УДК 681.511.2 Н.А. Хлебалин
СПИ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА

В настоящее время уделяется много внимания проблеме управления в условиях неопределенности [1,4.] Неопределенность присуща как внешним условиям работы системы, так и самой математической модели объекта. Одной из самых интересных и актуальных задач, вытекающих из данной проблемы, является построение простых регуляторов, которые бы обеспечивали устойчивость замкнутой системы с неопределенным объектом в контуре [9]. Такие регуляторы имеет смысл включать в сложные системы автоматического управления в качестве резервных, для управления на отдельных режимах и т.д. [2].

В данной статье предлагается аналитический метод синтеза стационарных регуляторов, обеспечивающих асимптотически устойчивый процесс управления объектом, о коэффициентах математической модели которого известно только то, что они не выходят из заданных диапазонов. При этом учитываются также косвенным образом требования к качеству регулирования посредством обеспечения заданных диапазонов для коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы.

1. Постановка задачи

Пусть нам задан объект управления, динамика которого описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu \ , \qquad (1)$$

где x – n-мерный вектор фазовых переменных объекта, u – скалярное управление, A и b – соответственно числовые матрица и вектор размеров $n \times n$ и $n \times 1$ с неопределенными элементами, про которые известно только то, что их значения принадлежат некоторым интервалам

$$a_{ij} \in [a_{ij*}, a_{ij}^*],\ b_i \in [b_{i*}, b_i^*],\ i, j = 1, 2, \dots, n. \qquad (2)$$

Символами a_{ij*}, b_{i*} обозначаются нижние границы, а a_{ij}^* и b_i^* – верхние границы соответствующих числовых интервалов. Параметры объекта считаются либо постоянными, но неизвестными, либо изменяющимися в указанных диапазонах так, что выполняется гипотеза "квазистационарности". При этом предполагается, что ни при каком наборе коэффициентов из заданных интервалов (т.е. при любой математической модели, составленной из чисел, принадлежащих этим интервалам) объект управления (I),(2) не теряет свойства полной управляемости. Это требование является обычным в задачах такого рода [9].

Требуется построить n – мерный вектор K закона управления

$$u = Kx, \tag{3}$$

который бы обеспечивал размещение коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы (I)-(3) внутри заданных диапазонов, гарантирующих асимптотическую устойчивость.

Разумеется, решение поставленной задачи существует не всегда. Объект может быть настолько неопределенным (интервалы (2) очень широки), а коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы потребуется разместить в столь узких диапазонах, что стационарного регулятора (3), разрешающего задачу, найти будет нельзя. Кроме того, построение устойчивых полиномов с "размытыми" коэффициентами для объектов большой размерности представляет собой самостоятельную задачу.

2. Интервальная арифметика как математический аппарат для решения задачи синтеза регуляторов в условиях неопределенности

Как видно из постановки задачи, элементами матриц объекта являются числовые интервалы (интервальные числа). Этот термин был введен в [5]. Основы интервального анализа (т.е. математического аппарата, позволяющего оперировать с интервальными числами) были разработаны в [6]. Независимо от [6] и исходя из совершенно другой задачи, аналогичный аппарат (так называемая алгебра неопределенностей) был построен в [II]. При этом операции, введенные в [II], более удобны (в особенности для "ручного" счета), чем опубликованные в [6]. Методы приближенных, оптимальных в некотором смысле действий с неопределенными величинами предложены в [8]. В отечественной литературе некоторые основные сведения из интервального анализа были приведены в [7]. Поскольку из-за специфики решаемой в данной статье задачи необходимо дальнейшее развитие этого оригинального математического аппарата, то имеет смысл дать более подробные сведения о нем (сохранив обозначения, принятые в [6]).

Определение I. Интервальным числом $[a,b]$ называется множество действительных чисел x таких, что $a \leq x \leq b$, т.е.

$$[a,b] = \{x / a \leq x \leq b\}.$$

При этом подразумевается, что $a \leq b$. Если $a = b$, то интервальное число $[a,a]$ представляет собой обычное действительное число.

Определение 2. Длиной интервального числа называется величина $\omega([a,b]) = b - a$.

Определение 3. Модулем интервального числа называется выражение $|[a,b]| = max(|a|,|b|)$.

Определение 4. Центром ("средней точкой") интервального числа называется величина $m([a,b]) = (a+b)/2$.

Определение 5. Два интервальных числа равны между собой, т.е. $[a,b] = [c,d]$, если $a = c$ и $b = d$.

Определение 6. Интервальное число $[a,b]$ меньше интервального числа $[c,d]$, т.е. $[a,b] < [c,d]$, если $b < c$.

Определение 7. Интервальное число $[a,b]$ включается в интервальное число $[c,d]$, т.е. $[a,b] \subseteq [c,d]$, если $c \leq a \leq b \leq d$.

Операции над интервальными числами вводятся с помощью обычных арифметических операций, в которых участвуют границы интервалов

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]; \quad [a,b] - [c,d] = [a-d, b-c];$$

$$[a,b] \cdot [c,d] = [min(ac,ad,bc,bd), max(ac,ad,bc,bd)];$$

$$[a,b]/[c,d] = [a,b] \cdot [1/d, 1/c], \text{если } 0 \notin [c,d].$$

Сложение и умножение интервальных чисел подчиняются аксиомам ассоциативности и коммутативности. Так, если I, J, M - интервальные числа, то имеют место следующие равенства:

$$I+(J+M)=(I+J)+M; \quad I+J=J+I;$$
$$I\cdot(J\cdot M)=(I\cdot J)\cdot M; \quad I J=J\cdot I.$$

Имеются нулевой и единичный элементы, которыми являются обычные числа 0 и I, при этом, если I - интервальное число, то

$$0+I=I+0=I; \quad 1\cdot I=I\cdot 1=I.$$

Аксиома дистрибутивности, вообще говоря, не имеет места. Однако, в двух перечисленных ниже случаях она выполняется:

во-первых, если t - действительное число, то $t\cdot(I+J)=t\cdot I+t\cdot J$;

во-вторых, если $J\cdot M>0$, то $I\cdot(J+M)=I\cdot J+I\cdot M$.

В общем же случае выполняется аксиома субдистрибутивности

$$I\cdot(J+M)\subset I J+I\cdot M.$$

Для интервальной арифметики справедлива монотонность включений, т.е., если $I\subset M$ и $J\subset L$, то

$$I+J\subset M+L; \quad I-J\subset M-L;$$
$$I\cdot J\subset M\cdot L; \quad I/J\subset M/L \ (\text{если } 0\notin L).$$

Кроме того, если $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ является рациональным выражением относительно интервальных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т.е. конечной комбинацией $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и константных интервалов, связанных интервально-арифметическими операциями, то из

$$X_1'\subset X_1, \ldots, X_n'\subset X_n \text{ следует } F(X_1', \ldots, X_n')\subset F(X_1, \ldots, X_n). \quad (4)$$

Из введенных интервально-арифметических операций могут быть получены интересные следствия.

Следствие I. Если I - интервальное число, то $I-I\neq 0$. Действительно, пусть $I=[a,b]$. Тогда $I-I=[a,b]-[a,b]=[a-b, b-a]\triangleq J, (0\in J)$.

Следствие 2. Если I - интервальное число, то $I/I\neq 1$. Действительно, пусть $I=[a,b], (0\notin I)$. Тогда $I/I=[a,b]\cdot[1/b, 1/a]=[\min(a/b, a/a, b/b, b/a), \max(a/b, a/a, b/b, b/a)]\triangleq J, (1\in J)$.

Субдистрибутивность интервальной арифметики приводит к тому, что вычисление точных интервалов значений рациональных интервальных выражений может быть осуществлено только для очень узкого класса функций (так называемых действительных рациональных выражений с интервальными переменными в первой степени [6] с.II). Однако, для любой другой рациональной интервальной функции вычисленный согласно введенным операциям интервал ее значений будет включать в себя истинный [6] (с.2I-24, теорема 4.4).

Это замечательное свойство позволяет использовать интервально-арифметический аппарат для решения задачи синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта.

3. Решение поставленной задачи

Для облегчения понимания предлагаемого метода синтеза в условиях неопределенности приведем широко известную методику нахождения параметров закона управления (3), обеспечивающего желаемое расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы в случае точно известной модели объекта (I) и полной информации о векторе состояния [3].

Запишем матричную передаточную функцию объекта (I)

$$W(s)=(Es-A)^{-1}b=\widetilde{(Es-A)}\cdot b/d(s), \tag{5}$$

где $\widetilde{(Es-A)}$ – присоединенная матрица для $(Es-A)$, $d(s)=$ $=\det(Es-A)$ – характеристический полином объекта управления.

Характеристическое уравнение замкнутой системы "объект (I), регулятор (3)" имеет вид

$$-\frac{K\widetilde{(Es-A)}\cdot b}{d(s)}+1=0 \tag{6}$$

Приведем его к общему знаменателю

$$\left(-K\widetilde{(Es-A)}b+d(s)\right)/d(s)=0 \tag{7}$$

и введем обозначение

$$-K\widetilde{(Es-A)}b+d(s)=D(s). \tag{8}$$

$D(s)$ представляет собой не что иное как желаемый характеристический полином замкнутой системы. В случае точно известных параметров модели объекта (I) задаются желаемым полиномом $D(s)$, вычисляют $d(s)$ и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой частях уравнения (8), получают систему алгебраических уравнений, из которой легко находятся значения коэффициентов закона управления (3).

Очевидно, что при неопределенном объекте вида (I),(2) и регуляторе (3) с постоянными параметрами характеристический полином (6) будет " размытым", неопределенным. Другими словами, его коэффициентами будут интервальные числа.

Основная идея предлагаемого метода синтеза заключается в почти очевидном переходе от обычных чисел к интервальным и замене обычного математического аппарата интервально-арифметическим. Задаваясь желаемым устойчивым интервальным полиномом $D(s)$, рассчитав по диапазонам (2) параметров объекта интервальное выражение $d(s)$, находим такой регулятор K, чтобы интервальные числа (коэффициенты) полинома $-K(\widetilde{Es-A})b+d(s)$ (см.(8)) совпадали с соответствующими интервалами $D(s)$ или включались в них.

Следует особо отметить тот факт, что интервальная арифметика в том виде, в котором она существует в настоящее время ([6],[II]) не может обеспечить решения поставленной задачи. Как уже отмечалось в разделе 2, действия с интервальными числами обладают необычными свойствами: вычитание самого из себя и деление самого на себя не приводит к нулю и единице соответственно, а приводят к новым интервальным числам. Это является следствием общего закона интервального анализа, который состоит в том, что никакая интервально-арифметическая операция не может иметь своим результатом действительное число (кроме умножения на ноль) - им является число интервальное. В поставленной задаче данный закон приводит к тому, что применение обычного алгоритма нахождения регулятора в случае интервального объекта (I),(2) дает неверный результат. Поясним это утверждение.

Составим из (8) систему алгебраических уравнений для определения вектора K регулятора. Она имеет вид

$$P \cdot K + d = D, \tag{9}$$

где P – некоторая интервальная матрица размеров $n \times n$, элементами которой являются интервальные числа, полученные вычислением рациональных интервальных выражений, составленных из коэффициентов (2) модели объекта (I), K – искомый n-мерный вектор коэффициентов регулятора, d – n-мерный интервальный вектор, составленный из коэффициентов при соответствующей степени S полинома $d(S)$, D – n-мерный интервальный вектор, составленный аналогичным образом из коэффициентов заданного устойчивого интервального полинома $D(S)$.

Система (9) в соответствии с алгоритмом синтеза должна преобразовываться к виду

$$PK = D - d \tag{I0}$$

и затем решаться любым из предложенных в [6] (глава 5) способов. Рассмотрим i-е уравнение системы (9)

$$p_{i1} \cdot K_1 + p_{i2} \cdot K_2 + \ldots + p_{in} \cdot K_n + d_i = D_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{II}$$

После нахождения вектора K (если решение задачи существует) и подстановки его в систему (9), уравнение (II) должно обратиться в тождество. Другими словами, интервальное число D_i должно представлять собой сумму двух интервальных чисел –

неизвестного $\quad H_i = p_{i1} \cdot K_1 + p_{i2} \cdot K_2 + \ldots + p_{in} \cdot K_n$ (I2)

и известного d_i, т.е. $H_i + d_i = D_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Соотношение (I2), записанное для всех n уравнений системы (9) в виде

$$P \cdot K = H, \tag{I3}$$

где H – n-мерный вектор, составленный из интервальных чисел H_i, дает возможность свести решение системы (9) к решению системы (I3). Однако, предварительно необходимо найти H_i $(i = 1, \ldots, n)$. Попытки отыскать из уравнения (II) обычными методами (переносом интервального числа d_i через знак равенства, вычитанием d_i из обеих его частей) оказываются неудачными. Например: $[-5, -4] + [0, 1] = [-5, -3]$. Сделаем перенос второго слагаемого и проверим, будет ли выполняться соответствующее равенство. $[-5,-4]\overset{?}{=}[-5,-3]-[0,1]=[-6,-3]$. Видно, что равенство не выполняется. Воспользоваться вычитанием из обеих частей равенства (II) интервального числа d_i тоже нельзя, поскольку согласно следствию I (см. раздел 2) $d_i-d_i\neq 0$ и H_i выделить не удается. Это первое затруднение в решении задачи синтеза.

Второе затруднение состоит в том, что предложенные в [6] методы решения систем линейных уравнений с неопределенными коэффициентами применительно к данной задаче (когда никаких ограничений на длины интервальных чисел матрицы P не накладывается) дают возможность определить лишь интервалы, внутри которых лежат искомые коэффициенты регулятора, но не их значения. В силу субдистрибутивности интервальной арифметики, эти интервалы могут значительно отличаться от точного решения, и таким образом, не любой набор чисел из найденных интервалов будет являться действительным решением неопределенной системы.

Чтобы преодолеть эти затруднения, необходимо, во-первых, ввести новую операцию, которая позволяла бы по известным интервальным числам (сумме и одному из слагаемых) находить второе слагаемое, во-вторых, разработать метод нахождения действительного решения системы линейных уравнений с неопределенными коэффициентами.

Вновь вводимую операцию интервального анализа назовем *операцией размещения суммированием* (ОРС).

Пусть $C=[c_*,c^*]$, $R=[r_*,r^*]$ – заданные интервальные числа, причем $R>0$ (т.е. $0<r_*<r^*$). Интервальное число $L=[\ell_*,\ell^*]$, обеспечивающее выполнение равенства

$$L+C=R\,, \tag{I4}$$

может быть найдено только при условии, что $\omega(C)<\omega(R)$, и имеет следующие границы: $\ell_*=r_*-c_*$; $\ell^*=r^*-c^*$.

Доказательство. $L+C=[\ell_*,\ell^*]+[c_*,c^*]=$

$$=[r_*-c_*,r^*-c^*]+[c_*,c^*]=[r_*-\cancel{c_*}+\cancel{c_*},r^*-\cancel{c^*}+\cancel{c^*}]=[r_*,r^*]=R.$$

Условие, накладываемое на длины интервалов, вытекает из соотношения [6] (с.I32)

$$\omega(R)=\omega(L+C)=\omega(L)+\omega(C). \tag{15}$$

Из (15) следует, что $\omega(L)=\omega(R)-\omega(C)$. Так как $\omega([a,b])\neq 0$ (см. определение 2), то для выполнения условия $\omega(L)>0$ требуется, чтобы $\omega(C)$ было меньше $\omega(R)$.

Замечание. Необходимым условием устойчивости интервального полинома (так же, как и обычного) является положительность его коэффициентов [II] . Поэтому в (II) $D_i>0$. В ОРС интервальное число R (сумма) из этих соображений рассматривается только положительной.

Применение ОРС к системе (9) позволяет, как уже было сказано, свести ее к удобному для решения виду (13).

Теорема. Действительный вектор K является решением невырожденной системы (13) линейных уравнений с неопределенными коэффициентами тогда и только тогда, когда он представляет собой решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} K_j \cdot m(p_{ij}) = m(H_i) \quad (i=1,2,\dots,n) \tag{16}$$

и удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} |K_j| \cdot \omega(p_{ij}) = \omega(H_i) \quad (i=1,2,\dots,n) \tag{17}$$

где p_{ij} – элементы матрицы P системы (13) (интервальные числа), $m(p_{ij})$ и $\omega(p_{ij})$ – соответственно центр интервального числа p_{ij} и его длина (аналогично обозначены $m(H_i)$ и $\omega(H_i)$).

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Следствие. Найденный из условия (16) вектор K при выполнении неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} |K_j| \cdot \omega(p_{ij}) \le \omega(H_i) \tag{18}$$

обеспечивает включение

$$PK \subset H. \tag{19}$$

Операция размещения суммированием и сформулированная теорема дают возможность решить поставленную задачу. Ситуация, отражаемая следствием из теоремы, указывает на то, что коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы в действительности будут менее "широкими", чем заданные. Тем не менее, в силу справедливости включения (4), устойчивость системы будет обеспечена.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм решения задачи синтеза в условиях неопределенности параметров объекта, который основывается на введенной операции и доказанной теореме:

I. В соответствии с процедурами интервального анализа для объекта (I),(2) формируется левая часть уравнения (8) (т.е. вычисляются интервальные полиномы $d(s)$ и $-K(\widetilde{Es-A})\cdot b$).

2. Выбирается желаемый устойчивый интервальный полином $D(s)$. Процедура проверки его устойчивости предложена в [II] и основывается на критерии Гурвица.

3. Составляется система алгебраических уравнений (9).

4. Применением операции размещения суммированием система (9) приводится к виду (I3).

5. Находятся центры и длины входящих в P и H элементов.

6. Решается система (I6), находится регулятор K и проверяется выполнение неравенства (I8).

Если оно выполняется, то найденный регулятор обеспечивает устойчивость замкнутой системы (I)-(3) во всем диапазоне неопределенности ее коэффициентов (2). При этом коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы, являющиеся интервальными числами, включаются в соответствующие коэффициенты заданного устойчивого интервального полинома $D(s)$.

Если же оно не выполняется, то при данном $D(s)$ задача не имеет решения в рамках интервального анализа.

4. Пример решения задачи синтеза

Для иллюстрации предложенной методики решения задачи рассмотрим синтез регулятора продольного движения вертолета в нестационарном режиме. Математическая модель этой ситуации приведена в [II] . Объект имеет следующие уравнения:

$$\begin{cases} \Delta\dot{V}_x = a_{11}\Delta V_x + a_{12}\Delta\omega_z + a_{13}\Delta\vartheta + b_1\Delta\varkappa \\ \Delta\dot{\omega}_z = a_{21}\Delta V_x + a_{22}\Delta\omega_z + b_2\Delta\varkappa \\ \Delta\dot{\vartheta} = \Delta\omega_z \end{cases} \qquad (20)$$

Обозначения переменных - общепринятые для летательных аппаратов. Диапазоны возможных значений коэффициентов объекта таковы:

$$a_{11}=[-0{,}031;-0{,}0128]\,;a_{12}=[-3{,}4;-0{,}7]\,;a_{21}=[-0{,}77\cdot10^{-3};-0{,}7\cdot10^{-3}]\,;$$
$$a_{22}=[-0{,}32;-0{,}31]\,;\ b_1=[-18;-15]\,;\ b_2=[-3{,}3;-3]\,;\ a_{13}=-9{,}8. \quad (21)$$

Требуется построить регулятор

$$\Delta \varkappa = K_1 \Delta V_x + K_2 \Delta\omega_z + K_3 \Delta\vartheta, \quad (22)$$

который бы обеспечивал асимптотическую устойчивость замкнутой системы (20),(22) при любом наборе значений коэффициентов объекта из соответствующих диапазонов (21).

Выберем коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы

$$D(s)=s^3+D_2 s^2+D_1 s+D_0\ , \quad (23)$$

следующими интервальными числами:

$$D_2=[3;4]\,;\ D_1=[2\,;\,8];\ D_0=[0{,}5;5{,}5]\,. \quad (24)$$

Интервальный полином (23)-(24) устойчив, т.к. $D_i>0$ и выполняется условие Гурвица $D_2\cdot D_1-1\cdot D_0=[0{,}5;\,31{,}5]>0$.

Запишем уравнения (20) в матричной форме

$$\dot{x}=Ax+bu\ , \quad (25)$$

где

$$x=\begin{Vmatrix}\Delta V_x\\ \Delta\omega_z\\ \Delta\vartheta\end{Vmatrix};\ A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix};\ b=\begin{Vmatrix}b_1\\ b_2\\ 0\end{Vmatrix};\ u=\Delta\varkappa. \quad (26)$$

Матрица $(\widetilde{Es-A})b$ имеет вид

$$(\widetilde{Es-A})b=\begin{Vmatrix}b_1 s^2+(a_{12}b_2-a_{22}b_1)s+a_{13}b_2\\ b_2 s^2+(a_{21}b_1-a_{11}b_2)s\\ b_2 s+(a_{21}b_1-a_{11}b_2)\end{Vmatrix} \quad (27)$$

Характеристический полином объекта (25),(26) представляет собой интервальное выражение

$$d(s) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 , \qquad (28)$$

где

$$d_2 = -(a_{11} + a_{22}) = [0,3228;\ 0,351] ;$$
$$d_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = [0,00135;\ 0,00943] ; \qquad (29)$$
$$d_0 = -a_{13}a_{21} = [-0,007546; -0,00686] .$$

Распишем (8) в развернутом виде

$$(-k_1 b_1 - k_2 b_2 + d_2)s^2 + (-k_1(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) - k_2(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) - \qquad (30)$$
$$-k_3 b_2 + d_1)s + (-k_1 a_{13} b_2 - k_3(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) + d_0) = D_2 s^2 + D_1 s + D_0 .$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой частях уравнения (30), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -k_1 b_1 - k_2 b_2 + d_2 = D_2 \\ -k_1(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) - k_2(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) - k_3 b_2 + d_1 = D_1 \\ -k_1(a_{13}b_2) - k_3(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) + d_0 = D_0 \end{cases} \qquad (31)$$

Для системы (31), записанной в матричной форме (9), найдем элементы матрицы P , их центры и длины

$$p_{11} = -b_1 ;\ p_{12} = p_{23} = -b_2 ;\ p_{13} = p_{32} = 0 ;\ p_{21} = -(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) =$$
$$= [-6,57; 3,66] ;\ p_{22} = p_{33} = -(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) = [0,02454; 0,0918] ; \qquad (32)$$
$$p_{31} = -a_{13}b_2 = [-32,34; -29,4] ;\ m(p_{11}) = 16,5 ;\ m(p_{12}) = m(p_{23}) =$$
$$= 3,15 ;\ m(p_{21}) = -1,455 ;\ m(p_{22}) = m(p_{33}) \cong 0,058 ;\ m(p_{31}) = -30,87 ;$$
$$\omega(p_{11}) = 3 ;\ \omega(p_{12}) = \omega(p_{23}) = 0,3 ;\ \omega(p_{21}) = 10,23 ;\ \omega(p_{22}) =$$
$$= \omega(p_{33}) \cong 0,068 ;\ \omega(p_{31}) = 2,94 .$$

Определим с помощью ОРС элементы вектора H:

$$H_2=[D_{2*}-d_{2*};\ D_2^*-d_2^*]\subset[2,67;3,65];\ H_1=[D_{1*}-d_{1*};D_1^*-d_1^*]\subset$$
$$\subset[1,99;8];\ H_0=[D_{0*}-d_{0*},D_0^*-d_0^*]\subset[0,507;5,51].$$

Найдем их центры и длины

$$m(H_2)=3,16;\ m(H_1)\cong5;\ m(H_0)\cong3;$$

$$w(H_2)=0,98;\ w(H_1)\cong6;\ w(H_0)\cong5.$$

Запишем систему (I6) и найдем по правилу Крамера ее решение

$$\begin{cases}16,5\cdot k_1+3,15\cdot k_2=3,16\\ 1,455\cdot k_1+0,058\cdot k_2+3,15\cdot k_3=5\\ 30,87\cdot k_1+0,058\cdot k_3=3\end{cases}\tag{33}$$

Определитель Δ системы (33) и соответствующие вспомогательные определители имеют следующие значения:

$$\Delta\cong-306;\ \Delta_1\cong29;\ \Delta_2\cong-458;\ \Delta_3\cong-464.$$

При этом

$$k_1\cong-0,095;\ k_2\cong1,5;\ k_3\cong1,52.\tag{34}$$

Проверим выполнение условия (I8)

$$\begin{cases}0,095\cdot3+1,5\cdot0,3=0,735<0,98\\ 0,095\cdot10,23+1,5\cdot0,068+1,52\cdot0,3=1,53<6\\ 0,095\cdot2,94+1,52\cdot0,068=0,383<5\end{cases}\tag{35}$$

Условие выполняется. Подставим найденное решение в исходную систему (3I)

$$\begin{cases}0,095\cdot[-18;-15]-1,5\cdot[-3,3;-3]+[0,3228;0,351]\overset{?}{=}[3;4]\\ 0,095\cdot[-3,66;6,57]-1,5\cdot[-0,092;-0,024]-1,52\cdot[-3,3;-3]+d_1\overset{?}{=}[2;8]\\ 0,095\cdot[29,4;32,34]-1,52[-0,092;-0,024]+[-0,0076;-0,0068]\overset{?}{=}[0,5;5,5]\end{cases}\tag{36}$$

Получим

$$\begin{cases} [3,113\,;\,3,876] \subset [3\,;\,4] \\ [4,25\,;\,5,78] \subset [2\,;\,8] \\ [2,82\,;\,3,2] \subset [0,5\,;\,5,5] \end{cases} \qquad (37)$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты реального характеристического полинома системы (20),(21), замкнутой регулятором (22),(24), включаются в коэффициенты желаемого устойчивого полинома (23),(24) и, таким образом, задача решена.

Заключение

В статье рассмотрена возможность применения специального математического аппарата - так называемой интервальной арифметики для решения задачи аналитического синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта со скалярным управлением. Специфика решаемой задачи потребовала дальнейшего его развития, поэтому в статье вводится новая операция со всей аксиоматикой. Хотя основным требованием к синтезируемому регулятору является обеспечение асимптотической устойчивости замкнутой системы с неопределенным объектом в контуре, предлагаемый метод в принципе дает возможность решить и некоторые вопросы качества управления такими объектами: совершенно ясно, что каждому желаемому интервальному полиному замкнутой системы соответствуют вполне определенные области расположения его корней, к которым можно применить корневые критерии качества. Однако, детальное исследование этого факта должно быть предметом отдельного рассмотрения.

Автор благодарит профессора А.Г.Александрова за постановку задачи и многочисленные ценные советы, сделавшим возможным ее решение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма I. Центр суммы интервальных чисел равен сумме их центров, т.е.

$$m\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)=\sum_{i=1}^{n} m(L_i) .$$

Доказательство

$$m\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)=m([\ell_{1*},\ell_1^*]+\dots+[\ell_{n*},\ell_n^*])=m([\ell_{1*}+\dots+\ell_{n*},\ell_1^*+\dots+\ell_n^*])=$$

$$=(\ell_{1*}+\dots+\ell_{n*}+\ell_1^*+\dots+\ell_n^*)/2=\frac{\ell_{1*}+\ell_1^*}{2}+\dots+\frac{\ell_{n*}+\ell_n^*}{2}=m(L_1)+\dots+m(L_n)=\sum_{i=1}^{n} m(L_i).$$

Л е м м а 2. Центр произведения $t\cdot L$, где t - действительное, а L - интервальное числа, равен произведению центра числа L на t:

$$m(t\cdot L)=t\cdot m(L).$$

Доказательство.

$$m(t\cdot L)=\frac{t\cdot\ell_*+t\cdot\ell^*}{2}=t\cdot\left(\frac{\ell_*+\ell^*}{2}\right)=t\cdot m(L).$$

Л е м м а 3. Длина произведения, полученного умножением действительного числа t на интервальное число L, равна произведению абсолютной величины t на длину числа L, т.е.

$$\omega(t\cdot L)=|t|\cdot\omega(L) .$$

Доказательство.

$$\omega(t\cdot L)=\begin{cases} t\cdot\ell^*-t\cdot\ell_*=t\omega(L), & \text{если } t>0 \\ t\cdot\ell_*-t\cdot\ell^*=t(-\omega(L))=-t\omega(L), & \text{если } t<0. \end{cases}$$

В силу определения абсолютной величины действительного числа [10] (с.28), справедливо равенство

$$\omega(t\cdot L)=|t|\cdot\omega(L).$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Прежде всего отметим, что система (13) будет невырожденной, если интервал значений рациональной интервальной функции $det(P)$ не охватывает ноль [6].

Н е о б х о д и м о с т ь. Имеем систему (13), в которой некоторый вектор K, составленный из действительных чисел, обеспечивает равенство интервалов левой и правой ее частей

$$\sum_{j=1}^{n}[p_{ij*},p_{ij}^{*}]\cdot k_j=[h_{i*},h_i^{*}],\ (i=1,2,\dots,n). \qquad (13')$$

Поскольку интервалы равны, то их центры совпадают, т.е.

$$m\Big(\sum_{j=1}^{n}[p_{ij*},p_{ij}^{*}]\cdot k_j\Big)=m\Big(\sum_{j=1}^{n}[k_jp_{ij*},k_jp_{ij}^{*}]\Big)=m(H_i),\ (i=1,2,\dots,n).$$

В силу леммы I

$$m\Big(\sum_{j=1}^{n}[k_jp_{ij*},k_jp_{ij}^{*}]\Big)=\sum_{j=1}^{n}m([k_jp_{ij*},k_jp_{ij}^{*}])=m(H_i),\ (i=1,\dots n).$$

В силу леммы 2

$$\sum_{j=1}^{n}m([k_jp_{ij*},k_jp_{ij}^{*}])=\sum_{j=1}^{n}k_jm(p_{ij})=m(H_i)\ \ (i=1,2,\dots,n).$$

что и требовалось доказать. Доказательство необходимости (I7) следует непосредственно из леммы 3 и равенства (I5), которое справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть одновременно выполняются (I6) и (I7). В силу лемм I,2,3 и равенства (I5), можно утверждать, что левая часть (I3) имеет совпадающие с правой частью центр и длину. Это означает, что совпадают и границы. Действительно, если для некоторых интервальных чисел L и H можно записать систему

$$\begin{cases} m(L)=(\ell_*+\ell^*)/2=m(H)=(h_*+h^*)/2 \\ \omega(L)=\ell^*-\ell_*=\omega(H)=h^*-h_*, \end{cases}$$

то $\ell_*=h_*,\ \ell^*=h^*$.

Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

I. Г о р о в и ц А.М. Синтез систем с обратной связью. М.: Советское радио, I970.

2. Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления. Под ред.Петрова Б.Н. М.: Машиностроение,I978.

3. К у з о в к о в Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет). М.: Высшая школа, 1976.

4. К у р ж а н с к и й А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

5. Dwyer P.S. Linear computations. Wiley, 1951.

6. Moore R.E. Interval analysis. N.Y., Prentce Hall, 1966.

7. К о р н о у ш е н к о Е.К. Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы. I,II – Автоматика и телемеханика, № 5, с.12-22, № 12, с.10-17, 1980.

8. Ч е р н о у с ь к о Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. I,II,III. – Техническая кибернетика, №3, с.3-11, № 4, с.3-11, № 5, с.5-11, 1980.

9. Vinkler Aharon, Wood Lincoln J. A comparison of several techniques for designing controllers of uncertain dynamic systems. „Proc. IEEE Conf. Decis. and Contr. and 17th Symp. Adapt. Process., San Diego, Calif., 1978". New York, N.Y, 1978, 31-38.

10. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978.

11. Х л е б а л и н Н.А. Анализ асимптотической устойчивости линейных систем управления в условиях неопределенности параметров объекта.–Саратов, 1980. – 9 с. – Рукопись представлена Саратовск.политехн.ин-том. Деп. в ЦНИИТЭИприборостроения 23 июля 1980, № 1370.