Computing 7, 172—187 (1971)

Über die Ableitung von intervallwertigen Funktionen

Von

H. Ratschek und **G. Schröder**, Düsseldorf

(Eingegangen am 23. Juli 1970)

Zusammenfassung — Summary

Über die Ableitung von intervallwertigen Funktionen. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, den Ableitungsbegriff für Intervallfunktionen reellen Arguments zu präzisieren. Hierzu wurden Ableitungsverfahren für mengenwertige Funktionen, für Funktionen auf BANACH-Räumen, linearen topologischen Räumen und uniformen Räumen als Grundlage herangezogen.

On the Concept of Derivative of Interval Functions. In this paper we try to make precise the concept of derivative of interval functions whose argument is real. For this purpose we use ideas from differential calculus for multifunctions, set valued functions, functions in BANACH-spaces, linear topological spaces, and uniform spaces.

I. Einleitung

Durch eine Reihe von Untersuchungen, die von verschiedenen mathematischen Disziplinen ausgegangen sind, ist es möglich geworden, tiefer in die algebraische Struktur der Intervallarithmetik einzudringen und sie als brauchbares Hilfsmittel für die Beschreibung und Durchführung numerischer Probleme und Prozesse heranzuziehen.

Gewisse Probleme des intervallanalytischen Kalküls scheinen jedoch bis jetzt nicht angeschnitten worden zu sein. Dazu zählt der Begriff der *Ableitung von Intervallfunktionen* (kurz: I-Funktionen), im Gegensatz zur Begriffsbildung des *Integrals einer I-Funktion*, man vgl. [12]. Einige Ansätze sind wohl vorhanden. Z. B. erklären APOSTOLATOS-KULISCH in [1] die Ableitung von rationalen I-Funktionen, also einer speziellen Klasse von I-Funktionen. MOORE erwähnt in [14] reelle Funktionen bzw. ihre Ableitungen, deren Graphen von Graphen von Intervallpolynomen bzw. ihren Ableitungen (nach [1]) überdeckt werden. SUNAGA hingegen findet in [20] das Konzept einer Differentiation im Zusammenhang mit I-Funktionen „unrealistisch" und definiert unter Zuhilfenahme von *Intervallfunktionalen* den Begriff des *Differentialkoeffizienten einer reellen Funktion auf einem Intervall*, wobei die Funktion als differenzierbar vorausgesetzt wird. ORTOLF stellt in [15] nur fest, daß „eine so wichtige Abbildung wie die der Multiplikation mit einem konstanten Intervall in einigen Punkten keine FRÉCHET-Ableitung besitzt".

Bemerkenswert erscheint auch die Tatsache, daß es möglich ist, I-Funktionen zur Lösung von Differentialgleichungen heranzuziehen, ohne sich mit der Ableitung einer I-Funktion auseinandersetzen zu müssen. Doch ohne den Begriff des Integrals einer I-Funktion scheint man dabei nicht auszukommen, man vgl. z. B. [12, 13, 19]. Auch in Überblicksaufsätzen, die in jüngerer Zeit erschienen sind, wird die Ableitung einer I-Funktion nicht erwähnt [9]. Zur Differentation von Polynomstreifen vgl. man KRÜCKEBERG [25].

In der vorliegenden Arbeit stellen wir verschiedene Möglichkeiten der Ableitungsbildung für I-Funktionen mit reellem Argument zur Diskussion. Diese Varianten haben ihren Ursprung in Ableitungsverfahren, die für vektor- und mengenwertige Funktionen, für Funktionen über BANACH-Räumen, topologischen und uniformen Räumen entwickelt worden sind. Durch den RADSTRÖMschen Einbettungssatz [16] ist es z. B. möglich, die Menge der Intervalle hinsichtlich der Addition in einen BANACH-Raum einzubetten, so daß die für BANACH-Räume bestehenden Ableitungsverfahren auf I-Funktionen übertragen werden können.

Der kritische Punkt bei fast allen Verfahren dürfte die Forderung nach der Linearität der Ableitung sein. Man vgl. WEHRLI in [21]: „Die Linearität der Differentiation (Anm.: gemeint ist hier die Ableitung in einem Punkt) ist aber eine Forderung, der anscheinend jedes sinnvolle Konzept von Differentialrechnung genügen muß.“ Diese Forderung mag für lineare Räume gelten, sie jedoch für die Intervallarithmetik aufrecht zu erhalten, scheint ihrer Struktur nicht angepaßt zu sein. Es ist ja nicht einmal die einfache Abbildung $F(x) = C[x, x]$, $C \in I(R)$ konstant, $x \in R$, linear. $I(R)$ bedeutet die Menge aller reellen beschränkten abgeschlossenen Intervalle (nur solche werden üblicherweise betrachtet) über R, der Menge der reellen Zahlen. Und wir glauben, daß höchstens jene Ableitungsverfahren für die Intervallarithmetik bedeutsam sein dürften, die nicht unbedingt die Linearität der Ableitung fordern.

Schließlich haben wir noch die Arbeiten von GÄHLER und FRÖLICHER-BUCHER auf ihre Anwendbarkeit hinsichtlich I-Funktionen überprüft. GÄHLER führt in [23] verallgemeinerte Ableitungen für Abbildungen von topologischen Räumen in topologische Räume mittels sogenannter *Linsenfamilien* und *Radialstrukturen* ein. Wir wollen an dieser Stelle nur erwähnen, daß die Übertragung der wichtigsten Modelle von Linsenfamilien und Radialstrukturen auf I-Funktionen zur FRÉCHET-Ableitung einerseits, anderseits zu gewissen topologischen „Verzerrungen“ von ihr, führt. Sei z. B. $F: R \to I(R)$, so ist ein Ableitungsmodell gegeben durch

$$F'(x) := \lim\, [F(x + h^3 t) \overset{b}{-} F(x)]/h, \text{ für } h \to 0 \text{ und alle } t \in R.$$

Das Symbol $\overset{b}{-}$ bedeutet die Subtraktion in jenem BANACH-Raum, in den $I(R)$ eingebettet wird; Einzelheiten darüber findet man in Abschnitt II.

FRÖLICHER-BUCHER untersuchen die Ableitungen von Funktionen über pseudotopologischen Räumen [6]. Dabei gehen im Spezialfall von normierten Räumen die von diesen Autoren vorgeschlagenen Ableitungsdefinitionen in die klassischen über.

Bekanntlich treten bei der Definition höherer Ableitungen in linearen topologischen Räumen gewisse Schwierigkeiten auf. Um diese zu umgehen, wurde ein Differentialkalkül in linearen limitierten Räumen entwickelt. Man vgl. hierzu [4]. Auf entsprechende Probleme in der Intervallanalysis gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein.

Zusammenfassend wollen wir festhalten, daß von den in der vorliegenden Arbeit aufgeführten Ableitungsverfahren das von FRÉCHET, die Weiterentwicklung nach HERMES und die Auffassung der Ableitung als Menge von abgeleiteten Punktfunktionen für die Intervallarithmetik interessant sein dürfte. Die zwei letztgenannten Versionen stimmen für Intervallpolynome mit der bereits erwähnten Ableitung von APOSTOLATOS-KULISCH überein. Zumindest wird es wohl kaum möglich sein, nur mit *einer* Definition einer Ableitung auszukommen, und wir glauben auch, daß zu jeder Ableitungsvariante von I-Funktionen eine praktische Anwendung vorhanden ist, für die diese Variante unzulänglich ist.

II. Durch den Radströmschen Einbettungssatz bedingte Ableitungen

Um die Theorie der BANACH-Räume ohne Einschränkung und ohne Modifikation der Begriffsbildungen auf die Intervallarithmetik anwenden zu können, nehmen wir gegebenenfalls die folgende auf RADSTRÖM [16] zurückgehende Einbettung vor. Die Menge R^2 bildet einen Vektorraum V^2 über R, wenn in R^2 die Addition

$$(0.1) \qquad (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und die skalare Multiplikation

$$(0.2) \qquad \alpha\,(a, b) := (\alpha\, a, \alpha\, b), \qquad \alpha \in R,$$

erklärt ist.

Wir betrachten $\Sigma := \langle I\,(R), +\rangle$, die Menge aller Intervalle hinsichtlich der Addition, wir fassen R^+, die Menge der positiven reellen Zahlen, als Skalarbereich von Σ auf, und gestatten in ihm die reelle Addition und Multiplikation als Verknüpfung. Wir erklären eine skalare Multiplikation

$$(0.3) \qquad \alpha\,[a, b] := [\alpha\, a, \alpha\, b], \qquad \alpha \in R^+.$$

Nach RADSTRÖM ordnen wir nun jedem Intervall $[a, b]$ den Punkt (a, b) aus R^2 zu, der Skalarbereich R^+ wird mittels der Inklusionsabbildung in den Skalarbereich R abgebildet. Man erkennt ohne weiteres, daß diese Zuordnung eine Einbettung des Komplexes Σ über R^+ in den Vektorraum V^2 ist; und zwar hinsichtlich der zwei Verknüpfungen im Skalarbereich R^+, der skalaren Verknüpfung (0.3) und der Intervalladdition. Wir bezeichnen nach [5] diese Einbettung mit π. (Ähnlich verfährt ORTOLF [15], wobei die gesamte Intervallarithmetik, d. i. das algebraische System $\langle I\,(R), +, -, \cdot, :\rangle$, in ein geeignetes algebraisches System mit der Trägermenge R^2 eingebettet wird.)

Bemerkung. In der Intervallarithmetik bezeichnet man $[c, c]\,[a, b]$ gerne mit $c\,[a, b]$. Wir schreiben dafür $\underset{\bullet}{c}\,[a, b]$, wobei $\underset{\bullet}{c} := [c, c]$ ein Punkt-intervall bedeutet, um Verwechslungen mit (0.2) vorzubeugen. Für Intervallpolynome schreiben wir also $A_0 \dot{+} A_1 x \dot{+} \ldots \dot{+} A_n x^n$.

Aus dem RADSTRÖMschen Satz folgt ebenso, daß die Einbettung π isometrisch erfolgen kann. Sei auf Σ (über R^+) eine Metrik δ erklärt. Dann kann man δ zu einer Metrik ϑ auf V^2 erweitern. Seien $A = [a, b]$ und $B = [c, d]$, dann ist ϑ erklärt durch

$$\vartheta((a, b), (c, d)) := \vartheta((b, a), (d, c)) := \delta(A, B) \quad \text{und}$$

$$\vartheta((a, b), (d, c)) := \delta(A + B, \dot{0}).$$

Im Falle der HAUSDORFF-Metrik δ_H auf $I(R)$, die gegeben ist durch $\delta_H(A, B) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$, erhalten wir als Erweiterung $\vartheta_H((u, v), (w, x)) = \max\{|u - w|, |v - x|\}$.

Wir legen in unseren Betrachtungen, um uns nicht zu sehr ins Abstrakte zu verlieren, die die HAUSDORFF-Metrik induzierende Maximums-Norm zugrunde, jene ist aufgrund ihrer einfachen Berechenbarkeit in der Intervallarithmetik wohl am meisten verbreitet. Dessen ungeachtet sind die vorliegenden Ausführungen von einer speziellen Normierung unabhängig, die Maximums-Norm kann also stets durch andere Normen über V^2 ersetzt werden. Man vgl. [10]: *Alle linearen normierten Räume von gegebener endlicher Dimension sind isomorph und homöomorph.* Die von uns benützte Normkonvergenz ist in V^2 gleichwertig der schwachen Konvergenz, man vgl. [10].

V^2 ist vollständig und reflexiv [22]. Man stellt fest, daß eine Folge von Intervallen (als Folge von Punkten des V^2 aufgefaßt) im Konvergenzfalle gegen ein Intervall (also einen Punkt des V^2, dem ein Intervall entspricht) konvergiert. Σ (über R^+) ist also gewissermaßen vollständig (als Teilkomplex des V^2) hinsichtlich jeder Art von durch Normen über V^2 induzierten Metriken.

Da Verwechslungen auftreten können zwischen der Umkehroperation der in BANACH-Räumen erklärten Addition und der Subtraktion von Intervallen, und da diese zwei Verknüpfungen wesentlich verschieden sind, schreiben wir $\overset{b}{-}$ für die BANACH-Raum-Subtraktion und $\overset{i}{-}$ für die Intervallsubtraktion. Z. B. ist $[1, 2] \overset{i}{-} [3, 4] = [-3, -1]$, $(1, 2) \overset{b}{-} (3, 4) = (-2, -2)$. Außerdem benötigen wir die auf $I(R)$ wie folgt erklärte HUKUHARA-Differenz $\overset{h}{-}$, man vgl. [5]:

$$A \overset{h}{-} B = C \Leftrightarrow A = B + C, \qquad A, B, C \in I(R).$$

Man erkennt, daß $A \overset{h}{-} B$ genau dann existiert, wenn $\lambda A \geqslant \lambda B$ ist, mit $\lambda[a, b] := b - a$ (Länge eines Intervalls). Man vgl. hierzu [17]. C ist dann die einzige Lösung der Gleichung $A = B + X$.

Das Aufsuchen einer Ableitung führt zum Teil zu linearen Abbildungen. Diese sind darstellbar durch Matrizen, man vgl. [22], so daß in unserem Falle gilt:

$$l \in L[R, V^2] \Leftrightarrow \exists (a, b) \colon l x := l(x) = (a, b) x = (a x, b x).$$

(Seien allgemein M, N zwei Mengen bzw. Vektorräume über R, so bezeichne $[M, N]$ bzw. $L[M, N]$ die Menge aller Abbildungen bzw. aller linearen Abbildungen von M in N.) Wir werden von dieser Ersetzung Gebrauch machen.

Uns stehen nun sämtliche Ableitungsverfahren, die man in Banach-Räumen oder in linearen topologischen Räumen kennt, für die Anwendung auf I-Funktionen zur Verfügung. Einen guten Überblick geben hier zwei Artikel von Averbukh-Smolyanov [3, 4], die 25 Ableitungsverfahren in solchen Räumen behandeln, und ein Artikel von Banks-Jacobs, der sich mit einigen neueren Verfahren beschäftigt [5]. Ein großer Teil dieser Varianten stimmen für auf R erklärte vektorwertige Funktionen überein.

1. Die Fréchet-Ableitung (F-Ableitung)

Auf diese gehen wir etwas genauer ein, um die Schwierigkeiten zu demonstrieren, die allgemein bei der Definition von Ableitungen von I-Funktionen auftreten. Die F-Ableitung ist für Funktionen aus $[R, R^2]$ üblicherweise folgendermaßen erklärt, man vgl. z. B. [11]:

Sei $G: M \to R^2$, $M \subset R$, M offen, $x \in M$. Dann heißt G an der Stelle x F-differenzierbar, wenn ein linearer Operator $l \in L[R, V^2]$ und ein $r: R \to R^2$ mit $r(0) = (0, 0)$ und $\lim r(h)/h = (0, 0)$ $(h \to 0)$ vorhanden ist, so daß für alle h aus einer Umgebung $U(0)$ gilt:

$$G(x + h) \overset{b}{-} G(x) = l(h) + r(h).$$

$G'(x) := l$ heißt F-Ableitung von G an der Stelle x.

Banks-Jacobs leiten hiervon den Begriff der π-Differenzierbarkeit für mengenwertige Funktionen (multifunctions), deren Werte Teilmengen eines linearen reflexiven Raumes sind, ab, man vgl. [5]. Übertragen auf I-Funktionen lautet die Definition der π-Differenzierbarkeit, der wir noch, den Grundlagen von Averbukh-Smolyanov [4] und Wehrli [21] folgend, den Begriff der π-Ableitung hinzufügen:

Definition 1.1. (π-Ableitung). *Sei $G: M \to I(R)$, $M \subset R$, M offen, $x \in M$, sei π die Einbettung von Σ (über R^+) in V^2. Dann heißt G an der Stelle x π-differenzierbar, wenn $\hat{G} := \pi G$ F-differenzierbar in x ist [Es sei $\pi G(x) := \pi(G(x))$]. Besitzt $\hat{G}$ in x die F-Ableitung $\hat{G}'(x)$, so nennen wir $\hat{G}'(x)$ die π-Ableitung von G an der Stelle x.*

Wir haben eine Einbettung π von Σ in V^2 vorgenommen, um einwandfrei eine F-Ableitung angeben zu können. Das nächstliegende Problem ist es wohl nun, die erhaltenen Ergebnisse in den Raum $I(R)$ zurückzuführen, etwa auf die folgende Art: Sei $\hat{G}'(x) = (a, b)$ mit $a \leqslant b$. Dann sei die F-Ableitung von G gleich

$$G'(x) := \pi^{-1}(a, b) = [a, b].$$

Beispiel. Sei $G(x) = [0, 1]\,\underset{\cdot}{x}$, so ist $\hat{G}'(x) = (0, 1)$ für $x > 0$ und $\hat{G}'(x) = (1, 0)$ für $x < 0$. G ist überall π-differenzierbar außer an der Stelle 0 und besitzt die π-Ableitung $(0, 1)$ bzw. $(1, 0)$. Also existiert für

G an den Stellen $x > 0$ eine F-Ableitung, nämlich $[0, 1]$; doch $(1, 0)$ besitzt in $I(R)$ kein Urbild, also G nach dem oben gemachten Vorschlag auch keine F-Ableitung für $x < 0$.

Man sieht wohl deutlich, daß dieses Konzept nicht befriedigt. Es empfiehlt sich daher, auf die Forderung zu verzichten, ein *Intervall* als F-Ableitung zu erhalten, sondern für sie jeden Punkt aus V^2 zuzulassen. Wir stimmen in diesem Falle mit dem Standpunkt von Ortolf [15] überein, die Intervallarithmetik als Teilkomplex der verallgemeinerten Intervallarithmetik zu behandeln. In diesem Sinne bringen wir einen Vorschlag für eine Definition der F-Ableitung von I-Funktionen. Um nicht mit Einbettungen operieren zu müssen, legen wir den Vektorraum V^2 über R für den Abschnitt II wie folgt fest:

Die Trägermenge von V^2 sei $R^2 := I(R) \cup \{(a, b)/a > b\}$. Für Elemente $[a, b]$ *schreiben* wir auch (a, b). Wir erklären die Addition entsprechend (0.1) und die skalare Multiplikation $R \times R^2 \to R$ entsprechend (0.2). Man hat die Freiheit, weitere Verknüpfungen, z. B. die intervallarithmetischen in $I(R)$ zu erklären (als partielle algebraische Verknüpfungen auf R^2), oder diese auf ganz R^2 fortzusetzen, wie es Ortolf [15] ausführt. Die Umkehroperation der Addition bezeichnen wir wieder mit $\overset{b}{-}$. Mittels der Maximums-Norm wird V^2 zu einem reflexiven vollständigen Banach-Raum.

Definition 1.2. (F-Ableitung von I-Funktionen). *Sei $G : M \to I(R)$, $M \subset R$, M offen, $x \in M$. Dann heißt G an der Stelle x F-differenzierbar, wenn ein Punkt $(a, b) \in R^2$ und eine Abbildung $r \in [R, R^2]$ mit $r(0) = (0, 0)$ und $\lim r(h)/h = (0, 0)$ für $h \to 0$ vorhanden ist, so daß für alle h aus einer Umgebung $U(0)$ gilt:*

$$G(x + h) \overset{b}{-} G(x) = (a, b)\, h + r(h).$$

$G'(x) := (a, b)$ heißt die F-Ableitung von G an der Stelle x. Existiert $G'(x)$ für alle $x \in N \subset M$, so heißt die Abbildung $G' : N \to R^2$ Ableitung von G in N.

Wir schließen die folgenden Aussagen an; die erste wurde von [5] übernommen, die zweite ist einfach beweisbar.

Satz 1.3. *Sei $G(x) = [f(x), g(x)]$ für $x \in M$. Dann ist* (a) *G an der Stelle x genau dann F-differenzierbar, wenn f und g an der Stelle x differenzierbar sind, und es ist* (b) $G'(x) = (f'(x), g'(x))$.

Für spätere Vergleiche mit weiteren Ableitungsverfahren benötigen wir das folgende unmittelbar einsichtige

Korollar 1.4. *Sei $G(x) = [f(x), g(x)]$ F-differenzierbar auf M. Dann ist $G'(a)$ genau dann ein Intervall, wenn $f'(a) \leqslant g'(a)$ ist, d. h. wenn $\lambda[f(x), g(x)]$ in einer Umgebung $U(a)$ eine nichtabnehmende Funktion von x ist.*

Beispiel. Für $G(x) = [e^x, e^{x+c}]$, $c > 0$, ist $G'(x) = [e^x, e^{x+c}]$.

Die Gateaux-*Ableitung.* Diese sehr verbreitete Ableitung stimmt für Funktionen $G : M \to R^2$ mit der F-Ableitung überein, man vgl. [4], deshalb führen wir die Definition nicht an. Auch jene Version der Gateaux-Ableitung, bei der die schwache Konvergenz (anstelle der Normkonvergenz) für die bei der Definition auftretende Limes-Operation herangezogen wird, stimmt mit der erstgenannten Version überein, da in endlichdimensionalen Räumen Normkonvergenz und schwache Konvergenz äquivalent sind, man vgl. [10].

2. Die konische Differenzierbarkeit

Wir übertragen diesen Begriff, der für mengenwertige Funktionen erklärt wird [5], auf I-Funktionen. Wir begnügen uns jedoch mit der Angabe der Definition, da die konische Differenzierbarkeit nicht ausschließlich eine Eigenschaft der betreffenden I-Funktion ist, sondern noch eine Abhängigkeit von der Wahl der Basis von R (als Vektorraum aufgefaßt) vorhanden ist, wie ein Beispiel zeigen wird.

Definition 2.1. *Sei $G : M \to I(R)$, $M \subset R$, M offen, $x \in M$. Sei u eine Basis von R, und es existiere die F-Ableitung $G'(x)$. Dann heißt G an der Stelle x konisch differenzierbar, wenn $G'(x)\,u$ ein Intervall ist.*

Beispiel. Sei $G(x) = [0, 1]\,\dot{x}$ in R^+. Dann ist $G'(x)\,h = (0, h)$. Sei nun 1 die Basis von R, so ist $G'(x)\,1 = [0, 1] \in I(R)$, und G ist in x konisch differenzierbar. Wählt man hingegen -1 zur Basis, so ist G in x wegen $G'(x)(-1) = (0, -1) \notin I(R)$ nicht konisch differenzierbar.

3. Die Hukuhara-Ableitung (Hk-Ableitung)

Hukuhara gibt eine Ableitungsversion, man vgl. [5], die für I-Funktionen die folgende Form hat:

Definition 3.1. *Sei $G : M \to I(R)$, $M \subset R$, M offen, $x \in M$. Dann heißt G an der Stelle x Hk-differenzierbar, wenn es ein* Intervall $D_{Hk}\,G(x)$ *gibt, so daß*

$$D_{Hk}\,G(x) = \lim\,(G(x+h) \stackrel{h}{-} G(x))/h = \lim\,(G(x) \stackrel{h}{-} G(x-h))/h \; \textit{für}\; h \to 0^+$$

ist. $D_{Hk}\,G(x)$ heißt die Hk-Ableitung von G in x.

Der folgende Satz, der sich auf Aussagen von [5] und auf Korollar 1.4 zurückführen läßt, zeigt, daß die Hk-Ableitung für I-Funktionen nicht von Bedeutung sein dürfte.

Satz 3.2. *G ist in a genau dann Hk-differenzierbar, wenn G in a F-differenzierbar ist, und $\lambda\,G(x)$ in einer Umgebung $U(a)$ eine nicht abnehmende Funktion von x ist. Die beiden Ableitungen stimmen überein.*

Beispiel. $[0, 1]\,\dot{x}$ ist für $x > 0$, jedoch nicht für $x \leqslant 0$, Hk-differenzierbar mit der Ableitung $[0, 1]$.

4. Von Parametern abhängige Ableitungsverfahren

Wir führen zwei Verfahren an, bei denen zusätzlich Topologien (als Parameter) auf der Funktionenmenge $[R, R^2]$ erklärt werden müssen. Es sind dies die DE LAMADRID-Differenzierbarkeit und die VAINBERG-ENGEL'SON-Differenzierbarkeit, man vgl. ihre Definitionen in allgemeinen linearen topologischen Räumen in [4]. Für die DE LAMADRID-Ableitung werden in [4] die wichtigsten Topologien aufgeführt. Im Falle von Funktionen aus $[R, R^2]$ (bzw. I-Funktionen) stimmen die dadurch erhaltenen konkreten Ableitungen bis auf eine mit der FRÉCHET-Ableitung überein. Bei der einen Ausnahme sind nur die Abbildungen aus $L\,[R, V^2]$ differenzierbar, so daß wir auf eine weiterführende Diskussion verzichten.

Die VAINBERG-ENGEL'SON-Differenzierbarkeit ist ursprünglich nur für Funktionale auf einem linearen topologischen Raum gedacht gewesen; AVERBUKH-SMOLYANOV haben dieses Ableitungsverfahren für Funktionen von einem linearen topologischen Raum X auf einen linearen topologischen Raum Y erweitert, wobei der Funktionenmenge $[X, Y]$ noch (zusätzlich) eine Topologie τ aufzuprägen ist.

Wir prägen also der Funktionenmenge $[R, R^2]$ eine Topologie τ auf. Eine Funktion $G: R \to R^2$ heißt dann τ-differenzierbar in x (nach VAINBERG-ENGEL'SON), wenn G in einer Umgebung von x F-differenzierbar ist, und die F-Ableitung G' stetig (als Abbildung $G': R \to [R, R^2]$) in x bezüglich der Topologie τ ist. Nun haben wir bei der Bildung der F-Ableitung einer I-Funktion die linearen Funktionen $l \in L\,[R, V^2]$ durch Punkte des V^2 ersetzt, wobei die Operation des Ersetzens eine bijektive Abbildung ist. Fassen wir diese als Homöomorphismus auf, so induziert die Restriktion auf $L\,[R, V^2]$ der Topologie τ eine Topologie τ' auf R^2. Somit genügt es, eine Topologie τ' auf R^2 zu erklären. So kommen wir zur

Definition 4.1. *Eine I-Funktion $G: R \to I\,(R)$ heißt τ'-differenzierbar (nach* VAINBERG-ENGEL'SON*) in x, wenn G in einer Umgebung $U\,(x)$ F-differenzierbar und die Funktion $G': R \to R^2$ stetig in x bezüglich der auf R^2 erklärten Topologie τ' ist.*

Ist z. B. τ' auf R^2 durch eine Norm (auf V^2) erzeugbar, so ist diese von der bereits auf V^2 vorhandenen Maximums-Norm nicht wesentlich verschieden, da ja alle 2-dimensionalen linearen normierten Räume isomorph und homöomorph sind. Eine I-Funktion G ist in diesem Falle also genau dann τ'-differenzierbar in x, wenn die F-Ableitung G' in $U\,(x)$ existiert und in x stetig (bezüglich der Maximums-Norm) ist.

III. Ohne Einbettung vermittelte Ableitungen

In Abschnitt II haben wir Ableitungsverfahren für I-Funktionen besprochen, die erst aufgrund der Einbettung des additiven Systems der Intervallarithmetik (über R^+) in einen BANACH-Raum erklärbar wurden. Dabei wurde im wesentlichen, durch die Einbettung bedingt, ein Intervall als Punkt des R^2 aufgefaßt. Wir wenden nun einige Ableitungsverfahren für mengenwertige Funktionen auf I-Funktionen an. Dabei werden Intervalle nicht mehr als Punkte des R^2 aufgefaßt, sondern als spezielle Teilmengen von R, und I-Funktionen sind dann spezielle mengenwertige Abbildungen.

1. Erweiterung einer Ableitung nach Hermes

Im Anschluß an Aumann [2] definiert Hermes [7] die Ableitung als Umkehroperation einer auf einem Intervall $[0, z]$ erklärten Integration für mengenwertige Abbildungen (set valued functions) über R. Wir gehen auf diesen Gesichtspunkt näher ein, da er ausbaufähig für die Belange der Intervallarithmetik ist. Daß der Geltungsbereich dieser Definition für I-Funktionen zu eng ist, geht z. B. daraus hervor, daß Ableitungen nur auf Intervallen der Form $[0, z]$ erklärt werden können, oder daß die abzuleitende Funktion an der Stelle 0 erklärt sein und den Wert 0 annehmen muß. Demnach wäre $[0, 1]\,\dot{x}$ in $R^+ \cup \{0\}$ differenzierbar, doch die „bloß verschobenen" I-Funktionen $[0, 1]\,\dot{x} + \dot{c}$ und $[0, 1]\,(\dot{x} - \dot{1})$ sind nicht mehr differenzierbar. Wir werden daher durch entsprechende Erweiterungen den Geltungsbereich dieses Ableitungsbegriffes schrittweise vergrößern.

Zur Bezeichnungsweise in diesem Abschnitt III.1 sei gesagt: Um unübersichtliche Symbole zu vermeiden, verstehen wir unter F' bzw. $F'(x)$ die Ableitung von F bzw. von F an der Stelle x, der jeweils zuletzt genannten Ableitungsdefinition entsprechend. Wir schreiben meßbar bzw. integrierbar für L-meßbar bzw. L-integrierbar und B-meßbar für Borelmeßbar, alle Begriffe auf R bezogen. Nicht näher erklärte Integralsymbole sind im Sinne der L-Integrierbarkeit zu verstehen. Um nicht stets darauf hinweisen zu müssen, halten wir fest, daß wir nur I-Funktionen $F: M \to I(R)$ betrachten, für die $M \subset R$ *und* M *konvex* ist. Unter R^2 verstehen wir wieder wie üblich $R \times R$.

Wir nennen nach Aumann und Hermes, man vgl. z. B. [7], eine I-Funktion $F: M \to I(R)$ B-meßbar über einer konvexen Teilmenge J von M, wenn der Graph von F über J, das ist die Menge $\{(x, p) / \, x \in J,\ p \in F(x)\}$, eine B-meßbare Menge bezüglich des R^2 ist. Ist $F(x) = [f(x), g(x)]$, so ist die B-Meßbarkeit von F über J gleichwertig der B-Meßbarkeit (nun wieder bezüglich R) der Funktionen f und g über J. Man vgl. hierzu [24]. Weiters erklären wir nach [7] für I-Funktionen $P: M \to I(R)$ und $a, b \in M$ das folgende Symbol:

$$\int_a^b P := \left\{ \int_a^b p \,/\, p \text{ meßbar, für } t \in [a, b] \text{ oder } t \in [b, a] \text{ sei } p(t) \in P(t) \right\}.$$

Dabei verstehen wir für $a > b$ unter $\int_a^b p$ das Integral $-\int_b^a p$.

Die H-Ableitung. Wir erweitern die Definition der Ableitung nach Hermes [7] und übertragen sie auf I-Funktionen:

Definition 1.1. *Sei $F: M \to I(R)$, $0 \in M$. Existiert eine B-meßbare I-Funktion P mit* $F(x) = \int_0^x P$ *für alle $x \in M$, so heißt F H-differenzierbar (in M), P heißt die H-Ableitung von F (in M), und F heißt Integral von P (in M). Mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir die Menge aller auf beliebigen konvexen Mengen H-differenzierbaren I-Funktionen.*

Als Erweiterung eines von HERMES zitierten Satzes [7] gilt:

Satz 1.2. *Seien F_1, F_2, P_1, P_2 auf M erklärte I-Funktionen, sei $0 \in M$, seien P_1, P_2 die H-Ableitungen von F_1, F_2. Dann ist $F_1 = F_2$ äquivalent mit $P_1(x) = P_2(x)$ fast überall (kurz: f. ü.) in M.*

In Anlehnung an einen von ORTOLF eingeführten Operator, der $(a, b) \in R^2$ in (b, a) überführt, erklären wir einen Operator $\iota: [M, I(R)] \to [M, R^2]$ für $M \subset R$ wie folgt: Sei $F(x) = [f(x), g(x)]$ in M, dann sei $\iota F(x) = (f(x), g(x))$ für $0 \leqslant x \in M$ und $\iota F(x) = (g(x), f(x))$ für $0 > x \in M$. Wir erhalten damit einen Zusammenhang zwischen der Integration der I-Funktion und der Integration der sie begrenzenden Randfunktionen in dem elementar beweisbaren

Satz 1.3. *Sei $P(x) = [f(x), g(x)]$ B-meßbar auf M, $0 \in M$, und sei $\iota P(x) = (i(x), j(x))$ mit B-meßbaren Funktionen i, j auf M. Dann gilt*

$$\int_0^x P = \left[\int_0^x i, \int_0^x j\right] \text{ für } x \in M.$$

Beispiel. Sei $F(x) = [0, 1]\,x$, dann folgt sofort $F'(x) = [0, 1]$.

Wir fragen nun nach Bedingungen, wann eine I-Funktion H-differenzierbar ist. Dazu übernehmen wir von HERMES den folgenden auf I-Funktionen zugeschnittenen Satz:

Satz 1.4. *Notwendig und hinreichend für die H-Differenzierbarkeit einer auf $J := [0, z]$ erklärten I-Funktion F ist die Bedingung: Es existiert eine Abbildung $a: J \times \{-1, 1\} \to R$ mit Werten $a(x, y) \in F(x)$ für alle $x \in J$, die* LIPSCHITZ*-stetig in J ist, und für die $y\,a(x, y) \geqslant y\,p$ für alle $p \in F(x)$, $x \in J$ ist.*

Eine für die Zwecke der Intervallarithmetik vielleicht bequemere Antwort liefert der

Satz 1.5. *Sei $F(x) = [f(x), g(x)]$ in M, sei $0 \in M$, sei $\iota F(x) = (i(x), j(x))$. Dann ist F genau dann H-differenzierbar, wenn gilt:*

I. $F(0) = 0$;

II. $\tilde{\lambda}(x) := \lambda F(x)$ *ist in M monoton zunehmend für $x \geqslant 0$, monoton abnehmend für $x \leqslant 0$;*

III. *i und j lassen sich in M als unbestimmtes Integral von B-meßbaren Funktionen darstellen.*

Beweis. Wir erinnern an die folgenden Sätze der Maßtheorie, auf die wir nicht mehr extra verweisen werden:

1. Eine reelle Funktion f ist genau dann als unbestimmtes Integral, d. h. in der Form $f(x) = \int_a^x y + f(a)$ darstellbar, wenn f absolut stetig ist, [18].

2. Ist f meßbar auf einem abgeschlossenen Intervall J, ist die Ableitung f' von f bis auf eine Menge E vom Maße 0 erklärt und beschränkt, dann ist die Funktion g, mit $g(x) = f'(x)$ auf $J \setminus E$ und $g(x)$ beliebig auf E, meßbar auf J, [8]. *In Hinkunft schreiben wir f' für die so erhaltene Funktion g.*

3. Jede absolut stetige Funktion ist das unbestimmte Integral ihrer Ableitung, [18].

Setzen wir für F die H-Differenzierbarkeit voraus, so folgen I. und III. ohne weiteres. Für $x \geqslant 0$ ist $\widetilde{\lambda}(x) = g(x) - f(x) = \int_0^x g' - \int_0^x f' = \int_0^x (g' - f')$ monoton zunehmend, da $f'(t) \leqslant g'(t)$ für $t \in [0, x]$ ist (es muß ja F' eine I-Funktion sein). Analog für $x \leqslant 0$, womit man II. erhalten hat.

Wir zeigen, daß I. bis III. auch hinreichen. Nach III. ist $i(x) = \int_0^x i'$ und $j(x) = \int_0^x j'$, wobei $i(0) = j(0) = 0$ nach I. gesetzt worden ist. Für $x \geqslant 0$ ist $g(x) - f(x) = j(x) - i(x)$ nach II. monoton zunehmend, also ist an den Stellen x, an denen f, g differenzierbar sind, $g'(x) - f'(x) \geqslant 0$, also sind $[f'(x), g'(x)]$ tatsächlich Intervalle. An den nicht differenzierbaren Stellen können die Werte $f'(x)$ und $g'(x)$ ohne weiteres so erklärt werden, daß $f'(x) \leqslant g'(x)$ ist. Analog für $x \leqslant 0$. Q. e. d.

Dem Beweis kann noch entnommen werden:

Korollar 1.6. *Sei $F: M \to I(R)$ H-differenzierbar, sei $\iota F(x) = (i(x), j(x))$. Dann ist $F'(x) = [i'(x), j'(x)]$ f. ü. in M.*

Beispiel. Die Ableitung von $F(x) = [0, 1] [\sin x, \sin x]$ in $M = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $[0, 1] [\cos x, \cos x]$. M stellt das größte Intervall dar, in dem F H-differenzierbar ist.

Bemerkung. Aufgrund bekannter Sätze der Maßtheorie gilt: Eine notwendige Bedingung für die H-Differenzierbarkeit einer I-Funktion F auf M ist neben I. und II. die mit III. nicht äquivalente Aussage, daß i und j absolut stetig sind, oder auch, daß i und j f. ü. differenzierbar sind.

Ohne Beweis führen wir an:

Korollar 1.7. *Seien F, G in M erklärt und H-differenzierbar. Dann ist $F + G$ H-differenzierbar und $(F + G)' = F' + G'$.*

Die H_1-Differenzierbarkeit. Wir führen eine Erweiterung des Begriffes der H-Differenzierbarkeit ein:

Definition 1.8. *Sei $F : M \to I(R)$. F heißt H_1-differenzierbar (in M), wenn es ein Intervall C und eine I-Funktion $G \in \mathfrak{H}$ gibt, so daß $F = G + C$ in M ist. $F' := G'$ sei die H_1-Ableitung von F (in M). Die Menge aller H_1-differenzierbaren I-Funktionen über beliebigen konvexen Mengen bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_1$.*

Ohne die einfachen Beweise anzugeben, führen wir die folgenden Sätze auf:

Satz 1.9. *Sei $F : M \to I(R)$, $F \in \mathfrak{H}_1$. Dann existiert genau eine auf M erklärte I-Funktion $G \in \mathfrak{H}$, so daß $F = G + C$, C konstant, ist. Die Ableitung F' ist demnach eindeutig f. ü. in M.*

Satz 1.10. *Seien F, G auf M erklärte und H_1-differenzierbare I-Funktionen. Dann ist $F + G \in \mathfrak{H}_1$, und es ist $(F + G)' = F' + G'$.*

Wir sind nun in der Lage, Intervallpolynome zu differenzieren. Die Ableitung stimmt mit der von Apostolatos-Kulisch [1] bzw. Krückeberg [25] angegebenen überein.

Korollar 1.11. *Jedes Intervallpolynom $P(x) = A_0 + \ldots A_n \underset{\cdot}{x}^n$ ist H_1-differenzierbar und besitzt die Ableitung $P'(x) = A_1 + \ldots + \underset{\cdot}{n} A_n \underset{\cdot}{x}^{n-1}$.*

Beweis. Das Intervall C, man vgl. 1.8, ist A_0, und G ist $A_1 \underset{\cdot}{x} + \ldots + A_n \underset{\cdot}{x}^n$. Daß $G'(x) = P'(x)$ ist, folgt aus 1.7 und der H-Differenzierbarkeit von $A_k \underset{\cdot}{x}^k$ mit der Ableitung $\underset{\cdot}{k} A_k \underset{\cdot}{x}^{k-1}$. Q. e. d.

Die H_2-Differenzierbarkeit. Obwohl wir nun in der Lage sind, Intervallpolynome zu differenzieren, ist eine Ableitungsbildung z. B. für die I-Funktion $[0, 1] (\underset{\cdot}{x} - \underset{\cdot}{1})$ nicht möglich. Das hängt damit zusammen, daß die untere Integrationsgrenze des von Hermes definierten Integrals der Punkt 0 ist. Durch geeignete Translationen werden wir auch diesen Mangel ausschalten.

Definition 1.12. *Sei $F : M \to I(R)$, $a \in M$. F heißt $H_2(a)$-differenzierbar (in M), wenn eine I-Funktion $G \in \mathfrak{H}_1$ existiert, so daß*

1. *$G : M_{-a} \to I(R)$, mit $M_{-a} := \{m - a \mid m \in M\}$, und*
2. *$F(x) = G(x - a)$ für $x \in M$ ist.*

$F'(x) := G'(x - a)$ sei die $H_2(a)$-Ableitung von F (in M). Die Menge aller $H_2(a)$-differenzierbaren I-Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_2(a)$.

Diese Definition bringt den Nachteil der Abhängigkeit vom Bezugspunkte a mit sich. Wir können uns später davon befreien.

Beispiel. Sei $F(x) = [0, 1]\,\underset{\cdot}{x} + [0, 1]\,(\underset{\cdot}{x} - \underset{\cdot}{1})$ in R. So ist F aus $\mathfrak{H}_2(a)$ für alle $a \in [0, 1]$. Alle $H_2(a)$-Ableitungen stimmen mit F' in R überein, wobei $F'(x) = \underset{\cdot}{1}$ für $x \in [0, 1]$ und $F'(x) = [0, 2]$ andernfalls ist.

Dieses Beispiel zeigt, daß eine „Additivität", wie sie z. B. in 1.7 und 1.10 festgestellt wurde, nicht gilt.

Es entsteht nun die Frage, ob zu einer I-Funktion $F \in \mathfrak{H}_2(a)$ die zugehörige I-Funktion $G \in \mathfrak{H}_1$ und der Bezugspunkt a, man vgl. 1.12, eindeutig bestimmt sind. Diese Frage ist zu verneinen. Doch es gelingt zu zeigen, daß die Ableitung F' unabhängig von der Wahl von a bzw. von G ist, und daß sie eindeutig (f. ü.) bestimmt ist. Dazu benötigen wir das folgende

Lemma 1.13. *Sei $F: M \to I(R)$, sei $a, b \in M$, $a < b$. Ist F sowohl $H_2(a)$- als auch $H_2(b)$-differenzierbar, so ist $\widetilde{\lambda}(x) = \lambda F(x)$ konstant für $a \leqslant x \leqslant b$, monoton zunehmend für $b \leqslant x \in M$ und monoton abnehmend für $a \geqslant x \in M$.*

Beweis. Den Definitionen der Ableitungen dieses Abschnittes III.1 ist zu entnehmen, daß aus einer $H_2(u)$-Differenzierbarkeit der I-Funktion F folgt, daß $\widetilde{\lambda}(x)$ in M monoton zunimmt für $x \geqslant u$ und monoton abnimmt für $x \leqslant u$. Daraus folgt, daß $\widetilde{\lambda}(x)$ in M für $x \geqslant a$ monoton zunimmt, für $x \leqslant b$ monoton abnimmt. Das ist für $x \in [a, b]$ nur so möglich, daß $\widetilde{\lambda}$ in diesem Intervall konstant bleibt.

Beispiel. Man betrachte die I-Funktion $[0, 1]\,\underset{\cdot}{x} + [0, 1]\,(\underset{\cdot}{x} - \underset{\cdot}{1})$.

Satz 1.14. *Sei $F: M \to I(R)$, sei $a, b \in M$. Sei $F \in \mathfrak{H}_2(a)$ mit der $H_2(a)$-Ableitung F'_a, und sei $F \in \mathfrak{H}_2(b)$ mit der $H_2(b)$-Ableitung F'_b. Dann ist $F'_a = F'_b$ f. ü. in M.*

Beweis. O. B. d. A. setzen wir $a = 0 < b$ voraus. Nach 1.12 genügt F der Darstellung $F(x) = [f(x), f(x) + c]$ für $x \in [0, b]$ und $F(x) = [f(x), g(x)]$ andernfalls. Die $H_2(a)$-Ableitung von F ist $F'_a(x) = [g'(x), f'(x)]$ für $x \leqslant 0$, $F'_a(x) = [f'(x), f'(x)]$ für $x \in [0, b]$, und $F'_a(x) = [f'(x), g'(x)]$ für $x \geqslant b$. Ist anderseits $F(x) = G(x - b)$ für $x \in M$. Dann ergibt sich $G'(x) = [g'(x + b), f'(x + b)]$ für $x \leqslant -b$, $G'(x) = [f'(x + b)\ f'(x + b)]$ für $-b \leqslant x \leqslant 0$, und $G'(x) = [f'(x + b), g'(x + b)]$ für $x \geqslant 0$. Somit stimmen F'_a und F'_b f. ü. überein. Q. e. d.

Wir sind nun zu der folgenden Definition berechtigt, die unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes eine Ableitung festlegt:

Definition 1.15. *Sei $F: M \to I(R)$, seien $M_i \subset R$ konvexe Mengen, sei $M = \cup M_i$. Wir nennen F H_2-differenzierbar (in M), wenn zu jedem M_i eine Zahl a_i existiert, so daß $F_i := F \mid M_i$ $H_2(a_i)$-differenzierbar ist. Die in M f. ü. eindeutig bestimmte I-Funktion F', die gegeben ist durch $F' \mid M_i = F'_i$, sei die H_2-Ableitung von F (in M).*

Beispiel. Die I-Funktion $[0, 1]\,[\sin x, \sin x]$ besitzt in R die H_2-Ableitung $[0, 1]\,[\cos x, \cos x]$.

Mit dieser Definition ist es gelungen, eine recht umfangreiche Klasse von I-Funktionen zu erfassen. Die Ableitungsbildung genügt dabei ähnlichen formalen Gesetzen, wie es bei Punktfunktionen der Fall ist. Wir gehen nicht näher darauf ein, wann eine I-Funktion H_2-differenzierbar ist, da das Ergebnis unübersichtlich wäre und eine Charakterisierung mühelos an Hand der Definitionen 1.15, 1.12, 1.8 und des Satzes 1.5 erfolgen kann. Doch geben wir die folgende „Regel" an: Eine I-Funktion $F: M \to I\,(R)$ ist H_2-differenzierbar, wenn jede I-Funktion $F_i\,(x) = [f_i\,(x),\ g_i\,(x)]$, man vgl. 1.15, in eine H-differenzierbare *I-Funktion* $[f_i\,(x - a) + c,$ $g_i\,(x - a) + d]$, $c \leqslant d$, übergeführt werden kann. Dies entspricht „bildlich" in einem x-y-Diagramm einer *Verschiebung* von f_i, g_i einmal entlang der x-Achse und das andere Mal, jedoch f_i und g_i nicht notwendig um gleiche Strecken, entlang der y-Achse.

2. Die Huygens-Ableitung

Banks-Jacobs stellen in [5] diese Ableitung vor, bei der eine zu differenzierende mengenwertige Funktion F durch bestimmte Klassen von gewöhnlichen Funktionen dargestellt wird, und auch die Ableitung von F wird mit Hilfe dieser Klassen definiert. Näheres siehe in [5]. Durch gewisse Forderungen an diese Klassen erreicht man, daß F eine I-Funktion wird. In diesem Falle entspricht die Huygens-Differenzierbarkeit der Hukuhara-Differenzierbarkeit, und die Ableitungen stimmen überein. Aus diesem Grunde verzichten wir auf die Angabe von Einzelheiten.

3. Die Ableitung einer Intervallfunktion als Menge von abgeleiteten Punktfunktionen

Wir streifen zunächst die Ableitungsversion von Apostolatos-Kulisch [1]. Diese Autoren fassen ein Intervallpolynom $P\,(x) = A_0 + \ldots + A_n\,x^n$ als Menge aller Polynome $a_0 + \ldots + a_n\,x^n$ auf, mit $a_i \in A_i$. Sodann wird die Ableitung definiert als $P'\,(x) = \{a_1 + \ldots + n\,a_n\,x^{n-1} /\ a_i \in A_i\}$, und das entspricht dem Intervallpolynom $A_1 + \ldots + n\,A_n\,x^{n-1}$. Analog erfolgt die Definition für die Ableitung von einer rationalen I-Funktion als Menge der Ableitungen der in ihr enthaltenen rationalen Punktfunktionen.

Für eine Erweiterung dieser Definition legen wir die Auffassung Sunagas [20] einer I-Funktion zugrunde: *Eine I-Funktion ist die Menge all jener Funktionen eines Funktionenraumes, die die Bilder eines Intervalles sind, das stetig in den Funktionenraum abgebildet wird.*

Beispiel. Sei $S := \{p /\ p$ relles Polynom$\}$ ein Funktionenraum. Sei $I = [0, 1]$, sei $f: I \to S$ gegeben durch $f\,(t) = a_0 + t\,(b_0 - a_0) + \ldots + a_n + t\,(b_n - a_n)\,x^n$, sei $b_i \geqslant a_i$. Dann ist f für die üblichen Topologien auf S stetig und $f\,(I) = \{f\,(t) /\ t \in I\} = \{c_0 + \ldots + c_n\,x^n /\ c_i \in [a_i, b_i]\}$.

Es besteht nun die Möglichkeit für die folgende

Definition 3.1. *Sei S eine Teilmenge des Funktionenraumes $[M, R]$, $M \subset R$, sei I ein Intervall, sei $f: I \to S$ stetig bezüglich irgendeiner Topologie. Dann heißt die I-Funktion $f(I)$ in $x \in M$ differenzierbar, wenn alle Punktfunktionen aus $F(I)$ in x differenzierbar sind. Die Ableitung von $f(I)$ an der Stelle x sei die Menge aller Ableitungen der Punktfunktionen aus $f(I)$ an der Stelle x.*

Bemerkung. Bei passender Wahl des Funktionenraumes S umfaßt diese Ableitungsversion die Ableitung von rationalen I-Funktionen nach Apostolatos-Kulisch [1].

Literatur

[1] Apostolatos, N., und U. Kulisch: Approximation der erweiterten Intervallarithmetik durch die einfache Maschinenintervallarithmetik. Computing **2,** 181–194 (1967).
[2] Aumann, R. J.: Integral of set-valued functions. J. math. Analysis Appl. **12,** 1–12 (1965).
[3] Averbukh, V. I., and O. G. Smolyanov: The theory of differentiation in linear topological spaces. Russ. math. Surveys **22,** 6, 201–258 (1967).
[4] Averbukh, V. I., and O. G. Smolyanov: The various definitions of the derivative in linear topological spaces. Russ. math. Surveys **23,** 4, 67–113 (1968).
[5] Banks, H. T., and M. Q. Jacobs: A differential calculus for multifunctions. J. math. Analysis Appl. **29,** 246–272 (1970).
[6] Frölicher, A., and W. Bucher: Calculus in vector spaces without norm. Berlin: Springer. 1966.
[7] Hermes, H.: Calculus of set valued functions and control. J. Math. Mech. **18,** 47–59 (1968).
[8] Hildebrandt, T. H.: Introduction to the theory of integration. New York: Academic Press. 1963.
[9] Kulisch, U.: Grundzüge der Intervallrechnung. In: Laugwitz, D. (Hrsg.), Überblicke Mathematik, Band 2, 51–98. Mannheim: Bibliographisches Institut. 1969.
[10] Ljusternik, L. A., und W. I. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis, 4. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag. 1968.
[11] Michal, A. D.: Le calcul differentiel dans les espaces de Banach, Vol. 1. Paris: Gauthier-Villars. 1958.
[12] Moore, R. E.: The automatic analysis and control of error in digital computation based on the use of interval numbers. In: Rall, L. B. (ed.), Error in digital computation, Vol. 1, 61–130. New York: Wiley. 1965.
[13] Moore, R. E.: Automatic local coordinate transformations to reduce the growth of error bounds in interval computation of solutions of ordinary differential equations. In: Rall, L. B. (ed.), Error in digital computation, Vol. 2, 103–140. New York: Wiley. 1965.
[14] Moore, R. E.: Functional analysis for computers. In: Collatz, L., und H. Unger (Hrsg.), Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik, 113–126. Basel: Birkhäuser. 1969.
[15] Ortolf, H.-J.: Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik. Bonn: Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung. 1969.
[16] Radström, H.: An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. Amer. math. Soc. **3,** 165–169 (1952).
[17] Ratschek, H.: Teilbarkeitseigenschaften der Intervallarithmetik. Erscheint in J. reine angew. Math.
[18] Royden, H. L.: Real analysis, 5. ed. New York: MacMillan. 1966.
[19] Scharf, V.: Über eine Verallgemeinerung des Anfangswertproblems bei linearen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen. J. reine angew. Math. **239/240,** 287–299 (1969).

[20] SUNAGA, T.: Theory of an interval algebra and ist application to numerical analysis. RAAG Memoirs **2**, 29–46 (1958).
[21] WEHRLI, M.: Differentialrechnung in allgemeinen linearen Räumen I. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **17**, 81–114 (1968).
[22] WILANSKY, A.: Functional analysis. New York: Blaisdell. 1964.
[23] GÄHLER, W.: Eine Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit I. Math. Nachr. **38**, 217–256 (1968).
[24] HALMOS, P. R.: Measure theory, 10. ed. Princeton, N. J.: Van Nostrand. 1965.
[25] KRÜCKEBERG, F.: Numerische Intervallrechnung und deren Anwendung. Bonn: 1966.

Dr. Helmut Ratschek und Gunnar Schröder
Mathematisches Institut der Universität
Haroldstraße 19, BRD-4 Düsseldorf
Deutschland