ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сборник научных трудов

МГПИ
имени
В.И. ЛЕНИНА

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ Р С Ф С Р

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного
Знамени государственный педагогический институт
имени В.И.Ленина

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сборник научных трудов

Под редакцией доктора физико-математических наук,
профессора В.В.Щенникова

МОСКВА
1982

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного педагогического института имени В.И.Ленина

Составители: В.В.Щенников, Э.И.Кузнецов
Ответственный редактор:
доктор физико-математических наук, профессор
В.В.Щенников

Рецензент: доктор физико-математических наук,
А.И.Толстых

Вычислительная математика и математическая физика. Сборник научных трудов. М., МГПИ им.В.И.Ленина, 1982, 122.

В данном сборнике публикуются статьи преподавателей и сотрудников пединститутов страны, посвященные вопросам построения эффективных методов решения краевых задач математической физики; вопросам преподавания вычислительной математики и программирования в педвузах.

Сборник предназначен для преподавателей вузов, аспирантов и специалистов, занимающихся указанными проблемами.

Э.Л.Каминская, Т.Э.Каминский

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ИНТЕРВАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА И ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В последние годы все большую популярность и широту приобретают исследования в области интервальной математики. Основными объектами этой теории, в отличие от классической математики, имеющей дело с действительными числами, являются отрезки $[a,b]$, $a\leq b$ действительной прямой (или более обще – некоторого частично упорядоченного множества E). Интерес к интервальной математике обусловлен тем обстоятельством, что такие отрезки можно естественным образом интерпретировать как приближенные числа. В самом деле, если для приближенного значения x числа a указана его абсолютная погрешность Δx , то этим фактически сказано только то, что a принадлежит отрезку $[x-\Delta x, x+\Delta x]$, т.е.может совпасть с любой его точкой. Следовательно, выполняя над приближенными числами какие-либо операции (в частности арифметические) мы по существу работаем с отрезками, содержащими эти числа. Разумеется упомянутые операции над отрезками должны быть определены некоторым естественным способом. Для арифметических операций в основе этих определений лежит следующая легко доказываемая лемма.

ЛЕММА. Пусть $J=[a,b]$, $j=[c,d]$ – два отрезка действительной прямой, $*$ – любая из четырех арифметических операций, $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $m=\min(a*c, a*d, b*c, b*d)$, $M=\max(a*c, a*d, b*c, b*d)$ (в случае деления предполагается, что $0\notin j$). Тогда число $x*y$ в том и только в том случае принадлежит отрезку $[m,M]$, когда $x\in J$, $y\in j$.

Этим предположением подсказывается следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интервальной арифметикой называется алгебраическая система $\mathfrak{A}=\langle I\mathbb{R},+,-,\cdot,:\rangle$, в которой $I\mathbb{R}$ – множество всех отрезков $[a,b]$, $a\leq b$ действительной прямой, а операции определены следующим образом: если $J,j\in I\mathbb{R}$, $J=[a,b]$, $j=[c,d]$, $*\in\{+,-,\cdot,:\}$, то

$$J*j=[m,M],$$

где $m=\min(a*c, a*d, b*c, b*d)$, $M=\max(a*c, a*d, b*c, b*d)$, причем в случае деления предполагается, что $0\notin j$.

Основоположником интервальной математики является Р.Е.Мур [I]. Разнообразные вопросы линейной алгебры, анализа, топологии, дифференциальных уравнений в рамках этой теории изучались многочисленными авторами. Обзор этих работ содержится в статье К.Никеля [2]. Заметим, также, что основные понятия интервальной математики находятся в тесном родстве с концепцией размытых (или нечетких) множеств Л.Заде [3].

Алгебраическая система $\mathcal{U} = \langle I\mathbb{R}, +, -, \cdot, : \rangle$ устроена весьма своеобразно. Операции сложения и умножения в ней коммутативны, ассоциативны и обладают нейтральными элементами: роль нуля играет отрезок $[0,0]$, а роль единицы – $[I,I]$. Посредством отображения $x \mapsto [x,x]$ в интервальную арифметику изоморфно вкладывается поле действительных чисел.
Что же касается дальнейших свойств операций над отрезками, то здесь появляются определенные неожиданности. Так в интервальной арифметике не выполняется дистрибутивный закон. Пример:

$$([-I,2] + [-2,I]) \cdot [-2,3] = [-3,3] \cdot [-2,3] = [-9,9] ,$$
$$[-I,2]\,[-2,3] + [-2,I]\,[-2,3] = [-4,6] + [-6,4] = [-I0,I0] .$$

Тем не менее, справедлива так называемая субдистрибутивность: для любых $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} \in I\mathbb{R}$

$$\mathcal{I}(\mathcal{J} + \mathcal{K}) \subseteq \mathcal{I}\mathcal{J} + \mathcal{I}\mathcal{K} .$$

Далее, операции вычитания и деления не являются обратными соответственно для сложения и умножения: при $a \neq b$

$$[a,b] - [a,b] = [a-b, b-a] \neq [0,0] ,$$
$$[a,b] : [a,b] \neq [1,1] .$$

Эти обстоятельства существенно отличают интервальную арифметику от обычной и делают ее более сложной. Так. например, в ней становятся, вообще говоря, неразрешимыми простейшие уравнения типа

$$\mathcal{I} + \mathcal{X} = \mathcal{J} , \quad \mathcal{I}\mathcal{X} = \mathcal{J} .$$

В связи с этим представляет интерес задача преобразования интервальной арифметики в такую алгебраическую систему, в которой сложение и умножение стали бы обратимыми операциями и в которой действовали бы обычные алгебраические законы.

В настоящей статье предпринимается попытка построения такой системы, которую мы будем называть модифицированной интервальной арифметикой (МИА). Основная идея построения состоит в факторизации основного множества $I\mathbb{R}$ по некоторой эквивалентности $\sim$ и задании на фактормножестве $I\mathbb{R}/_\sim$ новых операций, результат применения которых к представителям классов эквивалентных отрезков был бы не уже, чем результат применения к ним операций интервальной арифметики.

§ I. Сложение и вычитание в МИА

Пусть $\mathcal{H}$ – подмножество основного множества $I\mathbb{R}$, состоящее из отрезков, симметричных относительно нуля:

$$\mathcal{H} = \{[-x,x] \mid x \geqslant 0\}.$$

Это подмножество замкнуто относительно сложения и умножения на элементы из $I\mathbb{R}$. Действительно, пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда $[-x,x]+[-y,y]=[-x-y,\ x+y] \in \mathcal{H}$. Пусть далее $[u,v] \in I\mathbb{R}$. Тогда $[-x,x][u,v]=[\min(-xu,-xv,xu,xv),\ \max(-xu,-xv,xu,xv)] \in \mathcal{H}$. В силу этой замкнутости подмножество $\mathcal{H}$ естественно назвать идеалом в $\mathcal{U}$.

Зададим на $I\mathbb{R}$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$J \sim \bar{J} \overset{\mathrm{def}}{=} (\exists K, L \in \mathcal{H})(J+K) = \bar{J}+L) \qquad (1)$$

Рассмотрим класс $\overline{[a,b]}$ фактормножества $I\mathbb{R}$. Если $[x,y] \in \overline{[a,b]}$, то существуют неотрицательные числа $u, v \in \mathbb{R}$ такие, что

$$[x,y]+[-u,u]=[a,b]+[-v,v].$$

Отсюда получаем: $x-u=a-v$, $y+u=a+v$ и, следовательно, $x=a+u-v$, $y=b+v-u$. Так как $x \leq y$, то должно быть $a+u-v \leq b+v-u$ и значит $u-v \leq \frac{1}{2}(b-a)$. Таким образом

$$\overline{[a,b]} = \{[a+u-v,\ b+v-u] \mid u-v \leq \tfrac{1}{2}(b-a)\}.$$

Этим показано, что класс $\overline{[a,b]}$ представляет собой множество всех отрезков, концентрических с $[a,b]$, как содержащих $[a,b]$, так и содержащихся в нем. Этот класс, следовательно, можно представить в виде

$$\overline{[a,b]} = \overline{[\tfrac{1}{2}(a+b),\ \tfrac{1}{2}(a+b)]}.$$

На фактормножестве $I\mathbb{R}/\sim$ обычным образом определим операцию сложения:

$$\overline{[a,b]} + \overline{[c,d]} = \overline{[a+c,\ b+d]}. \qquad (2)$$

Без труда проверяется корректность этого определения, т.е. независимость результата сложения от выбора представителей в классах. Роль нуля при этом сложении играет класс $\mathcal{H}=\overline{[0,0]}$, так как $\overline{[a,b]}+\mathcal{H}=\overline{[a,b]}+\overline{[0,0]}=\overline{[a,b]}$.

Рассмотрим на $I\mathbb{R}$ операцию вычитания. Как обычно положим по определению

$$\overline{[a,b]} - \overline{[c-d]} = \overline{[x,y]} \qquad (3)$$

если $\overline{[c,d]} + \overline{[x,y]} = \overline{[a,b]}$. Определенная так разность классов $\overline{[a,b]}$ и $\overline{[c,d]}$ существует. В самом деле, возьмем $x = y = \frac{1}{2}(a+b-c-d)$. Тогда

$$\overline{[c,d]} + \overline{[\tfrac{1}{2}(a+b-c-d), \tfrac{1}{2}(a+b-c-d)]} = \overline{[\tfrac{1}{2}(a+b+c-d), \tfrac{1}{2}(a+b-c+d)]} =$$

$$= \overline{[\tfrac{1}{2}(a+b), \tfrac{1}{2}(a+b)]} = \overline{[a,b]}.$$

Заметим, что разность $\overline{[x,y]}$ можно записать в виде $\overline{[x,y]} = \overline{[a-d, b-c]}$. В самом деле, так как $a \le b$ и $c \le d$, то $a-d \le b-c$ и следовательно $[a-d, b-c]$ – отрезок. Кроме того $\overline{[a-d, b-c]} = \overline{[\frac{1}{2}(a+b-c-d), \frac{1}{2}(a+b-c,d)]}$. В частности

$$-\overline{[c,d]} = \overline{[-d,-c]}.$$

§ 2. Умножение в МИА

При попытке естественным образом определить на $I\mathbb{R}/\mathcal{H}$ операцию умножения возникает препятствие. Такое определение должно было бы выглядеть следующим образом: $\overline{\mathcal{I}}\,\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. Однако оно не корректно: выбрав в классах $\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{J}}$ новую пару представителей $\mathcal{I}'$, $\mathcal{J}'$, мы уже не можем утверждать, что их произведение попадет в класс $\overline{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. В самом деле, из определения (I) следует, что существуют отрезки $K, L, M, N \in \mathcal{H}$ такие, что $\mathcal{I}'+K = \mathcal{I}+L$, $\mathcal{J}'+M = \mathcal{J}+N$.

Тогда $(\mathcal{I}'+K)(\mathcal{J}'+M) = (\mathcal{I}+L)(\mathcal{J}+N)$. В силу субдистрибутивного закона

$$(\mathcal{I}'+K)(\mathcal{J}'+M) \subseteq \mathcal{I}'\mathcal{J}' + (\mathcal{I}'M + \mathcal{J}'K + KM),$$

$$(\mathcal{I}+L)(\mathcal{J}+N) \subseteq \mathcal{I}\mathcal{J} + (\mathcal{I}N + \mathcal{J}L + LN),$$

причем члены, стоящие в правых частях в скобках, принадлежат идеалу $\mathcal{H}$. Но так как эти включения могут быть строгими, то нельзя утверждать, что $\mathcal{I}'\mathcal{J}'$ и $\mathcal{I}\mathcal{J}$ эквивалентны, т.е. содержатся в одном классе. Нетрудно привести и соответствующий пример. Пусть $\mathcal{I} = [1,3]$, $\mathcal{J} = [2,4]$. Тогда $\mathcal{I}\mathcal{J} = [2,12]$. Возьмем в классах $\overline{\mathcal{I}}$ и $\overline{\mathcal{J}}$ новых представителей $\mathcal{I}' = [0,4]$, $\mathcal{J}' = [1,5]$. Их произведение равно $[0,20]$ и при этом классы $\overline{[2,12]}$ и $\overline{[0,20]}$ различны, так как не совпадают их средние точки.

Выход из этой ситуации может быть найден на следующем пути.

Переопределим в интервальной арифметике операцию умножения. Рассмотрим отрезки $\mathcal{I}=[a,b]$, $\mathcal{J}=[c,d]$. Пусть, как и раньше, $m=\min(ac,ad,bc,bd)$, $M=\max(ac,ad,bc,bd)$. Обозначим далее через α произведение середин отрезков $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$:
$\alpha=\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$ и положим

$$\mathcal{I}\mathcal{J}=\begin{cases}[2\alpha-M,M]\ , \text{ если, } \frac{1}{2}(M+m)\geqslant\alpha,\\ [m,2\alpha-m]\ , \text{ если } \frac{1}{2}(M+m)\leq\alpha.\end{cases} \qquad (4)$$

Тем самым серединой отрезка $\mathcal{I}\mathcal{J}$ мы объявляем произведение середин сомножителей, а в качестве его длины берем удвоенное расстояние от точки α до наиболее удаленного от нее конца отрезка $[m,M]$ (произведения в прежнем смысле).

Сохраняя для отрезков из $\mathbb{IR}$ обычные операции сложения и вычитания:

$$[a+b]+[c,d]=[a+c,\ b+d], \qquad (5)$$

$$[a+b]-[c,d]=[a-d,\ b-c], \qquad (6)$$

рассмотрим алгебраическую систему $\mathcal{U}_1=\langle \mathbb{IR},+,-,\cdot\rangle$, в которой умножение, сложение и вычитание задаются условиями (4),(5),(6). Подмножество $\mathcal{H}\subset\mathbb{IR}$, состоящее из отрезков, симметричных относительно нуля, в системе $\mathcal{U}_1$, по-прежнему является идеалом. В самом деле, пусть $[a,b]\in\mathbb{IR}$, $[-x,x]\in\mathcal{H}$. Тогда $\alpha=0$ и так как среди чисел $-ax$, ax , $-bx$, bx хотя бы одно не положительно и хотя бы одно не отрицательно, а следовательно, $m\leq 0$, $M\geqslant 0$, то согласно определению (4),

$$[-x,x][a,b]=\begin{cases}[-M,M]\ , \text{ если } \frac{1}{2}(M+m)\geqslant 0,\\ [m,-m]\ , \text{ если } \frac{1}{2}(M+m)\leq 0,\end{cases}$$

т.е. $[-x,x][a,b]\in\mathcal{H}$.

Рассмотрим теперь алгебраическую систему $\overline{\mathcal{U}}_1=\langle \mathbb{IR}/\mathcal{H},+,-,\cdot\rangle$, в которой сложение и вычитание определены условиями (2) и (3), а умножение вводится естественным образом:

$$\overline{\mathcal{I}}\cdot\overline{\mathcal{J}}=\overline{\mathcal{I}\mathcal{J}}\ , \qquad (7)$$

где умножение отрезков понимается в смысле (4). Корректность этого определения очевидна: классы $\overline{\mathcal{I}}$ и $\overline{\mathcal{J}}$ можно записать в виде $\overline{[u,u]}$, $\overline{[v,v]}$, где u , v – средние точки отрезков $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ соответственно. Тогда $\overline{\mathcal{I}}\cdot\overline{\mathcal{J}}=\overline{[uv,\ uv]}$, откуда следует, что класс $\overline{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ не зависит от выбора представителей в классах $\overline{\mathcal{I}}$, $\overline{\mathcal{J}}$.

Легко проверяется, что в $\overline{\mathcal{U}}_1$ выполняются все аксиомы коммутативно-ассоциативного кольца с единицей, роль которой играет класс $\overline{[1,1]}$. Отметим также, что в построенном кольце нет делителей нуля. В самом деле, допустим, что произведение классов $\overline{[a,b]}$ и $\overline{[c,d]}$ равно нулю (напомним, что его роль играет класс $\mathcal{H} = \overline{[0,0]}$) :

$$\overline{[a,b]} \cdot \overline{[c,d]} = \overline{[0,0]} .$$

Это значит, что $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} = 0$,откуда $\frac{a+b}{2} = 0$ или $\frac{c+d}{2} = 0$, т.е. либо $[a,b] \in \mathcal{H}$,либо $[c,d] \in \mathcal{H}$ и следовательно по крайней мере один из сомножителей равен $\overline{[0,0]}$.
Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА I. Алгебраическая система $\overline{\mathfrak{N}}_1 = \langle I\mathbb{R}/\mathcal{H},+,-,\cdot\rangle$,в которой сложение, вычитание и умножение определены условиями (2),(3) и (7), является областью целостности.

§ 3. Деление в МИА

Для определения в модифицированной интервальной арифметике операции деления можно было бы вложить построенную область целостности в ее поле отношений. Однако мы выберем другой путь, ведущий к той же цели и связанный с изменением этой операции в интервальной арифметике.

Пусть $\mathcal{I}=[a,b]$, $\mathcal{J} = [c,d]$, причем $0 \notin \mathcal{J}$. Пусть также $m' = min(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d})$, $M' = max(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d})$, $\lambda' = \frac{a+b}{c+d}$

Положим

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{J}} = \begin{cases} [2\lambda' - M', M'] , & \text{если } \frac{1}{2}(M'+m') \geq \lambda', \\ [m', 2\lambda' - m'] , & \text{если } \frac{1}{2}(M'+m') \leq \lambda' . \end{cases} \tag{8}$$

Смысл этой модификации таков же, как для операции умножения (4). Обозначим через $\mathfrak{N}_2$ алгебраическую систему $\langle I\mathbb{R},+,-,\cdot,:\rangle$,в которой операции заданы условиями (5),(6),(4),(8). Переходя к факторсистеме $\overline{\mathfrak{N}}_2$ с основным множеством $I\mathbb{R}/\mathcal{H}$, определим в ней деление естественным образом:

$$\frac{\overline{\mathcal{I}}}{\overline{\mathcal{J}}} = \overline{\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{J}}\right)} \tag{9}$$

где частное $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{J}}$ понимается в смысле (8). Как и для умножения корректность этого определения очевидна. Кроме того, так как

$$\frac{\overline{[a,b]}}{\overline{[a,b]}} = \overline{\left[2 - \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right]} = \overline{[1,1]} ,$$

то определенное условием (9) деление является обратной операцией для умножения (7).Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Алгебраическая система $\overline{\mathfrak{N}}_2 = \langle I\mathbb{R}/\mathcal{H},+,-,\cdot,:\rangle$,в которой операции определяются условиями (2),(3),(7),(9),является полем.

Заметим, что в действительности можно утверждать даже большее: система $\overline{\mathcal{M}}_2$ изоморфна полю действительных чисел, причем изоморфизм устанавливается отображением $\bar{J} \mapsto x$, где x – средняя точка отрезка J. Построенная нами система $\overline{\mathcal{M}}_2$ и есть модифицированная интервальная арифметика.

§ 4. Умножение на скаляры в МИА

В интервальной арифметике, а также в системе $\mathcal{M}_2$ можно ввести еще одну операцию – умножение отрезка на скаляр, определяемую следующим образом. Пусть $J = [a, b] \in I\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Положим

$$\lambda J = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b] & \text{, если } \lambda \geqslant 0, \\ [\lambda b, \lambda a] & \text{, если } \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

И в той и в другой системе эту операцию можно интерпретировать как умножение на отрезок $[\lambda, \lambda]$. Для интервальной арифметики это очевидно, а для системы $\mathcal{M}_2$ устанавливается следующим образом. Пусть сначала $\lambda \geqslant 0$. Воспользовавшись определением (4) (здесь $m = \lambda a$, $M = \lambda b$, $\alpha = \frac{\lambda(a+b)}{2}$), получим

$$[\lambda, \lambda][a, b] = [\lambda(a+b) - \lambda b, \lambda b] = [\lambda a, \lambda b] = \lambda [a, b].$$

При $\lambda < 0$ ($m = \lambda b$, $M = \lambda a$, $\alpha = \frac{\lambda(a+b)}{2}$):

$$[\lambda, \lambda][a, b] = [\lambda(a+b) - \lambda a, \lambda a] = [\lambda b, \lambda a] = \lambda [a, b].$$

Эта операция естественным образом переносится в систему $\overline{\mathcal{M}}_2$

$$\lambda \bar{J}_1 = \begin{cases} \overline{[\lambda a, \lambda b]} & \text{, если } \lambda \geqslant 0, \\ \overline{[\lambda b, \lambda a]} & \text{, если } \lambda < 0. \end{cases}$$

Операция умножения на скаляры в системе $\overline{\mathcal{M}}_2$ обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

1^0. $\lambda(\bar{J} + \bar{j}) = \lambda \bar{J} + \lambda \bar{j}$,

2^0. $(\lambda + \mu)\bar{J} = \lambda \bar{J} + \mu \bar{J}$,

3^0. $(\lambda \mu)\bar{J} = \lambda(\mu \bar{J})$.

Заметим, что в системе $\mathcal{M}_2$ справедливы аналоги свойств 1^0 и 3^0. Что касается свойства 2^0, то оно заменяется более слабым:

$$(\lambda + \mu) J \subseteq \lambda J + \mu J.$$

§ 5. Приложения к теории погрешностей

В практике вычислений обычной является ситуация когда о числе x известно только то, что оно заключено в некоторых границах a, b, т.е. принадлежит отрезку $[a, b]$. В таких случаях обычно принимают в качестве приближенного значения x середину этого отрезка $\bar{x} = \frac{1}{2}(a+b)$, погрешность этого приближения равна половине длины $[a,b]$: $\Delta \bar{x} = \frac{1}{2}(b-a)$. Эта интерпретация позволяет использовать для построения теории погрешностей язык интервальной арифметики. Однако такое построение затрудняется ввиду алгебраической сложности этой системы. В ней, как уже отмечалось, вообще говоря, неразрешимы даже простейшие уравнения типа

$$J + x = j, \qquad (10)$$

$$J x = j, \qquad (11)$$

где J, j – заданные, а x – искомый отрезок. Более удобна для построения теории погрешностей модифицированная интервальная арифметика. При переходе к этой системе уравнения (10) и (11) принимают вид

$$\bar{J} + \bar{x} = \bar{j} \quad , \quad \bar{J}\bar{x} = \bar{j} ,$$

а их решениями являются соответственно классы отрезков

$$\bar{x} = \bar{J} - \bar{j} \quad , \quad \bar{x} = \bar{J}/\bar{j} .$$

Если рассматривать (10) и (11) как уравнения с приближенными коэффициентами, то в качестве их приближенных решений можно, следовательно, взять средние точки классов $\overline{J-j}$ и $\overline{\left(\frac{J}{j}\right)}$. Для оценки погрешностей этих приближений выберем в классах $\overline{J-j}$ и $\overline{\left(\frac{J}{j}\right)}$ по одному представителю, половина длины которого и определит искомую погрешность. Естественно в качестве таких представителей взять отрезки $J-j$ и $\frac{J}{j}$. Таким образом, мы приходим к задаче: оценить в системе $\mathfrak{M}_2$ длины отрезков, получаемых в результате выполнения арифметических операций над заданными отрезками.

Для операций сложения, вычитания и умножения на скаляры эти оценки получаются без труда. Обозначая через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ средние точки отрезков $J=[a,b]$, $j=[c,d]$ и через $\Delta\bar{x}$ и $\Delta\bar{y}$ их полудлины, получим:

$$\Delta(\bar{x} \pm \bar{y}) = \Delta\bar{x} + \Delta\bar{y},$$

$$\Delta(\lambda\bar{x}) = |\lambda|\,\Delta\bar{x} .$$

Несколько более длинных выкладок требует рассмотрение умножения и деления. Заметим предварительно, что определение умножения (4) можно расшифровать, классифицируя возможные случаи по комбинациям знаков чисел $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$Jj = \begin{cases} \left[\frac{(a+b)c-(b-a)d}{2},\ bd\right], & \text{если } \bar{x} \geq 0,\ \bar{y} \geq 0, \\ \left[bc,\ \frac{(a+b)d-(b-a)c}{2}\right], & \text{если } \bar{x} > 0,\ \bar{y} < 0, \\ \left[ad,\ \frac{(a+b)c+(b-a)d}{2}\right], & \text{если } \bar{x} < 0,\ \bar{y} > 0, \\ \left[\frac{(a+b)d+(b-a)c}{2},\ ac\right], & \text{если } \bar{x} < 0,\ \bar{y} < 0 . \end{cases}$$

Отсюда легко получается оценка погрешности приближенного значения $\bar{x}\bar{y}$,т.е. середины отрезка $\mathcal{I}J$:

$$\Delta(\bar{x}\bar{y}) \leq \frac{\Delta\bar{X}\max(|c|,|d|) + \Delta\bar{y}\max(|a|,|b|)}{2} + \frac{M-m}{4},$$

где, как и выше $m = \min(ac, ad, bc, bd)$, $M = \max(ac, ad, bc, bd)$.

Сравнение этой оценки с величиной погрешности произведения в интервальной арифметике, т.е. с величиной $\Delta'(\bar{x}\bar{y}) = \frac{1}{2}(M-m)$ дает:

$$\Delta(\bar{x}\bar{y}) - \Delta'(\bar{x}\bar{y}) \leq \Delta\bar{X}\,\Delta y.$$

Таким образом при переходе от интервальной арифметики к модифицированной интервальной арифметике погрешность произведения завышается на величину не более, чем второго порядка малости по сравнению с погрешностями сомножителей.

Аналогичные выводы можно сделать относительно операции деления. Расшифровывая определение (8), подобно тому как это сделано для умножения, получим:

$$\frac{\mathcal{I}}{J} := \begin{cases} \left[\frac{2ac+bc-bd}{c(c+d)}, \frac{b}{c}\right], & \text{,если } \bar{x} \geqslant 0, \bar{y} > 0, \\ \left[\frac{b}{d}, \frac{2ad+bd-bc}{d(c+d)}\right], & \text{,если } \bar{x} > 0, \bar{y} < 0, \\ \left[\frac{a}{c}, \frac{2bc+ac-ad}{c(c+d)}\right], & \text{,если } \bar{x} < 0, \bar{y} > 0, \\ \left[\frac{2bd+ad-ac}{d(c+d)}, \frac{a}{d}\right], & \text{;если } \bar{x} < 0, \bar{y} < 0. \end{cases}$$

После несложных выкладок отсюда получается:

$$\Delta\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \leq \frac{\Delta\bar{X}\max(|\ \ |,|d|) + \Delta\bar{y}\max(|a|,|b|) - 2\Delta\bar{X}\Delta\bar{y}}{\bar{y}\ \min(|c|,|d|)}$$

Сравнивая эту величину с погрешностью частного в интервальной арифметике, т.е. с величиной $\Delta'\left(\frac{\bar{X}}{\bar{y}}\right) = \frac{1}{2}(M'-m')$, где

$$m' = \min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right),\quad M' = \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right),$$

получим:

$$\Delta\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) - \Delta'\left(\frac{\bar{X}}{\bar{y}}\right) \leq \frac{\Delta\bar{X}\max(|c|,|d|) + \Delta\bar{y}\max(|a|,|b|) - 2\Delta\bar{x}\Delta\bar{y}}{cd\,|\bar{y}|}\,\Delta\bar{y},$$

т.е. снова величину не более, чем второго порядка малости по сравнению с погрешностями делимого и делителя.

Подведем итоги. Отправляясь от интервальной арифметики, обладающей с точки зрения алгебры рядом неудобных особенностей, мы построили алгебраическую систему $\overline{\mathcal{R}}_2$,изоморфную полю действительных чисел, элементами которой являются классы эквивалентных отрезков. Выбирая разумным образом в этих классах представителей, мы получаем возможность оценивать погрешности выполняемых над ними арифметических операций. Правда, при переходе от интервальной арифметики к системе $\mathcal{U}_2$ приходится заведомо завышать погрешности, вносимые операциями умножения и деления. Однако это завышение не слишком велико и составляет величину не более, чем второго порядка малости по сравнению с погрешностями исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

I. R.E. Moore, Interval Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood, Cliffs, N.J., 1966.

2. K. Nickel, Intervall-Mathematik, ZAMM, 58, 1978, T72-T85.

3. Л.Заде, Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений, М.,1976.