

О МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАНЫМИ ОПЕРАТОРОМ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. В. Лакеев, С. И. Носков

Введение

При решении задач из различных областей знаний математическими методами часто возникает проблема обработки информации приближенного характера. Эта приближенность может выражаться, в частности, в интервальном представлении результатов соответствующих измерений. Для решения проблем такого рода в последние годы интенсивно проводятся исследования в области так называемой интервальной математики [1]. Одной из них, которая может быть отнесена к классическим, является решение системы линейных уравнений при интервальном задании коэффициентов и правой части, т. е. описание множества решений x уравнения

$$Ax = B, \quad (1)$$

где $A \in I(R^{m \times n})$ — вещественная интервальная $m \times n$ -матрица, $B \in I(R^m)$ — m -мерный интервальный вектор, $x \in R^n$ [1]. Множество решений системы (1) может быть определено различными способами в зависимости от того, какими кванторами связываются коэффициенты матрицы и правой части [2]. В данной работе мы рассмотрим следующие четыре наиболее часто встречающиеся в литературе множества решений уравнения (1):

$\mathcal{A}_1 = \{x \in R^n \mid \exists C \in A \exists c \in B Cx = c\}$ — объединенное множество решений [3–5],

$\mathcal{A}_2 = \{x \in R^n \mid \forall C \in A \exists c \in B Cx = c\}$ — допустимое множество решений [6–8],

$\mathcal{A}_3 = \{x \in R^n \mid \forall c \in B \exists C \in A Cx = c\}$ — множество, впервые рассмотренное при решении интервальной задачи модального управления [9],

$\mathcal{A}_4 = \{(x \in R^n \mid \forall C \in A \exists c \in B Cx = c) \& (\forall d \in B \exists D \in A Dx = d)\}$ — множество всех точечных алгебраических интервальных решений [10, 11].

Целью настоящей работы является описание этих множеств в терминах концов интервалов A и B , при этом будет рассматриваться аналог уравнения (1) в произвольных упорядоченных векторных пространствах.

§ 1. Описание множеств решений

Введем необходимые понятия и обозначения, придерживаясь в основном терминологии, принятой в [12, 13].

Всюду в дальнейшем под F будем понимать некоторое упорядоченное векторное пространство над R^1 , а под E — некоторую векторную решетку. Отношение порядка в E и F (и других упорядоченных и предупорядоченных пространствах, вводимых ниже) будем обозначать одним и тем же символом \leq . Как обычно, E_+ и F_+ — конусы положительных элементов в E и F . Если $x, y \in E$, то через $x \vee y$ и $x \wedge y$ будем обозначать точные верхнюю и нижнюю границы элементов x и y , а через x^+ и x^- — положительную и отрицательную части x , $|x| = x^+ + x^-$ — модуль элемента x . Если F_1 — некоторое другое упорядоченное векторное пространство, то пространство $L(F_1, F)$ линейных операторов из F_1 в F будем считать предупорядоченным с помощью конуса $L^+(F_1, F)$ монотонных операторов. Если $a, b \in F$, $a \leq b$ ($A, B \in L(F_1, F)$, $A \leq B$), то, как обычно, множество $[a, b] = \{c \in F \mid a \leq c \leq b\}$ ($[A, B] = \{C \in L(F_1, F) \mid A \leq C \leq B\}$) — интервал в $F(L(F_1, F))$ и $I(F) = (I(L(F_1, F)))$ — множество всех непустых интервалов в $F(L(F_1, F))$.

Через $\Lambda(F) \in I(L(F, F))$ будем обозначать множество мультипликаторов в F , т. е. $\Lambda(F) = [O_F, I_F]$, где O_F и I_F — нулевой и тождественный операторы в F . Если $F_1, F_2 \subseteq F$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in R^1$, то, как обычно, $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$.

Уравнение (1) будем рассматривать в случае, когда $\mathbb{A} = [A, B] \in I(L(E, F))$ и $\mathbb{B} = [a, b] \in I(F)$. При этом если для $x \in E$ обозначить $[A, B]x = \{Cx \mid C \in [A, B]\}$, то множества \mathcal{A}_i , $i = \overline{1, 4}$, представимы в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{x \in E \mid ([A, B]x) \cap [a, b] \neq \emptyset\}, & \mathcal{A}_2 &= \{x \in E \mid [A, B]x \subseteq [a, b]\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{x \in E \mid [A, B]x \supseteq [a, b]\}, & \mathcal{A}_4 &= \{x \in E \mid [A, B]x = [a, b]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидны следующие соотношения между \mathcal{A}_i , $i = \overline{1, 4}$:

$$\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \supseteq \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3.$$

Введем понятия, которые понадобятся при описании этих множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что упорядоченное векторное пространство F обладает свойством C (сжимаемости), если для любых $x, y \in F_+$, $x \leq y$, существует мультипликатор $\alpha \in \Lambda(F)$, переводящий y в x , т. е. такой, что $\alpha y = x$. Класс упорядоченных векторных пространств, обладающих свойством C , обозначим через $\mathcal{X}(C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что векторная решетка E обладает свойством D (дизъюнктности), если для любых $x, y \in E_+$, $x \wedge y = 0$, существует мультипликатор $\alpha \in \Lambda(E)$, такой что $\alpha x = x$ и $\alpha y = 0$. Класс векторных решеток, обладающих свойством D , обозначим через $\mathcal{X}(D)$.

Характеризация классов $\mathcal{X}(C)$ и $\mathcal{X}(D)$ содержится в следующих леммах.

Лемма 1. Для любого упорядоченного векторного пространства эквивалентны следующие условия:

- (a) $F \in \mathcal{X}(C)$;
- (b) для любого $x \in F_+$ выполнено равенство $\Lambda(F)x = [0, x]$;
- (c) для любого упорядоченного векторного пространства F_1 и любых $[A, B] \in I(L(F_1, F))$, $y \in F_{1+}$ верно равенство $[A, B]y = [Ay, By]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (b) и (a) следует непосредственно из определения 1.

Покажем эквивалентность утверждений (a) и (c). Пусть $F \in \mathcal{X}(C)$, $[A, B] \in I(L(F_1, F))$ и $y \in F_{1+}$. Включение $[A, B]y \subseteq [Ay, By]$ очевидно.

Пусть $x \in [Ay, By]$. Тогда $0 \leq x - Ay \leq (B - A)y$ и, следовательно, существует $\alpha \in \Lambda(F)$ такое, что $\alpha(B - A)y = x - Ay$. Полагая $C = A + \alpha(B - A)$, получим $C \in [A, B]$ и $Cy = x$, т. е. $x \in [A, B]y$. Следовательно, $[Ay, By] \subseteq [A, B]y$ и (с) выполняется. Пусть теперь для F выполняется условие (с). Положим $F_1 = F$, $A = O_F$, $B = I_F$. Тогда для любого $x \in F_+$ справедливо равенство $[O_F, I_F]x = [0, x]$, поэтому $F \in \mathcal{X}(C)$.

Лемма 2. Для любой векторной решетки E эквивалентны следующие условия:

- (а) $E \in \mathcal{X}(D)$;
- (б) для любого $x \in E$ существует $\alpha \in \Lambda(E)$ такое, что выполнено равенство $\alpha x = x^+$;
- (с) для любого упорядоченного векторного пространства F и любых $[A, B] \in I(L(E, F))$, $x \in E$ верно равенство $[A, B]x = [A, B]x^+ - [A, B]x^-$;
- (д) для любого $x \in E$ верно равенство $\Lambda(E)x = \Lambda(E)x^+ - \Lambda(E)x^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (б) и (а) получается непосредственно из определения 2.

Покажем, что из (б) следует (с). Пусть F — упорядоченное векторное пространство, $[A, B] \in I(L(E, F))$ и $x \in E$. Включение $[A, B]x \subseteq [A, B]x^+ - [A, B]x^-$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $y \in [A, B]x^+ - [A, B]x^-$. Тогда $y = C_1x^+ - C_2x^-$ для некоторых $C_1, C_2 \in [A, B]$. Возьмем $\alpha \in \Lambda(E)$ такое, что $\alpha x = x^+$. Полагая $C = C_1\alpha + C_2(I_E - \alpha)$, получим $Cx = y$, и $C \in [A, B]$, т. е. $y \in [A, B]x$.

Для доказательства того, что из (с) следует (д), достаточно положить в условии (с) $F = E$, $A = O_E$, $B = I_E$.

То, что из (д) следует (б), очевидно, так как всегда $x^+ \in \Lambda(E)x^+ - \Lambda(E)x^-$. Лемма доказана.

Интересно отметить, что в определении класса $\mathcal{X}(D)$ можно обойтись без явного использования понятий верхней и нижней граней, как видно из следующего предложения.

Предложение 1. Для любого упорядоченного векторного пространства F следующие условия эквивалентны:

- (а) F — векторная решетка и $F \in \mathcal{X}(D)$;
- (б) для любого $x \in F$ существуют $x_1, x_2 \in F_+$ и $\alpha \in \Lambda(F)$ такие, что $x = x_1 - x_2$, $\alpha x_1 = x_1$, $\alpha x_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что условие (а) влечет (б), следует непосредственно из определения класса $\mathcal{X}(D)$.

Покажем обратное. Пусть F удовлетворяет условию (б). Известно [12], что если для любого $x \in F$ существует $x \vee 0$, то F — векторная решетка. Возьмем $x \in F$, $x_1, x_2 \in F_+$ и $\alpha \in \Lambda(F)$ такие, что $x = x_1 - x_2$, $\alpha x_1 = x_1$ и $\alpha x_2 = 0$. Покажем, что $x_1 = x \vee 0$. Действительно, очевидно, $x_1 \geq 0$, $x_1 \geq x$, и если $y \geq 0$, $y \geq x$, то $y \geq \alpha y \geq \alpha x = \alpha x_1 - \alpha x_2 = x_1$. Следовательно, $x_1 = x \vee 0$, и F — векторная решетка. Кроме того, из равенства $x_1 = x \vee 0 = x^+$ следует, что $\alpha x = x^+$ и выполняется условие (б) леммы 2. Поэтому $F \in \mathcal{X}(D)$.

Как известно, в любой векторной решетке сумма двух интервалов будет интервалом. Оказывается, это утверждение верно и в упорядоченном векторном пространстве, обладающем свойством С.

Лемма 3. Пусть $F \in \mathcal{X}(C)$, $[a, b], [c, d] \in I(F)$. Тогда $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $[a, b] + [c, d] \subseteq [a + c, b + d]$ очевидно. Покажем обратное. Пусть $x \in [a + c, b + d]$. Тогда $0 \leq x - (a + c) \leq (b + d) - (a + c)$ и существует $\alpha \in \Lambda(F)$ такое, что $\alpha(b + d - a - c) = x - a - c$. Обозначим $x_1 = a + \alpha(b - a)$, $x_2 = c + \alpha(d - c)$. Тогда очевидно, что $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$ и $x_1 + x_2 = x$, т. е. $x \in [a, b] + [c, d]$.

Важность введенных классов $\mathcal{X}(C)$ и $\mathcal{X}(D)$ объясняется тем, что для них верна следующая теорема, позволяющая получить описание множеств \mathcal{A}_i , $i = \overline{1, 4}$.

Теорема 1. Пусть $E \in \mathcal{X}(D)$, $F \in \mathcal{X}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$ и $x \in E$. Тогда $[A, B]x \in I(F)$ и верна формула

$$[A, B]x = [Ax^+ - Bx^-, Bx^+ - Ax^-]. \quad (3)$$

Доказательство получается применением утверждений (с) лемм 1, 2 и леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $E = R^n$, $F = R^m$ с покоординатными упорядочениями, данная теорема повторяет, по существу, известную теорему Оэртли — Прагора [14].

Непосредственно из теоремы 1 получаем описание \mathcal{A}_i , $i = \overline{2, 4}$.

Теорема 2. Пусть $E \in \mathcal{X}(D)$, $F \in \mathcal{X}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$ и $[a, b] \in I(F)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, Ax_1 - Bx_2 \geq a, Bx_1 - Ax_2 \leq b\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1 \wedge x_2 = 0, Ax_1 - Bx_2 \leq a, Bx_1 - Ax_2 \geq b\}, \\ \mathcal{A}_4 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1 \wedge x_2 = 0, Ax_1 - Bx_2 \leq a, Bx_1 - Ax_2 = b\}. \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим множества, стоящие в правой части формул (4), через $\overline{\mathcal{A}}_i$, $i = \overline{2, 4}$. Покажем, что $\mathcal{A}_i = \overline{\mathcal{A}}_i$. Включение $\mathcal{A}_i \subseteq \overline{\mathcal{A}}_i$ для $i = \overline{2, 4}$ получается из представления любого $x \in E$ в виде $x = x^+ - x^-$, формулы (3) и такого очевидного факта: если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in I(F)$, то $[a_1, b_1] \subseteq [a_2, b_2]$ тогда и только тогда, когда $a_1 \geq a_2$ и $b_1 \leq b_2$. Обратное включение для $i = 3, 4$ следует из того, что если $x = x_1 - x_2$ и $x_1 \wedge x_2 = 0$, то $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$ и опять применима формула (3). Покажем, что $\overline{\mathcal{A}}_2 \subseteq \mathcal{A}_2$. Пусть $x = x_1 - x_2 \in \overline{\mathcal{A}}_2$. Обозначим $\bar{x}_1 = x_1 - x_1 \wedge x_2$, $\bar{x}_2 = x_2 - x_1 \wedge x_2$. Очевидно, что $x = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = 0$, следовательно, $\bar{x}_1 = x^+$, $\bar{x}_2 = x^-$ и, кроме того, $A\bar{x}_1 - B\bar{x}_2 = Ax_1 - Bx_2 + (B - A)x_1 \wedge x_2 \geq a$, $B\bar{x}_1 - A\bar{x}_2 = Bx_1 - Ax_2 - (B - A)x_1 \wedge x_2 \leq b$, так как $B - A \geq 0$ и $x_1 \wedge x_2 \geq 0$. Поэтому по формуле (3) $[A, B]x \subseteq [a, b]$ и $x \in \mathcal{A}_2$. Теорема доказана.

Для того чтобы получить аналогичное описание множества \mathcal{A}_1 , по крайней мере для случая, когда $E \in \mathcal{X}(D)$ и $F \in \mathcal{X}(C)$, необходимо в силу теоремы 1 иметь некоторый критерий непустоты пересечения интервалов в F . Легко заметить, что если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in I(F)$ и $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$, то $a_1 \leq b_2$ и $a_2 \leq b_1$. Выделим класс упорядоченных векторных пространств, для которых верно и обратное, т. е. если $a_1 \leq b_2$ и $a_2 \leq b_1$, то $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$.

Введем отношение \prec на непустых подмножествах F : если $F_1, F_2 \subseteq F$, то $F_1 \prec F_2$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$ для любых $x \in F_1$, $y \in F_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что упорядоченное векторное пространство F является K_0 -пространством, если для любых непустых конечных подмножеств $F_1, F_2 \subseteq F$ выполняется условие

$$F_1 \prec F_2 \rightarrow (\exists \alpha \in F) F_1 \prec \{\alpha\} \prec F_2, \quad (5)$$

т. е. если $F_1 \prec F_2$, то существует элемент $\alpha \in F$, являющийся верхней границей для F_1 и нижней границей для F_2 .

Заметим, что с помощью условия (5) можно определить и другие хорошо известные классы упорядоченных пространств. Например, если это условие выполняется для любых непустых подмножеств, из которых хотя бы одно конечно, то получаем определение условной векторной решетки, а если F — векторная решетка и условие (5) выполнено для любых непустых F_1, F_2 (из которых одно не более чем счетно), то получаем определение K -пространства (K_σ -пространства).

Лемма 4. Для того чтобы упорядоченное векторное пространство F было K_0 -пространством, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

(а) для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ если $a_i \leq b_j$, $i, j = 1, 2$, то существует элемент $c \in F$ такой, что $a_i \leq c \leq b_j$ (т. е. выполняется условие (5) для двухэлементных F_1, F_2);

(б) для любых двух интервалов $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in I(F)$ выполняется следующий критерий непустоты их пересечения: $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leq b_2$, $a_2 \leq b_1$.

Доказательство следует непосредственно из определения 3.

Очевидно, класс K_0 -пространств содержит класс векторных решеток, а также замкнут относительно прямых произведений, прямых сумм и подпространств, пересечение которых с конусом положительных элементов нормально содержится в нем.

С помощью леммы 4 для K_0 -пространств получаем описание множества \mathcal{A}_1 .

Теорема 3. Если $E \in \mathcal{X}(D)$, $F \in \mathcal{X}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$, $[a, b] \in I(F)$ и F является K_0 -пространством, то

$$\mathcal{A}_1 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \wedge x_2 = 0, Ax_1 - Bx_2 \leq b, Bx_1 - Ax_2 \geq a\}. \quad (6)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

В случае, когда векторное пространство F является векторной решеткой, используя центрально-симметричное представление интервалов, получаем следующее описание множеств \mathcal{A}_i .

Теорема 4. Пусть $E \in \mathcal{X}(D)$, $F \in \mathcal{X}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$, $[a, b] \in I(F)$ и F является векторной решеткой. Положим

$$C = \frac{1}{2}(A + B), \quad D = \frac{1}{2}(B - A), \quad c = \frac{1}{2}(a + b), \quad d = \frac{1}{2}(b - a).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{x \mid D|x| + d \geq |Cx - c|\}, & \mathcal{A}_2 &= \{x \mid d \geq D|x| + |Cx - c|\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{x \mid D|x| \geq d + |Cx - c|\}, & \mathcal{A}_4 &= \{x \mid Cx = c, D|x| = d\}. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (7) для \mathcal{A}_1 (для остальных \mathcal{A}_i доказательство аналогично). Так как F — векторная решетка, F является и K_0 -пространством, поэтому \mathcal{A}_1 представимо в виде (6). При этом, используя равенства $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$, получаем

$$\begin{aligned} Ax^+ - Bx^- &= \frac{1}{2}(A + B)x - \frac{1}{2}(B - A)|x| = Cx - D|x|, \\ Bx^+ - Ax^- &= \frac{1}{2}(A + B)x + \frac{1}{2}(B - A)|x| = Cx + D|x|. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, как уже отмечалось, если $x = x_1 - x_2$ и $x_1 \wedge x_2 = 0$, то $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$, поэтому из (6) следует, что $x \in \mathcal{A}_1$ тогда и только тогда, когда

$$Ax^+ - Bx^- \leq b, \quad Bx^+ - Ax^- \geq a. \quad (9)$$

Подставляя в эти формулы равенства (8) и учитывая, что $a = c - d$, $b = c + d$, получим, что (9) эквивалентно $Cx - D|x| \leq c + d$, $Cx + D|x| \geq c - d$, или

$$D|x| + d \geq Cx - c \geq -(D|x| + d). \quad (10)$$

Так как F — векторная решетка, в ней для любых элементов $y, z \in F$ неравенство $-z \leq y \leq z$ эквивалентно неравенству $|y| \leq z$, поэтому (10) эквивалентно $D|x| + d \geq |Cx - c|$, что и требовалось доказать.

Отметим, что представление \mathcal{A}_4 в виде (7) верно и без предположения о том, что F — векторная решетка.

Для случая $E = R^n$, $F = R^m$ с покоординатными упорядочениями описание множества \mathcal{A}_1 в виде (7) получено в работе [14], а описание \mathcal{A}_2 как в виде (7), так и в виде (8) — в работе [8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Нелинейное условие $x_1 \wedge x_2 = 0$, присутствующее в описании множеств \mathcal{A}_i , $i = 1, 3, 4$, в совокупности с ограничением положительности $x_1, x_2 \in E_+$, в ряде случаев билинейно.

В частности, если решетка E архимедова, то, используя вложение E в качестве подрешетки в пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций на Q со значениями в $R^1 \cup \{+\infty, -\infty\}$ для некоторого экстремально несвязного компакта Q и используя операцию произведения функций в $C_\infty(Q)$, получаем, что существует симметричное билинейное отображение $\varphi: E \times E \rightarrow C_\infty(Q)$ такое, что для $x_1, x_2 \in E_+$ условия $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\varphi(x_1, x_2) = 0$ эквивалентны. Если, кроме того, E имеет конечную размерность n , то, как известно, E алгебраически и структурно изоморфно R^n с покоординатным упорядочением, и, следовательно, в качестве φ можно взять скалярное произведение. Более точно, существует симметричное билинейное отображение $\varphi: E \times E \rightarrow R^1$ такое, что порожденная им квадратичная форма положительно определена и для $x_1, x_2 \in E_+$ условия $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\varphi(x_1, x_2) = 0$ эквивалентны. Таким образом, для случая, когда $E = R^m$ и $F = R^n$ с покоординатным упорядочением, получаем следующее описание множеств \mathcal{A}_i .

Следствие. Пусть $[A, B] \in I(R^{m \times n})$, $[a, b] \in I(R^m)$. Тогда

$$\mathcal{A}_1 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1, x_2) = 0, Ax_1 - Bx_2 \leq b, Bx_1 - Ax_2 \geq a\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, Ax_1 - Bx_2 \geq a, Bx_1 - Ax_2 \leq b\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1, x_2) = 0, Ax_1 - Bx_2 \leq a, Bx_1 - Ax_2 \geq b\},$$

$$\mathcal{A}_4 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1, x_2) = 0, Ax_1 - Bx_2 = a, Bx_1 - Ax_2 = b\},$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в R^n .

§ 2. Исследование свойств классов $\mathcal{X}(C)$ и $\mathcal{X}(D)$

Займемся выяснением следующего вопроса: какие из известных классов упорядоченных векторных пространств обладают свойствами C или D ? Отметим сначала некоторые структурные свойства классов $\mathcal{X}(C)$ и $\mathcal{X}(D)$, показывающие, в частности, что они достаточно обширны. Используемые при этом понятия и конструкции общеприняты [12].

Предложение 2. (а) Классы $\mathcal{X}(C)$ и $\mathcal{X}(D)$ замкнуты относительно прямых произведений и прямых сумм.

(б) Если $E \in \mathcal{X}(D)$ и E_1 — нормальное подпространство в E , то $E_1 \in \mathcal{X}(D)$.

(в) Если $F \in \mathcal{X}(C)$, F_1 — подпространство F такое, что конус $F_1 \cap F_+$ нормально содержится в F_+ , то $F_1 \in \mathcal{X}(C)$.

(г) Если $E \in \mathcal{X}(D)$, E_0 — линейно упорядоченное векторное пространство и $E_0 \circ E$ — лексикографическое произведение E_0 на E [15], то $E_0 \circ E \in \mathcal{X}(D)$.

(е) Если $F \in \mathcal{X}(C)$, то $R^1 \circ F \in \mathcal{X}(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) следует непосредственно из определений.

Для доказательства (б) достаточно заметить, что если E_1 — нормальное подпространство в E , а $\alpha \in \Lambda(E)$, то $\alpha(E_1) \subseteq E_1$ и, следовательно, сужение α на E_1 принадлежит $\Lambda(E_1)$.

Пусть $F \in \mathcal{X}(C)$, F_1 — подпространство F и $F_{1+} = F_1 \cap F_+$ нормально содержится в F_+ . Обозначим через $P : F \rightarrow F_1$ любой проектор F на F_1 , и для $\alpha \in \Lambda(E)$ положим $\alpha_P = P\alpha$. Тогда легко показать, что $\alpha_P(F) \subseteq F_1$ и $\alpha_P x = \alpha x$ для любого $x \in F_{1+}$. Поэтому сужение α_P на F_1 принадлежит $\Lambda(F_1)$, и если $x, y \in F_{1+}$, $x \perp y$, и $\alpha \in \Lambda(E)$ такое, что $\alpha y = x$, то $\alpha_P y = \alpha y = x$. Следовательно, $F_1 \in \mathcal{X}(C)$.

Докажем теперь (d). По определению лексикографического произведения $E_0 \circ E = \{(x_0, x) \mid x_0 \in E_0, x \in E\}$ и $(E_0 \circ E)_+ = \{(x_0, x) \mid x_0 > 0 \vee (x_0 = 0 \& x \geq 0)\}$. В силу леммы 2 достаточно показать, что для любого $z \in E_0 \circ E$ найдется такое $\alpha \in \Lambda(E_0 \circ E)$, что $\alpha z = z^+$. Возьмем $z = (x_0, x) \in E_0 \circ E$. Так как E_0 линейно упорядочено, для x_0 имеем $(x_0 > 0) \vee (x_0 < 0) \vee (x_0 = 0)$. Если $x_0 > 0$, то $z^+ = z$ и $\alpha = I$. Если $x_0 < 0$, то $z^+ = 0$ и $\alpha = 0$. Если $x_0 = 0$, то $z^+ = (0, x^+)$ и, так как $E \in \mathcal{X}(D)$, существует $\alpha_0 \in \Lambda(E)$ такое, что $\alpha_0 x = x^+$. В этом случае легко показать, что, положив $\alpha : E_0 \circ E \rightarrow E_0 \circ E$, $\alpha(y_0, y) = ((1/2)y_0, \alpha_0 y)$, получим $\alpha \in \Lambda(E_0 \circ E)$, и при этом $\alpha z = z^+$. Следовательно, $E_0 \circ E \in \mathcal{X}(D)$.

Докажем (e). Возьмем $F \in \mathcal{X}(C)$, $z_1, z_2 \in (R^1 \circ F)_+$, $z_1 \leq z_2$. Надо показать, что найдется $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ такое, что $\alpha z_2 = z_1$. Пусть $z_i = (\lambda_i, x_i)$, $\lambda_i \in R^1$, $x_i \in F$, $i = 1, 2$. Тогда $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Рассмотрим отдельно три случая: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то $0 \leq x_1 \leq x_2$ и, так как $F \in \mathcal{X}(C)$, существует $\alpha_0 \in \Lambda(F)$ такое, что $\alpha_0 x_2 = x_1$. Тогда, полагая $\alpha(\lambda, x) = ((1/2)\lambda, \alpha_0 x)$ для всех $(\lambda, x) \in R^1 \circ F$, получим $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ и $\alpha z_2 = z_1$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то $x_1 \leq x_2$. Положим $\alpha(\lambda, x) = (\lambda, x + \frac{\lambda}{\lambda_2}(x_1 - x_2))$ для $(\lambda, x) \in R^1 \circ F$. Нетрудно показать, что в этом случае $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ и $\alpha z_2 = z_1$.

Если $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, то для $(\lambda, x) \in R^1 \circ F$ положим $\alpha(\lambda, x) = \frac{\lambda}{\lambda_2} z_1$. При этом также легко показать, что $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ и $\alpha z_2 = z_1$.

Итак, в любом случае найдется $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ такое, что $\alpha z_2 = z_1$ и, следовательно, $R^1 \circ F \in \mathcal{X}(C)$. Предложение 2 доказано.

С помощью предложения 2, отпрываясь от данных пространств, принадлежащих классам $\mathcal{X}(C)$ или $\mathcal{X}(D)$, можно получить новые пространства из этих же классов.

Ответом на сформулированный в начале § 2 вопрос является следующая теорема.

Теорема 5. Класс $\mathcal{X}(C) \cap \mathcal{X}(D)$ содержит в себе

(a) все конечномерные векторные решетки;

(b) все векторные решетки, являющиеся K_σ -пространствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) По теореме XV.4 из [15] любая конечномерная векторная решетка E либо является прямой суммой векторных решеток меньшей размерности, либо лексикографическим произведением $E = R^1 \circ E_0$ множества вещественных чисел R^1 и векторной решетки E_0 на единицу меньшей размерности. Так как, очевидно, $R^1 \in \mathcal{X}(C) \cap \mathcal{X}(D)$, требуемое утверждение получается индукцией по размерности с помощью предложения 2.

Докажем (b). Пусть E — K_σ -пространство. Покажем, что $E \in \mathcal{X}(D)$. Возьмем $x, y \in E_+$ такие, что $x \wedge y = 0$. Рассмотрим главную компоненту E_x , порожденную x [13]:

$$E_x = \{z \in E \mid \forall u \in E \ |u| \wedge x = 0 \rightarrow |u| \wedge |z| = 0\}.$$

По теореме IV.3.4 из [13] для любого $z \in E$ существует его ортогональная проекция $\text{Pr } z$ на E_x и для $z \in E_+$

$$\text{Pr } z = \sup_n (z \wedge nx). \quad (11)$$

При этом оператор Pr будет линейным. Из (11) ясно, что $0 \leq \text{Pr} z \leq z$ для $z \in E_+$, поэтому $\text{Pr} \in \Lambda(E)$. Кроме того, очевидно, что $\text{Pr} x = x$, $\text{Pr} y = 0$ и, следовательно, $E \in \mathcal{X}(D)$.

Покажем теперь, что $E \in \mathcal{X}(C)$. Возьмем $x, y \in E_+$, $y \leq x$. Вновь рассмотрим главную компоненту E_x и оператор ортогонального проектирования $\text{Pr} : E \rightarrow E_x$. Пространство E_x , будучи нормальным подпространством E , само будет K_σ -пространством и по теореме IV.3.6 из [13] x будет единицей в E_x (т. е. для любого $z \in E_x$ если $z > 0$, то $x \wedge z > 0$). Кроме того, очевидно, что $y \in E_x$. Далее, по теореме V.8.1 из [13] в E_x можно определить операцию умножения элементов (некоторую функцию $\varphi : (E_x \times E_x) \rightarrow E_x$, вообще говоря, не всюду определенную) так, что E_x превращается в обобщенное полуупорядоченное коммутативное кольцо с единицей умножения (определение V.8.2 из [13]), в котором x будет совпадать с единицей умножения, т. е. для любого $z \in E_x$ значения $\varphi(z, x)$ и $\varphi(x, z)$ определены и $\varphi(z, x) = \varphi(x, z) = z$. При этом из определения обобщенного полуупорядоченного коммутативного кольца следует, что для любого $z \in E_x$ значение $\varphi(y, z)$ определено, так как $0 \leq y \leq x$ и $0 \leq \varphi(y, z) \leq \varphi(x, z) = z$, если $z \geq 0$. Более того, из этого же определения следует, что функция $\varphi(y, \cdot) : E_x \rightarrow E_x$ (как функция второго аргумента) является линейным оператором на E_x . Положим теперь $\alpha z = \varphi(y, \text{Pr} z)$ для любого $z \in E$. Тогда $\alpha z = \varphi(y, \text{Pr} z) \geq 0$ для $z \in E_+$, так как $\text{Pr} z \geq 0$, $\alpha z = \varphi(y, \text{Pr} z) \leq \text{Pr} z \leq z$ и $\alpha x = \varphi(y, \text{Pr} x) = \varphi(y, x) = y$, т. е. $\alpha \in \Lambda(E)$ и $\alpha x = y$. Следовательно, $E \in \mathcal{X}(C)$. Теорема доказана.

Приведем примеры упорядоченных векторных пространств, не обладающих свойствами C и D .

ПРИМЕР 1. Пусть F_0 — 3-мерное векторное пространство с базисом a_1, a_2, a_3 . Упорядочим его с помощью конуса

$$F_{0+} = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \mid \alpha_i \in R^1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, 3}, \alpha_1 + \alpha_2 \geq \alpha_3\}.$$

Пусть E_0 — 3-мерная векторная решетка с координатным упорядочением, соответствующим базису $b_1, b_2, b_3 \in E_0$, т. е. $E_{0+} = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \mid \alpha_i \in R^1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, 3}\}$. Покажем, что для пары F_0, E_0 теорема 1 неверна. Возьмем $A_0 \in L(E_0, F_0)$, определяемый на базисе E_0 следующим образом: $A_0 b_1 = a_1$, $A_0 b_2 = a_2$, $A_0 b_3 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + a_3$. Очевидно, что A_0 — положительный оператор, поэтому $[\mathbb{O}, A_0] \in I(L(E_0, F_0))$. При этом $A \in [\mathbb{O}, A_0]$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1/2]$ такие, что $A b_1 = \lambda_1 a_1$, $A b_2 = \lambda_2 a_2$, $A b_3 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + (\beta_1 + \beta_2) a_3$. Возьмем $x \in E_{0+}$, $x = 2b_1 + 2b_3$. Очевидно, что $y = a_1 + a_2 \leq A_0 x = 3a_1 + a_2 + 2a_3$ и $y \geq 0$ в F_0 , т. е. $y \in [0, A_0 x]$. В то же время, если бы для некоторого $A \in [\mathbb{O}, A_0]$ выполнялось $Ax = y$, то $2(\lambda_1 + \beta_1)a_1 + 2\beta_2 a_2 + 2(\beta_1 + \beta_2)a_3 = a_1 + a_2$ и, следовательно, $\beta_2 = 1/2$, $\beta_1 = -\beta_2 = -1/2 \notin [0, 1/2]$. Поэтому $y \notin [0, A_0 x]$ и $[\mathbb{O}, A_0]x \neq [0, A_0 x]$, т. е. формула (3) в этом случае неверна. В частности, отсюда следует, что $F_0 \notin \mathcal{X}(C)$.

Отметим также, что F_0 не является и K_0 -пространством.

ПРИМЕР 2. Пусть F_1 — 2-мерное векторное пространство с базисом e_1, e_2 и $F_{1+} = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid (\alpha_1 = \alpha_2 = 0) \vee (\alpha_1 > 0 \& \alpha_2 > 0)\}$. Нетрудно показать, что F_1 является K_0 -пространством и $F_1 \in \mathcal{X}(C)$, а так как F_1 не является векторной решеткой, то $F_1 \notin \mathcal{X}(D)$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим векторную решетку $C[0, 1]$ непрерывных функций из отрезка $[0, 1]$ в R^1 с естественным упорядочением, т. е. считаем $f_1 \leq f_2$, если $f_1(t) \leq f_2(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Известно [12, с. 181], что каждый мультипликатор $\alpha \in \Lambda(C[0, 1])$ представим как оператор умножения на некоторую непрерывную функцию из $[0, 1]$ в $[0, 1]$, т. е. $\alpha \in \Lambda(C[0, 1])$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

φ непрерывная и такая, что $(\alpha f)(t) = \varphi(t)f(t)$ для любых $f \in C[0, 1]$ и $t \in [0, 1]$. Покажем, что $C[0, 1] \notin \mathcal{X}(C) \cup \mathcal{X}(D)$. Действительно, возьмем $f_1(t) = 1 - 2t$ при $t \in [0, 1/2]$, $f_1(t) = 0$ при $t \in (1/2, 1]$, $f_2(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2]$, $f_2(t) = 2t - 1$ при $t \in (1/2, 1]$. Ясно, что $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ и $f_1 \wedge f_2 = 0$. Если $\alpha \in \Lambda(C[0, 1])$ такой, что $\alpha f_1 = f_1$ и $\alpha f_2 = 0$, то для соответствующей α функции φ получаем $\varphi(t)f_1(t) = f_1(t)$, $\varphi(t)f_2(t) = 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Но тогда $\varphi(t) = 1$ при $t \in [0, 1/2)$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \in (1/2, 1]$. Поэтому φ не может быть непрерывной и, следовательно, $C[0, 1] \notin \mathcal{X}(D)$. Далее, возьмем $f_3(t) = t^2 \sin^2(1/t)$ при $t \in (0, 1]$, $f_3(0) = 0$ и $f_4(t) = t^2$ при $t \in [0, 1]$. Тогда $0 \leq f_3 \leq f_4$, и если $\alpha f_4 = f_3$ для некоторого $\alpha \in \Lambda(C[0, 1])$, то для соответствующей α функции φ получаем $\varphi(t)f_4(t) = f_3(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Но тогда $\varphi(t) = \sin^2(1/t)$ при $t \in (0, 1]$ и φ не может быть непрерывной в точке $t = 0$. Следовательно, $C[0, 1] \notin \mathcal{X}(C)$.

Из приведенных примеров видно, что произвольное упорядоченное векторное пространство может не обладать свойством C и не быть K_0 -пространством; существуют упорядоченные векторные пространства, обладающие свойством C и являющиеся K_0 -пространствами, которые не являются векторными решетками; архимедова векторная решетка может не обладать ни свойством C , ни свойством D .

§ 3. Алгоритмическая сложность

Рассмотрим задачу разрешимости уравнения (1), т. е. задачу выяснения непустоты множеств \mathcal{R}_i , $i = \overline{1, 4}$, с точки зрения вычислительной сложности [16]. При этом ограничимся случаем $E = R^m$, $F = R^n$ с покоординатными упорядочениями и целочисленными матрицами A, B и векторами a, b . Точнее, при фиксированном $i = \overline{1, 4}$ под задачей $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ будет пониматься следующая

задача \mathcal{R}_i . Заданы целочисленные $m \times n$ -матрицы A и B , $A \leq B$, и целочисленные m -мерные векторы a и b , $a \leq b$. Существует ли n -мерный вещественный вектор x такой, что $x \in \mathcal{R}_i$?

Легко заметить, что для любого $i = \overline{1, 4}$ задача $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ принадлежит классу \mathcal{NP} [16]. Действительно, недетерминированный алгоритм, решающий задачу $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ за полиномиальное время, строится следующим образом. Сначала «угадываются» знаки координат вектора x . Далее, при фиксированных знаках по теореме 4 задача $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ превращается в задачу разрешимости системы линейных неравенств, которая решается за полиномиальное время [17]. Кроме того, так как по теореме 2 множество \mathcal{R}_2 допускает описание в виде системы линейных неравенств, задача $\mathcal{R}_2 \neq \emptyset$ принадлежит классу \mathcal{P} (разрешима за полиномиальное время). Относительно задач $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ для $i = 1, 3, 4$ верна следующая

Теорема 6. Задачи $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ для $i = 1, 3, 4$ \mathcal{NP} -полные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что к задачам $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ полиномиально сводится следующая \mathcal{NP} -полная задача РАЗБИЕНИЕ [16].

задача РАЗБИЕНИЕ. Пусть заданы q положительных целых чисел s_1, \dots, s_q ($q \geq 1$). Можно ли так подобрать знаки $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, q}$, для s_i , что $\varepsilon_1 s_1 + \dots + \varepsilon_q s_q = 0$, т. е. будет ли непустым множество

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)^T \mid \sum_{i=1}^q \varepsilon_i s_i = 0, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, q} \right\},$$

где $(\cdot)^T$ означает транспонирование?

При сведении задач будем пользоваться описанием \mathcal{R}_i , полученным в теореме 4, и обычными матрично-векторными обозначениями.

В частности, пусть \mathbb{O}_q — нулевая $q \times q$ -матрица, E_q — единичная $q \times q$ -матрица, $0_q = (0, \dots, 0)^T$, $e_q = (1, \dots, 1)^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)^T$, $s = (s_1, \dots, s_q)^T$ — q -мерные векторы-столбцы. Отметим также, что модулем вектора x в рассматриваемом случае (конечномерное векторное пространство с покоординатным упорядочением) будет вектор, составленный из модулей координат вектора x .

Покажем, что задача РАЗБИЕНИЕ сводится к задаче $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$.

Пусть задан q -мерный вектор $s = (s_1, \dots, s_q)^T$. Положим $m = 2q + 1$, $n = q$ и определим $(2q + 1) \times q$ -матрицы C, D и $(2q + 1)$ -мерные векторы d, c следующим образом:

$$D = \begin{pmatrix} 0_q^T \\ E_q \\ \mathbb{O}_q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} s^T \\ \mathbb{O}_q \\ E_q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_q \\ e_q \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ e_q \\ 0_q \end{pmatrix},$$

при этом $A = C - D$, $B = C + D$, $a = c - d$, $b = c + d$ целочисленные, и очевидно, что $A \leq B$, $a \leq b$. Покажем, что для так определенных A, B, a, b множество \mathcal{R}_1 совпадает с \mathcal{R}_0 .

Действительно, по теореме 4 $x \in \mathcal{R}_1$ тогда и только тогда, когда $D|x| + d \geq |Cx - c|$, что в данном случае эквивалентно системе неравенств

$$0 \geq |s^T x|, \quad |x| \geq e_q, \quad e_q \geq |x|,$$

или $|x| = e_q$, $s^T x = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{R}_0$. Поскольку очевидно, что матрицы A, B и векторы a, b строятся по вектору s за полиномиальное время, задача РАЗБИЕНИЕ полиномиально сводится к задаче $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$.

То, что задача РАЗБИЕНИЕ сводится к задаче $\mathcal{R}_4 \neq \emptyset$, доказывается аналогично, если положить $m = q + 1$, $n = q$,

$$D = \begin{pmatrix} 0_q^T \\ E_q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} s^T \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ e_q \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу $\mathcal{R}_3 \neq \emptyset$. Положим $m = 3q + 1$, $n = 2q$ и определим $(3q + 1) \times 2q$ -матрицы C, D и $(3q + 1)$ -мерные векторы c, d следующим образом:

$$D = \begin{pmatrix} 0_q^T & 0_q^T \\ \mathbb{O}_q & E_q \\ \mathbb{O}_q & E_q \\ E_q & \mathbb{O}_q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} s^T & 0_q^T \\ \mathbb{O}_q & 2E_q \\ E_q & \mathbb{O}_q \\ \mathbb{O}_q & E_q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ e_q \\ 0_q \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e_q \\ 0_q \\ 0_q \end{pmatrix},$$

при этом, как и раньше, $A = C - D$, $B = C + D$, $a = c - d$, $b = c + d$. Решения соответствующей интервальной задачи будем записывать в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где x и y — q -мерные векторы-столбцы. Тогда по теореме

4 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_3$ эквивалентно

$$D \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix} \geq d + \left| C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c \right|,$$

или следующей системе неравенств:

$$0 \geq |s^T x|, \quad |y| \geq e_q + |2y - 2e_q|, \quad |y| \geq |x|, \quad |x| \geq |y|,$$

которая, очевидно, эквивалентна системе

$$s^T x = 0, \quad 2|y - e_q| - |y| + e_q \leq 0, \quad |x| = |y|. \quad (12)$$

Так как очевидно, что

$$|y - e_q| = 2|y - e_q| - |y - e_q| \leq 2|y - e_q| - (|y - e_q|) = 2|y - e_q| - |y| + e_q,$$

второе неравенство системы (12) эквивалентно $y = e_q$ и, следовательно, (12) можно записать в виде

$$s^T x = 0, \quad y = e_q, \quad |x| = e_q. \quad (13)$$

Из (13) следует, что если $x \in \mathcal{R}_0$, то $\begin{pmatrix} x \\ e_q \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_3$ и, наоборот, если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_3$, то $y = e_q$, а $x \in \mathcal{R}_0$. Так как ясно, что матрицы A, B и векторы a, b строятся по вектору s за полиномиальное время, то задача РАЗБИЕНИЕ полиномиально сводится к задаче $\mathcal{R}_3 \neq \emptyset$. Теорема доказана.

Таким образом, если $\mathcal{P} \neq \mathcal{N}\mathcal{P}$, то при решении задачи $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$ для $i = 1, 3, 4$ невозможно избавиться от экспоненциального перебора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
2. Ватолин А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1629–1637.
3. Oettli K. W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // SIAM J. Numer. Anal. 1965. V. 2. P. 115–118.
4. Bееck H. Ueber Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervalkoeffizienten // Computing. 1972. V. 10. P. 231–244.
5. Шарый С. П. О характеристике объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы // Красноярск, 1990. 20 с. Деп. в ВИНТИ, № 726-B91.
6. Шайдуров В. В., Шарый С. П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. Красноярск, 1988. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 5).
7. Шарый С. П. О разрешимости линейной задачи о допусках // Интервальные вычисления. 1991. № 1. С. 92–98.
8. Rohn J. Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics, Freiburg, 1985. Berlin; New York: Springer-Verl., 1986. P. 157–158. (Lecture Notes in Computer Sci.; V. 212).
9. Хлебалин Н. А., Шокин Ю. И. Интервальный вариант метода модального управления // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 4. С. 846–850.
10. Ratschek H., Sauer W. Linear interval equations // Computing. 1982. V. 28, № 2. P. 105–115.
11. Захаров А. В., Шокин Ю. И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 292–295.
12. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.
13. Вулих Б. З. Введение в теорию полупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
14. Oettli K. W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numer. Math. 1964. V. 6. P. 405–409.
15. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
16. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
17. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1093–1096.