©2004 г. С.П. Шарый, д-р физ.-мат. наук
(Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск)

Решение интервальной линейной задачи о допусках*

Предметом работы является *задача о допусках* для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, требующая внутреннего оценивания *допустимого множества решений* $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b})\}$, которое образовано всеми такими векторами x, что произведение Ax остается в пределах $\boldsymbol{b}$ для любых возможных $A \in \boldsymbol{A}$. Развивается ряд методик для исследования пустоты и непустоты допустимого множества решений, а также выводится формула для вычисления размеров интервального решения задачи о допусках вокруг известного центра.

1. Введение

Рассматриваются интервальные системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1.1}$$

с интервальной $m\times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ в правой части. Для интервальных уравнений обычное понятие решения утрачивает смысл и чаще приходится иметь дело с теми или иными *множествами решений*. Например, известно так называемое *объединённое множество решений* для (1.1):

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\} \tag{1.2}$$

— множество всевозможных решений вещественных систем $Ax = b$ той же структуры, что и (1.1), с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Ниже будем интересоваться другим, *допустимым множеством решений* системы (1.1)

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;&=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\} \;= \\ &=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})(\, Ax \in \boldsymbol{b}\,)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

образованным всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что произведение Ax попадает в $\boldsymbol{b}$ для любого $A \in \boldsymbol{A}$. История возникновения множества решений (1.3) и связанных с ним постановок задач приведена А.Ноймайером в [1].

Используемые в работе обозначения соответствуют недавно принятому проекту международного стандарта [2], в частности, интервалы и интервальные величины обозначаютя буквами жирного шрифта — $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ..., $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, — тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами — это операции классической интервальной арифметики (см., например, [3–6]). Подчёркивание и надчёркивание — $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}$ — обозначают нижний и верхний концы

*Работа поддержана грантом Президента России №НШ-2314.2003.1.

интервала $\boldsymbol{a}$, и, кроме того,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mid} \boldsymbol{a} &= \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}) && \text{— середина (центр) интервала,} \\
\operatorname{rad} \boldsymbol{a} &= \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}) && \text{— радиус интервала,} \\
|\boldsymbol{a}| &= \max\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|, |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\} && \text{— абсолютное значение (модуль) интервала,} \\
\operatorname{vert} \boldsymbol{A} &= \bigl\{\, A = (\, a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid a_{ij} \in \{\, \underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}\},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n \,\bigr\} \\
& && \text{— множество вершин интервальной матрицы } \boldsymbol{A} = (\, \boldsymbol{a}_{ij}).
\end{aligned}$$

К интервальным векторам (называемым также далее брусами) и матрицам эти операции будут применяться покомпонентно. Посредством “int” будет обозначаться топологическая внутренность множества.

Доказательства всех утверждений работы за исключением цитированной теоремы 2 приведены в ПРИЛОЖЕНИИ.

2. Обсуждение постановки задачи

Для уяснения содержательного смысла допустимого множества решений рассмотрим “черный ящик” (рис. 1) с вектором входных воздействий $x \in \mathbb{R}^n$ и вектором выходных откликов $y \in \mathbb{R}^m$, причём зависимость вход-выход предположим линейной, $y = Ax$, с некоторой вещественной $m\times n$-матрицей $A = (a_{ij})$. Пусть параметры “черного ящика” не являются заданными точно, но нам известны лишь интервалы их возможных значений $\boldsymbol{a}_{ij}$, $a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$, из которых образована интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A} = (\, \boldsymbol{a}_{ij})$. Эти параметры, к примеру, могут изменяться непредсказуемым образом (дрейфовать) в пределах $\boldsymbol{a}_{ij}$, либо интервальная неопределённость может быть следствием нашего незнания точной модели и т.п.

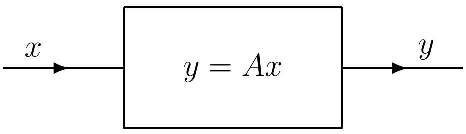

Рис. 1: Модель для интерпретации допустимого множества решений.

Предположим также, что для множества выходных состояний “черного ящика” задан интервальный вектор $\boldsymbol{y}$, в который надо обеспечить попадание y вне зависимости от конкретных значений a_{ij} из $\boldsymbol{a}_{ij}$. А именно, существуют ли такие входные сигналы $\tilde{x}$, что при любых возможных реализациях параметров системы a_{ij} из $\boldsymbol{a}_{ij}$ на выходе всё равно получится отклик y в пределах требуемых допусков $\boldsymbol{y}$? Допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{y})$ является в точности множеством всех таких $\tilde{x}$. Эта общая схема успешно адаптировалась к конкретным задачам математической экономики (И. Рон [7]), автоматического управления (Н.А. Хлебалин [8], И.В. Дугарова и Е.М. Смагина [9]) и многим другим прикладным задачам.

Нетрудно показать (см. [10] или §3 данной работы), что допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ есть выпуклое полиэдральное множество в $\mathbb{R}^n$. Рис. 2 изображает допустимое

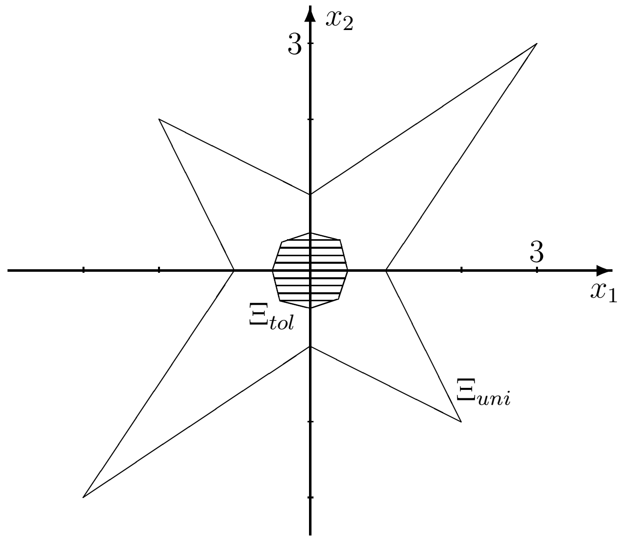

Рис. 2: Множества решений интервальной системы (2.4).

множество решений (в сравнении с объединённым множеством решений) для системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] \\ \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Тем не менее, если размерность интервальной линейной системы уравнений велика, прямое описание её допустимого множества решений, при котором выписываются все ограничивающие гиперплоскости, становится трудоёмким и практически бесполезным: его сложность растёт пропорционально $m\,2^n$. По этой причине имеет смысл ограничить себя нахождением некоторых просто устроенных *оценок* для допустимого множества решений, причём особенно интересны его подмножества, так как для каждого их элемента x остаётся выполненным характеристическое условие

$$(\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}),$$

определяющее исходное множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Иными словами, мы заменяем $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ на его внутреннюю оценку, формулируя подлежащую решению задачу в следующем виде:

(2.5) *Найти брус, содержащийся в допустимом множестве решений рассматриваемой интервальной линейной системы уравнений.*

За задачей (2.5) закрепилось наименование *линейной задачи о допусках* [1, 6, 11], и именно она является предметом рассмотрения настоящей работы. В ранних публикациях по отношению к (2.5) иногда встречался термин *внутренняя задача* для интервальных линейных систем [4], а точки из $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ назывались *внутренними решениями* [10].

Заметим, что допустимое множество решений может оказаться пустым даже для "хороших" интервальных данных, как, например, это имеет место у одномерного уравнения с $\boldsymbol{A} = [1,2]$, $\boldsymbol{b} = [2,3]$. Двумерная система

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [-1,1] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1,3] \\ [1,3] \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

даёт более сложный пример пустого допустимого множества решений. В подобных случаях будем говорить, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*, так как тогда исходная постановка задачи (2.5) теряет смысл.

Ясно, что

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b}), \tag{2.7}$$

и хотя определение допустимого множества решений требует, чтобы произведение Ax попадало в вектор правой части $\boldsymbol{b}$ для *каждого* $A \in \boldsymbol{A}$, достаточным оказывается выполнение включения $Ax \in \boldsymbol{b}$ лишь для матриц A из некоторого *конечного* подмножества в $\boldsymbol{A}$. Именно, имеет место

Лемма 1. $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\}$.

В частности,

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b}), \tag{2.8}$$

т.е. представление (2.7) существенно усилено.

3. Грубое исследование разрешимости

Результатам, касающимся разрешимости линейной задачи о допусках, посвящено несколько публикаций с 70-х годов ушедшего века. Одним из первых И. Рон в [7] обратился к исследованию линейной задачи о допусках при изучении линейных экономических моделей межотраслевого баланса (называемых также моделями "затраты-выпуск" в английской экономической литературе), имеющих интервально неопределённые параметры. В этой его работе были выписаны явные формулы, позволяющие выявлять разрешимость линейной задачи о допусках, но только для интервальных матриц $\boldsymbol{A}$ специального вида и неотрицательных правых частей $\boldsymbol{b}$.

Принимая во внимание свойства интервальных матрично-векторных операций [3, 6], можно определить допустимое множество решений следующим образом:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b} \,\},$$

где " $\cdot$ " — интервальное матричное произведение. На основе этого представления Н.А. Хлебалиным в [8] предложено в качестве наиболее вероятного представителя допустимого множества решений брать решение $\tilde{x}$ "средней" точечной системы

$$(\operatorname{mid} \boldsymbol{A}) \cdot x = \operatorname{mid} \boldsymbol{b},$$

которое затем тестируется на включение $\boldsymbol{A}\tilde{x} \subseteq \boldsymbol{b}$. Если же это условие не выполнено, то делается заключение о "практической неразрешимости" линейной задачи о допусках, т.е. что $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$, хотя, строго говоря, в этом случае никакого определённого суждения выносить нельзя. Критерий Н.А. Хлебалина, как легко убедиться, работает лишь когда матрица $\boldsymbol{A}$ "достаточно узка" в сравнении с вектором правой части $\boldsymbol{b}$ и не способен исследовать тонких пограничных ситуаций.

Пусть $\boldsymbol{A} = [-1, 2]$, $\boldsymbol{b} = [-2, 6]$. Тогда $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = [-1, 2]$, но решение "средней системы" есть 3, и оно не принадлежит допустимому множеству решений. Более интересен двумерный контрпример с данными

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1,2] \\ [1,2] & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [5,7] \\ [7,9] \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ состоит из единственной точки $(1, 2)^\top$, тогда как решение "средней системы" есть $(\frac{8}{9}, \frac{20}{9})^\top$. Особенность этого примера состоит в том, что матрица задачи строго положительна и невырожденна.

Цель настоящего параграфа — дать простое достаточное условие неразрешимости линейной задачи о допусках, базирующееся на сравнении "относительных узостей" элементов интервальной матрицы и вектора правой части. Оно предназначено для предварительного быстрого исследования задачи.

Заметим, что если i-я строка $\boldsymbol{A}$ содержит только нулевые элементы, то для непустоты допустимого множества решений необходимо $\boldsymbol{b}_i \ni 0$. Если же это условие выполнено, то свойство $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ быть пустым или непустым зависит уже только от других, не i-х, строк матрицы $\boldsymbol{A}$ и компонент $\boldsymbol{b}$. Таким образом, без потери общности можно предполагать далее, что $\boldsymbol{A}$ не имеет нулевых строк.

Для характеризации "относительной узости" ненулевых интервалов Х. Рачеком в [12] введён функционал

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{x}}/\overline{\boldsymbol{x}}, & \text{если } |\underline{\boldsymbol{x}}| \leqslant |\overline{\boldsymbol{x}}|, \\ \overline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{x}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для нулевых интервалов функционал χ не определён. Ясно, что $-1 \leqslant \chi(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$, и $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$, если и только если $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Более того, как доказано в [12],

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{y}), \quad \text{если и только если} \quad \boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{y},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \tag{3.9}$$

$$\text{если} \quad \boldsymbol{x} \neq 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{y} \neq 0, \ \text{то} \ \ \chi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leqslant \max\{\, \chi(\boldsymbol{x}),\, \chi(\boldsymbol{y})\,\}, \tag{3.10}$$

$$\text{если} \quad \boldsymbol{x} \supseteq \boldsymbol{y} \quad \text{и} \quad \chi(\boldsymbol{y}) \geqslant 0, \ \text{то} \ \ \chi(\boldsymbol{x}) \leqslant \chi(\boldsymbol{y}). \tag{3.11}$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Пусть интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный m-вектор $\boldsymbol{b}$ системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ таковы, что для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены следующие условия:*

(i) $\quad 0 \notin \boldsymbol{b}_k$,

(ii) $\max\{\ \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0\,\} \ < \ \chi(\boldsymbol{b}_k)$.

Тогда допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ пусто.

Например, используя этот критерий, можно легко найти, что одномерная система с $\boldsymbol{A} = [1, 2]$, $\boldsymbol{b} = [2, 3]$ имеет пустое допустимое множество решений.

Важность всех условий теоремы 1 может быть продемонстрирована на рассмотренном выше одномерном примере с $\boldsymbol{A} = [-1, 2]$ и $\boldsymbol{b} = [-2, 6]$. Здесь $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = [-1, 2] \neq \emptyset$, хотя $\chi(\boldsymbol{A}) = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} = \chi(\boldsymbol{b})$. Более глубокое объяснение состоит в том, что свойство (3.11) функционала χ неверно для интервалов, содержащих нуль во внутренности:

$$[-1, 1] \subseteq [-1, 2] \subseteq [-2, 2], \ \text{но} \ \ \chi([-1, 1]) = \chi([-2, 2]) = -1, \ \ \chi([-1, 2]) = -\tfrac{1}{2}.$$

В то же время невыполнение условий теоремы 1 не обязательно влечёт разрешимость линейной задачи о допусках. Например, (ii) неверно для системы (2.6), но её допустимое множество решений всё-таки пусто.

Если на основании теоремы 1 сделан вывод о несовместности некоторой линейной задачи о допусках, то

$$\Omega = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} \chi(\boldsymbol{a}_{ij}) - \chi(\boldsymbol{b}_i) \right\} \leqslant 0,$$

и величина Ω до некоторой степени может характеризовать “степень неразрешимости” рассматриваемой задачи: чем она меньше, тем более далека задача от разрешимости, и наоборот. Кроме того, индексы $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, для которых выполнено условие (ii) теоремы 1, указывают на те строки матрицы $\boldsymbol{A}$ и соответствующие компоненты вектора $\boldsymbol{b}$, которые вносят доминирующий вклад в неразрешимость рассматриваемой задачи о допусках. Для того, чтобы уменьшить отклонение задачи от разрешимости (приблизиться к разрешимости), следует либо сузить наиболее широкие элементы в этих строках матрицы $\boldsymbol{A}$, т.е. увеличить $\max_{1\leqslant j\leqslant n} \chi(\boldsymbol{a}_{kj})$, либо расширить правую часть, т.е. уменьшить $\chi(\boldsymbol{b}_k)$.

4. Полное исследование разрешимости

Основой развиваемой ниже теории разрешимости интервальной линейной задачи о допусках является новая аналитическая характеризация допустимого множества решений. Ранее один из наиболее важных характеризационных результатов был получен И. Роном в [10], показавшим, что принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ эквивалентна

$$|\ \mathrm{mid}\ \boldsymbol{A} \cdot x - \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}\ | \leqslant \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b} - \mathrm{rad}\ \boldsymbol{A} \cdot |x|.$$

Но отправной точкой рассмотрений этого параграфа является

Лемма 2. *Пусть даны интервальная $m\times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный m-вектор правой части $\boldsymbol{b}$, а выражением*

$$Tol(x) \;=\; Tol(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left|\ \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j\ \right| \right\}$$

определяется функционал $Tol : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ равносильна $Tol(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geqslant 0$, т.е. допустимое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Tol(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geqslant 0 \,\}$ функционала Tol.

Отметим, что функционал $Tol(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ непрерывен по всем своим аргументам — по x, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$, что следует из непрерывности интервальных арифметических операций и взятия модуля [3, 6]. Будем называть $Tol(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *распознающим функционалом*, коль скоро знак его значений позволяет “распознать” точки из $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Лемма 3. *Распознающий функционал $Tol(x)$ вогнутый.*

Итак, подграфик

$$\mathrm{hyp}\ Tol = \{\ (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ Tol(x) \leqslant z\ \}$$

отображения $\mathit{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является выпуклым множеством. Можно даже показать, что hyp Tol есть пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. является *выпуклым полиэдральным множеством* (по терминологии Рокафеллара [13]). Действительно, выражая абсолютное значение через максимум, получим для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left|\ \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \quad = \quad \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \max_{\hat{a}_{ij}} \left|\ \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \right| \ =$$

$$= \ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \max_{\hat{a}_{ij}} \left\{ \max\left\{ \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j,\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j - \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i \right\}\right\} \ =$$

$$= \ \min_{\hat{a}_{ij}} \left\{ \min\left\{ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j,\ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i + \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \right\}\right\},$$

где n-вектор $(\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \ldots, \hat{a}_{in})$ пробегает конечное множество $\mathrm{vert}\,(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in})$, т.е. все вершины i-й строки интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$. По этой причине функционал Tol является нижней огибающей не более чем $m\,2^{n+1}$ аффинных функционалов вида

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i \pm \left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \right),$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, а множество hyp Tol есть пересечение подграфиков этих функционалов. В качестве следствия получаем следующий хорошо известный результат (см. [1, 10]): *допустимое множество решений интервальной линейной системы является выпуклым полиэдральным множеством.*

Лемма 4. *Распознающий функционал $\mathit{Tol}(x)$ достигает конечного максимума на всём $\mathbb{R}^n$.*

Лемма 5. *Если интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ не имеет нулевых строк, то $t \in \mathrm{int}\ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ влечёт $\mathit{Tol}(t; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.*

Лемма 6. *Если $\mathit{Tol}(t; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то $t \in \mathrm{int}\ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ — точка t лежит во внутренности допустимого множества решений.*

Подытоживая проведённые рассмотрения, приходим к следующей методике исследования разрешимости линейной задачи о допусках, т.е. к критерию пустоты/непустоты допустимого множества решений интервальных линейных систем.

Решаем задачу безусловной максимизации вогнутого функционала

$$\mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ = \ \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left|\ \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Пусть $T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и это значение достигается функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \geqslant 0$, то $\tau \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ совместна и точка τ лежит в допустимом множестве решений;

- если $T > 0$, то $\tau \in \operatorname{int} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность точки τ допустимому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных;
- если $T < 0$, то $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ несовместна.

В настоящее время максимизация негладких вогнутых функционалов является неплохо разработанным вопросом вычислительной оптимизации. В течение последних десятилетий прошедшего века было предложено немало эффективных численных методов решения этой задачи (см., например, [14, 15, 16, 17]), дающих основание полагать, что развитый в этом параграфе критерий разрешимости линейной задачи о допусках действительно вполне практичен. В частности, в [17] описаны некоторые методы, находящие точное значение максимума вогнутых функционалов с полиэдральными графиками, склеенными из кусков гиперплоскостей.

Например, для интервальной линейной системы (2.4) распознающий функционал имеет вид

$$\begin{aligned} \mathit{Tol}(x) \;&=\; \min\Big\{\, 1 - \big|\, [1,2]\, x_1 + [-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}]\, x_2 \big|, 1 - \big|\, [-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}]\, x_1 + [1,2]\, x_2 \big| \,\Big\} \;= \\ &=\; 1 - \max\Big\{\, \big|\, [1,2]\, x_1 + [-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}]\, x_2 \big|, \big|\, [-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}]\, x_1 + [1,2]\, x_2 \big| \,\Big\}. \end{aligned}$$

Здесь модули обоих выражений под знаками экстремумов всегда неотрицательны. Кроме того, они достигают своих наименьших значений, равных нулю, одновременно, когда $x_1 = x_2 = 0$. При всех остальных x_1 и x_2 выражения под знаками модулей ненулевые, так что значение распознающего функционала в этих точках будет меньшим его значения в нуле. Следовательно,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathit{Tol}(x) = 0$$

и достигается при $x = 0$. Этот максимум надёжно находится и вычислительными оптимизационными процедурами.

Как только установлена разрешимость линейной задачи о допусках и найдена точка в допустимом множестве решений, можно обратиться собственно к построению интервала решения задачи. При этом будем следовать так называемому “центровому подходу”, принятому Н.А. Хлебалиным [8], А.Ноймайером [1], В.В. Шайдуровым [4] и другими авторами: известная точка допустимого множества решений берётся в качестве центра бруса внутренней оценки. Ясно, что для получения телесной оценки (с ненулевой шириной всех компонент) необходима принадлежность этого центра внутренности множества решений, и в силу леммы 5 такую точку всегда можно найти путём максимизации по x распознающего функционала $\mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, если внутренность множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ непуста.

В заключение параграфа полезно сравнить развитый выше подход к исследованию разрешимости задачи о допусках с тем, который был предложен ранее И.Роном [10] и основан на факте полиэдральности допустимого множества решений. Коль скоро уравнения гиперплоскостей, ограничивающих $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, легко могут быть выписаны в явном виде, то можно попытаться представить $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ как множество допустимых решений некоторой задачи линейного программирования, а вопрос о его пустоте или непустоте может быть разрешён, к примеру, посредством применения начального этапа стандартного симплекс-метода (так называемого “введения в базис”). Явная форма соответствующей задачи линейного программирования впервые была представлена И. Роном в [10]:

Теорема 2. *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$, где векторы $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ образуют решение* *системы линейных неравенств*

$$
(4.12)\qquad \begin{cases} \overline{\boldsymbol{A}}x' - \underline{\boldsymbol{A}}x'' \leqslant \ \ \overline{\boldsymbol{b}}, \\ -\underline{\boldsymbol{A}}x' + \overline{\boldsymbol{A}}x'' \leqslant -\underline{\boldsymbol{b}}, \\ \qquad\qquad x', x'' \geqslant \ \ 0. \end{cases}
$$

Нередко решение системы линейных неравенств (4.12) оказывается привычнее или удобнее, чем максимизация негладкого распознающего функционала, но в результате решения (4.12) можно получить точку, которая лежит на границе допустимого множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Это неприемлемо по двум причинам: такая точка, во-первых, может покидать множество решений при сколь угодно малых "шевелениях" данных задачи и, во-вторых, не годится в качестве центра телесного бруса внутренней оценки допустимого множества решений. Кроме того, предложенная методика "распознающего функционала" допускает дальнейшее развитие, позволяющее оценивать степень разрешимости или неразрешимости задачи о допусках и корректировать её данные в нужном нам смысле, в частности, и для нелинейных задач. Таких возможностей подход И. Рона также не предоставляет.

5. Вычисление размеров интервального решения

В выводимой ниже формуле для размеров внутреннего оценивающего бруса решающую роль играет взятие минимума от рациональной функции с модулями, так что дальнейшее решение линейной задачи о допусках сводится к задаче конечномерной ограниченной оптимизации. Не будем обсуждать при этом вопросы, связанные с оптимальным выбором центра интервального решения, так как они тесно связаны с практическими нуждами конкретных заказчиков.

Заметим, что в приложениях постановка линейной задачи о допусках часто является более детализованной, нежели (2.5). Следуя В.В. Шайдурову [4], дополнительно к формулировке (2.5) примем, что отношение допусков отдельных компонент бруса внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ задаётся некоторым положительным вектором $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_k > 0$, т.е., фактически, введём весовые коэффициенты для ширины искомого вектора допусков, так что

$$
\operatorname{rad} \boldsymbol{U}_k / \operatorname{rad} \boldsymbol{U}_l = w_k / w_l.
$$

Посредством масштабирования диагональной матрицей $\operatorname{diag}\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ все подобные случаи легко привести к одному стандартному, когда $w = (1, 1, \ldots, 1)$ и необходимо вписать гиперкуб в соответствующим образом модифицированное множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Действительно, введём матрицы $D = \operatorname{diag}\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ и $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}D$. Пусть интервальный вектор $\tilde{\boldsymbol{U}}$, такой что $\operatorname{rad} \tilde{\boldsymbol{U}}_k = \operatorname{rad} \tilde{\boldsymbol{U}}_l$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, является решением линейной задачи о допусках с матрицей $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и вектором правой части $\boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{U} = D\tilde{\boldsymbol{U}}$ — решение исходной задачи, поскольку

$$
\{\ \boldsymbol{A}x \mid x \in \boldsymbol{U}\ \} = \{\ \boldsymbol{A}DD^{-1}x \mid x \in \boldsymbol{U}\ \} = \{\ \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \tilde{\boldsymbol{U}}\ \} \subseteq \boldsymbol{b},
$$

причём $\operatorname{rad} \boldsymbol{U}_k / \operatorname{rad} \boldsymbol{U}_l = w_k / w_l$, как и требовалось. По этой причине в постановке линейной задачи о допусках будем иметь в виду поиск интервального вектора $\boldsymbol{U} \subseteq \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ с компонентами равной ширины.

Т е о р е м а 3. *Если* $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, *то для*

$$r = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{A\in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left| \,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \,\right|}{\sum_{j=1}^{n} |\,a_{ij}|} \right\} \tag{5.13}$$

интервальный вектор $\boldsymbol{U} = (t + r\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} = (\,[-1,1], \ldots, [-1,1]\,)^\top$, *также целиком лежит во множестве решений* $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

В выражении (5.13) взятие минимума по $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ не представляет трудностей. Вычисление внутреннего минимума, который берётся, фактически, по вершинам отдельных интервальных векторов-строк $(\,\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in})$ матрицы $\boldsymbol{A}$, также несложно при небольших размерностях пространства переменных n. Но при росте размерности количество вершин 2^n быстро растёт и, начиная с некоторого n, их полный перебор становится невозможным. Следовательно, нужно уметь находить $\min_{A\in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}}$ либо его оценку снизу каким-нибудь другим путём.

Простейший способ быстрого оценивания величины внутреннего минимума в (5.13) снизу состоит в том, чтобы взять левый конец *естественного интервального расширения* для выражений в фигурных скобках (5.13) по всей $\boldsymbol{A}$, т.е. заменить переменные интервалами их изменения и выполнить арифметические операции между ними по правилам классической интервальной арифметики. Следующий простой алгоритм, предложенный В.В. Шайдуровым [4], именно это и делает.

> Для данного $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ вычисляем интервалы
>
> $$\boldsymbol{r}_i = \frac{\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left|\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}t_j\,\right|}{\sum_{j=1}^{n} |\,\boldsymbol{a}_{ij}|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
>
> и затем полагаем $\varrho := \min_{1\leqslant i\leqslant m} \underline{\boldsymbol{r}}_i$. Интервальный вектор $(t + \varrho\boldsymbol{e})$ есть решение линейной задачи о допусках для системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Поскольку и числитель, и знаменатель минимизируемого выражения содержат лишь по одному вхождению каждой переменной в первой степени, алгоритм Шайдурова, в действительности, эквивалентен оцениванию минимума дроби как частного от минимума числителя на максимум знаменателя. Относительная точность такого оценивания, как нетрудно показать [4], тем выше, чем меньшей является ширина матрицы $\boldsymbol{A}$.

Алгоритм Шайдурова прост и легко реализуем, но это достигается ценой значительного огрубления окончательного результата, особенно для широких интервальных матриц $\boldsymbol{A}$. Желательно иметь в своем распоряжении более развитые методики вычисления (5.13), с точностью, превосходящей алгоритм Шайдурова, но сложностью выполнения меньшей, чем полный перебор всех вершин интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$. Такие вычислительные методы были развиты автором, в частности, в [11] на основе широко известной в комбинаторной оптимизации стратегии "ветвей и границ". Время исполнения этих методов растет в наихудшем случае как экспонента от размерности n, но гибкая вычислительная схема позволяет с успехом применять их к задачам любого размера. При этом точность вычисления величины (5.13) будет лимитироваться лишь наличными вычислительными ресурсами.

В качестве примера построим брус внутренней оценки допустимого множества решений системы (2.4). В предыдущем параграфе мы нашли точку $(0, 0)^\top$ из внутренности допустимого множетсва решений, и её можно взять в качестве центра искомого бруса. В соответствии с алгоритмом Шайдурова

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \frac{1}{|[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]| + |[1,2]|} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{3}{8},$$

так что получается кубик $\big([-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}], [-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}]\big)^\top$. Он даже максимален по включению, так как касается границ допустимого множества решений.

Отметим, что помимо развитого выше "центрового" подхода существует и другой, так называемый "формальный", подход к решению линейной задачи о допусках [19, 20]. Он подробно разработан и обладает рядом замечательных качеств — высокой вычислительной эффективностью, хорошим качеством оценивания и универсальностью, будучи применимым для оценивания любых множеств решений, а не только допустимого. Но с помощью "формального подхода" невозможно выполнить полное исследование разрешимости линейной задачи о допусках.

6. Заключение

В работе рассмотрена задача о допусках для интервальных линейных систем уравнений, требующая исследования их допустимого множества решений. Оно образовано всеми вещественными векторами, которые устойчиво переводятся задаваемым матрицей системы линейным преобразованием в интервалы правой части при любых вариациях элементов матрицы в пределах соответствующих интервалов. Если же допустимое множество решений непусто, то требуется найти его внутреннюю (с помощью подмножества) оценку.

Таким образом, постановка задачи о допусках идейно близка к тем, что рассматриваются в теории робастного управления. Неудивительно, что именно там задача о допусках и получила наиболее интенсивные применения в последние десятилетия.

В работе предлагается полная "технологическая цепочка" для решения линейной задачи о допусках. В частности, в §3 представлен простой признак пустоты допустимого множества решений, основанный на сравнении "относительной узости" интервалов в матрице и правой части. Далее, в §4 развита более тонкая методика, основанная на использовании "распознающего функционала" и позволяющая исчерпывающим образом исследовать пустоту/непустоту допустимого множества решений. При этом в случае непустоты одновременно получается точка из допустимого множества решений, вокруг которой может быть построен брус внутренней оценки. Формула для вычисления его размеров выводится в §5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Оно сводится к проверке того, что

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \supseteq \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\},$$

так как обратное включение очевидно.

Предположим, что некоторый x удовлетворяет $Ax \in \boldsymbol{b}$ для всех $A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}$. Пусть E — матрица из $\boldsymbol{A}$. В соответствии с определением $\operatorname{vert} \boldsymbol{A}$ существуют коэффициенты $\lambda_A \geqslant 0$, общим числом 2^{mn}, такие что

$$\sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A = 1 \quad \text{и} \quad E = \sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A A,$$

или, иными словами, E представляется как выпуклая комбинация крайних матриц из $\boldsymbol{A}$. Тогда

$$Ex = \left(\sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A A \right) \cdot x = \sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A A x. \tag{П.1}$$

Но все $Ax \in \boldsymbol{b}$ по утверждению леммы. Следовательно, их выпуклая комбинация, какой является сумма (П.1), также принадлежит выпуклому множеству $\boldsymbol{b}$.

Доказательство теоремы 1. Оно будет проведено "от противного". Предположим, что задача о допусках всё-таки имеет решение $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, т.е. $\boldsymbol{A}t \subseteq \boldsymbol{b}$, причём условие (i) делает невозможным равенство интервала $(\boldsymbol{A}t)_k$ нулю. Тогда верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\chi(\,(\boldsymbol{A}t)_k) \;&=\; \chi\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{kj} t_j \right) \;\leqslant \\
&\leqslant\; \max\{\, \chi(\boldsymbol{a}_{kj} t_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} t_j \neq 0 \,\} \qquad \text{в силу (3.10)} \\
&=\; \max\{\, \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} t_j \neq 0 \,\} \qquad \text{в силу (3.9)} \\
&\leqslant\; \max\{\, \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0 \,\}.
\end{aligned}$$

Мы нашли, что

$$\chi(\,(\boldsymbol{A}t)_k) \;\leqslant\; \max\{\, \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0 \,\}. \tag{П.2}$$

С другой стороны, в силу нашего предположения $(\boldsymbol{A}t)_k \subseteq \boldsymbol{b}_k$, что вместе с (3.11) влечет

$$\chi(\,(\boldsymbol{A}t)_k\,) \geqslant \chi(\boldsymbol{b}_k).$$

Комбинируя это соотношение с (П.2), получаем далее

$$\max\{\, \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0 \,\} \;\geqslant\; \chi(\boldsymbol{b}_k),$$

что противоречит условию (ii) доказываемой теоремы.

Доказательство леммы 2. Принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$. Перепишем последнее включение в следующем виде

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \subseteq [-\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i\,], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

что эквивалентно

$$\left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \leqslant \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, x на самом деле принадлежит $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathit{Tol}\,(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} \;\geqslant\; 0.$$

Доказательство леммы 3. Функционал $\mathit{Tol}(x)$ есть нижняя огибающая функционалов

$$\xi_i(x) = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right|, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и нам нужно лишь установить вогнутость каждого из $\xi_i(x)$.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$. Субдистрибутивность интервальной арифметики влечет тогда

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda) y_j) \subseteq \lambda \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} y_j \right).$$

Кроме того, абсолютная величина интервала монотонна по включению [6], так что

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda) y_j) \right| &\leqslant \\ \leqslant \left| \lambda \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} y_j \right) \right| &\leqslant \\ \leqslant \lambda \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| + (1-\lambda) \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right|&. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4. Будучи выпуклым полиэдральным множеством, подграфик $\operatorname{hyp} \mathit{Tol}$ является выпуклой оболочкой конечного числа точек (c_k, γ_k), $k = 1, 2, \ldots, p$, и направлений (c_k, γ_k), $k = p+1, \ldots, q$, в $\mathbb{R}^{n+1}$ (исключая направление $(0, \ldots, 0, 1)$, так как $\mathit{Tol}(x)$ всюду определен) [13]. Более точно,

$$\operatorname{hyp} \mathit{Tol} = \left\{ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k (c_k, \gamma_k) \;\middle|\; c_k \in \mathbb{R}^n,\ \gamma_k,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ \lambda_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Поскольку $\mathit{Tol}(x) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i$, можно заключить, что $\gamma_k \leqslant 0$, $k = p+1, \ldots, q$, так как в противном случае функционал Tol не был бы ограничен сверху. По этой причине

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathit{Tol}(x) &= \max\{\, z \mid (x, z) \in \operatorname{hyp} \mathit{Tol},\ x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R} \,\} = \\ &= \max \left\{ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \gamma_k \;\middle|\; \lambda_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\} = \\ &= \max \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \gamma_k \;\middle|\; \lambda_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\} = \\ &= \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \gamma_k. \end{aligned}$$

Искомый максимум совпадает, таким образом, с максимумом по некоторому конечному множеству значений функционала, а $\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathit{Tol}(x)$ достигается вместе со всеми γ_k, $k = 1, 2, \dots, p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 5. Пусть $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ и $\max \mathit{Tol}(x)$ достигается в некоторой точке $\tau \in \Xi_{tol}$. Если $t \in \mathrm{int}\ \Xi_{tol}$, то t — внутренняя точка отрезка $[\tau, y] \subset \Xi_{tol}$, т.е. $t = \lambda\tau + (1-\lambda)y$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$, $y \in \Xi_{tol}$. Следовательно,

$$\mathit{Tol}(t) \geqslant \lambda\, \mathit{Tol}(\tau) + (1-\lambda)\, \mathit{Tol}(y),$$

так как функционал Tol вогнутый.

Предположим, что $\mathit{Tol}(t) = 0$. Тогда выписанное выше неравенство выполняется если и только если $\mathit{Tol}(\tau) = \mathit{Tol}(y) = 0$, а функционал Tol обязан быть нулевым на всём множестве $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Более того, пусть $\mathbb{R}^n = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} \mathcal{O}_i$, где

$$\mathcal{O}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathit{Tol}(x) = \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Xi_{tol} = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i),$$

причём все множества $\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, замкнуты. Следовательно, $\mathrm{int}\ (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i) \neq \emptyset$ по крайней мере для одного $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, и мы имеем

$$\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_k - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_k - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{kj} x_j \right| = 0 = \mathrm{const}$$

для всех $x \in \mathrm{int}\ (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_k)$. Последнее соотношение может иметь место, лишь когда все $\boldsymbol{a}_{k1}, \dots, \boldsymbol{a}_{kn}$ нулевые, что противоречит исходному утверждению леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 6. Так как отображение $\mathrm{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно, множество $Y = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid \mathit{Tol}(y) > 0 \,\}$ является открытым. Оно также и непусто — $t \in Y \subseteq \Xi_{tol}$, причём $Y \subseteq \mathrm{int}\ \Xi_{tol}$. Следовательно, $x \in \mathrm{int}\ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Предположим сначала, что в рассматриваемой линейной задаче о допусках матрица $\boldsymbol{A}$ имеет нулевую ширину, т.е. вещественная — $\boldsymbol{A} = A$, и потому $\mathrm{vert}\ \boldsymbol{A} = A$. Представим каждый $x \in \boldsymbol{U}$ в виде $x = t + y$, где $\max_{1\leqslant j\leqslant n} |\, y_j| \leqslant r_A$ и

$$r_A = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \frac{\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left|\, \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \,\right|}{\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}|} \right\}, \tag{П.3}$$

так что для $i = 1, 2, \dots, m$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\,(Ay)_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}|\, |\, y_j| \leqslant r_A \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}| \leqslant \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right|.$$

Поскольку $Ax = At + Ay$, то получаем

$$(At)_i - \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i + |\, \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - (At)_i\,| \leqslant (Ax)_i \leqslant (At)_i + \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - |\, \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - (At)_i\,|$$

или, что равносильно,

$$\underline{\boldsymbol{b}}_i - (\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - (At)_i) + |\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - (At)_i\,| \leqslant$$
$$\leqslant (Ax)_i \leqslant \tag{П.4}$$
$$\leqslant\ \overline{\boldsymbol{b}}_i - (\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - (At)_i) - |\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - (At)_i\,|.$$

В силу того, что

$$-z + |z| \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -z - |z| \leqslant 0$$

для всякого вещественного z, неравенство (П.4) влечет $\underline{\boldsymbol{b}}_i \leqslant (Ax)_i \leqslant \overline{\boldsymbol{b}}_i$, т.е. $Ax \in \boldsymbol{b}$, как и ожидалось.

Пусть теперь матрица $\boldsymbol{A}$ задачи имеет ненулевую ширину и $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$. Рассмотрим совокупность всех линейных задач о допусках для линейных систем $Ax = \boldsymbol{b}$ с $A \in \boldsymbol{A}$. Согласно представлению (2.8)

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{A \in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}} \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b}),$$

и если для каждого $A \in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}$ интервальный вектор решения соответствующей задачи о допусках есть $\boldsymbol{U}_A$, $\boldsymbol{U}_A \subseteq \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b})$, то интервальный вектор $\boldsymbol{U}$, такой что

$$\boldsymbol{U} = \bigcap_{A \in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}} \boldsymbol{U}_A,$$

также включен в $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. В частности, если все $\boldsymbol{U}_A$ имеют общий центр и их радиусы определяются формулой (П.3), то имеем

$$\boldsymbol{U} = t + r\boldsymbol{e},$$

где

$$r \;=\; \min_{A \in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}} r_A \;=\; \min_{A \in \mathrm{vert}\,\boldsymbol{A}} \; \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \frac{\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left|\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j\,\right|}{\sum_{j=1}^n |\,a_{ij}|} \right\},$$

а взятие двух последовательных минимумов можно переставить между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neumaier A.* Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Intervall-Berichte. 1986. №86/9. S. 5–19.

2. *Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.* Standardized notation in interval analysis. Электронная рукопись доступна на `http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int`.

3. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

4. *Добронец Б.С., Шайдуров В.В.* Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука, 1990.

5. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

6. *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

7. *Rohn J.* Input-output model with interval data // Econometrica. 1980. V. 48. P. 767–769.

8. *Хлебалин Н.А.* Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта // Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов: Саратов. политехнический ин-т, 1981. С. 107–123.

9. *Дугарова И.В., Смагина Е.М.* Обеспечение устойчивости системы с неопределёнными параметрами // АиТ. 1990. № 11. С. 176–181.

10. *Rohn J.* Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985; ed. Nickel K. N.Y.: Springer Verlag, 1986. P. 157–158. (Lecture Notes on Computer Science; vol. 212).

11. *Shary S.P.* Solving the linear interval tolerance problem // Math. Comput. Simulation. 1995. V. 39. P. 53–85.

12. *Ratschek H.* Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik // J. Reine und Angewandte Math. 1972. B. 252. S. 128–138.

13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

14. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979.

15. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

16. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.

17. *Kiwiel K.C.* Methods of descent for nondifferentiable optimization. Berlin: Springer Verlag, 1985.

18. *Рыков А.С.* Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций. М.: Физматлит, 1993

19. *Шарый С.П.* Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. №3. С. 51–61.

20. *Shary S.P.* A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. V. 8, №5. P. 321–418.