ЛОКАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕРВАЛЬНО НАБЛЮДАЕМОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Д.В. Давыдов
Дальневосточный Государственный университет

"Вычислительные Технологии", Том 8, №1, 2003 год, стр. 44–51.

Аннотация

Рассматривается задача стабилизации нелинейной управляемой системы с параметрами по интервальным наблюдениям фазовых состояний. На основе линейного приближения находятся достаточные условия локальной асимптотической устойчивости нелинейной системы в окрестности точки покоя.

Введение

Задачи стабилизации управляемых систем занимают важное место в теории автоматического регулирования. В современных исследованиях, уделяющих значительное внимание системам с различного рода неопределенностями, используются методы идентификации [1,2], интервального анализа [3,4], управления пучками траекторий [5] и др.

В данной работе устанавливаются достаточные условия стабилизации нелинейной системы с неопределенными параметрами по ее линейному приближению в точке покоя - системе линейных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами. На основе известных результатов [6,7] по линейному приближению строится субоптимальное управление, которое обеспечивает асимптотическую стабилизацию в малом исходной нелинейной системы.

Приводится процедура вычисления субоптимального управления по точным и приближенным результатам наблюдения.

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, v) \tag{1}$$

с векторами $x \in R^n, u \in R^r, v \in R^q$ состояния, управления и неопределенных параметров. Предположим, что
i) множество $V \subset R^q$ значений неопределенных параметров v известно и не зависит от времени t;

ii) функция $f : X \times U \times V \to R^n$ дважды дифференцируема по совокупности аргументов (x, u) в малой окрестности $X \times U$ точки $(\bar{x}, \bar{u})$ при каждом $v \in V$, причем

$$f(\bar{x}, \bar{u}, v) = 0 \tag{2}$$

тождественно по $v \in V$;
iii) управлениями служат кусочно-непрерывные при $t \geq 0$ функции $u(t)$ со значениями в U.

Введем уравнение наблюдения фазовых состояний системы (1)

$$y(t) = Cx(t), \;\; t \geq 0. \tag{3}$$

Здесь $y(t)$ из R^m - вектор наблюдений фазовой траектории $x(t)$ системы (1), отвечающий выбранному управлению $u(t)$; матрица C размерности $m \times n$ содержится в интервале

$$|C - C_0| \leq \Delta C, \tag{4}$$

где $C_0, \;\Delta C$ – известные $m \times n$-матрицы с произвольными и неотрицательными элементами, определяющие середины и полудлины интервалов изменения элементов матрицы C. Модули и неравенства в (4) понимаются поэлементно.

Выясним возможность асимптотической стабилизации системы (1) в точке покоя $\bar{x}$, полагая для удобства дальнейших рассуждений $\bar{x} = 0, \bar{u} = 0$ (без потери общности, производя при необходимости параллельный перенос системы координат).

2 Линеаризация системы

Следуя Ляпунову [10], линеаризуем систему (1) в малой окрестности $X_1 \times U_1$ точки $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$. Зафиксируем произвольный процесс $(x(t), u(t))$ системы (1), удовлетворяющий условию

$$(x(t), u(t)) \in X_1 \times U_1, \quad \forall t \geq 0 \tag{5}$$

и соответствующий некоторому фиксированному $v \in V$. Существование процесса (5) будет установлено ниже.

Разложение Тейлора в точке $(\bar{x} = 0, \bar{u} = 0)$ дает

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), v) = f(0, 0, v) + f'_x(0, 0, v)x(t) + f'_u(0, 0, v)u(t) + o(\|x(t)\| + \|u(t)\|). \tag{6}$$

Обозначив $A(v) = f'_x(0, 0, v), B(v) = f'_u(0, 0, v)$ и отбросив остаточный член, из (6) получим

$$\dot{x} = A(v)x(t) + B(v)u(t). \tag{7}$$

Найдем поэлементные точные нижние и верхние оценки матриц $A(v), B(v)$ так, чтобы для всех $v \in V$ выполнялись неравенства

$$A_b \leq A(v) \leq A_h, B_b \leq B(v) \leq B_h, \tag{8}$$

и обозначим

$$A_0 = 0,5(A_h + A_b), \;\; B_0 = 0,5(B_h + B_b), \;\; \Delta A = 0,5(A_h - A_b), \;\; \Delta B = 0,5(B_h - B_b).$$

Существование матриц A_b, A_h, B_b, B_h гарантируется условием (ii). Тогда система линейных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами

$$\dot{x}_l(t) = Ax_l(t) + Bu(t), \tag{9}$$

$$|A - A_0| \leq \Delta A, \;\; |B - B_0| \leq \Delta B, \tag{10}$$

эквивалентна (7), (8) и согласована по обозначениям с работой [7]. Здесь и далее $x_l(t)$ отвечает состоянию линеаризованной системы (9) в отличие от состояния $x(t)$ исходной системы.

3 Синтез управления на основе линеаризованной системы

Основываясь на результатах работы [7], приведем процедуру построения и достаточные условия существования стабилизирующего управления.

Проведем анализ системы (3), (4), (9), (10) на отрезке времени $t \in [0, T]$ для некоторого фиксированного значения T, распространяя далее результаты по индукции на произвольный отрезок $[(k-1)T, kT], \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$.

Следуя [7], разобьем отрезок $[0, T]$ на промежутки $[0, \theta)$ пассивного наблюдения и $[\theta, T)$ активного управления системой (9), (10) с уравнением наблюдения (3), (4).

Процедура пассивного наблюдения требует "выключения"управления ($u(t) \equiv 0$) на отрезке $[0, \theta)$ и позволяет с помощью наблюдений (3), (4) построить оценку $\hat{x}^0$ начального фазового состояния x^0 системы (1). Необходимо отметить, что в отличие от работы [7], уравнением (3) описана процедура наблюдения фазового состояния нелинейной системы (1). Мы же будем интерпретировать вектор $y(t)$ из (3) как результат наблюдения за фазовым состоянием $x_l(t)$ линеаризованной системы (9), (10). Такой подход позволяет использовать известные наблюдения $y(t)$ для построения оценки $\hat{x}^0$, а следовательно, и для построения на отрезке $[\theta, T)$ "активного"программно-позиционного управления $\hat{u}(t) = u(\hat{x}^0, t)$.

Перейдем к формальному описанию. Введем детерминированную систему

$$\dot{x}_{l,0} = A_0 x_{l,0} + B_0 u, \tag{11}$$

$$y_{l,0}(t) = C_0 x_{l,0}(t) \tag{12}$$

с неизвестными траекторией $x_{l,0}$ и наблюдениями $y_{l,0}$ и предположим, что данная система полностью управляема и наблюдаема, т.е. выполняются условия [8] полноты рангов

$$rank(B_0, A_0 B_0, \ldots, A_0^{n-1} B_0) = n, \tag{13}$$

$$rank(C_0', A_0' C_0', \ldots, (A'_0)^{n-1} C_0') = n. \tag{14}$$

Классическая теория позволяет в предположениях (13), (14) по известным результатам наблюдения $y_{l,0}(t)$ системы (11), (12) восстанавливать начальное фазовое состояние $x_{l,0}(0)$. В нашем случае $y_{l,0}(t)$ неизвестно, поэтому, по аналогии с [7], для получения оценки $\hat{x}^0$ используем известные наблюдения $y(t)$. Для этого положим

$$\hat{u}(t) \equiv 0 \;\; \text{для} \;\; t \in [0, \theta) \tag{15}$$

и представим наблюдение (3) для $t \in [0, \theta)$ как

$$y(t) = Cx(t) = C(x_l(t) + x(t) - x_l(t)). \tag{16}$$

Применяя к (16) интегральное преобразование с матрицей $e^{\tau A_0'} C_0'$, получим

$$\int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' y(\tau)\, d\tau = \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' C x_l(\tau)\, d\tau + \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' C(x(\tau) - x_l(\tau))\, d\tau. \tag{17}$$

Заметим, что в силу (9), (15)

$$x_l(t) = e^{tA} x^0, \quad t \in [0, \theta). \tag{18}$$

Обозначим

$$W = \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' C e^{\tau A}\, d\tau, \quad W_0 = \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' C_0 e^{\tau A_0}\, d\tau. \tag{19}$$

Определим оценку $\hat{x}^0$ начального фазового состояния как решение системы

$$W_0 \hat{x}^0 = \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' y(\tau)\, d\tau, \tag{20}$$

тогда из (17)-(20)

$$W_0(\hat{x}^0 - x^0) = \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' y(\tau)\, d\tau - W_0 x^0 = (W - W_0)x^0 + \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' C(x(\tau) - x_l(\tau))\, d\tau, \tag{21}$$

откуда в согласованных нормах

$$\|\hat{x}^0 - x^0\| \le \|W_0^{-1}\| \left(\|\Delta W\| \|x^0\| + \int_0^\theta \|e^{\tau A_0'} C_0' \left(|C_0| + \Delta C\right) \|\ \|x(\tau) - x_l(\tau)\|\, d\tau \right), \tag{22}$$

$$\Delta W = \int_0^\theta \left| e^{tA_0'} C_0' \right| \left[(|C_0| + \Delta C) \left(e^{t(|A_0| + \Delta A)} - e^{t|A_0|} \right) + \Delta C \left| e^{tA_0} \right| \right] dt.$$

Неравенство (22) указывает на очевидный факт зависимости точности наблюдаемой оценки $\hat{x}^0$ от неопределенностей (4), (10) и от величины "расхождения"траекторий $x(\tau)$ и $x_l(\tau)$ исходной и линеаризованной систем. Существование W_0^{-1} в (20)-(22) гарантировано условием (14).

Следуя [7], построим на отрезке $[\theta, T)$ управление $\hat{u}(t)$ для системы (11) с начальным состоянием $x_{l,0}(0) = \hat{x}^0$:

$$\hat{u}(t) = -B_0' e^{(T-t)A_0'} \hat{D}_0^{-1} e^{TA_0} \hat{x}^0 = -B_0' e^{(T-t)A_0'} \hat{D}_0^{-1} e^{TA_0} W_0^{-1} \int_0^\theta e^{\tau A_0'} C_0' y(\tau)\, d\tau, \tag{23}$$

$$\hat{D}_0 = \int_0^{T-\theta} e^{\tau A_0} B_0 B_0' e^{\tau A_0'}\, d\tau.$$

Существование $\hat{D}_0^{-1}$ гарантируется условием (13).

4 Применение управления к нелинейной системе

Изучим поведение системы (1) под воздействием управления (15), (23). Для этого оценим на отрезке $[0, T]$ "расхождение"траекторий $x(t) = x(\hat{u}(t), t)$ и $x_l(t) = x_l(\hat{u}(t), t)$ систем (1), (9). Обозначим через

$$g(x, t, v) = f(x, \hat{u}(t), v) \tag{24}$$

и потребуем липшицевость $g(x, t, v)$ по x в некоторой окрестности X_2 точки $\bar{x} = 0$ при всех $v \in V$ и $t \in [0, T]$:

$$\|g(x_1, t, v) - g(x_2, t, v)\| \le k\|x_1 - x_2\|, \tag{25}$$

где константа Липшица k не зависит от v и t, а x_1, x_2− произвольные точки из X_2.

Используем интегральную форму представления решения систем (1), (9) под воздействием управления (15), (23):

$$x(t) = x^0 + \int\limits_0^t f(x(\tau), \hat{u}(\tau), v)\, d\tau = x^0 + \int\limits_0^\theta f(x(\tau), 0, v)\, d\tau + ind(t-\theta)\int\limits_\theta^t f(x(\tau), \hat{u}(\tau), v)\, d\tau, \tag{26}$$

$$x_l(t) = x^0 + \int\limits_0^t (Ax_l(\tau) + B\hat{u}(\tau))\, d\tau = x^0 + \int\limits_0^\theta Ax_l(\tau)\, d\tau + ind(t-\theta)\int\limits_\theta^t (Ax_l(\tau) + B\hat{u}(\tau))\, d\tau, \tag{27}$$

где индикаторная функция $ind(t - \theta) = 1$ для $t \in [\theta, T]$ и $ind(t - \theta) = 0$ для $t \in [0, \theta]$.

Доопределим на отрезке $[0, \theta]$ управление $\hat{u}(t)$ по непрерывности, полагая $\lim\limits_{t\to\theta-0} \hat{u}(t) = 0$. Тогда непрерывные векторные функции $x_l(t), \hat{u}(t)$ на отрезке $[0, \theta]$ ограничены. Кроме того, на отрезке $[0, \theta]$ траектория $x_l(t)$ описывается однородной системой и линейно зависит от x^0, поэтому найдется окрестность нуля $X_3 \subset R^n$, в которой для всех $x^0 \in X_3$ выполняется $(x_l(t), \hat{u}(t)) \in X_1 \times U_1$ при всех $t \in [0, \theta]$. Пользуясь (5), (6), представим покоординатное разложение функции $f(x_l(t), 0, v)$ в виде

$$f_i(x_l(t), 0, v) = f_i(0, 0, v) + \sum_{j=1}^n f_{i\,x_j}(0, 0, v)x_{lj}(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n f_{i\,x_j\,x_k}(\kappa, 0, v)x_{lj}(t)x_{lk}(t), \ \ i = 1, ..., n, \tag{28}$$

где $\kappa(t) = \lambda(t)x_l(t), \ \ 0 \le \lambda(t) \le 1$ для каждого $t \in [0, \theta]$.

В силу предполагаемой ограниченности вторых производных функции $f(\cdot, 0, v)$ для любого фиксированного $v \in V$ и с учетом зависимости (18) остаточный член в (28) можно покоординатно представить в виде квадратичной формы

$$R_i(t) = (x^0)' P_i(t)x^0, \ \ i = 1, ..., n, \tag{29}$$

или в векторно-матричной форме

$$f(x_l(t), 0, v) = Ax_l(t) + R(t), \ \ t \in [0, \theta]. \tag{30}$$

Заметим, что из (24),(30) для $t \in [0, \theta]$ вытекает

$$g(x(t), t, v) = f(x(t), \hat{u}(t), v) = f(x(t), 0, v), \quad g(x_l(t), t, v) = f(x_l(t), 0, v) = Ax_l(t) + R(t). \tag{31}$$

Используя (31), (32), оценим на отрезке $[0,\theta]$ разность $(x(t)-x_l(t))$. Имеем

$$\|x(t)-x_l(t)\| = \|x^0 + \int\limits_0^t f(x(\tau),0,v)\,d\tau - x^0 - \int\limits_0^t Ax_l(\tau)\,d\tau\| =$$

$$= \| \int\limits_0^t g(x(\tau),\tau,v)\,d\tau - \int\limits_0^t (g(x_l(\tau),\tau,v) - R(\tau))\,d\tau\| \le k\int\limits_0^t \|x(\tau)-x_l(\tau)\|\,d\tau + \theta c_1\|x^0\|^2. \quad (32)$$

Применяя известную лемму Беллмана-Гронуолла [9], из (33) получим

$$\|x(t)-x_l(t)\| \le \theta c_1\|x^0\|^2 e^{k\theta} \le c_2\|x^0\|^2, \quad (33)$$

где c_1, c_2 – константы при фиксированных θ, k.

Объединяя (22) и (34), находим

$$\|\hat{x}^0 - x^0\| \le \|W_0^{-1}\|\|\Delta W\|\|x^0\| + c_3\|x^0\|^2 = \tilde{c}_3\|x^0\|, \quad (34)$$

где константа $\tilde{c}_3$ зависит от $\|\Delta W\|$ и $\|x^0\|$. С использованием (35) получим

$$\|\hat{x}^0\| \le \|\hat{x}^0 - x^0\| + \|x^0\| \le (1+\tilde{c}_3)\|x^0\|. \quad (35)$$

Аналогично (28) записывается разложение функции $f_i(x_l(t),\hat{u}(t),v)$ для всех $t\in[\theta,T]$ и всех x^0 из малой окрестности X_4 точки $\bar{x}=0$:

$$g(x_l(t),t,v) = f(x_l(t),\hat{u}(t),v) = Ax_l(t) + B\hat{u}(t) + \tilde{R}(t), \quad (36)$$

где в силу (23), (29)

$$\tilde{R}_i(t) = (x^0)'\tilde{P}_{1i}x^0 + (x^0)'\tilde{P}_{2i}\hat{x}^0 + (\hat{x}^0)'\tilde{P}_{3i}\hat{x}^0, \ \ i=1,...,n. \quad (37)$$

Существование окрестности X_4 следует из линейной ограниченности производной $\frac{d}{dt}\|x(t)\|$ от начального состояния $\|x^0\|$.

С учетом (36) и ограниченности вторых производных $f(\cdot,\cdot,v)$ по x,u, в рассматриваемой окрестности имеем

$$\|\tilde{R}(t)\| \le c_4\|x^0\|^2, \quad (38)$$

где константа c_4 не зависит от выбора $t\in[\theta,T]$ и $v\in V$.

Окончательно, для всех $t\in[0,T]$ имеем

$$\|x(\tau)-x_l(\tau)\| \le c_5\|x^0\|^2 e^{kT} = c_6\|x^0\|^2. \quad (39)$$

Как видно из (39), на отрезке времени $[0,T]$ применение управления (15), (23) обеспечивает квадратичную по x^0 близость траекторий исходной (1) и линеаризованной (9) систем. Выясним теперь, какую погрешность вызывает использование "нелинейных"наблюдений (3) при построении управления (15), (23) линеаризованной системой (9), (10).

Используя результаты [7], имеем

$$\|x_l(T)\| = \|e^{TA}x^0 + \int\limits_0^T e^{(T-\tau)A}B\hat{u}(\tau)\,d\tau\| \le \|N\|\|x^0\|+$$

$$+\left\|\int_0^T e^{(T-\tau)(|A_0|+\Delta A)}\left(|B_0|+\Delta B\right)\left|B_0' e^{(T-\tau)A_0'}\right| d\tau \left|\hat{D}_0^{-1} e^{TA_0}\right| |W_0^{-1}| \int_0^\theta \left|e^{\tau A_0'} C_0'\right| |x(\tau)-x_l(\tau)|\, d\tau\right\|, \tag{40}$$

где матрица N мала по норме при малых $\|\Delta A\|,\ \|\Delta B\|,\ \|\Delta C\|$. Подставив (39) в (40), получим

$$\|x(T)\| \leq \|x(T)-x_l(T)\| + \|x_l(T)\| \leq c_6\|x^0\|^2 + \|N\|\|x^0\| + c_7\|x^0\|^2. \tag{41}$$

На основании [7], для достаточно малых $\|\Delta A\|,\ \|\Delta B\|,\ \|\Delta C\|$ существует такое положительное число s, что

$$\|N\| \leq s < 1. \tag{42}$$

Выберем теперь окрестность

$$X_5 = \left\{x:\ \ \|x\| < \frac{1-s}{c_6+c_7}\right\}.$$

Тогда из (41), (42) находим

$$\|x(T)\| < \frac{1-s}{c_6+c_7}(c_6+c_7)\|x^0\| + s\|x^0\| = \|x^0\|. \tag{43}$$

Неравенство (43) при солюдении всех перечисленных выше предположений справедливо для начальных состояний x^0 системы (1), лежащих в общей части выделенных окрестностей

$$x^0 \in X = \cap_{i=1}^5 X_i. \tag{44}$$

Обобщение описанной выше процедуры на отрезки времени $[(k-1)T, kT],\ \ k=2,3,\dots$ гарантирует из (43), (44) выполнение условия $x(kT)\in X$, и неравенства $\|x(kT)\| < \|x((k-1)T)\|$, что позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Пусть система* (1) *с интервальными наблюдениями* (3), (4) *отвечает условиям* (i), (ii), (iii), *а для линеаризации* (9), (10) *выполняется* (13), (14). *Тогда управление* (15), (23) *при условиях* (25), (42), (44) *обеспечивает (локальную) асимптотическую стабилизацию траектории системы* (1) *к точке покоя* $\bar{x}=0$.

Заключение

Предложенная процедура стабилизации нелинейных управляемых систем с неопределенными параметрами и сформулированное достаточное условие асимптотической стабилизации замкнутой системы носят локальный характер. К исходной системе предъявляются три основных требования: множество V, влияющее на неравенства (10), не должно быть "размыто"в пространстве, что неявно выражено требованием (42) на $\Delta A, \Delta B$; необходима определенная точность наблюдений (4), а также начальное отклонение системы от равновесного (стационарного) состояния должно быть не слишком велико.

Описанная процедура существенно упрощается, если состояние системы (1) доступно точному измерению в периодические моменты времени $kT,\ \ k=0,1,2,...$,что соответствует требованию $C_0=E, \Delta C=O$, или $y(kT)=x(kT), k=0,1,2,...$. Данное упрощение уменьшает вычислительные трудности при подсчете субоптимального управления $\hat{u}(t)$.

В целом, описанный результат позволяет по-новому взглянуть на применение детерминированных подходов при анализе неопределенных систем и обобщить известный метод линеаризации систем для одного из подклассов управляемых систем с неопределенными параметрами.

Список литературы

[1] Гроп Д. *Методы идентификации систем.* М.: Мир, 1979.

[2] *Современные методы идентификации систем.* М.: Мир, 1983.

[3] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* М.: Мир, 1987.

[4] Ивлев Р.С., Соколова С.П. Построение векторного управления многомерным интервально заданным объектом. *Материалы XIV Международной конференции по интервальной математике. Электронная публикация.*

[5] Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука, 1977.

[6] Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Стабилизация линейной стационарной системы управления с интервальными коэффициентами. *Дальневосточный математический сборник,*# 8. Владивосток: Дальнаука, 1999, 32-38

[7] Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами. *Известия ВУЗов. Серия "Математика". (В печати)*

[8] Ли Э., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* М.: Наука, 1972.

[9] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Математическая теория конструирования систем управления.* М.:"Высшая школа", 1998.

[10] Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* М.-Л.: Гостехиздат, 1950.