 $$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \underline{a} \\ \gamma \in \underline{a} \diamond \underline{b}}} \bigvee_{\beta \in \underline{b}} \quad \alpha \cdot \beta = \gamma$$

Der Beweis folgt aus 2.18. Ist nämlich $\gamma \in \bigcap_{\alpha \in \underline{a}} \{\alpha \boxdot \underline{b}\}$, so liegt γ in jedem $\alpha \boxdot \underline{b}$, so daß bei Wahl von α und γ das Element β bestimmt ist.

Es sei angemerkt, daß die Voraussetzung $\underline{a} \diamond \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ für 2.18 und 2.19 nicht trivial ist. Man sieht, daß wohl aus $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ folgt $\sup_{\alpha \in \underline{a}} \{\alpha \boxdot \underline{b}\} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nicht aber $\inf_{\alpha \in \underline{a}} \{\alpha \boxdot \underline{b}\} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

(vgl. Skizze 2)
Entsprechendes gilt auch für die Voraussetzung $\underline{a} + \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ in 2.7 und 2.8.



Skizze 2

Die angestrebte Multiplikation baut sich auf 2.16 und 2.17 auf. Dazu schreiben wir diese Gleichungen in einer 1.12 entsprechenden Form, die zeigt, daß die Verknüpfung durch die Eckpunkte dargestellt wird.

Sei also $\underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{I}(\mathbb{R}),\ \underline{b} \in \mathbb{R}^2$.

2.20
$$\underline{a} \circledast \underline{b} = \begin{cases} 0 \quad \text{wenn } 0 \in \underline{a},\ \underline{b} \in i\,\mathbb{I}(\mathbb{R}),\ 0 \in i\,\underline{b} \\ \left[\min\{\underbrace{a_1 \boxdot \underline{b}},\ \underbrace{a_2 \boxdot \underline{b}}\} \mid \max\{\underbrace{a_1 \boxdot \underline{b}},\ \underbrace{a_2 \boxdot \underline{b}}\}\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

2.21
$$\underline{a} \diamond \underline{b} = \begin{cases} 0 \quad \text{wenn } 0 \in \underline{a},\ \underline{b} \in \mathbb{I}(\mathbb{R}),\ 0 \in \underline{b} \\ \left[\max\{\underbrace{a_1 \boxdot \underline{b}},\ \underbrace{a_2 \boxdot \underline{b}}\} \mid \min\{\underbrace{a_1 \boxdot \underline{b}},\ \underbrace{a_2 \boxdot \underline{b}}\}\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $\underbrace{a_1 \boxdot \underline{b}}$ die erste Komponente von $a_1 \boxdot \underline{b}$ etc.

Mit der folgenden Definition

2.22 Definition:

Sei $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$. Dann sei
$$|a| := \begin{cases} a & a \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ ia & a \in i\,\mathbb{I}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

folgt dann die Definition der Multiplikation:

2.23 Definition:

Sei $a, b \in \mathbb{R}^2$.
$$a \cdot b := \begin{cases} a \circledast b & a \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ |a| \diamond b & a \in i\,\mathbb{I}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Diese Multiplikation nach 2.23 umfaßt also jene aus 1.12, die normalerweise bei der Intervallrechnung Verwendung findet. Läßt man 1.12 für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$ zu, was ja möglich ist, so kann dies durch

2.24
$$a * b = |a| \cdot |b|$$

dargestellt werden.

Auch 2.13 ist in 2.23 enthalten; es gilt:
$$\alpha \boxdot b = (\alpha, \alpha) \cdot b.$$

Die durch 2.23 in $\mathbb{R}^2$ eingeführte Struktur soll im weiteren erläutert werden. Insbesondere läßt sich für eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ Gruppeneigenschaft nachweisen.

Zunächst gilt:

2.25 Lemma:

Sei $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

2.26 $$(ia) \cdot (ib) = i(a \cdot b)$$

2.27 $$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

2.28 $$(\delta a) \cdot (ib) = \delta(a \cdot b)$$

Beweis:

2.26: Sei $ia \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $0 \notin |a|$. Nach 2.23 gilt:

$$(ia) \cdot (ib) = [\min\{\underbrace{a_1 \square (ib)}, \underbrace{a_2 \square (ib)}\} \mid \max\{\underbrace{a_1 \square (ib)}, \underbrace{a_2 \square (ib)}\}]$$

und mit 2.13

$$= [\min\{\underbrace{a_1 \square b}, \underbrace{a_2 \square b}\} \mid \max\{\underbrace{a_1 \square b}, \underbrace{a_2 \square b}\}]$$

woraus nach 2.23 und 2.21 folgt

$$= i(a \cdot b) .$$

Sei $a \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. $0 \notin a$. Dann gilt nach 2.23 und 2.21

$$(ia) \cdot (ib) = [\max\{\underbrace{a_1 \square (ib)}, \underbrace{a_2 \square (ib)}\} \mid \min\{\underbrace{a_1 \square (ib)}, \underbrace{a_2 \square (ib)}\}]$$

und mit 2.13

$$= [\max\{\underbrace{a_1 \square b}, \underbrace{a_2 \square b}\} \mid \min\{\underbrace{a_1 \square b}, \underbrace{a_2 \square b}\}]$$

mit 2.23 und 2.2o

$$= i(a \cdot b)$$

Für $0 \in |a|$, $a \cdot b \neq 0$ geht der Beweis ebenso. Zu beachten sind die Fälle, wo nach 2.2o oder 2.21 $a \cdot b = 0$ ist, wenn also $0 \in |a|$ und $0 \in |b|$ und $a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ oder $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ ist.

Sei $0 \in |a|$, $0 \in |b|$, $a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt für $i(ia), ib$: $i(ia), ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Es ist also $(ia) \cdot (ib) = 0 = a \cdot b$. Ebenso folgt aus $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $ia, i(ib) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ also auch $(ia) \cdot (ib) = 0 = a \cdot b$.

Damit ist 2.26 also gezeigt.

2.27: (a) Sei $a \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $a \cdot b \neq 0$, dann ist auch $-a \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

$(-a) \cdot b = [\min\{\underline{(-a_2) \boxdot b}, \underline{(-a_1) \boxdot b}\} | \max\{\underline{(-a_2) \boxdot b}, \underline{(-a_1) \boxdot b}\}]$

mit 2.13 folgt

$$= [\min\{\underline{-a_2 \boxdot b}, \underline{-a_1 \boxdot b}\} | \max\{\underline{-a_2 \boxdot b}, \underline{-a_1 \boxdot b}\}]$$
$$= [-\max\{\underline{a_2 \boxdot b}, \underline{a_1 \boxdot b}\} | -\min\{\underline{a_2 \boxdot b}, \underline{a_1 \boxdot b}\}]$$
$$= -(a \cdot b)$$

(b) Ist $ia \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $a \cdot b \neq 0$, so gilt

$(-a) \cdot b = (i(-(ia))) \cdot b$

mit 2.26 folgt:

$$= i((-(ia)) \cdot (ib))$$

und mit (a)

$$= i(-((ia) \cdot (ib)))$$

weiter mit 2.26

$$= i(-(i(a \cdot b)))$$
$$= -(a \cdot b)$$

(c) Im Falle $a \cdot b = 0$ sind wieder zu beachten die Fälle $0 \in |a|$, $0 \in |b|$ und $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ oder $a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Hier gilt aber: Ist $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so auch $i(-a), b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, und ist $a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, dann auch $-a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann ist nach Definition $(-a) \cdot b = \hat{0}$.

2.28 folgt sofort aus 2.26 und 2.27:

$(\delta a) \cdot (ib) = (-(ia)) \cdot (ib) = -((ia) \cdot (ib)) = -(i(a \cdot b)) = \delta(a \cdot b)$

q. e. d

Dieses Lemma 2.25 leistet nun gute Hilfe beim Beweis der Gruppeneigenschaften des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Multiplikation 2.23. Zunächst zeigen wir Kommutativität, Assoziativität und Existenz des neutralen Elementes.

2.29 Satz:

Sei $a, b, c \in \mathbb{IR}^2$. Dann gilt:

2.3o $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität

2.31 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Assoziativität

2.32 $(1, 1) \cdot a = a$ Einselement

Beweis: Sei $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$.

2.3o: (a) Sind $a, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, dann folgt die Behauptung aus der Identität $a \cdot b = a * b$ und der für $*$ bekannten Kommutativität.

(b) Ist $ia, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so folgt 2.3o aus 2.26 und (a):
$a \cdot b = i((ia) \cdot (ib)) = i((ib) \cdot (ia)) = b \cdot a$

(c) Ist $a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $0 \notin a$, dann folgt mit 2.23 und 2.2o

$$a \cdot b = [\min\{\underline{a_1 \boxdot b}\, , \underline{a_2 \boxdot b}\} \mid \max\{\underline{a_1 \boxdot b}\, , \underline{a_2 \boxdot b}\}]$$

und mit 2.13 und 2.22

$$= [\min\{\underline{a_1 \boxdot |b|}, \underline{a_2 \boxdot |b|}\} \mid \max\{\underline{a_1 \boxdot |b|}\, , \underline{a_2 \boxdot |b|}\}]$$

$$= [\min\{\max\{a_1 b_1, a_1 b_2\}, \max\{a_2 b_1, a_2 b_2\}\} \mid \max\{\min\{a_1 b_1, a_1 b_2\}, \min\{a_2 b_1, a_2 b_2\}\}]$$

Nun ist $0 \notin a$ und $ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, also folgt

entweder $a_1 b_1 \geq a_1 b_2$, $a_2 b_1 \geq a_2 b_2$ für $a_1, a_2 > 0$

oder $a_1 b_1 \leq a_1 b_2$, $a_2 b_1 \leq a_2 b_2$ für $a_1, a_2 < 0$

Damit ergibt sich für

$$a \cdot b = \begin{cases} [\min\{a_1 b_1 , a_2 b_1\} \mid \max\{a_1 b_2 , a_2 b_2\}] \\ [\min\{a_1 b_2 , a_2 b_2\} \mid \max\{a_1 b_1 , a_2 b_1\}] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\max\{\min\{a_1 b_1 , a_2 b_1\}, \min\{a_1 b_2 , a_2 b_2\}\} \mid \\ \quad \min\{\max\{a_1 b_2 , a_2 b_2\}, \max\{a_1 b_1 , a_2 b_1\}\}] \\ [\max\{\min\{a_1 b_2 , a_2 b_2\}, \min\{a_1 b_1 , a_2 b_1\}\} \mid \\ \quad \min\{\max\{a_1 b_1 , a_2 b_1\}, \max\{a_1 b_2 , a_2 b_2\}\}] \end{cases}$$

$$= [\max\{\underline{b_1 \boxdot a}\, , \underline{b_2 \boxdot a}\} \mid \min\{\underline{b_1 \boxdot a}\, , \underline{b_2 \boxdot a}\}]$$

$$= b \cdot a$$

(d) Ist $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $0 \notin |a|$, so folgt die Behauptung mit 2.26 und (c):

$$a \cdot b = i((ia) \cdot (ib)) = i((ib) \cdot (ia)) = b \cdot a$$

(e) Ist $0 \in |a|$, $0 \in |b|$ und $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ oder $a, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so folgt die Behauptung sofort aus 2.23.

(f) Die Voraussetzung $0 \notin |a|$ in (c) und (d) kann ebenso gut durch $0 \notin |b|$ ersetzt werden, so daß die ausgeschlossenen Fälle genau die in (e) behandelten sind.
Damit ist die Kommutativität 2.3o gezeigt.

2.31: (a) Sei $a, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Nach 2.23 gilt dann mit 2.16:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= \sup_{\alpha \in a} \{\alpha \boxdot (\sup_{\beta \in b} \{\beta \boxdot c\})\} \\ &= \sup_{\alpha \in a} \sup_{\beta \in b} \{\alpha \cdot \beta \boxdot c\} \\ &= \sup_{\gamma \in a * b} \{\gamma \boxdot c\} \\ &= (a * b) \circledast c \\ &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

(b) $ia, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann folgt mit 2.26 und (a)

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= i((ia) \cdot ((ib) \cdot (ic))) \\ &= i(((ia) \cdot (ib)) \cdot (ic)) \\ &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

(c) $a, ib, c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt mit 2.3o

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= a \cdot (c \cdot b) \\ &= (a \cdot c) \cdot b \\ &= (c \cdot a) \cdot b \\ &= c \cdot (a \cdot b) \\ &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

(d) $a, ib, ic \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt mit 2.3o und (b)

$$a \cdot (b \cdot c) = (b \cdot c) \cdot a = (c \cdot b) \cdot a = c \cdot (b \cdot a)$$
$$= (b \cdot a) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$$

(e) Die Behauptung gilt für beliebige $b, c \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Somit folgt mit 2.3o: Ist $ia, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so gilt

$$a \cdot (b \cdot c) = (b \cdot c) \cdot a = b \cdot (c \cdot a) = b \cdot (a \cdot c)$$
$$= (b \cdot a) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c.$$

Ist aber $ia, ib \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so gilt die Behauptung schon nach (b).

2.32: Es bleibt nun noch die Existenz des Einselementes zu zeigen. Hier gilt ganz einfach nach Definition 2.23 und 2.13:

$$\begin{aligned}(1, 1) \cdot a &= [\min\{\llcorner\underline{1 \boxdot a}, \llcorner\underline{1 \boxdot a}\} \mid \max\{\underline{1 \boxdot a}\lrcorner, \underline{1 \boxdot a}\lrcorner\}] \\ &= [\llcorner\underline{1 \boxdot a}, \underline{1 \boxdot a}\lrcorner] \\ &= [\llcorner\underline{a}, \underline{a}\lrcorner] \\ &= a\end{aligned}$$

q. e. d.

Mit den angegebenen Sätzen kann man nun die Existenz der Inversen bezüglich 2.23 zeigen. Hier gilt ähnlich wie bei den reellen Zahlen die Einschränkung, daß zum Element (0,0) und auch - wie man leicht einsehen kann, - zu allen Elementen a, mit $0 \in |a|$ kein Inverses existiert. Darüber hinaus sieht man schon an der Definition 2.23 bzw. 2.2o und 2.21, daß anders als bei den reellen Zahlen aus $a \cdot b = 0$ nicht notwendig folgt $a = 0$ oder $b = 0$.
Wir führen zunächst folgende Definition ein:

2.33 <u>Definition:</u>

Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 \notin |a|$. Dann sei
$a^{-1} := [a_2^{-1}, a_1^{-1}]$.

Für $a, b \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ liefert $a \cdot b^{-1} = a : b$ genau die Intervalldivision 1.13. Aus a^{-1} erhält man die Inverse zu a bezüglich 2.23, indem man a^{-1} an der Hauptdiagonalen spiegelt, d.h. ia^{-1} bildet.
Es gilt dann:

2.34 Satz:

Sei $0 \notin |a|$, $a \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$a \cdot (ia^{-1}) = (1, 1).$$

Beweis: $a \cdot (ia^{-1}) = (a_1, a_2) \cdot (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2})$

woraus mit 2.13 und 2.31 folgt:

$$= (a_1, a_1) \cdot (1, \frac{a_2}{a_1}) \cdot (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1}) \cdot (1, \frac{a_1}{a_2})$$

$$= (1, \frac{a_2}{a_1}) \cdot (1, \frac{a_1}{a_2}) .$$

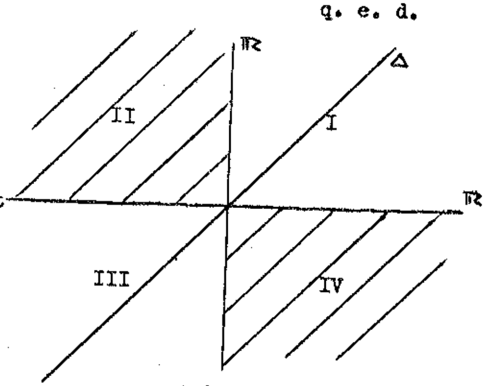
Nun gilt $0 \notin |a|$, also auch $\frac{a_2}{a_1} > 0$. Es ist entweder $\frac{a_2}{a_1} \geq 1$, oder $\frac{a_1}{a_2} \geq 1$. Unter Ausnutzung der Kommutativität 2.30 nehmen wir o.B.d.A. an, es sei $(1, \frac{a_2}{a_1}) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, also $\frac{a_2}{a_1} \geq 1$. Dann folgt mit

2.23 $$(1, \frac{a_2}{a_1}) \cdot (1, \frac{a_1}{a_2}) = [\min\{1, \frac{a_2}{a_1}\} | \max\{\frac{a_1}{a_2}, 1\}]$$

$$= (1, 1)$$

q. e. d.

Skizze 3 möge die Existenz der Inversen erläutern. Für die Punkte der schraffierten Quadranten ist keine Inverse definiert, da für sie ja gilt $0 \in |a|$. Man überlegt sich leicht, daß für die Punkte des II. Quadranten auch gar keine Inverse definiert werden kann, die einer der Beziehungen 1.16, 1.19,



Skizze 3

1.24 oder 1.25 gerecht würde. Und da nach Definition 2.33 die Inverse immer im an der Hauptdiagonalen Δ gespiegelten Quadranten liegt, kann also auch für die Punkte des IV. Quadranten keine Inverse existieren.

Wohl aber ist die Menge der Inversen der Punkte des I. bzw. III. Quadranten der I. bzw. III. Quadrant selbst. Weiter ist das Produkt zweier Punkte des ersten oder zweier Punkte des dritten Quadranten ein Punkt des ersten und das Produkt eines Punktes des ersten mit einem des dritten ein Punkt des dritten Quadranten.

So haben wir als Korollar zu 2.34 Satz und 2.29 Satz:

2.35 <u>Korollar:</u>

Die Punkte $a \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \notin |a|$ bilden eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation 2.23.

Ergänzend sei hier bemerkt, daß die Punkte des $\mathbb{R}^2$ auch eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition 1.1o und der Subtraktion 1.11 bilden, sofern man diese Definitionen für alle Punkte des $\mathbb{R}^2$ gelten läßt, was wir im Folgenden auch tun.

Es gelingt nun leider nicht, weitere Körpereigenschaften des $\mathbb{R}^2$ bezüglich Multiplikation und Addition nachzuweisen. Es ist in der Literatur (z.B. [8]) schon ausführlich darauf hingewiesen worden, daß das distributive Gesetz zwischen Intervallmultiplikation und -addition nicht gilt. Man kann aber von den hier eingeführten Erweiterungen dieser Verknüpfungen, die ja die alten Eigenschaften beibehalten, keine Distributivität erwarten. Wohl lassen sich, und dies wird auch noch in dieser Arbeit ausgeführt werden, der "Subdistributivität" entsprechende Gesetze nachweisen.

Da die Ergebnisse 1.18 - 1.25, 2.7 - 2.11 und 2.15 - 2.19 von großer Bedeutung für das Folgende sind, sollen sie hier zusammengefaßt und gegenübergestellt werden:

2.36 Sei $a, b \in I(\mathbb{R})$, $\sigma \in \{+, -, \cdot\}$, $(ia)\sigma\, b \in I(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$\bigwedge\limits_{\substack{\alpha\in a\\ \beta\in b}} \; \bigvee\limits_{\gamma\in a\sigma b} \; \alpha\,\sigma\,\beta = \gamma$	$\bigwedge\limits_{\substack{\alpha\in a\\ \gamma\in(ia)\sigma b}} \; \bigvee\limits_{\beta\in b} \; \alpha\,\sigma\,\beta = \gamma$
$\bigwedge\limits_{\gamma\in a\sigma b} \; \bigvee\limits_{\substack{\alpha\in a\\ \beta\in b}} \; \alpha\,\sigma\,\beta = \gamma$	$\bigwedge\limits_{\beta\in b} \; \bigvee\limits_{\substack{\alpha\in a\\ \gamma\in(ia)\sigma b}} \; \alpha\,\sigma\,\beta = \gamma$
$\bigcup\limits_{\alpha\in a} \{(\alpha,\alpha)\sigma\, b\} = a\,\sigma\, b$	$\bigcap\limits_{\alpha\in a} \{(\alpha,\alpha)\sigma\, b\} = (ia)\,\sigma\, b$
$\sup\limits_{\alpha\in a} \{(\alpha,\alpha)\sigma\, b\} = a\,\sigma\, b$	$\inf\limits_{\alpha\in a} \{(\alpha,\alpha)\sigma\, b\} = (ia)\,\sigma\, b$

Der Beweis von

$$\bigwedge_{\beta\in b} \; \bigvee_{\substack{\alpha\in a\\ \gamma\in(ia)\cdot b}} \; \alpha\cdot\beta = \gamma$$

ist noch nicht geführt worden und soll hier nachgeholt werden. Hierzu stellen wir fest:

1. $\beta\cdot a$ ist ein Intervall für alle $\beta\in b$.
2. Ist $0\in a$, so ist $\bigcap\limits_{\alpha\in a}\{(\alpha,\alpha)\cdot b\} = (ia)\cdot b \leq (0,0)$.

Wenn also $(ia)\cdot b\in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ vorausgesetzt ist, folgt $(ia)\cdot b = (0,0)$, woraus sofort die Behauptung folgt. Ebenfalls folgt aus $0\in b$: $(ia)\cdot b = (0,0)$. Sei deshalb $0\notin a$, $0\notin b$. Es gebe ein $\beta\in b$ mit $\beta\cdot a\cap(ia)\cdot b = \emptyset$. $\beta\cdot a$ und $(ia)\cdot b$ sind Intervalle. Also folgt, da $0\notin a$, $0\notin b$ ist, daß entweder für alle $\beta'\geq\beta$ oder $\beta'\leq\beta$, $\beta'\in b$ gilt: $\beta'\cdot a\cap(ia)\cdot b = \emptyset$. Also gibt es ein Intervall $b' < b$ mit

$$(ia)\cdot b' = (ia)\cdot b.$$

Multipliziert man beide Seiten mit a^{-1} so erhält man einen Widerspruch.

III Subdistributivität im $\mathbb{R}^2$

Wie schon bemerkt, gelten bezüglich der Addition und Multiplikation keine distributiven Gesetze. Wohl aber lassen sich mit der in 1.2 definierten Halbordnung Ungleichungen herleiten, wir nennen sie "Subdistributivitäten" in Erweiterung von Moore [8], die über das distributive Verhalten Auskunft geben. Dazu sei vorbereitend etwas über das Monotonieverhalten der Verknüpfungen festgestellt:

3.1 Lemma

Sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $b \geq c$. Dann gilt:

3.2 $a + b \geq a + c$

3.3 $a - b \geq a - c$

3.4 $a \mathbin{i} b \leq a \mathbin{i} c$

3.5 $a \mathbin{\delta} b \leq a \mathbin{\delta} c$

3.6 $\alpha \mathbin{\square} b \geq \alpha \mathbin{\square} c$

3.7 $a \cdot b \geq a \cdot c$

Beweis: Mit 1.3 folgt:

3.2: $a + b = (\underline{a} + \underline{b} , \underset{\lrcorner}{a} + \underset{\lrcorner}{b}) \geq (\underline{a} + \underline{c} , \underset{\lrcorner}{a} + \underset{\lrcorner}{c}) = a + c$

3.3: $a - b = (\underline{a} - \underset{\lrcorner}{b} , \underset{\lrcorner}{a} - \underline{b}) \geq (\underline{a} - \underset{\lrcorner}{c} , \underset{\lrcorner}{a} - \underline{c}) = a - c$

3.4: $a \mathbin{i} b = (\underline{a} + \underset{\lrcorner}{b} , \underset{\lrcorner}{a} + \underline{b}) \leq (\underline{a} + \underset{\lrcorner}{c} , \underset{\lrcorner}{a} + \underline{c}) = a \mathbin{i} c$

3.5: $a \mathbin{\delta} b = (\underline{a} - \underline{b} , \underset{\lrcorner}{a} - \underset{\lrcorner}{b}) \leq (\underline{a} - \underline{c} , \underset{\lrcorner}{a} - \underset{\lrcorner}{c}) = a \mathbin{\delta} c$

3.6:
$$\alpha \mathbin{\square} b = \begin{cases} (\alpha \underline{b} , \alpha \underset{\lrcorner}{b}) \geq (\alpha \underline{c} , \alpha \underset{\lrcorner}{c}) & \text{für } \alpha \geq 0 \\ (\alpha \underset{\lrcorner}{b} , \alpha \underline{b}) \geq (\alpha \underset{\lrcorner}{c} , \alpha \underline{c}) & \text{für } \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{n.Def.2.13}$$
$$= \alpha \mathbin{\square} c$$

3.7: $a \in I(\mathbb{R})$: Dann ist:

$$a \cdot b = \sup_{\alpha \in a} \{\alpha \mathbin{\square} b\}$$
$$\geq \sup_{\alpha \in a} \{\alpha \mathbin{\square} c\} \quad \text{nach 3.6}$$

$a \in i\,\mathbb{I}(\mathbb{R})$: Dann ist:

$$a \cdot b = \inf_{\alpha \in a} \{\alpha \boxdot b\}$$

$$\geq \inf_{\alpha \in a} \{\alpha \boxdot c\} \quad \text{nach } 3.6.$$

q. e. d.

Nach diesem Lemma 3.1 wenden wir uns nun den Subdistributivitäten zu. Es gilt zunächst:

3.8 <u>Lemma:</u>

Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\alpha \boxdot c + \beta \boxdot c \;\begin{matrix}\leq\\ \geq\end{matrix}\; (\alpha + \beta) \boxdot c \;\begin{matrix}\leq\\ \geq\end{matrix}\; \alpha \boxdot c \; i\, \beta \boxdot c \qquad \begin{matrix} i\,c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

Beweis: Es folgt mit 2.13 Definition

$$(\alpha + \beta) \boxdot c = \begin{cases} \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & \alpha \cdot \beta \geq 0 \\ \alpha \boxdot c \; i\, \beta \boxdot c & \alpha \cdot \beta < 0 \quad |\alpha| \geq |\beta| \\ i\, \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & \alpha \cdot \beta < 0 \quad |\alpha| < |\beta| \end{cases}$$

Ist nun z.B. $\alpha \boxdot c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so gilt $i\, \alpha \boxdot c \leq \alpha \boxdot c$. Umgekehrt ist $\alpha \boxdot c \in i\,\mathbb{I}(\mathbb{R})$, so gilt $i\, \alpha \boxdot c \geq \alpha \boxdot c$. Somit folgt:

$$\alpha \boxdot c \; i\, \beta \boxdot c \begin{cases} \leq \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ \geq \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & i\,c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$i\, \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c \begin{cases} \leq \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ \geq \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & i\,c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Damit ist der vordere Teil der Behauptung gezeigt. Der zweite Teil folgt ebenso:

$$(\alpha + \beta) \boxdot c = \begin{cases} \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & \alpha \cdot \beta \geq 0 \\ \alpha \boxdot c \; i\, \beta \boxdot c & \alpha \cdot \beta < 0 \quad |\alpha| \geq |\beta| \\ i\, \alpha \boxdot c + \beta \boxdot c & \alpha \cdot \beta < 0 \quad |\alpha| < |\beta| \end{cases}$$

Daraus folgt dann wieder wie oben:

$$\alpha \square c + \beta \square c \begin{cases} \geq \alpha \square c \; i \; \beta \square c & c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ \leq \alpha \square c \; i \; \beta \square c & i \; c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$i \; \alpha \square c + \beta \square c \begin{cases} \geq \alpha \square c \; i \; \beta \square c & c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ \leq \alpha \square c \; i \; \beta \square c & i \; c \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) . \end{cases}$$

Die letzten beiden Ungleichungen folgen, da aus $|\alpha| < |\beta|$ folgt $i \; \alpha \square c + \beta \square c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ für $c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $i \; \alpha \square c + \beta \square c \in i \; \mathbb{I}(\mathbb{R})$ für $i \; c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

q. e. d.

3.8 Lemma zeigt schon alle für die Subdistributivität wesentlichen Sachverhalte auf. Es wird zu unterscheiden sein, ob in $(a + b) \cdot c$ c ein Element aus $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ oder $i \; \mathbb{I}(\mathbb{R})$ ist. Hier liegt auch der Vorteil der normalen Intervallmultiplikation nach 1.12, wenn diese Definition auf alle Elemente des $\mathbb{R}^2$ erweitert wird. Dann gilt ja mit 2.24 immer $(a + b) * c = |a + b| \cdot |c|$. Hier braucht die Unterscheidung nicht gemacht zu werden, die Ungleichungen gelten gleicherweise für alle Elemente.

Dies zeigt auch der folgende Satz:

3.9 <u>Satz:</u>

Sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$|a|\cdot|c| \; i \; |b|\cdot|c| \leq |a + b|\cdot|c| \leq |a|\cdot|c| + |b|\cdot|c|$$

Beweis: Nach 2.23 ist

$$\begin{aligned} |a|\cdot|c| \; i \; |b|\cdot|c| &= [\min\{\underline{a_1 \square |c|}, \underline{a_2 \square |c|}\} | \max\{\underline{a_1 \square |c|}, \underline{a_2 \square |c|}\}] + \\ &\quad + [\max\{\underline{b_1 \square |c|}, \underline{b_2 \square |c|}\} | \min\{\underline{b_1 \square |c|}, \underline{b_2 \square |c|}\}] \\ &\leq [\min\{\underline{a_1 \square |c|} + \underline{b_1 \square |c|}, \underline{a_2 \square |c|} + \underline{b_2 \square |c|}\} | \\ &\quad \max\{\underline{a_1 \square |c|} + \underline{b_1 \square |c|}, \underline{a_2 \square |c|} + \underline{b_2 \square |c|}\}] \end{aligned}$$

Unter Verwendung von 3.8 Lemma folgt:

$$\leq \left[\min \{\underline{(a_1 + b_1) \square |c|},\ \underline{(a_2 + b_2) \square |c|}\} \right|$$

$$\left. \max \{\underline{(a_1 + b_1) \square |c|},\ \underline{(a_2 + b_2) \square |c|}\}\right]$$

$$= |a + b| \cdot |c|$$

wiederum mit 3.8 Lemma folgt

$$\leq \left[\min \{\underline{a_1 \square |c|} + \underline{b_1 \square |c|},\ \underline{a_2 \square |c|} + \underline{b_2 \square |c|}\}\right|$$

$$\left. \max \{\underline{a_1 \square |c|} + \underline{b_1 \square |c|},\ \underline{a_2 \square |c|} + \underline{b_2 \square |c|}\}\right]$$

$$\leq \left[\min \{\underline{a_1 \square |c|},\ \underline{a_2 \square |c|}\} \middle| \max \{\underline{a_1 \square |c|},\ \underline{a_2 \square |c|}\}\right] +$$

$$+ \left[\min \{\underline{b_1 \square |c|},\ \underline{b_2 \square |c|}\} \middle| \max \{\underline{b_1 \square |c|},\ \underline{b_2 \square |c|}\}\right]$$

$$= |a| \cdot |c| + |b| \cdot |c| .$$

q. e. d.

3.1o <u>Korollar:</u>

Sei $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

3.11 $$i(|a| \cdot |c| + |b| \cdot |c|) \leq |a + b| \cdot |c| \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |c|$$

3.12 $$i|a + b| \cdot |c| \leq |a| \cdot |c| \ i\ |b| \cdot |c| \leq |a + b| \cdot |c|$$

3.13 $$(i|c|) \cdot (a\ i\ b) \leq a \cdot c\ i\ b \cdot c \leq |c| \cdot (a\ i\ b)$$

Beweis: 3.12: Nach 3.9 Satz gilt:

$$i|a + b| \cdot |c| \leq i(|b| \cdot |c|\ i\ |a| \cdot |c|)$$

$$= |a| \cdot |c|\ i\ |b| \cdot |c|$$

$$\leq |a + b| \cdot |c|$$

3.11: Nach 3.12 folgt mit 3.9 Satz:

$$|a| \cdot |c| + |b| \cdot |c| \geq |a + b| \cdot |c|$$

$$\geq i|a + b| \cdot |c|$$

$$\geq i(|a| \cdot |c| + |b| \cdot |c|$$

3.13: Sei $c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
a\cdot c \mathbin{i} b\cdot c &= [\min\{c_1 \square a,\ c_2 \square a\} \mid \max\{c_1 \square a,\ c_2 \square a\}] + \\
&\quad + [\max\{c_1 \square b,\ c_2 \square b\} \mid \min\{c_1 \square b,\ c_2 \square b\}] \\
&\leq [\min\{c_1 \square a + c_1 \square b,\ c_2 \square a + c_2 \square b\} \mid \\
&\qquad \max\{c_1 \square a + c_1 \square b,\ c_2 \square a + c_2 \square b\}] \\
&= [\min\{c_1 \square (a \mathbin{i} b),\ c_2 \square (a \mathbin{i} b)\} \mid \\
&\qquad \max\{c_1 \square (a \mathbin{i} b),\ c_2 \square (a \mathbin{i} b)\}] \\
&= c\cdot(a \mathbin{i} b)
\end{aligned}
$$

Sei $i\, c \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
a\cdot c \mathbin{i} b\cdot c &= [\max\{c_1 \square a,\ c_2 \square a\} \mid \min\{c_1 \square a,\ c_2 \square a\}] + \\
&\quad + [\min\{c_1 \square b,\ c_2 \square b\} \mid \max\{c_1 \square b,\ c_2 \square b\}] \\
&\leq [\min\{c_1 \square a + c_1 \square b,\ c_2 \square a + c_2 \square b\} \mid \\
&\qquad \max\{c_1 \square a + c_1 \square b,\ c_2 \square a + c_2 \square b\} \mid \\
&= [\min\{c_1 \square (a \mathbin{i} b),\ c_2 \square (a \mathbin{i} b)\} \mid \\
&\qquad \max\{c_1 \square (a \mathbin{i} b),\ c_2 \square (a \mathbin{i} b)\}] \\
&= |c|\cdot(a \mathbin{i} b)
\end{aligned}
$$

Somit folgt also $a\cdot c \mathbin{i} b\cdot c \leq |c|\cdot(a \mathbin{i} b)$ und hieraus

$$
\begin{aligned}
(i|c|)\cdot(a \mathbin{i} b) &= i(|c|\cdot(b \mathbin{i} a)) \\
&\leq i(b\cdot c \mathbin{i} a\cdot c) \\
&= a\cdot c \mathbin{i} b\cdot c
\end{aligned}
$$

Dies ist der zweite Teil der Behauptung.

q. e. d.

IV Beziehungen zwischen Intervall- und $\mathbb{R}^2$ - Abbildungen

Nachdem die Fragen der Gruppenstruktur und dem distributiven Verhalten beantwortet sind, werden in diesem Kapitel die Topologie des $\mathbb{R}^2$ und die Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich unter dem Gesichtspunkt der Intervallrechnung betrachtet.

Im $\mathbb{R}^2$ können auf vielerlei Arten Topologien eingeführt werden. Die separierten zulässigen Topologien sind dabei jedoch gleich (vgl. [25]). Wir wollen die Topologie durch eine Norm einführen. Je nach dem Zweck, dem die Untersuchung dient, können verschiedene Normen günstig sein. Man sieht sofort, daß jede Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

4.1 $$\| a \| := \varphi(|a_1|, |a_2|)$$

bei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Norm definiert, sofern sie den folgenden Bedingungen genügt:

Für $x, y, u, v, \lambda \in \mathbb{R}^+$ sei

4.2 $$\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \varphi(x,y) \qquad \text{Homogenität}$$

4.3 $$\varphi(x + u, y + v) \le \varphi(x,y) + \varphi(u,v) \qquad \text{Dreiecksungleichung}$$

4.4 $$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow x = y = 0 \qquad \text{Definitheit}$$

Oft wird man noch zusätzliche Eigenschaften fordern:

4.5 $$\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$$

4.6 $$\varphi(x,y) \cdot \varphi(u,v) \ge \begin{cases} \varphi(x\,u, x\,v) \\ \varphi(x\,u, y\,v) \\ \varphi(x\,u, y\,u) \\ \varphi(x\,v, y\,u) \\ \varphi(x\,v, y\,v) \\ \varphi(y\,u, y\,v) \end{cases}$$

4.5 besagt, daß der Einheitskreis symmetrisch zur Hauptdiagonalen Δ liegt, es gilt: $\| a \| = \| \hat{\imath}\, a \|$.

4.5 und 4.6 haben zur Folge, daß die Dreiecksungleichung auch bezüglich der Multiplikation gilt, also:

$$\| a \cdot b \| \leq \| a \| \cdot \| b \| .$$

Als Beispiele solcher Funktionen φ seien angegeben:

4.7 $$\varphi(x,y) = \max \{x,y\}.$$

Diese Funktion erfüllt 4.2 bis 4.6. Die durch sie beschriebene Norm ist in [β] eingeführt für die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$.

4.8 $$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x + y)$$

Diese Funktion erfüllt 4.2 bis 4.5 nicht aber 4.6, wie man am Beispiel $x = u = 1$, $y = v = 3$ sieht:

$$\varphi(x,y) \cdot \varphi(u,v) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 4$$
$$\varphi(x \cdot v,\ y \cdot v) = \frac{1}{2}(3 + 9) = 6$$

4.9 Wohl aber erfüllt $\varphi(x,y) = (x + y)$ 4.2 bis 4.6. Diese Funktion hat aber gegenüber 4.8 den Nachteil, daß die Elemente der Diagonalen Δ eine andere Norm besitzen als die zugeordneten reellen Zahlen.

4.1o Natürlich erfüllt auch die Euklidische Norm die Bedingungen 4.2-4.6:

$$\varphi(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eine wichtige Eigenschaft, die von der Funktion $\varphi(x,y)$ gefordert werden muß, ist die Monotonie, d.h. aus $a \geq b \geq i\, a$ muß folgen $\varphi(|a_1|,|a_2|) \geq \varphi(|b_1|,|b_2|)$ oder $\| a \| \geq \| b \|$ (vgl. [4]).

4.7 ist die einzige der angegebenen Funktionen, die dies leistet:

4.11 <u>Lemma:</u>

Sei $a,b \in \mathbb{R}^2$, $\| a \| = \max \{|a_1|,|a_2|\}$. Sei $a \geq b \geq i\, a$, dann gilt: $\| a \| \geq \| b \|$.

Beweis: Aus $a \geq b \geq i\, a$ folgt nach 1.3:

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \quad \text{und} \quad a_2 \geq b_2 \geq a_1 \ .$$

Damit folgt: $|b_1| \leq \max\{|a_1|,|a_2|\}$ und $|b_2| \leq \max\{|a_1|,|a_2|\}$.

Somit gilt: $\max\{|b_1|,|b_2|\} = \| b \| \leq \| a \| = \max\{|a_1|,|a_2|\}$.

q. e. d.

Daß 4.8, 4.9 und 4.1o die Aussage von 4.11 nicht erfüllen, zeigt folgendes Beispiel:

4.12 Beispiel:

Sei $a = (o,1)$, $b = (1,1)$. Dann gilt: $a \geq b \geq i\ a$.

Mit 4.8 folgt: $\| a \| = \frac{1}{2}$, $\| b \| = 1$.

Mit 4.9 folgt: $\| a \| = 1$, $\| b \| = 2$.

Mit 4.1o folgt: $\| a \| = 1$, $\| b \| = \sqrt{2}$.

Mit 4.11 Lemma und 3.1o Korollar läßt sich ein für das spätere nützliches Korollar zeigen, das über das distributive Verhalten bezüglich der Norm Auskunft gibt:

4.13 Korollar:

Sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ und $\| a \| = \max\{|a_1|,|a_2|\}$ Dann gilt:

$$\| \, |a|\cdot|c| \ i \ |b|\cdot|c| \, \| \leq \| \, |a + b|\cdot|c| \, \| \leq$$

$$\leq \| \, |a|\cdot|c| + |b|\cdot|c| \, \|$$

Der Beweis folgt sofort mit 4.11 und 3.1o.

Es sei an dieser Stelle daraufhingewiesen, daß nicht gilt: $\| \, |a|\cdot|b| \, \| = \| a \cdot b \|$, wie man vielleicht annehmen möchte. Wohl gilt, und dies folgt aus $i|a|\cdot|b| \leq a \cdot b \leq |a|\cdot|b|$ mit 4.11 Lemma,

4.14 $$\| a \cdot b \| \leq \| \, |a|\cdot|b| \, \|$$

allerdings bezüglich der Maximumsnorm 4.7.

Wir betrachten nun Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich bezüglich der separierten $\mathbb{R}^2$ - Topologie, insbesondere fragen wir nach der Stetigkeit dieser Abbildungen. Diese definieren wir wie üblich:

4.15 Definition:

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt stetig in $x \in \mathbb{R}^2$, wenn für Umgebungssysteme $\{U\}, \{V\}$ in $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\bigwedge_{U(fx)} \bigvee_{V(x)} f\,V(x) \subset U(fx).$$

Die Abbildungen 2.1 bis 2.4, also die Spiegelungen an Nullpunkt, Haupt- und Nebendiagonalen und die Identität, sind als stetig zu erkennen. Ebenso ist die Vektoraddition 2.12 im $\mathbb{R}^2$ stetig und damit alle durch 2.5 gegebenen Verknüpfungen. Auch von der skalaren Multiplikation 2.9 ist die Stetigkeit bekannt. Die Stetigkeit von $\square : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folgt aus der Definition 2.13 und der Stetigkeit der skalaren Multiplikation. Um zu sehen, daß die Multiplikation 2.23 stetig ist, greifen wir auf 2.18 und 2.16 zurück. Die Division $a : b := a \cdot b^{-1}$ ist stetig für alle b mit $0 \notin |b|$, was aus der Stetigkeit der Inversenbildung und Multiplikation folgt.
Damit sind die Grundoperationen als stetig erkannt und mit ihnen sämtliche aus ihnen aufgebauten Funktionen wie z.B. Polynome oder rationale Funktionen.

Wir betrachten nun die Intervallfunktionen. Was ist darunter zu verstehen? Zunächst kann man alle Abbildungen, die $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ in sich abbilden, als Abbildungen von Intervallen auf Intervalle deuten. Es erhebt sich aber die Frage, ob alle solchen Abbildungen auch unter dem Aspekt der Intervallrechnung sinnvoll sind. In der Intervallrechnung sind ja solche Abbildungen von Bedeutung, die Zusammenfassung der Abbildungen von Punkten aus $\mathbb{R}$ sind. Es ist also angebracht von einer Intervallfunktion f zu fordern, daß gelte:

4.16 $$f\,x \supset \bigcup_{\alpha \in x} f(\alpha, \alpha) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{I}(\mathbb{R}).$$

4.17 Definition:

Wir nennen deshalb jede Abbildung $f: \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, die 4.16 erfüllt, eine Intervallfunktion.

Sucht man für 4.16 eine Darstellung im $\mathbb{R}^2$, so findet man:

4.18 $$x \leq y \Rightarrow f\,x \leq f\,y \quad \text{für} \quad x,y \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$$

und $f: \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

4.18 bzw. 4.16 wird in der Literatur als Teilmengeneigenschaft bezeichnet. (vgl. [8]).

Wie aus der Theorie der abhängigen Intervalle (vgl. [1]-[4]) hervorgeht, sind die durch 4.17 beschriebenen Abbildungen nicht die einzigen, die für die Intervallrechnung von Bedeutung sind. Wir wollen uns aber in dieser Arbeit auf solche Abbildungen beschränken, die nur mit Hilfe der Eckpunkte dargestellt werden, also von $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ gehen.

Was bedeutet aber nun die Aussage, daß eine Intervallfunktion f stetig sei gemäß 4.15, wenn man diese Abbildung f als Mengenabbildung versteht? Diese Frage soll nun erörtert werden.

Durch 4.7 wird in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ folgende Metrik induziert: Sei $x,y \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Dann ist

4.19 $$\rho(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

die durch 4.7 induzierte Metrik, die auch in [8] angegeben ist.

Wir vergleichen 4.19 mit der Hausdorff - Metrik [23]:

4.2o Definition:

Seien A,B zwei nichtleere Mengen eines metrischen Raumes X.

$$\rho(A,B) := \sup\{d(x,B) \mid x \in A\}$$

$$\rho(B,A) := \sup\{d(x,A) \mid x \in B\}$$

Hierbei ist $d(x,A)$ die Distanzfunktion von x und A.

Dann heißt

$\gamma(A,B) := \max\{\rho(B,A),\rho(A,B)\}$

<u>Hausdorff - Metrik.</u>

Man sieht sofort, daß 4.19 die Hausdorff - Metrik in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ ist. Damit ergibt sich nun auch der Zusammenhang zu den Mengenabbildungen.

4.21 <u>Definition:</u> vgl. [23].

Eine Abbildung $\Gamma : X \to Y$, X,Y topologische Räume, heißt <u>lsc (lower semi continuous) in x_o</u> $\in X$, wenn

$$\bigwedge_{\substack{G\text{ offen}\\ G \cap x_o \neq \emptyset}} \ \bigvee_{U(x_o)} \ \bigwedge_{x \in U(x_o)} \Gamma x \cap G \neq \emptyset$$

<u>usc (upper semi continuous) in x_o</u> $\in X$, wenn

$$\bigwedge_{\substack{G\text{ offen}\\ \Gamma x_o \subset G}} \ \bigvee_{U(x_o)} \ \bigwedge_{x \in U(x_o)} \Gamma x \subset G$$

ist. Dabei ist $G \subset Y$, $\{U\}$ Umgebungssystem von X.

Die Abbildung heißt

<u>stetig in x_o</u>, wenn sie usc und lsc ist in x_o.

Sie heißt <u>lsc in X</u>, wenn sie in allen $x \in X$ lsc ist.

Sie heißt <u>usc in X</u>, wenn sie in allen $x \in X$ usc ist und alle Γx kompakt sind,

<u>stetig in X</u>, wenn sie in X usc und lsc ist.

Dann gilt der Satz:

4.22 <u>Satz:</u> [23]

Seien X,Y metrische Räume, $\mathfrak{K}$ eine Familie nicht leerer kompakter Mengen in Y, Γ eine Abbildung von X in Y, so daß für alle x, $\Gamma x \neq \emptyset$ gilt. Dann ist Γ stetige Abbildung von X in Y genau dann, wenn es eine eindeutige stetige Abbildung von X in $\mathfrak{K}$ ist.

Beweis: a. a. O.

Dieser Satz stellt nun den Zusammenhang dar zwischen der Stetigkeit der Intervallfunktionen, einmal betrachtet als Abbildungen in $\mathbb{R}^2$ und einmal betrachtet als Abbildungen von Mengen. Man kann ihn für Intervalle so aussprechen:

4.23 Korollar:

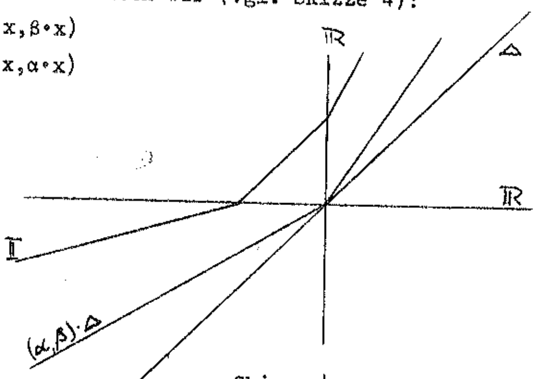
Ist eine Abbildung $f: \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit $f(\Delta) \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$ stetig im Sinne von 4.19, dann ist sie für $x \in \Delta$ lsc und usc.

Die Frage nach der Differenzierbarkeit stetiger Abbildungen von $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ kann von vornherein nicht verneint werden. Doch zeigt sich leider, daß eine so wichtige Abbildung wie die der Multiplikation mit einem konstanten Intervall in einigen Punkten keine Fréchet-Ableitung besitzt.

Bilden wir zunächst $(\alpha,\beta)\cdot x$ mit $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, und lassen x die Diagonale Δ durchlaufen, dann erhalten wir (vgl. Skizze 4):

$x \geq o$: $(\alpha,\beta)\cdot x = (\alpha\cdot x, \beta\cdot x)$

$x \leq o$: $(\alpha,\beta)\cdot x = (\beta\cdot x, \alpha\cdot x)$



Skizze 4

Wir suchen das Fréchet-Differential im Punkt $x = o$. Sei $h > o$, $h \to o$, dann ist das zugehörige Differential $L_1(h,h) = (\alpha h, \beta h)$, da gilt: $\|(\alpha,\beta)\cdot h - L_1 h\| \to o$ für $h \to o$.

Ist $h < o$, $h \to o$, dann ist das zugehörige Differential $L_2(h,h) = (\beta h, \alpha h)$, da gilt: $\|(\alpha,\beta)\cdot h - L_2 h\| \to o$ für $h \to o$.

L_1 und L_2 sind aber verschieden. Es existiert also keine eindeutige Fréchet-Ableitung.

Durchläuft x eine Parallele zur Diagonalen Δ (vgl. Skizze 4 Kurve II), dann treten ebenfalls solche Punkte auf, in denen ein F-Differential nicht existiert. Die Multiplikation mit einer Konstanten ist eben eine stückweise lineare Abbildung mit nicht differenzierbaren Unterbrechungen. Daß die Menge der Punkte, in denen kein F-Differential existiert sich vergrößert, sobald man solche Multiplikationen zu neuen Funktionen kombiniert, z.B. zu Polynomen, braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden

Die Multiplikation mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}^2$ ist also global nicht differenzierbar. Sie ist jedoch für alle beschränkten $\|a\|$ lipschitzbeschränkt:
Aus 3.13 folgt zunächst:

$$i|a|\cdot|x\delta y| = (i|a|)(i|x\delta y|) \leq (i|a|)\cdot(x\delta y) \leq a\cdot x\delta a\cdot y \leq |a|\cdot|x\delta y|.$$

Mit 4.11 Lemma folgt weiter für die Maximumsnorm 4.7

4.24 $$\|a\cdot x\delta a\cdot y\| \leq \|\, |a|\cdot|x\delta y|\, \| \leq \|a\|\cdot\|x\delta y\|.$$

4.23 beinhaltet aber gerade die Lipschitzbeschränktheit der Multiplikation mit konstantem Faktor a.

V Monotoniesätze

Aus der Teilmengeneigenschaft 4.18 lassen sich einige kleine Sätze herleiten, die den Monotoniecharakter der Abbildungen benutzen.

5.1 **Definition:**

Sei $x \in \mathbb{R}^2$, Δ die Hauptdiagonale in $\mathbb{R}^2$. Dann sei
$$\rho(x, \Delta) := \inf_{y \in \Delta} \|x \,\delta\, y\| \ .$$

5.2 **Lemma:**

Sei $\|a\| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$. Dann gilt:
$$\rho(x, \Delta) = \frac{1}{2}|\llcorner\underline{x} - \underline{x}\lrcorner| .$$

Beweis: Aus 4.3 folgt mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$$

und mit 4.5

$$= \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$$

und mit 4.2.

$$= \frac{1}{2}\varphi(\alpha, \beta) + \frac{1}{2}\varphi(\alpha, \beta)$$
$$= \varphi(\alpha, \beta) .$$

Sei $y \in \Delta$, $y = (\eta, \eta)$. Dann folgt

$$\varphi(|\llcorner\underline{x} - \eta|, |\underline{x}\lrcorner - \eta|) \geq \varphi\left(\frac{|\llcorner\underline{x} - \eta| + |\underline{x}\lrcorner - \eta|}{2}, \frac{|\llcorner\underline{x} - \eta| + |\underline{x}\lrcorner - \eta|}{2}\right)$$

$$\geq \varphi\left(\frac{|\llcorner\underline{x} - \underline{x}\lrcorner|}{2}, \frac{|\llcorner\underline{x} - \underline{x}\lrcorner|}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\|(\llcorner\underline{x}, \underline{x}\lrcorner) \,\delta\, (\llcorner\underline{x}, \underline{x}\lrcorner)\|$$

$$= \frac{1}{2}|\llcorner\underline{x} - \underline{x}\lrcorner| .$$

Umgekehrt gilt:

$$\inf_{y \in \Delta} \varphi(|\underset{\sim}{x} - \eta|, |\underline{x} - \eta|) \leq \varphi\left(\left|\underset{\sim}{x} - \frac{\underset{\sim}{x} + \underline{x}}{2}\right|, \left|\underline{x} - \frac{\underset{\sim}{x} + \underline{x}}{2}\right|\right)$$

$$= \varphi\left(\left|\frac{\underset{\sim}{x} - \underline{x}}{2}\right|, \left|\frac{\underset{\sim}{x} - \underline{x}}{2}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2} \| (\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}) \delta (\underline{x}, \underline{x}) \|$$

$$= \frac{1}{2} | \underset{\sim}{x} - \underline{x} | .$$

q. e. d.

Mit 5.2 Lemma erhält man schnell ein Korollar zum Banachschen Fixpunktsatz.

5.3. Satz:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\,\Delta \subset \Delta$, $\| x \| = \max(|\underline{x}|, |\underset{\sim}{x}|)$.
Sei $\rho(fx, fy) \leq k\rho(x, y)$ mit $k < 1$, $x, y \in \mathbb{R}^2$.
Dann gilt: $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f^n x = x^* = fx^* \in \Delta$.

Beweis: Die Behauptung des Satzes folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz bis auf $x^* \in \Delta$. Dies zeigt man folgendermaßen:

Sei $x_\Delta := \left(\frac{\underset{\sim}{x} + \underline{x}}{2}, \frac{\underset{\sim}{x} + \underline{x}}{2} \right)$, dann gilt nach dem Beweis von Lemma 5.2

$\rho(x, \Delta) = \rho(x, x_\Delta)$. Damit folgt:

$\rho(fx, \Delta) \leq \rho(fx, fx_\Delta)$ nach Definition 5.1 und $f\,\Delta \subset \Delta$

$\leq k\rho(x, x_\Delta)$

$= k\rho(x, \Delta)$.

Hieraus folgt $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \rho(f^n x, \Delta) = 0$, d.h. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f^n x \in \Delta$.

q. e. d.

Unter Einbeziehung der Teilmengeneigenschaft schließt man aus der Kontraktion auf Δ die Kontraktion in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$:

5.4. <u>Korollar:</u>

f erfülle 4.18. $\| x \| := \max\{ |\underline{x}|, |\overline{x}| \}$.
Sei $\rho(fx, \Delta) \leq k\rho(x, \Delta)$, $k < 1$ für alle $x \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.
Dann gilt: $\lim_{n \to \infty} f^n x = x^* = fx^* \in \Delta$.

Beweis: Sei $x_\Delta := \left(\frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}, \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2} \right)$

Zunächst folgt $f\Delta \subset \Delta$ aus $\rho(fx, \Delta) \leq k\rho(x, \Delta)$.

a) f ist auf Δ kontrahierend! Sei $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $\zeta \leq \eta$, dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f(\zeta, \eta) \geq f(\zeta, \zeta) \\ f(\zeta, \eta) \geq f(\eta, \eta) \end{array}\right\} \text{ wegen 4.18.}$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \rho(f(\zeta, \zeta), f(\eta, \eta)) &= \| f(\zeta, \zeta) \delta f(\eta, \eta) \| \\ &\leq | \underline{f(\zeta, \eta)} - \overline{f(\zeta, \eta)} | \\ &= 2\rho(f(\zeta, \eta), \Delta) \quad \text{nach 5.2 Lemma} \\ &\leq 2k\, \rho((\zeta, \eta), \Delta) \\ &= k \, \| (\zeta, \zeta) \delta (\eta, \eta) \| \quad \text{nach 5.2 Lemma} \\ &= k\, \rho((\zeta, \zeta) \delta (\eta, \eta)). \end{aligned}$$

Dann existiert nach dem Banachschen Fixpunktsatz ein Fixpunkt x^* auf Δ:

$$x^* = fx^* \in \Delta .$$

b) Sei $z \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt wegen 4.18 immer $f^n z \geq f^n z_\Delta$.
Es gilt auch $\lim_{n \to \infty} \rho(f^n z, \Delta) = 0$, also auch $\lim_{n \to \infty} \rho(f^n z, f^n z_\Delta) = 0$.
Also gilt

$$\lim_{n \to \infty} \rho(f^n z, x^*) \leq \lim_{n \to \infty} \rho(f^n z, f^n z_\Delta) + \lim_{n \to \infty} \rho(f^n z_\Delta, x^*) .$$

Der zweite Summand rechts ist aber Null nach a). Damit folgt die Behauptung.

q. e. d.

Anstelle der kontrahierenden Abbildungen von 5.4 und 5.3 kann man nun aber auch solche betrachten, die Intervalle in sich abbilden. Auch hier läßt sich die Teilmengenschaft 4.18 ausnutzen.

5.5. Satz:

f erfülle 4.18. Gilt für ein $x_o \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) : x_o \geq fx_o$, so folgt:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f^n x_o = x^* = fx^* \leq x_o .$$

Beweis: Wegen 4.18 folgt aus $x_o \geq fx_o$

$$x_o \geq fx_o \geq f^2 x_o \geq \dots \geq f^n x_o \geq \dots$$

Die Folge $\{f^n x_o\}$ ist aber eine unendliche Menge in einer kompakten Menge, nämlich $\{y \mid y \leq x_o \ ; \ y \in \mathbb{I}(\mathbb{R})\}$. Sie hat also einen Häufungspunkt. Sie hat aber auch nur einen Häufungspunkt, weil jede geordnete Menge höchstens ein maximales Element besitzt.

q. e. d.

Ist die Existenz eines Fixpunktes bekannt, so gewinnt man diesen leicht nach folgender Vorschrift:

Satz:

f erfülle 4.18. Sei $x^* = fx^*$ und $x_o \leq x^*$. Dann gilt:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f^n x_o = x^{**} = fx^{**} \leq x^* .$$

Beweis: Aus 4.18 folgt mit $x_o \leq x^*$:

$$x_o \leq fx_o \leq \dots \quad f^n x_o \leq \dots \leq x^* .$$

Die Folge $\{f^n x_o\}$ ist beschränkt und hat damit einen einzigen Häufungspunkt.

q. e. d.

Mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Ky Fan [23] erhält man mit 4.23 folgende Aussage:

5.7 Korollar:

Ist x^* ein Fixpunkt von f, und ist f stetig im Sinne von 4.15, dann gibt es ein $\zeta \in \mathbb{R}$ mit $(\zeta, \zeta) \leq f(\zeta, \zeta)$ und $\zeta \in x^*$,

VI Gleichungssysteme

Wir wenden uns nun den Gleichungen zu. Wenn eine Gleichung gegeben ist: $ax = b$, und die Koeffizienten a,b nicht reelle Zahlen sind sondern mit Ungenauigkeiten belegte Zahlen, also Intervalle, dann versteht man unter der Lösung von $a \cdot x = b$ die Menge aller ζ, die Lösungen eines Gleichungssystems $\alpha\zeta = \beta$ mit $\alpha \in a$, $\beta \in b$ sind.

Es handelt sich also um folgendes Problem: Gesucht ist $x \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit

6.1 $$\bigwedge_{\substack{\alpha \in a \\ \beta \in b}} \bigvee_{\zeta \in x} \alpha\zeta = \beta .$$

Vergleicht man dies mit 2.36, so stellt man fest, daß die Lösung y der Gleichung

$$(ia) \cdot y = b$$

genau die gesuchte Lösungsmenge x beschreibt. Eben das Entsprechende gilt auch für die Gleichungen

$$(ia) + x = b$$

$$(ia) - x = b$$

$$(ia) : x = b ,$$

wobei die letzte Gleichung durch $x' = x^{-1}$ auf die obige zurückgeführt ist.

Während es sich oben um eine genaue Darstellung der Lösung handelt, verhält es sich bei Gleichungssystemen anders. Hier ist die Lösungsmenge im allgemeinen weder Intervall noch kartesisches Produkt von Intervallen. Man wird also keine genauen Lösungen erwarten können, und es soll nun versucht werden die Lösungsmenge von außen und innen durch Intervalle zu beschreiben.

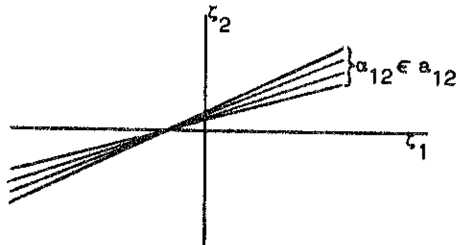
Im Folgenden befassen wir uns mit dem Fall zweier Veränderlicher, der in der Durchführung übersichtlich bleibt, aber in der Allgemeinheit keinen besonderen Einschränkungen mehr unterliegt.
Man vergleiche hierzu das Beispiel in Kapitel IX.

Sei $\alpha_{ij} \in a_{ij}$, $\beta_i \in b_i$, $i,j = 1,2$. Gefragt wird nach der Menge $\{\zeta_1\} \times \{\zeta_2\}$, für die es α_{ij}, β_i, $i,j = 1,2$ gibt mit:

6.2
$$\begin{aligned} g_1:&\quad \alpha_{11}\,\zeta_1 + \alpha_{12}\,\zeta_2 = \beta_1 \\ g_2:&\quad \alpha_{21}\,\zeta_1 + \alpha_{22}\,\zeta_2 = \beta_2 \end{aligned}$$

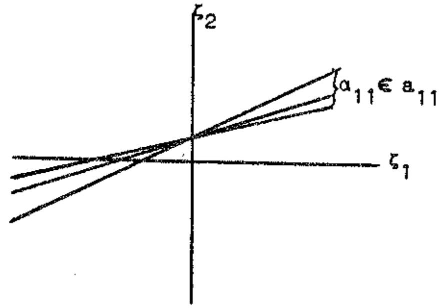
In 6.2 wird nach dem Schnittpunkt zweier Geraden g_1 und g_2 gefragt. Variieren die Koeffizienten dann können es auch die Geraden tun.

In Skizze 5 ist angegeben ein Fall in dem $a_{11}, b_1 \in \Lambda$ und nur a_{12} ein echtes Intervall ist.



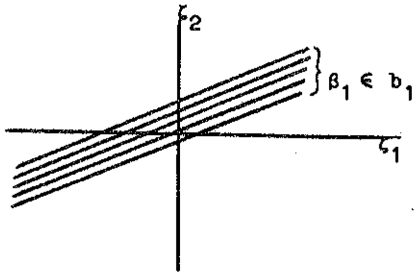
Skizze 5

In Skizze 6 ist angegeben ein Fall in dem nur a_{11} ein Intervall und a_{12}, b_1 reelle Zahlen sind.



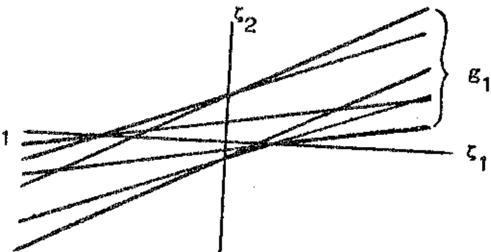
Skizze 6

In Skizze 7 variiert nur $\beta_1 \in b_1$, während a_{11}, a_{12} reelle Zahlen sind.



Skizze 7

In Skizze 8 variieren alle drei Koeffizienten, $\alpha_{11} \in a_{11}$, $\alpha_{12} \in a_{12}$ und $\beta_1 \in b_1$



Skizze 8

Die Menge S aller Schnittpunkte von g_1 und g_2 ist im allgemeinen kein achsenparalleles Rechteck. Wir suchen nun nach achsenparallelen Rechtecken (mehrdimensionalen Intervallen) R,R' mit

$$R \supset S \supset R'.$$

Wir suchen also R und R' als Produkt zweier Intervalle darzustellen. Die Intervalle entsprechen dabei Elementen aus $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, und diese wiederum sind Lösungen von Gleichungssystemen mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}^2$.

Diese Gleichungssysteme gewinnt man nun unter Ausnutzung der Aussagen 2.36.

Zunächst sei R dargestellt:

6.3 <u>Satz:</u>

Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ Lösungen des Gleichungssystems

6.4 $$\begin{aligned} i\, x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot (i a_{12}) &= b_1 \\ x_1 \cdot (i a_{21})\ i\, x_2 \cdot a_{22} &= b_2 \end{aligned}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $i,j = 1,2$, so enthält $R = x_1 \times x_2$ die Schnittpunkte aller Geradenpaare

$$g_1\colon\ \alpha_{11}\,\zeta_1 + \alpha_{12}\,\zeta_2 = \beta_1$$

$$g_2\colon\ \alpha_{21}\,\zeta_1 + \alpha_{22}\,\zeta_2 = \beta_2$$

mit $\alpha_{ij} \in a_{ij}$, $\beta_i \in b_i$.

Beweis: Wir wählen $\alpha_{ij} \in a_{ij}$, $\beta_i \in b_i$ und zeigen,

(A) $$\bigwedge_{\zeta_1 \in x_1} \bigvee_{\zeta_2 \in x_2} \alpha_{11}\zeta_1 + \alpha_{12}\zeta_2 = \beta_1$$

(B) $$\bigwedge_{\zeta_2 \in x_2} \bigvee_{\zeta_1 \in x_1} \alpha_{21}\zeta_1 + \alpha_{22}\zeta_2 = \beta_2 .$$

Mit

6.5 $$\begin{aligned} l_{11} &:= x_1 \cdot a_{11} \\ l_{12} &:= x_2 \cdot (ia_{12}) \\ l_{21} &:= x_1 \cdot (ia_{21}) \\ l_{22} &:= x_2 \cdot a_{22} \end{aligned}$$

erhalten wir für 6.4

$$\begin{aligned} il_{11} + l_{12} &= b_1 \\ l_{21} \quad i\, l_{22} &= b_2 , \end{aligned}$$

das nach 2.36 aber gerade bedeutet:

(a) $$\bigwedge_{\substack{\eta_{11} \in l_{11} \\ \beta_1 \in b_1}} \bigvee_{\eta_{12} \in l_{12}} \eta_{11} + \eta_{12} = \beta_1$$

(b) $$\bigwedge_{\substack{\eta_{22} \in l_{22} \\ \beta_2 \in b_2}} \bigvee_{\eta_{21} \in l_{21}} \eta_{21} + \eta_{22} = \beta_2$$

6.5 aber besagt nach 2.36

(c) $$\bigwedge_{\substack{\zeta_1 \in x_1 \\ \alpha_{11} \in a_{11}}} \bigvee_{\eta_{11} \in l_{11}} \zeta_1 \alpha_{11} = \eta_{11}$$

(d) $$\bigwedge_{\substack{\alpha_{12} \in a_{12} \\ \eta_{12} \in l_{12}}} \bigvee_{\zeta_2 \in x_2} \alpha_{12}\zeta_2 = \eta_{12}$$

(e) $$\bigwedge_{\substack{\alpha_{21} \in a_{21} \\ \eta_{21} \in l_{21}}} \bigvee_{\zeta_1 \in x_1} \alpha_{21}\zeta_1 = \eta_{21}$$

(f) $\bigwedge$ $\quad\bigvee\quad$ $\zeta_2\,\alpha_{22} = \eta_{22}$

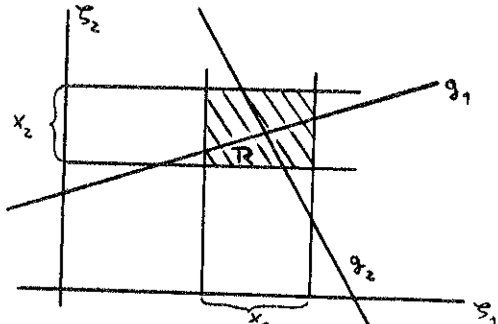
$\zeta_2 \in x_2$ $\quad \eta_{22} \in l_{22}$

$\alpha_{22} \in a_{22}$

α_{ij} und β_i sind fest gewählt, so daß man aus (c),(a) und (d) gerade (A) und aus (f),(b) und (e) gerade (B) erhält.

g_1 und g_2 sind Geradengleichungen. Die Punkte (ζ_1, ζ_2) mit $\zeta_1 \in x_1$, $\zeta_2 \in x_2$ bilden ein achsenparalleles Rechteck R.

(A) besagt nun, daß g_1 das Rechteck R in den zur ζ_2- Achse parallelen Seiten schneidet, (B), daß g_2 die zur ζ_1- Achse parallelen Seiten von R schneidet. Dann muß aber der Schnittpunkt von g_1 und g_2 in R liegen. (vgl. Skizze 9)



Skizze 9

q. e. d.

Sind die Lösungen von 6.4 $x_1, x_2 \in i\,\mathbb{I}(\mathbb{R})$, so lösen ix_1, ix_2 das Gleichungssystem

6.6
$$y_i\cdot(ia_{12})\ i\ y_2\cdot a_{12} = b_1$$
$$iy_1\cdot a_{21} + y_2\cdot(ia_{22}) = b_2$$

wie man mit 2.25 Lemma sofort einsieht. Es kann Satz 6.3 dann auf die Lösung dieses Systems angewendet werden.

Unter der Voraussetzung $a_{ij}, b_j \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $i,j = 1,2$, $x_1, x_2 \notin \Delta$ kann ein Paar x_1, x_2 mit $x_1, ix_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ oder $ix_1, x_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nicht Lösung von 6.4 oder 6.6 sein.

Sei $x_1, ix_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ Lösung von 6.4. Dann folgt:

$$ix_1\cdot a_{11} + x_2\cdot(ia_{12}) = b_1$$

und mit 2.22

$$i|x_1|\cdot|a_{11}| + (i|x_2|)\cdot(i|a_{12}|) = b_1 .$$

Dann folgt:

$$i|x_1|\cdot|a_{11}|i|x_2|\cdot|a_{12}| = |b_1|$$

Links steht ein Element aus $i\,\mathbb{I}(\mathbb{R})$ rechts aus $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Beide Seiten können also höchstens Elemente der Diagonalen Δ sein, was aber in Folge von $x_1, x_2 \notin \Delta$ nicht sein kann.
Ist $ix_1, x_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so stelle man die Betrachtung für die zweite Gleichung in 6.4 an.
Damit ist also die Lösungsmenge S der Gleichungssysteme 6.2 eingeschlossen. Wir fragen weiter nach Rechtecken, die ganz in der Lösungsmenge S enthalten sind. Eine erste Antwort gibt der folgende Satz:

6.7 Satz:

Sind x_1, x_2 Lösungen des Gleichungssystems

6.8
$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 = b_2$$

mit $a_{ij}, b_i, x_i \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ für $i,j = 1,2$, so sind alle Punkte von $R' = x_1 \times x_2$ Schnittpunkte von Geradenpaaren

$$g_1:\ \alpha_{11}\zeta_1 + \alpha_{12}\zeta_2 = \beta_1$$
$$g_2:\ \alpha_{21}\zeta_1 + \alpha_{22}\zeta_2 = \beta_2$$

mit $\alpha_{ij} \in a_{ij}, \beta_j \in b_j$ für $i,j = 1,2$.

Beweis: Sei $\alpha_{ij} \in a_{ij}, \zeta_i \in x_i$. Dann gilt nach 2.36 $\alpha_{ij}\zeta_i \in a_{ij}\cdot x_i$ für alle $\alpha_{ij} \in a_{ij}, \zeta_i \in x_i$ und damit nach 2.36 auch

$$\alpha_{11}\zeta_1 + \alpha_{12}\zeta_2 \in b_1$$
$$\alpha_{21}\zeta_1 + \alpha_{22}\zeta_2 \in b_2$$

Dann ist aber (ζ_1, ζ_2) Schnittpunkt zweier Geraden g_1 und g_2.

q. e. d.

Das Vorgehen gemäß 6.7 Satz hat jedoch einen Nachteil, wenn man nur die angegebene Frage zu lösen sucht. Die Lösung von 6.8 leistet ja viel mehr, als was in 6.7 Satz ausgesagt ist. Dies geht aus dem Beweis hervor. Sucht man lediglich ein Rechteck in S, so zeigt sich für 6.7 Satz:

Aus 6.8 folgt

6.9
$$x_1 = (b_1 \delta a_{12} \cdot x_2) \cdot (ia_{11}^{-1})$$
$$x_2 = (b_2 \delta a_{21} \cdot x_1) \cdot (ia_{22}^{-1}).$$

a_{ij} sind aus $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Wählt man a'_{ij} mit $a_{ij} \geq a'_{ij}$, so folgt mit den Monotonieberechnungen 3.1

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 \delta a_{12} \cdot x_2) \cdot (ia_{11}^{-1}) \\ &\leq (b_1 \delta a'_{12} \cdot x_2) \cdot (ia_{11}^{-1}) \\ &\leq (b_1 \delta a'_{12} \cdot x_2) \cdot (ia'^{-1}_{11}) =: x'_1 \end{aligned}$$

und ebenso $x_2 \leq (b_2 \delta a'_{21} \cdot x_1) \cdot (ia'^{-1}_{22}) =: x'_2$

Betrachten wir 6.9 als Operator $T\colon (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und, wenn in 6.9 a_{ij} durch a'_{ij} ersetzt ist, 6.9 als Operator T', dann gilt:

$$T(x_1, x_2) \leq T'(x_1, x_2).$$

Es gilt also auch für etwaige Fixpunkte von $T:(x_1^*, x_2^*)$ bzw. $T':(x'^*_1, x'^*_2)$

$$x_1^* \leq x'^*_1, \; x_2^* \leq x'^*_2 .$$

Dies kann nun auch so verstanden werden: Je näher die $a_{ij} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ an der Hauptdiagonalen Δ liegen (also Punkten entprechen), desto größer ist die Lösungsmenge $x_1 \times x_2$ von 6.7. Man müßte also am besten gleich Punkte als a_{ij} einsetzen und nicht Intervalle.

Der folgende Satz bietet eine Lösung an, bei der diese Schwierigkeit nicht besteht.

6.1o <u>Satz:</u>

Sind x_1, x_2 Lösungen des Gleichungssystems

6.11
$$a_{11} \cdot (ix_1) + a_{12} \cdot (ix_2) = b_1$$
$$a_{21} \cdot (ix_1) + a_{22} \cdot (ix_2) = b_2$$

mit a_{ij}, b_i, x_j, $a_{ij} \cdot (ix_j) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ für $i,j = 1,2$, so sind alle Punkte von $R' = x_1 \times x_2$ Schnittpunkte von Geradenpaaren

$$g_1: \ \alpha_{11}\,\zeta_1 + \alpha_{12}\,\zeta_2 = \beta_1$$
$$g_2: \ \alpha_{21}\,\zeta_1 + \alpha_{22}\,\zeta_2 = \beta_2$$

mit $\alpha_{ij} \in a_{ij}$, $\zeta_j \in x_j$, $\beta_i \in b_i$.

Beweis: Die Technik dieses Beweises ist die gleiche wie beim Beweis von 6.3 Satz.

Wir wählen ζ_j, $j = 1,2$ und zeigen:

$$\bigwedge_{\substack{\zeta_1 \in x_1 \\ \zeta_2 \in x_2}} \ \bigvee_{\substack{\alpha_{11} \in a_{11} \\ \alpha_{12} \in a_{12} \\ \alpha_{21} \in a_{21} \\ \alpha_{22} \in a_{22} \\ \beta_1 \in b_1 \\ \beta_2 \in b_2}} \quad \begin{array}{l} \alpha_{11}\,\zeta_1 + \alpha_{12}\,\zeta_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\,\zeta_1 + \alpha_{22}\,\zeta_2 = \beta_2 \end{array}$$

Nach 2.36 gilt

(a) $$\bigwedge_{\zeta_1 \in x_1} \ \bigvee_{\alpha_{11} \in a_{11}} \quad \zeta_1 \cdot \alpha_{11} \in a_{11} \cdot (ix_1)$$

(b) $$\bigwedge_{\zeta_1 \in x_1} \ \bigvee_{\alpha_{21} \in a_{21}} \quad \zeta_1 \cdot \alpha_{21} \in a_{21} \cdot (ix_1)$$

(c) $$\bigwedge_{\zeta_2 \in x_2} \ \bigvee_{\alpha_{12} \in a_{12}} \quad \zeta_2 \cdot \alpha_{12} \in a_{12} \cdot (ix_2)$$

(d) $$\bigwedge_{\zeta_2 \in x_2} \ \bigvee_{\alpha_{22} \in a_{22}} \quad \zeta_2 \cdot \alpha_{22} \in a_{22} \cdot (ix_2)$$

Mit (a) bis (d) gilt aber nach 2.36:

$$\zeta_1 \cdot \alpha_{11} + \zeta_2 \cdot \alpha_{12} \in a_{11} \cdot (ix_1) + a_{21} \cdot (ix_2) = b_1$$
$$\zeta_1 \cdot \alpha_{21} + \zeta_2 \cdot \alpha_{22} \in a_{21} \cdot (ix_1) + a_{22} \cdot (ix_2) = b_2$$

womit die Behauptung bestätigt ist.

q. e. d.

Aus 6.1o Satz kann man nun genau das Umgekehrte wie aus 6.7 Satz herleiten:

Man gewinnt aus 6.11 leicht folgendes Verfahren U:

6.12
$$x_1 = i(b_1 \delta a_{12} \cdot (ix_2)) \cdot (ia_{11}^{-1})$$
$$x_2 = i(b_2 \delta a_{21} \cdot (ix_2)) \cdot (ia_{22}^{-1})$$

Vergleicht man U mit T aus 6.9, so folgt:

6.13
$$U(x_1, x_2) = i\ T(ix_1, ix_2).$$

Ist (x_1^*, x_2^*) Fixpunkt von U, so folgt aus 6.13, daß (ix_1^*, ix_2^*) Fixpunkt von T ist. Es liegt also genau das an der Hauptdiagonalen Δ gespiegelte Verhalten vor wie in 6.7 Satz. D.h.:

Bilden wir U' mit $a'_{ij} \leq a_{ij}$ so folgt:

$$U'(x_1, x_2) = i\ T'(ix_1, ix_2) \leq i\ T(ix_1, ix_2) = U(x_1, x_2).$$

U,U' verhalten sich umgekehrt wie T,T'; je breiter die Intervalle a_{ij} sind, desto größer ist die Lösungsmenge $R' = x_1 \times x_2$.

6.7 und 6.1o Satz sagen nichts darüber aus, wann x_1 und x_2 in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ liegen. Nun wurde oben festgestellt, daß wenn (x_1^*, x_2^*) der Fixpunkt von U ist, T den Fixpunkt (ix_1^*, ix_2^*) besitzt. Es läßt sich nun noch ein dritter Operator W aufbauen, dessen Fixpunkt dann (ix_1^*, x_2^*) ist. Und ganz entsprechend kann man dann einen Operator V finden, dessen Fixpunkt (x_1^*, ix_2^*) ist, so daß schließlich immer einer der Fixpunkte in $\mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ liegt.

6.14 <u>Satz:</u>

Sind x_1, x_2 Lösungen des Gleichungssystems

6.15
$$a_{11}\cdot(ix_1) + a_{12}\cdot x_2 = b_1$$
$$a_{21}\cdot(ix_1) + a_{22}\cdot x_2 = b_2$$

mit $a_{ij}, b_i, x_j, a_{ij}\cdot(ix_j) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, so sind alle Punkte von $R' = x_1 \times x_2$ Schnittpunkte von Geradenpaaren

$$g_1:\ \alpha_{11}\cdot\zeta_1 + \alpha_{12}\cdot\zeta_2 = \beta_1$$
$$g_2:\ \alpha_{21}\cdot\zeta_1 + \alpha_{22}\cdot\zeta_2 = \beta_2$$

mit $\alpha_{ij} \in a_{ij}, \zeta_j \in x_j, \beta_i \in b_i$.

Beweis: Der Beweis ergibt sich aus den Beweisen von 6.7 und 6.1o Satz.

Gleichwohl ist es denkbar, daß nach keinem der drei Sätze 6.7, 6.1o und 6.14 eine Lösung in $\mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ gewonnen wird, da die Voraussetzungen $a_{ij}\cdot(ix_j) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nicht immer erfüllt zu sein brauchen. Dann kann man durch Veränderung der Koeffizienten a_{ij}, durch Verkürzung der Intervalllänge, die Voraussetzungen zu erfüllen suchen.

Die Sätze 6.3, 6.7, 6.1o und 6.14 enthalten keinerlei Aussagen über die "Qualität" der Lösungsmengen R und R', d.h. sie sagen nichts darüber aus, daß für alle Achsenparallelen Rechtecke Q und Q' mit $R \supset Q \supset S \supset Q' \supset R'$ gilt: $R = Q$, $Q' = R'$. Dem Verfasser ist auch kein dafür hinreichendes Kriterium bekannt.

Es entsteht auch sofort die Frage, wie die Systeme 6.4, 6.8, 6.11 und 6.15 zu lösen sind. Das Fehlen des Distributivitätsgesetzes scheidet viele der bekannten Lösungsmethoden aus. Die Auflösung, wie sie von 6.8 nach 6.9 führt, entspricht dem Einzel- bzw. Gesamtschrittverfahren. Dieser Weg ist in allen angegebenen Fällen möglich. Sucht man unter Verwendung der Norm 4.7 nach Konvergenzkriterien für die Verfahren, so erhält man das Zeilensummenkriterium und ähnliche Kriterien. Diese ohnehin sehr einschränkenden Kriterien sind im Falle der Intervalle oder $\mathbb{R}^2$- Punkte noch einschränkender. Sie garantieren aber die Existenz der Lösung.
Man vergleiche zum Thema Gleichungssysteme auch Chartres [5].

VII $\mathbb{R}^2$ - Matrizen

Die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel lassen sich zum Teil auch auf Matrizen übertragen.
Wir führen zunächst die Verknüpfung von Matrizen ein:

7.1 Definition:

Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$; $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}^2$.

Für $\sigma \in \{+, -, \delta, i\}$ sei

$$A \ \sigma \ B := (a_{ij} \ \sigma \ b_{ij})$$

$$A \cdot B := (\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk})$$

Als Norm wählen wir eine 4.7 entsprechende Norm, die Zeilensummennorm:

7.2 Definition:

$$\|A\| := \max_i \{ \sum_j \max\{ |\underline{a_{ij}}| , |\underline{a_{ij}}| \}\}$$

$$= \max_i \{ \sum_j \| a_{ij} \| \}$$

Für diese Norm gilt die Schwarzsche Ungleichung (vgl. [4]) :

7.3 $$\| A \cdot B \| \leq \| A \| \cdot \| B \| .$$

Beweis: $\| A \cdot B \| = \max_i \{ \sum_k \| \sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \| \}$

Die Norm nach 4.7 erfüllt die Dreiecksungleichung bezüglich Addition und Multiplikation. Es folgt somit:

$$\| A \cdot B \| \leq \max_i \{ \sum_k \sum_j \| a_{ij} \cdot b_{jk} \| \}$$

$$\leq \max_i \{ \sum_k \sum_j \| a_{ij} \| \cdot \| b_{jk} \| \}$$

$$= \max_i \{ \sum_j \| a_{ij} \| \cdot \sum_k \| b_{jk} \| \}$$

$$\leq \max_i\{\sum_j \| a_{ij} \| \cdot \max_j\{ \sum_k \| b_{jk} \| \}\}$$
$$= \max_i\{\sum_j \| a_{ij} \|\} \cdot \max_j\{\sum_k \| b_{jk} \| \}$$
$$= \| A \| \cdot \| B \|$$

q. e. d.

Die Halbordnung in der Menge der $\mathbb{R}^2$ - Matrizen kann wie folgt eingeführt werden.

7.4. <u>Definition:</u>

Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$; a_{ij} , $b_{ij} \in \mathbb{R}^2$.

$A \geq B \;:\Longleftrightarrow\; a_{ij} \geq b_{ij}$ f.a. i, j.

Auch den "Betrag" einer $\mathbb{R}^2$ - Matrix führen wir ein:

7.5. <u>Definition:</u>

Sei $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}^2$.

$|A| := (|a_{ij}|)$.

Es läßt sich nun leicht die Betrachtung über das distributive Verhalten von Kapitel III auf Matrizen übertragen.

7.6 <u>Satz:</u>

Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$; a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij} \in \mathbb{R}^2$.

Dann gilt:

$$|A| \cdot |C| \;\mathrm{i}\; |B| \cdot |C| \leq |A + B| \cdot |C| \leq |A| \cdot |C| + |B| \cdot |C|.$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich aus Satz 3.9:

$$|A| \cdot |C| \;\mathrm{i}\; |B| \cdot |C| = (\sum_j |a_{ij}| \cdot |c_{jk}| \;\mathrm{i}\; |b_{ij}| \cdot |c_{jk}|)$$
$$\leq (\sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \cdot |c_{jk}|)$$
$$= |A + B| \cdot |C|$$

$$\leq \left(\sum_j |a_{ij}| \cdot |c_{jk}| + |b_{ij}| \cdot |c_{jk}|\right)$$
$$= |A| \cdot |C| + |B| \cdot |C| \quad .$$

q. e. d.

Ebenso folgt aus 3.1o Korollar:

7.7 <u>Korollar:</u>

Seien A, B, C wie in 7.6 Satz. Dann gilt:

7.8 $$i(|A| \cdot |C| + |B| \cdot |C|) \leq |A + B| \cdot |C| \leq |A| \cdot |C| + |B| \cdot |C|$$

7.9 $$i|A + B| \cdot |C| \leq |A| \cdot |C| \; i \; |B| \cdot |C| \leq |A + B| \cdot |C|$$

7.1o $$(i\,|C|) \cdot (A \; i \; B) \leq A \cdot C \; i \; B \cdot C \leq |C| \cdot (A \; i \; B)$$

Beweis: Der Beweis folgt aus 3.1o und 7.6.

7.8: $$i(|A| \cdot |C| + |B| \cdot |C|) = \left(\sum_j i(|a_{ij}| \cdot |c_{jk}| + |b_{ij}| \cdot |c_{jk}|)\right)$$
$$\leq \left(\sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \cdot |c_{jk}|\right)$$
$$= |A + B| \cdot |C|$$

Der zweite Teil der Behauptung ist schon in 7.6 gezeigt.

7.9: $$i|A + B| \cdot |C| = \left(\sum_j i\,|a_{ij} + b_{ij}| \cdot |c_{jk}|\right)$$
$$\leq \left(\sum_j |a_{ij}| \cdot |c_{jk}| \; i \; |b_{ij}| \cdot |c_{jk}|\right)$$
$$= |A| \cdot |C| \; i \; |B| \cdot |C| \; .$$

Der zweite Teil der Behauptung ist schon in 7.6 gezeigt.

7.1o: $$(i|C|) \cdot (A \; i \; B) = \left(\sum_j (i|c_{ij}|) \cdot (a_{jk} \; i \; b_{jk})\right)$$
$$\leq \left(\sum_j c_{ij} \cdot a_{jk} \; i \; c_{ij} \cdot b_{jk}\right)$$
$$= C \cdot A \; i \; C \cdot B$$
$$\leq \left(\sum_j |c_{ij}| \cdot (a_{jk} \; i \; b_{jk})\right)$$
$$= |C| \cdot |A \; i \; B| \; .$$

q. e. d.

Um nun auch solche Ungleichungen für Normen zu zeigen, gehen wir weiter analog vor:

7.11 <u>Lemma:</u>

Seien A, B $\mathbb{R}^2$-Matrizen. Die Normen sollen 7.2 und 4.7 entsprechen. Sei $A \geq B \geq i\ A$. Dann gilt:
$\| A \| \geq \| B \|$

Beweis: Aus $A \geq B \geq i\ A$ folgt:
$a_{ij} \geq b_{ij} \geq i\ a_{ij}$ und damit $\|a_{ij}\| \geq \|b_{ij}\|$ nach 4.11.

Dann ist
$$\| A \| = \max_i \{ \sum_j \|a_{ij}\| \}$$
$$\geq \max_i \{ \sum_j \|b_{ij}\| \} = \| B \| .$$

q. e. d.

Damit erhalten wir das Ergebnis über das distributive Verhalten der Normen:

7.12 <u>Korollar:</u>

Seien A, B, C $\mathbb{R}^2$-Matrizen. Die Normen seien gemäß 7.2 und 4.7 gewählt. Dann gilt:
$$\| \, |A|\cdot|C| \; i \; |B|\cdot|C| \, \| \leq \| \, |A+B|\cdot|C| \, \| \leq \| \, |A|\cdot|C|+|B|\cdot|C| \, \|$$

Der Beweis folgt sofort aus 7.7 und 7.11.

Aus 7.1o erhalten wir mit 7.11 ein Korollar, das zeigt, daß die Multiplikation mit einer konstanten Matrix lipschitzbeschränkt ist:

7.13 <u>Korollar:</u>

Unter den Voraussetzungen von 7.12 gilt:
$$\| A \cdot X \,\delta\, A \cdot Y \| \leq \| \, |A| \cdot |X \,\delta\, Y| \, \| \leq \| A \| \cdot \| X \,\delta\, Y \| .$$

VIII Betrachtungen zu einem Verfahren zur Matrizeninversion.

7.13 Korollar werden wir nun heranziehen, um ein Verfahren zur Bestimmung der Inversion einer Intervallmatrix nach Krückeberg [19] näher zu untersuchen und Aussagen über die gefundene Inverse zu machen, die mit den Ergebnissen von Apostolatos und Kulisch [4] vergleichbar sind.

8.1 Definition:

Sei $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Wir nennen

$A^{-1} := \{Y; Y^{-1} \in A, Y = (y_{ij}), y_{ij} \in \mathbb{R}\}$

die Inverse von A .

A^{-1} ist im allgemeinen keine $\mathbb{R}^2$-Matrix. Wir bezeichnen mit $[A^{-1}]$ die kleinste Intervallmatrix die A^{-1} noch ganz enthält.

Bei Krückeberg [19] wird folgendes Verfahren zur Bestimmung dieser Inversen $[A^{-1}]$ angegeben:

8.2 $$T(W) = X + (E - X \cdot A) \cdot W .$$

Dabei ist E die Einheitsmatrix $E = ((1, 1) \cdot \delta_{ij})$, ($\delta_{ij}$ Kronecker-Symbol) X eine Punktmatrix, $X = (x_{ij})$, $x_{ij} \in \Delta$, und W die zu iterierende Lösung, eine Intervallmatrix.

Wir leiten zunächst eine für die Konvergenz der Folge $\{T^n W\}$ hinreichende Bedingung her, indem wir die Kontraktionseigenschaft des Operators T untersuchen:

Seien W, W' Intervallmatrizen. Dann gilt mit 8.2:

$$\begin{aligned} T W \delta T W' &= X + (E - X \cdot A) \cdot W \,\delta\, X \,\delta\, (E - X \cdot A) \cdot W' \\ &= (E - X \cdot A) \cdot W \,\delta\, (E - X \cdot A) \cdot W'. \end{aligned}$$

Mit 7.13 folgt:

$$\begin{aligned} \| T W \delta T W' \| &= \| (E - X \cdot A) \cdot W \,\delta\, (E - X \cdot A) \cdot W' \| \\ &\leq \| E - X \cdot A \| \cdot \| W \delta W' \| . \end{aligned}$$

T ist also ein kontrahierender Operator, wenn X so gewählt werden kann, daß gilt:

8.3 $$k := \| E - X \cdot A \| < 1 .$$

Diese Bedingung entspricht der in [19] angegebenen genau. Jedoch sieht man nun, daß es sich bei T um einen kontrahierenden Operator handelt, der bei beliebiger Anfangslösung auf einen Fixpunkt W^* führt.

Wählt man als Ausgangslösung W_o die Nullmatrix, so erhält man mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes eine erste Abschätzung für den Fixpunkt W^* (vgl. [4]) :

Aus

8.4. $$\| W \delta W^* \| \leq \frac{1}{1-k} \| T W \delta W \|$$

folgt mit W = Nullmatrix

8.5 $$\| W^* \| \leq \frac{1}{1-k} \| X \|$$

Die vorausgegangenen Betrachtungen lassen alle den bei einer numerischen Durchführung des Verfahrens 8.2 gemachten Rundungsfehler außer Acht. Die Betrachtung des Rundungsfehlers ist schwierig, vor allem deshalb, weil im Bereich sehr kleiner Zahlen der relative Rundungsfehler über alle Grenzen wachsen kann.

Wir machen zunächst die Annahme, daß es einen maximalen prozentualen Rundungsfehler ε gebe, und weisen später nach, daß der Rundungsfehler unter bestimmten Voraussetzungen beschränkt bleibt bei der Durchführung des Verfahrens.

Wir nehmen an, die Zahlen hätten alle normalisierte Form und es werde durchweg einseitig gerundet.

Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

8.6 $$(\alpha \cdot \beta)_r \in (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta) \cdot (1 + (-\varepsilon, \varepsilon))$$

8.7 $$(\alpha + \beta)_r \in ((\alpha, \alpha) + (\beta, \beta)) \cdot (1 + (-\varepsilon, \varepsilon)).$$

$(\alpha \cdot \beta)_r$ bzw. $(\alpha + \beta)_r$ seien die wirklich errechneten Werte.

Ein Beweis wird nicht gegeben; man vergleiche aber auch Wilkinson [24].

Sei $\rho := 1 + (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\eta_j := \rho^{n+1-j}$

dann gilt für $a_j, b_j \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$

8.8 $$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j\right)_r \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j \cdot \eta_j$$

Wir setzen:

$$H := (\eta_j \cdot \delta_{ij}) \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Dann gilt für Intervallmatrizen A, B

8.9 $$(A \cdot B)_r \leq A \cdot (B \cdot H)$$

oder $$(A \cdot B)_r \leq (A \cdot H) \cdot B$$

und

8.1o $$(A + B)_r \leq (A + B) \cdot \rho$$

Damit erhalten wir aus 8.2 mit 8.9 und 8.1o:

8.11 $$\begin{aligned} (T\,W)_r &= (X + (E - X \cdot A) \cdot W)_r \\ &\leq (X + ((E - X \cdot A) \cdot W)_r) \cdot \rho \\ &\leq (X + ((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W) \cdot \rho \\ &\leq X \cdot \rho + (((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W) \cdot \rho \end{aligned}$$

8.12 $$=: T_r\,W$$

Der Wert von $(E - X \cdot A)_r$ kann ja errechnet werden und liegt dann für die Dauer des Verfahrens fest. So ist T_r also ein Operator, der die Rundung berücksichtigt. Es gilt nun

8.13 $$T\,W \leq (T\,W)_r \leq T_r\,W$$

Aus 8.12 sieht man, daß der Rundungsfehler beschränkt bleibt, solange der Wert der $|x_{ij}|$ der Elemente von X nicht unter eine kleinste Größe sinkt. Im Falle der im Beispiel benutzten IBM 7090 des IIM Bonn würde das folgende Bedingung sein:

$$\min_{i,j} |x_{ij}| \geq 2 \cdot 10^{-38} .$$

Wie in 8.3 für T kann auch für T_r eine Kontraktionsbedingung hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \| T_r W \,\delta\, T_r W' \| &= \| X \cdot \rho + (((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W) \cdot \rho \,\delta \\ &\qquad \delta\, X \cdot \rho \,\delta\, (((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W') \cdot \rho \| \\ &= \| (((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W) \cdot \rho \,\delta \\ &\qquad (((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W') \cdot \rho \| \\ &\leq \| ((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot W \,\delta\, ((E - X \cdot A)_r \cdot H) \cdot \\ &\qquad \cdot W' \| \cdot \| \rho \| \\ &\leq \| (E - X \cdot A)_r \cdot H \| \cdot \| W \,\delta\, W' \| \cdot \| \rho \| , \end{aligned}$$

so daß man erhält

$$k_r = \| (E - X \cdot A)_r \cdot H \| \cdot \| \rho \| .$$

Ist $k_r < 1$, so konvergiert auch die Folge $\{T_r^n W\}$ nach dem Banachschen Kontraktionssatz.

Selbstverständlich folgt aus $k_r < 1$ auch $k < 1$.

Seien W^* und W_r^* die Fixpunkte von T und T_r. Dann gilt wegen 8.13 und und der Teilmengeneigenschaft von T und T_r, daß ab einem n_o gelten muß

$$W^* \leq (T\, W)_r^n \leq W_r^* \quad \text{für } n \geq n_o .$$

Da die Menge $\{ Z \mid W^* \leq Z \leq W_r^* \}$ aber kompakt ist, kann man schließen, daß mindestens ein Häufungspunkt existiert. Der Schluß, daß genau ein Häufungspunkt existiert, kann jedoch leider nicht gezogen werden.

Entsprechend 8.4 und 8.5 erhält man für T_r :

$$\| W \,\delta\, W_r^* \| \leq \frac{1}{1-k_r} \| T_r W \,\delta\, W \|$$

8.14 $$\| W_r^* \| \leq \frac{1}{1-k_r} \| X \cdot \rho \| .$$

Von größerem Interesse aber als 8.4, 8.5 und 8.14 dürfte die Frage sein, wie weit W^*, W_r^* und $[A^{-1}]$ von einander entfernt sind. Wenden wir uns zunächst $\| W^* \delta W_r^* \|$ zu:

Sei $H = E + F$, $\rho = 1 + \underset{\sim}{\varepsilon}$. ($\underset{\sim}{\varepsilon}$ ist hier Intervall). Dann gilt nach 7.6 Korollar, da es sich nur um Intervallmatrizen handelt:

$$
\begin{aligned}
T_r W &\leq (X + (((E - (X \circ E) \circ A - (X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho \\
&\leq (X + (((E - X \circ A)\rho - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho \\
&\leq (X + (((E - X \circ A) + (E - X \circ A) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} - \\
&\qquad - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho \\
&\leq (X + ((E - X \circ A) \circ H + ((E - X \circ A) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} - \\
&\qquad - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho \\
&\leq (X + ((E - X \circ A) \circ E + (E - X \circ A) \circ F + \\
&\qquad + ((E - X \circ A) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho \\
&\leq (X + (E - X \circ A) \circ W + ((E - X \circ A) \circ F + \\
&\qquad + ((E - X \circ A) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho \\
&\leq (X + (E - X \circ A) \circ W + ((E - X \circ A) \circ F + \\
&\qquad + ((E - X \circ A) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H) \circ W) \circ \rho
\end{aligned}
$$

8.15 $$= (T W + (S \circ W)) \circ \rho$$

Hierbei ist $S := (E - X \circ A) \circ F + ((E - X \circ A) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} - ((X \circ F) \circ A) \circ \rho) \circ H$

Damit gilt nun für die Fixpunkte W^*, W_r^* von T und T_r :

$$
\begin{aligned}
T_r W^* &\leq (T W^* + S \circ W^*) \circ \rho \\
T_r W_r^* &\leq (T W_r^* + S W_r^*) \circ \rho \\
&\leq T W_r^* + (T W_r^*) \circ \underset{\sim}{\varepsilon} + (S \circ W_r^*) \circ \rho
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\| W_r^* \delta W^* \| &= \| T_r W_r^* \delta T W^* \| \\
&\leq \| (T W_r^* + S W_r^*) \circ \rho \ \delta \ T W^* \|
\end{aligned}
$$

$$\leq \| T\, W_r^* \,\delta\, T\, W^* \| + \| (T\, W_r^*) \cdot \varepsilon +$$
$$+ (S \cdot W_r^*) \cdot \rho \|$$
$$\leq k \| W_r^* \,\delta\, W^* \| + \| T\, W_r^* \| \cdot \| \varepsilon \| +$$
$$+ \| S \| \cdot \| W_r^* \| \cdot \| \rho \|$$

Mit der Teilmengeneigenschaft folgt

$$T\, W_r^* \geq T\, W^* = W^*$$

Und damit:

$$\| W_r^* \,\delta\, W^* \| \leq k \| W_r^* \,\delta\, W^* \| + \| W^* \| \cdot \| \varepsilon \| +$$
$$+ \| S \| \cdot \| W_r^* \| \cdot \| \rho \|$$

Woraus folgt:

8.16 $$\| W_r^* \,\delta\, W^* \| \leq \frac{\| \varepsilon \| + \| S \| \cdot \| \rho \|}{1-k} \| W_r^* \|$$

Um den Abstand von W^*, W_r^* und $[A^{-1}]$ abzuschätzen, bedarf es noch der Vorbereitung :

8.17 <u>Satz:</u>

Seien A, B Intervallmatrizen, C eine Punktmatrix.
Dann gilt:
$(A \cdot B) \cdot C \geq A \cdot (B \cdot C)$

Beweis: $(A \cdot B) \cdot C = \left(\sum_k \left(\sum_l a_{il} \cdot b_{lk} \right) \cdot c_{kj} \right)$

da $c_{ij} \in \Delta$ folgt:

$$= \left(\sum_k \sum_l a_{il} \cdot b_{lk} \cdot c_{kj} \right)$$
$$\geq \left(\sum_l a_{il} \cdot \sum_k b_{lk} \cdot c_{kj} \right)$$
$$= A \cdot (B \cdot C)$$

q. e. d.

Damit erhält man nun folgende Abschätzung für $\| W^{*} \delta [A^{-1}] \|$ (vgl. [4]) :

$$T [A^{-1}] \delta [A^{-1}] = X + (E - X \cdot A) \cdot [A^{-1}] \delta [A^{-1}]$$
$$\leq X - (X \cdot A) [A^{-1}]$$

und nach 8.17, da X eine Punktmatrix ist

$$\leq X (E - A \cdot [A^{-1}])$$

Hieraus folgt:

$$\| W^{*} \delta [A^{-1}] \| \leq \frac{1}{1-k} \| T [A^{-1}] \delta [A^{-1}] \| \quad \text{nach 8.4}$$

8.18 $$\leq \frac{1}{1-k} \| X \| \cdot \| E - A \cdot [A^{-1}] \|$$

$\| E - A \cdot [A^{-1}] \|$ kann als Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens angesehen werden.

Ebenso erhält man für $\| W_r^{*} \delta [A^{-1}] \|$ eine Abschätzung:

8.19 $$\| W_r^{*} \delta [A^{-1}] \| \leq \frac{1}{1-k} (\| X \| \cdot \| E - A \cdot [A^{-1}] \| +$$
$$+ \| T [A^{-1}] \cdot \llcorner\varepsilon + (S \cdot [A^{-1}]) \cdot \rho \|)$$

Führt man noch den Begriff der Länge eines Intervalls a und einer Intervallmatrix A ein, ergeben sich noch zusätzliche Abschätzungen:

8.2o <u>Definition:</u>

$l(a) := | \llcorner\underline{a} - \underline{a}\lrcorner |$ heiße Länge des Intervalls a.

$l(A) := \| \llcorner\underline{A} - \underline{A}\lrcorner \|$ heiße Länge der Matrix A.

Es gilt :

$$l(A) = \| A - A \|$$

Damit erhält man für $l(W^*)$ (vgl. [4]) :

$$\begin{aligned} l(W^*) &= l(\,(E - X \cdot A) \cdot W^*) \\ &= \| (E - X \cdot A) \cdot W^* - (E - X \cdot A) \cdot W^* \| \\ &\leq \| W^* \| \cdot \| E - X \cdot A - E + X \cdot A \| \\ &\quad + l(W^*) \cdot \| E - X \cdot A \| \qquad \text{nach [4] S. 27} \\ &= \| W^* \| \cdot \| X \| \cdot \| A - A \| + l(W^*) \cdot \| E - X \cdot A \| \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$l(W^*) = \frac{\| W^* \| \cdot \| X \|}{1 - k} \cdot l(A)$$

IX Ein Beispiel zu V, VI und VIII.

Am Beispiel eines Gleichungssystems in drei Unbekannten sollen nun Satz 5.6, Satz 6.3 und die Abschätzungen 8.14 veranschaulicht werden.

Es wird zu einer vorgegebenen Intervallmatrix A und einem Intervallvektor B gesucht:

$$Y \supset \{\mathring{Y} \mid \mathring{A}\,\mathring{Y} = \mathring{B}, \mathring{A} \in A, \mathring{B} \in B\}$$

Eine Menge Y wird nun auf zweierlei Weise errechnet:

1. Indem man nach 8.2 die Inverse A^{-1} zu A einschließt durch eine Matrix W(END) und damit die rechte Seite B multipliziert:

   $$Y = W(END) * B$$

   Dazu werden X,E,W(der Ausgangswert der Iteration), H,E-XA angegeben, wie sie zur Berechnung von KR, dem Kontraktionsfaktor, benötigt werden. KR erweist sich als kleiner als Eins, die Iteration kommt nach 18 Schritten zum Stillstand, die Enditerierte heißt W(END). Die angegebene Lösung Y ist W(END)*B.

2. Es wird ein Gleichungssystem gemäß 6.6 aufgebaut:

$$\begin{array}{llll} + x_1 \cdot (ia_{11}) & i\ x_2 \cdot a_{12} & i\ x_3 \cdot a_{13} & = b_1 \\ i\ x_1 \cdot a_{21} & + x_2 \cdot (ia_{22}) & i\ x_3 \cdot a_{23} & = b_2 \\ i\ x_1 \cdot a_{31} & i\ x_2 \cdot a_{32} & + x_3 \cdot (ia_{33}) & = b_3 \end{array}$$

   Und gemäß dem Einzelschrittverfahren gelöst:

$$x_1 = \frac{b_1 - x_2 \cdot a_{12} - x_3 \cdot a_{13}}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - x_1 \cdot a_{21} - x_3 \cdot a_{23}}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - x_1 \cdot a_{31} - x_2 \cdot a_{32}}{a_{33}}$$

Da als Anfangswert ein Vektor mit Komponenten aus $\triangle$ gewählt wird, (die Rundungsfehler sind durch die Konversion von Binär- in Dezimalzahlen verursacht,) der Lösung eines Gleichungssystems $\underset{\bullet}{A}\, X = \underset{\bullet}{B}$ mit $\underset{\bullet}{A} \in A$, $\underset{\bullet}{B} \in B$ ist, die Existenz des Fixpunktes aber durch 1. gewährleistet ist, sind die Voraussetzungen von Satz 5.6 bei dem angewendeten Einzelschrittverfahren erfüllt. Die Reihe der Iterierten bildet eine monotone Folge.

Abschließend werden aus den Intervallenden der Komponenten der Matrix A und des Vektors B Punktmatrizen A_i und Punktvektoren B_i und aus diesen Gleichungssysteme gebildet $A_i X_i = B_i$ $i=1,\ldots,4096$ und die Intervallhülle der entstehenden Vektormenge gebildet. Darüber ob diese Menge die exakte Hülle der Lösungsmenge darstellt ist nichts bekannt. Sie soll aber als zusätzliche Information angegeben sein. Die Anzahl der Gleichungssysteme wird mit 4097 angegeben, weil bedingt durch die Organisation des Programms ein Gleichungssystem zweimal gelöst wurde.

```
MATRIX A
(-0.6000000000E 01 ,-0.5000000000E 01 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.1000000000E 01 ) ( 0.1000000000E 01 , 0.2000000000E 01 )
( 0.4000000000E 01 , 0.5000000000E 01 ) ( 0.1000000000E 02 , 0.1100000000E 02 ) ( 0.2000000000E 01 , 0.3000000000E 01 )
( 0.1000000000E 01 , 0.2000000000E 01 ) (-0.2000000000E 01 ,-0.1000000000E 01 ) ( 0.6000000000E 01 , 0.7000000000E 01 )

RECHTE SEITE B
( 0.7000000000E 01 , 0.8000000000E 01 ) ( 0.2000000000E 01 , 0.5000000000E 01 ) (-0.3000000000E 01 ,-0.2000000000E 01 )
```

```
LOESUNG UNTER VERWENDUNG VON 8.2 ZUR BESTIMMUNG DER INVERSEN VON A


MATRIX X
(-0.1627118634E 00 ,-0.1627118624E 00 ) ( 0.1242937846E-01 , 0.1242937851E-01 ) ( 0.3276836080E-01 , 0.3276836103E-01 )
( 0.5762711772E-01 , 0.5762711795E-01 ) ( 0.8587570674E-01 , 0.8587570721E-01 ) (-0.4632768291E-01 ,-0.4632768267E-01 )
( 0.5084745632E-01 , 0.5084745655E-01 ) ( 0.1694915234E-01 , 0.1694915245E-01 ) ( 0.1355932187E 00 , 0.1355932196E 00 )


MATRIX E
( 0.1000000000E 01 , 0.1000000000E 01 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 )
( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.1000000000E 01 , 0.1000000000E 01 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 )
( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.1000000000E 01 , 0.1000000000E 01 )


MATRIX W
(-0.1627118634E 00 ,-0.1627118624E 00 ) ( 0.1242937846E-01 , 0.1242937851E-01 ) ( 0.3276836080E-01 , 0.3276836103E-01 )
( 0.5762711772E-01 , 0.5762711795E-01 ) ( 0.8587570674E-01 , 0.8587570721E-01 ) (-0.4632768291E-01 ,-0.4632768267E-01 )
( 0.5084745632E-01 , 0.5084745655E-01 ) ( 0.1694915234E-01 , 0.1694915245E-01 ) ( 0.1355932187E 00 , 0.1355932196E 00 )


MATRIX H
( 0.9999999105E 00 , 0.1000000171E 01 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 )
( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.9999999329E 00 , 0.1000000126E 01 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 )
( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.0000000000E 00 , 0.0000000000E 00 ) ( 0.9999999552E 00 , 0.1000000081E 01 )


MATRIX E-XA
(-0.1355932215E 00 , 0.1355932364E 00 ) (-0.5762711935E-01 , 0.5762711889E-01 ) (-0.1073446352E 00 , 0.1073446315E 00 )
(-0.1355932159E 00 , 0.1355932289E 00 ) (-0.5762714170E-01 , 0.5762712680E-01 ) (-0.1073446390E 00 , 0.1073446352E 00 )
(-0.1355932159E 00 , 0.1355932289E 00 ) (-0.5762711749E-01 , 0.5762712308E-01 ) (-0.1073446278E 00 , 0.1073446501E 00 )
```

```
KONTRAKTIONSFAKTOR KR =  0.40677974E-00


LETZTE ITERIERTE W(END)
(-0.2030174462E 00 ,-0.1224062824E 00 ) (-0.4700493329E-02 , 0.2955925033E-01 ) ( 0.8597779087E-03 , 0.6467694649E-01 )
( 0.2082637138E-01 , 0.9442786639E-01 ) ( 0.7023538649E-01 , 0.1015160256E 00 ) (-0.7546160975E-01 ,-0.1719375909E-01 )
( 0.1141808647E-01 , 0.9027683036E-01 ) ( 0.1916689798E-03 , 0.3370663640E-01 ) ( 0.1043762997E 00 , 0.1668081423E 00 )


ABSTAND DER BEIDEN LETZTEN ITERIERTEN NACH 7.2
          WIRKLICH                BERECHNET
      0.                        0.37884315E-09


ANZAHL DER ITERATIONEN
                  18


LOESUNG W(END)*B
(-0.1853317327E 01 ,-0.4075408205E 00 ) ( 0.1746918074E-02 , 0.7436707951E 00 ) (-0.8717140294E 00 , 0.2742714527E 00 )
```

```
LOESUNG UNTER ANWENDUNG DES EINZELSCHRITTVERFAHRENS AUF 6.4

ANFANGSWERT
(-0.1145762704E 01 ,-0.1145762696E 01 ) ( 0.3514124304E 00 , 0.3514124322E 00 ) (-0.2553672399E 00 ,-0.2553672380E 00 )

ITERIERTE
(-0.1421016968E 01 ,-0.9163841679E 00 ) ( 0.1353877726E 00 , 0.6165649853E 00 ) (-0.6555518098E 00 , 0.9520973311E-01 )
(-0.1753910534E 01 ,-0.6211259365E 00 ) ( 0.6262694392E-01 , 0.6944330073E 00 ) (-0.7436955235E 00 , 0.2304278621E 00 )
(-0.1847376666E 01 ,-0.5111632049E 00 ) ( 0.4660081444E-01 , 0.7308232523E 00 ) (-0.7802177704E 00 , 0.2669252883E 00 )
(-0.1874806486E 01 ,-0.4686721935E 00 ) ( 0.3996040578E-01 , 0.7408657185E 00 ) (-0.7923208437E 00 , 0.2782820295E 00 )
(-0.1884960047E 01 ,-0.4565178900E 00 ) ( 0.3775984700E-01 , 0.7441524229E 00 ) (-0.7959899045E 00 , 0.2824006697E 00 )
(-0.1888188116E 01 ,-0.4524062909E 00 ) ( 0.3709274530E-01 , 0.7452988363E 00 ) (-0.7972483821E 00 , 0.2836984563E 00 )
(-0.1889225192E 01 ,-0.4510181546E 00 ) ( 0.3686393098E-01 , 0.7456622160E 00 ) (-0.7976614199E 00 , 0.2841204237E 00 )
(-0.1889573447E 01 ,-0.4505746811E 00 ) ( 0.3678883332E-01 , 0.7457814402E 00 ) (-0.7977949567E 00 , 0.2842615414E 00 )
(-0.1889686949E 01 ,-0.4504282847E 00 ) ( 0.3676455374E-01 , 0.7458210103E 00 ) (-0.7978391386E 00 , 0.2843074668E 00 )
(-0.1889724023E 01 ,-0.4503800012E 00 ) ( 0.3675652062E-01 , 0.7458339072E 00 ) (-0.7978536374E 00 , 0.2843225620E 00 )
(-0.1889736257E 01 ,-0.4503642469E 00 ) ( 0.3675388451E-01 , 0.7458381392E 00 ) (-0.7978583760E 00 , 0.2843274604E 00 )
(-0.1889740265E 01 ,-0.4503590650E 00 ) ( 0.3675302304E-01 , 0.7458395324E 00 ) (-0.7978599332E 00 , 0.2843290846E 00 )
(-0.1889741577E 01 ,-0.4503573626E 00 ) ( 0.3675273992E-01 , 0.7458399869E 00 ) (-0.7978604473E 00 , 0.2843296173E 00 )
(-0.1889742009E 01 ,-0.4503568038E 00 ) ( 0.3675264632E-01 , 0.7458401359E 00 ) (-0.7978606112E 00 , 0.2843297887E 00 )
(-0.1889742143E 01 ,-0.4503566250E 00 ) ( 0.3675261652E-01 , 0.7458401806E 00 ) (-0.7978606708E 00 , 0.2843298446E 00 )
(-0.1889742203E 01 ,-0.4503565654E 00 ) ( 0.3675260581E-01 , 0.7458401955E 00 ) (-0.7978606782E 00 , 0.2843298707E 00 )
(-0.1889742217E 01 ,-0.4503565467E 00 ) ( 0.3675260441E-01 , 0.7458402104E 00 ) (-0.7978606857E 00 , 0.2843298744E 00 )
(-0.1889742217E 01 ,-0.4503565318E 00 ) ( 0.3675260301E-01 , 0.7458402104E 00 ) (-0.7978607006E 00 , 0.2843298744E 00 )
(-0.1889742217E 01 ,-0.4503565318E 00 ) ( 0.3675260022E-01 , 0.7458402104E 00 ) (-0.7978607006E 00 , 0.2843298744E 00 )
(-0.1889742217E 01 ,-0.4503565318E 00 ) ( 0.3675260022E-01 , 0.7458402104E 00 ) (-0.7978607006E 00 , 0.2843298744E 00 )
(-0.1889742217E 01 ,-0.4503565318E 00 ) ( 0.3675260022E-01 , 0.7458402104E 00 ) (-0.7978607006E 00 , 0.2843298744E 00 )

DIE REIHE DER ITERIERTEN KANN AUCH ALS BEISPIEL ZU 5.6 SATZ ANGESEHEN WERDEN

EINSCHLIESSUNG ALLER LOESUNGEN DER AUS DEN ECKEN KOMBINIERTEN GLEICHUNGSSYSTEME

LOESUNGSHUELLE
(-0.1615384615E 01 ,-0.7454545423E 00 ) ( 0.1147902887E 00 , 0.6041666679E 00 ) (-0.6214285679E 00 , 0.8108107792E-01 )

ANZAHL DER GLEICHUNGSSYSTEME=    4097
```

X Übersicht über die wichtigsten Sätze und Definitionen

Definition	2.23	Definition der Multiplikation
Korollar	2.35	Gruppenstruktur des $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Multiplikation
	2.36	Gegenüberstellung der Ergebnisse der Dualtheorie
Satz	3.9	Beschreibung des subdistributiven Verhaltens
Korollar	3.10	
Korollar	4.13	
Korollar	4.22	Verbindung zwischen stetigen mengenwertigen und stetigen Intervallabbildungen
	4.23	Lipschitzbeschränktheit der Multiplikation mit einer Konstanten
Satz	5.5	Monotonieverhalten und Fixpunkte der Intervallabbildungen
Satz	5.6	
Satz	6.3	Außendarstellung der Lösung eines Gleichungssystems
	6.6	
Satz	6.7	Innendarstellung der Lösung eines Gleichungssystems
Satz	6.10	
Satz	6.14	
Satz	7.6	Subdistributivität bei $\mathbb{R}^2$-Matrizen
Korollar	7.7	
Korollar	7.12	
Korollar	7.13	Lipschitzbeschränktheit bei $\mathbb{R}^2$-Matrizen
	8.13	Einschließung der numerischen Iterierten

Literatur

[1] Apostolatos, N. und Kulisch, M.
Grundlagen einer Maschinenintervallarithmetik
(Karlsruhe, Sept. 66)

[2] Apostolatos, N. und Kulisch, M.
Approximation der erweiterten Intervallarithmetik durch die einfache Maschinenintervallarithmetik
(Karlsruhe, Nov. 66)

[3] Apostolatos, N., Kulisch, M. und Nickel, K.
Ein Einschließungsverfahren für Nullstellen
(Karlsruhe, Dez. 66)

[4] Apostolatos, N. und Kulisch, M.
Grundlagen und Anwendungen einer Intervallrechnung für Matrizen
(Karlsruhe, Mai 67)

[5] Chartres, B.A.
Automatic controlled precision calculations
(Journal of the ACM, vol.13, Nr.3, PP.386-4o3)

[6] Daniel, J.W.
Correcting approximations to multiple roots of polynomials
(Num. Math.9, 99-1o2 (1966))

[7] Moore, R.E.
Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing
(Technical Report Nr.25, Stanford (California) (1962))

[8] Moore, R.E.
Interval Analysis
(Englewood Cliffs 1966)

[9] Moore, R.E.

Automatic local coordinate transformations to reduce the growth of error bounds in interval computation of solutions of ordinary differential equations

(Error in Dig. Comp., Hrsg. v. L.B. Rall, Vol.2, S. 1o3-14o

[1o] Nickel, K.

Über die Notwendigkeit einer Fehlerschrankenarithmetik für Rechenautomaten

(Num. Math.9, 69-79 (1966))

[11] Nickel, K.

Die numerische Berechnung der Wurzeln eines Polynoms

(Num. Math., 8o-98 (1966))

[12] Nickel, K.

Anwendung einer Fehlerschranken-Arithmetik

(Karlsruhe, Jan. 1967)

[13] Rall, L.B. (Hrsg.)

Error in digital computation

(Vol.1, New York 1965)

[14] Rall, L.B. (Hrsg.)

Error in digital computation

(Vol.2, New York 1965)

[15] Hansen, E.R.

Interval arithmetic in matrix computations. Part I

(J. SIAM Num. Anal., Ser. B, Vol.2, Nr.2, 1965)

[16] Hansen, E.R. and Smith, R.

A computer program for solving a system of linear equations and matrix inversion with automatic error bounding using intervall arithmetic

(Lockheed Missiles and Space Comp. LMSC 4-22-66-3, June 17, 1966)

[17] Hansen, E.R. and Smith, R.
Interval arithmetic in matrix computations. Part II
(SIAM J. Numer. Anal., Vol.4, Nr.1, 1967)

[18] Hansen, E.R.
On solving systems of equations using interval arithmetic
(Erscheint in "Mathematic of computation")

[19] Krückeberg, F.
Inversion von Matrizen mit Fehlererfassung
(Bonn, April 1966)

[20] Krückeberg, F.
Defekterfassung bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen
(Vortrag Oberwohlfach, Juni 1966)

[21] Krückeberg, F.
Numerische Intervallrechnung und deren Anwendung
(Bonn, 1966)

[22] Krückeberg, F.
Zur numerischen Intervallrechnung
(Bonn, Juni 1966)

[23] Berge, C.
Topological spaces
(Edinburgh 1963)

[24] Wilkinson, J.H.
Rounding Errors in Algebraic Processes
(London 1963)

[25] Köthe, G.
Topologische lineare Räume I
(Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960)