# Пакет IntLinIncR2
# Руководство пользователя

*Содержание:*



## 1 О пакете

Необходимое программное обеспечение — MATLAB®.
Основой алгоритма служит метод граничных интервалов [1].
Автор пакета `IntLinIncR2` и метода граничных интервалов — И.А. Шарая (Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск).
Пакет распространяется свободно. Исходные коды открыты.
Первая версия была опубликована 24 декабря 2012 г.
Адреса, с которых можно скачать последнюю версию пакета:
http://interval.ict.nsc.ru/Programing,
http://interval.ict.nsc.ru/sharaya/irash.html.

## 2 Назначение

Пакет `IntLinIncR2` предназначен для визуализации различных множеств решений интервальных и точечных (т.е. не интервальных, а обычных) систем отношений. Перечислим эти системы и множества.

**Интервальные системы:**

1) множество формальных решений интервального включения

$$\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} \tag{1}$$

в арифметике Каухера, в котором

$\boldsymbol{C} = [\underline{C}, \overline{C}] \in \mathbb{KR}^{m\times 2}$ – интервальная матрица (заданы концы $\underline{C}$ и $\overline{C}$);

$x \in \mathbb{R}^2$ – вещественный вектор (неизвестен);

$\boldsymbol{d} = [\underline{d}, \overline{d}] \in \mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}^m$ – интервальный вектор (заданы концы $\underline{d}$ и $\overline{d}$);

$m \in \mathbb{N}$ – натуральное число;

$\mathbb{KR} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \mathbb{R}\}$ – интервалы Каухера (в отличие от классических интервалов $\mathbb{IR} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \mathbb{R},\ \underline{z} \le \overline{z}\}$, для интервалов Каухера нет требования $\underline{z} \le \overline{z}$);

$\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \overline{\mathbb{R}}\}$ – интервалы Каухера над расширенной числовой осью $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$;

умножение $\boldsymbol{C}$ на $x$ – стандартное для арифметики Каухера;

включение "$\subseteq$" – задается парой неравенств $\underline{\boldsymbol{C}x} \ge \underline{d}$ и $\overline{\boldsymbol{C}x} \le \overline{d}$, каждое из которых понимаем покомпонентно, а $\underline{\boldsymbol{C}x}$ и $\overline{\boldsymbol{C}x}$ обозначают левый и правый концы интервального вектора $\boldsymbol{C}x = [\underline{\boldsymbol{C}x}, \overline{\boldsymbol{C}x}]$;

2) все возможные множества AE-решений интервальной системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times 2},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m,\ m \in \mathbb{N}; \tag{2}$$

3) все возможные множества кванторных решений для интервальной системы неравенств вида

$$\boldsymbol{A}x \ge \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times 2},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m,\ m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

или вида

$$\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times 2},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m,\ m \in \mathbb{N}; \tag{4}$$

4) различные множества кванторных решений для интервальной смешанной системы линейных уравнений и неравенств вида

$$\boldsymbol{A}x \ \sigma \ \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times 2},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m},\ \sigma \in \{=, \geq, \leq\}^m,\ m \in \mathbb{N}; \tag{5}$$

речь идет о всех тех кванторных решениях, в описании которых строкам с отношением "=" соответствует AE-порядок кванторных приставок.

**Точечные системы:**

1) множество решений системы

$$Ax + B|x| \geq c, \quad A, B \in \mathbb{R}^{m\times 2},\ c \in \mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N}; \tag{6}$$

2) множество решений системы

$$|Ax - c| \leq B|x| + d, \quad A, B \in \mathbb{R}^{m\times 2},\ c, d \in \mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N}; \tag{7}$$

3) множество решений смешанной системы линейных уравнений, неравенств и двусторонних линейных неравенств

$$\left\{\begin{array}{llll} A_{(1)}x = b_{(1)}, & A_{(1)} \in \mathbb{R}^{m_1\times 2}, & b_{(1)} \in \mathbb{R}^{m_1}, & m_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ b_{(2)} \leq A_{(2)}x, & A_{(2)} \in \mathbb{R}^{m_2\times 2}, & b_{(2)} \in \mathbb{R}^{m_2}, & m_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ A_{(3)}x \leq b_{(3)}, & A_{(3)} \in \mathbb{R}^{m_3\times 2}, & b_{(3)} \in \mathbb{R}^{m_3}, & m_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ b_{(4)} \leq A_{(4)}x \leq b_{(5)}, & A_{(4)} \in \mathbb{R}^{m_4\times 2}, & b_{(4)}, b_{(5)} \in \mathbb{R}^{m_4}, & m_4 \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \end{array}\right. \tag{8}$$

где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 > 0$.

В [2] показано, что каждое из перечисленных множеств решений можно представить как множество формальных решений включения (1). Поэтому центральное место в пакете занимает визуализация именно этого множества, что отражено в названии пакета `IntLinIncR2` – <u>Int</u>erval <u>Lin</u>ear <u>Inc</u>lusion. Последние буквы `R2` обозначают русскоязычную версию для случая двух неизвестных (т.е. для $x \in \mathbb{R}^2$).

**Замечание.** Пакет `IntLinIncR2` ориентирован на иллюстрирование простых примеров (в публикациях, обучении и т.п.), поэтому наиболее правильно и безотказно он работает при условии, что все начальные данные целочисленны и лежат в диапазоне $[-10^2, 10^2]$.

## 3 Структура пакета

Главная функция пакета — `CxindR2`. Она предназначена для визуализации множества решений включения (1).

Функции, используемые в главной:

| | |
|---|---|
| `BoundaryIntervals,` | `Intervals2Path,` |
| `ClearRows,` | `NonRepeatRows,` |
| `CutBox,` | `OrientationPoints,` |
| `DrawingBox,` | `SSinW.` |

Пакет содержит также вспомогательные функции. Они упрощают применение пакета к задачам, эквивалентным включению (1). Выбор вспомогательной функции зависит от системы отношений (2)–(7), которую надо обработать, а для интервальных систем — еще и от типа решений системы. Эта зависимость отражена в именах вспомогательных функций.

Имена вспомогательных функций для интервальных систем

| система | тип решений | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | слабое | допусковое | управляемое | сильное | кванторное |
| (2) $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ | `EqnWeakR2` | `EqnTolR2` | `EqnCtlR2` | `EqnStrongR2` | `EqnAEssR2` |
| (3) $\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$ | `GeqWeakR2` | `GeqTolR2` | `GeqCtlR2` | `GeqStrongR2` | `GeqQtrR2` |
| (4) $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$ | `LeqWeakR2` | `LeqTolR2` | `LeqCtlR2` | `LeqStrongR2` | `LeqQtrR2` |
| (5) $\boldsymbol{A}x\ \sigma\ \boldsymbol{b}$ | `MixWeakR2` | `MixTolR2` | `MixCtlR2` | `MixStrongR2` | `MixQtrR2` |

Определения указанных в таблице типов решений, кроме кванторных, будут приведены в этом руководстве. Полный комплект определений имеется в [2], он обобщает терминологию из [3, 4]. Заметим, что вспомогательные функции `EqnAEssR2` и `MixQtrR2` предназначены только для тех кванторных решений, в описании которых строкам с отношением “=” соответствует AE-порядок кванторных приставок.

Для точечных систем имеется две вспомогательные функции: функция `Abs1R2` предназначена для системы (6) с одной операцией взятия абсолютного значения, а функция `Abs2R2` — для системы (7) с двумя такими операциями.

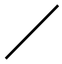
Аргументы главной и вспомогательных функций описаны в их телах. Чтобы посмотреть это описание в командном окне MATLAB, используйте команду `help`, например,

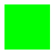
```
>> help EqnWeakR2
```

# 4 Обозначения в рисунках

Пусть $\mathrm{po}_k$ (от <u>p</u>*iece in* <u>o</u>*rthant* $k$) – это пересечение множества решений с ортантом $k$, $k = 1, 2, 3, 4$, тогда

• – вершина $\mathrm{po}_k$ (ориентир),

 – ребро $\mathrm{po}_k$,

 – внутренняя область $\mathrm{po}_k$ для какого-нибудь $k$.

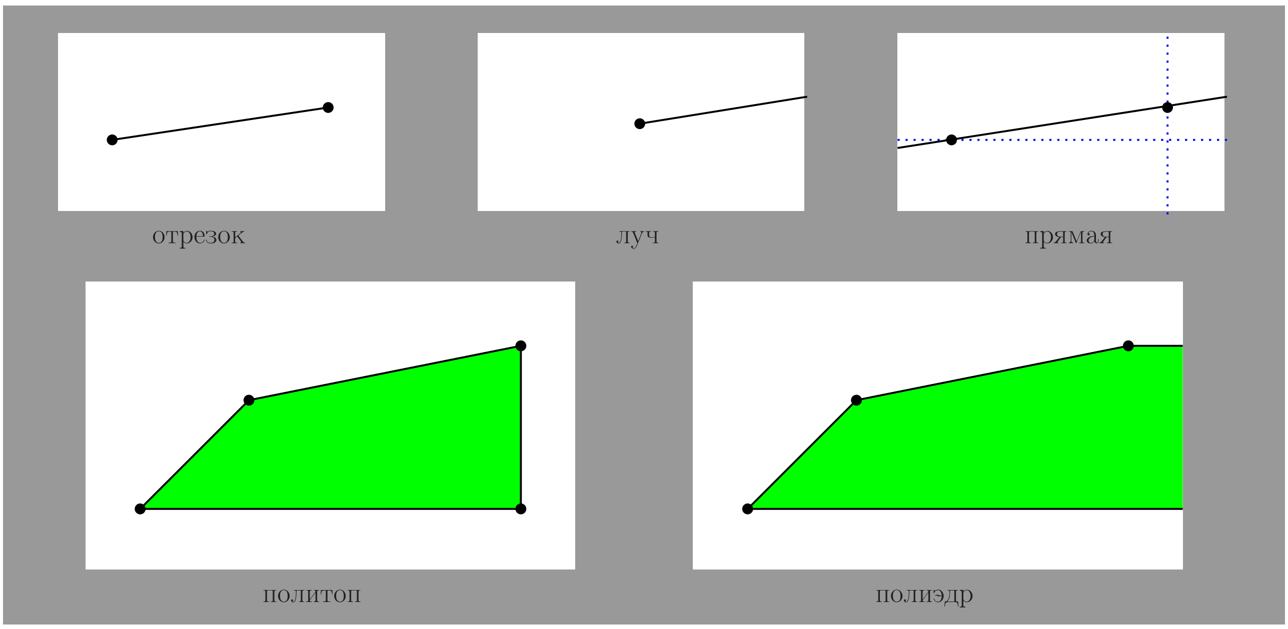
Пунктир обозначает координатную ось, проходящую через начало координат. Ось абсцисс соответствует переменной $x_1$, ось ординат – переменной $x_2$.

Программа так выбирает область рисования, что:

1) все ориентиры множества решений показаны на рисунке;

2) ограниченное множество решений лежит существенно внутри области рисования, а неограниченное всегда имеет точки на границе области рисования, что позволяет легко отличить ограниченное множество решений от неограниченного.

Например:



## 5 Примеры использования пакета

### 5.1 Множество формальных решений интервального включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$

Вектор $x$ называется *формальным решением включения* (1), если умножение $\boldsymbol{C}$ на $x$ по правилам интервальной арифметики Каухера дает интервальный вектор $\boldsymbol{C}x$, для которого выполнены неравенства $\underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d}$ и $\overline{\boldsymbol{C}x} \leq \overline{d}$.

Задача. Увидеть множество формальных решений включения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [1,-1] & [1,3] \end{pmatrix} x \subseteq \begin{pmatrix} [-3,3] \\ [2,3] \end{pmatrix}.$$

Использование пакета. В этой задаче для включения (1) имеем

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ \underline{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

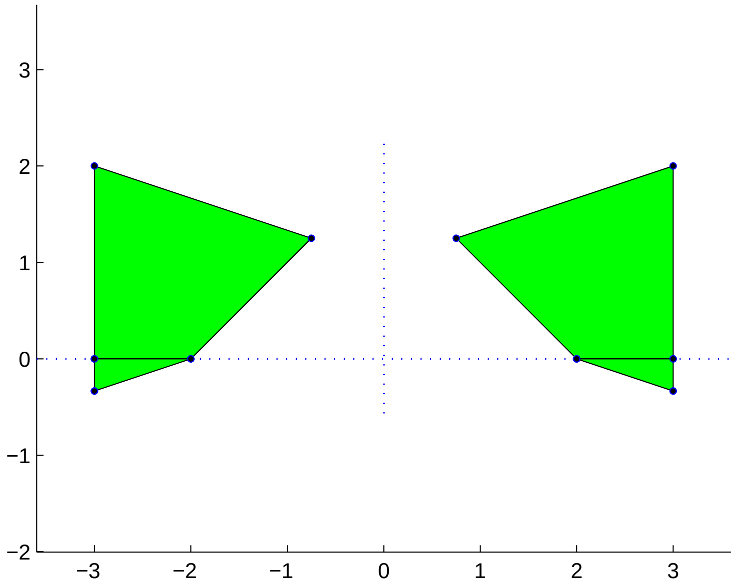
Введем последовательно эти данные и запустим главную функцию `CxindR2`:

```
>> uC=[ 1 0 ; 1 1 ];
>> oC=[ 1 0 ; -1 3 ];
>> ud=[ -3 ; 2 ];
>> od=[  3 ; 3 ];
>> [V,P1,P2,P3,P4]=CxindR2(uC,oC,ud,od)
```

Получим

```
Число ориентиров = 10

V =
    2.00     3.00     0.75     3.00    -3.00    -0.75    -3.00    -2.00    -3.0000    3.0000
    0        2.00     1.25     0        0        1.25     2.00     0       -0.3333   -0.3333


P1 =
    2.0000         0
    0.7500    1.2500
    3.0000    2.0000
    3.0000         0
    2.0000         0
```

```
P2 =
   -3.0000         0
   -3.0000    2.0000
   -0.7500    1.2500
   -2.0000         0
   -3.0000         0

P3 =
   -3.0000   -0.3333
   -3.0000         0
   -2.0000         0
   -3.0000   -0.3333

P4 =
    3.0000   -0.3333
    2.0000         0
    3.0000         0
    3.0000   -0.3333
```




Здесь V – ориентиры, т.е. вершины кусков множества решений в ортантах, Pk – замкнутый обход куска множества решений в $k$-ом ортанте по часовой стрелке. (Если же множество решений в $k$-ом ортанте неограниченно, то Pk – это обход пересечения множества решений в ортанте $k$ с брусом обрезки.)

*Примечание.* При замене команды

```
>> [V,P1,P2,P3,P4]=CxindR2(uC,oC,ud,od)
```

на

```
>> [V]=CxindR2(uC,oC,ud,od)
```

матрицы P1, P2, P3, P4 на экран выводиться не будут.

А при замене на

```
>> CxindR2(uC,oC,ud,od);
```

мы получим только рисунок и число ориентиров. (В MATLAB точка с запятой после команды подавляет показ в командном окне выходных аргументов этой команды.)

Аналогично используются выходные аргументы и точка с запятой после команды во всех вспомогательных функциях. В последующих примерах мы, для краткости, будем приводить короткое обращение к вспомогательной функции, а в качестве выдачи — только число ориентиров и рисунок.

## 5.2 Множества AE-решений интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$

Перейдем к визуализации множеств AE-решений интервальной системы линейных уравнений (2).

### 5.2.1 Объединенное множество решений (= множество слабых решений)

Вектор $x$ называется *слабым решением системы* (2), если

$$(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax = b).$$

Другими словами, слабое решение — это решение какой-нибудь точечной системы. Множество слабых решений состоит из множеств решений всех точечных систем, поэтому его часто называют *объединенным множеством решений.*

*Задача.* Увидеть объединенное множество решений системы

$$\begin{pmatrix} [-1,1] & [-1,1] \\ -1 & [-1,1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ [-2,2] \end{pmatrix}.$$

*Использование пакета.* В задаче конкретные данные для (2) таковы:

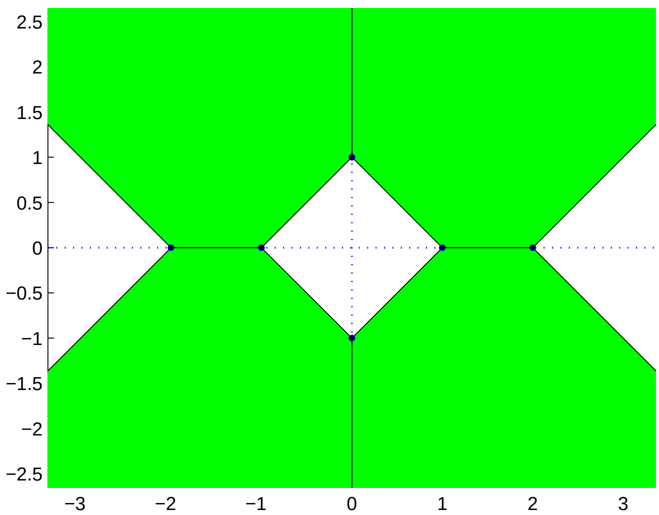
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Введем их последовательно и запустим функцию `EqnWeakR2`:

```
>> infA=[ -1 -1 ; -1 -1 ];
>> supA=[ 1 1 ; -1 1 ];
>> infb=[ 1 ; -2 ];
>> supb=[ 1 ; 2 ];
>> EqnWeakR2(infA,supA,infb,supb);
```

Получим

```
Число ориентиров = 6
```



### 5.2.2 Допусковое множество решений

Вектор $x$ называется *допусковым решением системы* (2), если

$$(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax = b).$$

Множество допусковых решений и *допусковое множество решений* — это одно и то же.

*Задача.* Увидеть допусковое множество решений для системы

$$\big([-1,1]\ \ [-1,1]\big)\, x = \big([-1,1]\big)\,.$$

*Использование пакета.* В рассматриваемой задаче данные для системы интервальных уравнений (2) общего вида конкретизируются так:

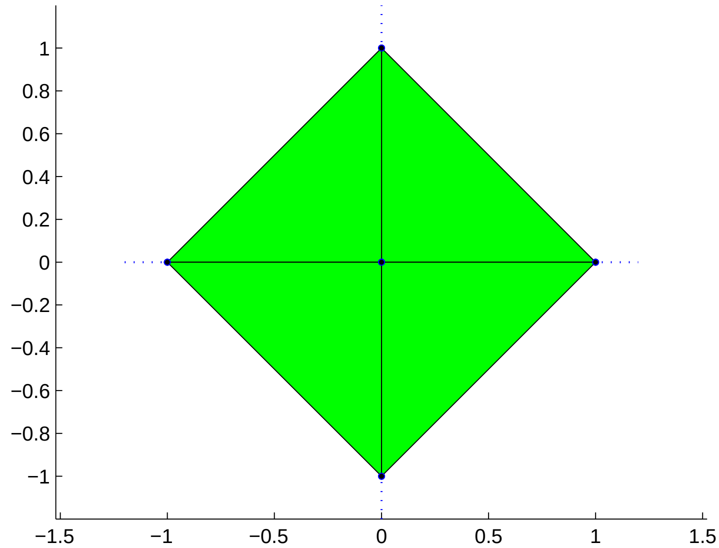
$$\underline{A} = \begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}.$$

Введем их последовательно и запустим вспомогательную функцию `EqnTolR2`:

```
>> infA=[ -1 -1 ];
>> supA=[ 1 1 ];
>> infb=[ -1 ];
>> supb=[ 1 ];
>> EqnTolR2(infA,supA,infb,supb);
```

Получим:

```
Число ориентиров = 5
```



### 5.2.3 Управляемое множество решений

Вектор $x$ называется *управляемым решением системы* (2), если

$$(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (\exists A \in \boldsymbol{A})\ (Ax = b).$$

*Управляемое множество решений* — это множество управляемых решений.

*Задача.* Увидеть управляемое множество решений для системы

$$\begin{pmatrix}[-1,1] & [-1,1]\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}[-1,1]\end{pmatrix}.$$

*Использование пакета.* В этой задаче данные для системы интервальных уравнений (2) выглядят так:

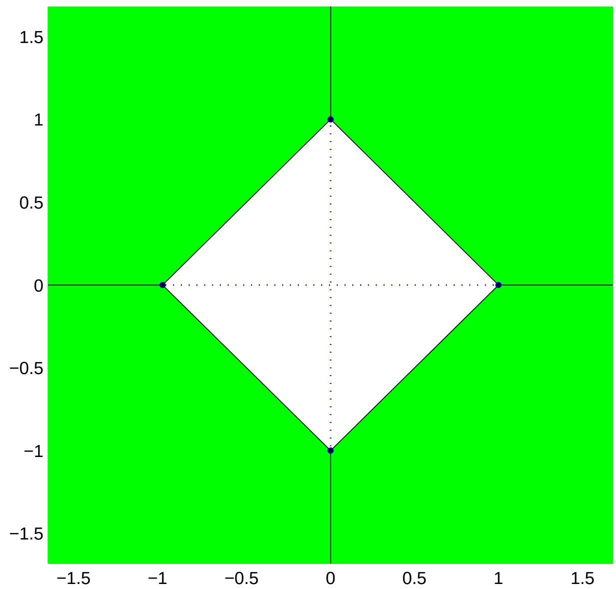
$$\underline{A} = \begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}.$$

Введем их последовательно и запустим вспомогательную функцию `EqnCtlR2`:

```
>> infA=[ -1 -1 ];
>> supA=[ 1 1  ];
>> infb=[ -1 ];
>> supb=[ 1 ];
>> EqnCtlR2(infA,supA,infb,supb);
```

Получим

```
Число ориентиров = 4
```



### 5.2.4 Множество сильных решений

Вектор $x$ называется *сильным решением системы* (2), если

$$(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\forall b \in \boldsymbol{b})\ (Ax = b).$$

Из определения ясно, что множество сильных решений чаще всего пустое. Приведем несколько ситуаций, когда оно не пусто:

- если $\boldsymbol{A} = 0$ и $\boldsymbol{b} = 0$, то множество сильных решений — вся плоскость;
- если $\boldsymbol{A}$ имеет ровно один нулевой столбец и $\boldsymbol{b} = 0$, то множество сильных решений совпадает с координатной осью;
- если $\boldsymbol{A} = A$ и $\boldsymbol{b} = b$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^m$, и точечная система $Ax = b$ разрешима, тогда множество сильных решений интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ совпадает с множеством решений точечной системы $Ax = b$.

<u>*Задача.*</u> Увидеть множество сильных решений для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [3,4] \\ 2 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>*Использование пакета.*</u> В задаче конкретные данные для (2) таковы:

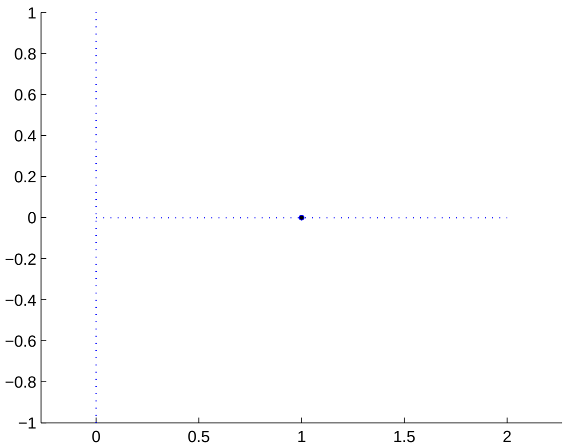
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Введем их последовательно и запустим функцию `EqnStrongR2`:

```
>> infA=[ 1 3 ; 2 5 ];
>> supA=[ 1 4 ; 2 5 ];
>> infb=[ 1 ; 2 ];
>> supb=[ 1 ; 2 ];
>> EqnStrongR2(infA,supA,infb,supb);
```

Получим

```
Число ориентиров = 1
```



#### 5.2.5 Произвольное множество AE-решений

AE-решения для интервальной системы уравнений (2) определены в [3].

<u>*Задача.*</u> Пусть система (2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} [-1,1] & [-1,1] \\ [-2,2] & [-2,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-2,2] \end{pmatrix}.$$

Как для нее увидеть следующее множество AE-решений

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\forall A_{11} \in \boldsymbol{A}_{11})(\forall A_{12} \in \boldsymbol{A}_{12})(\forall b_2 \in \boldsymbol{b}_2)$$
$$(\exists A_{21} \in \boldsymbol{A}_{21})(\exists A_{22} \in \boldsymbol{A}_{22})(\exists b_1 \in \boldsymbol{b}_1)\ (Ax = b)\}?$$

<u>*Использование пакета.*</u> Для интервальной системы уравнений (2) общего вида в рассматриваемой задаче имеем такие конкретные данные:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

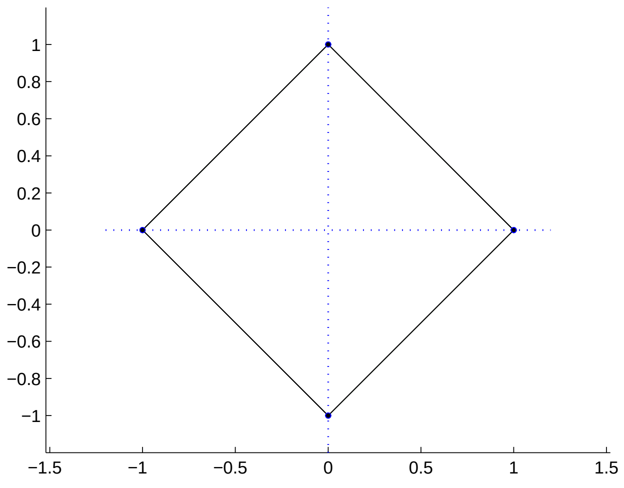
$$A^q = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad b^q = \begin{pmatrix} \exists \\ \forall \end{pmatrix}.$$

Введем эти данные последовательно и запустим функцию `EqnAEssR2`:

```
>> infA=[ -1 -1 ; -2 -2 ];
>> supA=[  1  1 ;  2  2 ];
>> infb=[ -1 ; -2 ];
>> supb=[  1 ;  2 ];
>> Aq=[ 'A' 'A' ; 'E' 'E' ];
>> bq=[ 'E' ; 'A' ];
>> EqnAEssR2(infA,supA,Aq,infb,supb,bq)
```

Получим:

```
Число ориентиров = 4
```




<u>*Примечание.*</u> Буквы `'A'` и `'E'` при наборе данных надо вводить на английском языке.

## 5.3 Множества кванторных решений интервальной системы линейных неравенств ($\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$)

Сначала в разделах 5.3.1 и 5.3.2 рассмотрим неравенство вида $\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$, а в разделе 5.3.3 коснемся противоположного неравенства $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$. Для обоих неравенств кванторные решения и их основные типы определены в [2].

### 5.3.1 Основные типы кванторных решений неравенства $\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$

Для интервальной системы линейных неравенств (3) вектор $x$ мы называем

| | | |
|---|---|---|
| *слабым решением,* | если | $(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax \geq b)$, |
| *допусковым решением,* | если | $(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax \geq b)$, |
| *управляемым решением,* | если | $(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (\exists A \in \boldsymbol{A})\ (Ax \geq b)$, |
| *сильным решением,* | если | $(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\forall b \in \boldsymbol{b})\ (Ax \geq b)$. |

Перечисленные типы решений считаем *основными типами кванторных решений* для интервальной системы линейных неравенств $\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$.

*Задача.* Для интервального неравенства

$$\begin{pmatrix}[1,2] & [1,2]\end{pmatrix} x \;\geq\; \begin{pmatrix}[-1,1]\end{pmatrix}$$

увидеть все множества кванторных решений основных типов.

*Использование пакета.* В рассматриваемой задаче интервальная система неравенств (3) общего вида получает следующие конкретные данные:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}.$$

Введем эти данные последовательно:

```
>> infA=[ 1 1 ];
>> supA=[ 2 2 ];
>> infb=[ -1 ];
>> supb=[  1 ];
```

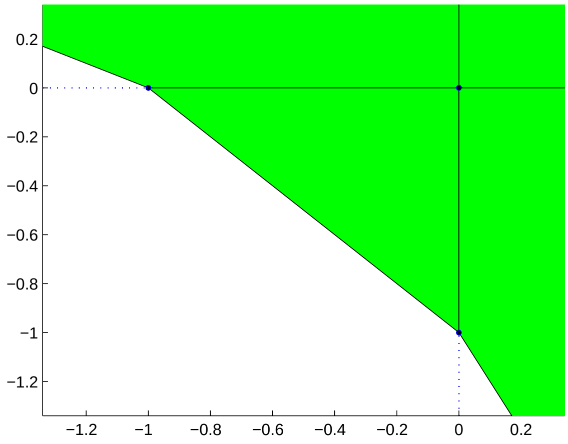
Для каждого типа решений запустим соответствующую вспомогательную функцию пакета:

| | |
|---|---|
| для слабого | — `GeqWeakR2`, |
| для допускового | — `GeqTolR2`, |
| для управляемого | — `GeqCtlR2`, |
| для сильного | — `GeqStrongR2`. |

Получим:

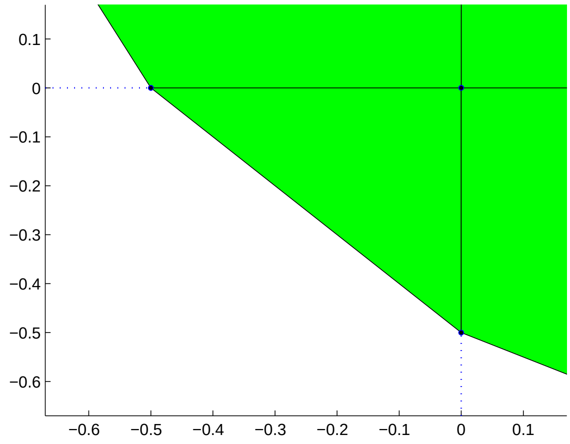
множество слабых решений

```
>> GeqWeakR2(infA,supA,infb,supb);
Число ориентиров = 3
```



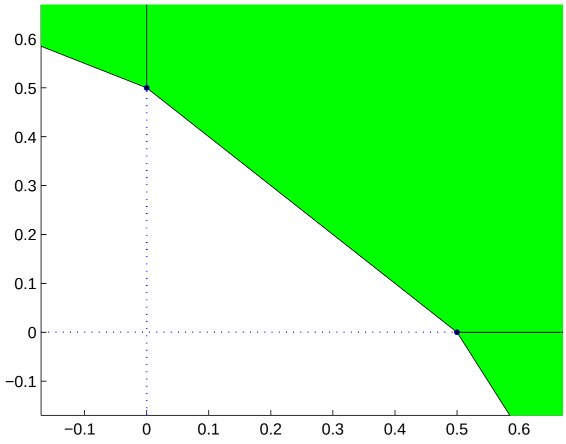

множество допусковых решений

```
>> GeqTolR2(infA,supA,infb,supb);
Число ориентиров = 3
```



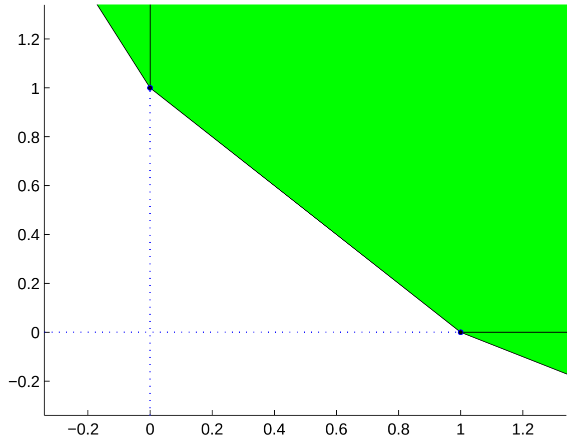

множество управляемых решений

```
>> GeqCtlR2(infA,supA,infb,supb);
Число ориентиров = 2
```




множество сильных решений

```
>> GeqStrongR2(infA,supA,infb,supb);
Число ориентиров = 2
```



### 5.3.2 Произвольное множество кванторных решений неравенства $\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$

Теперь перейдем к построению множеств кванторных решений для интервальной системы линейных неравенств (3) в случае произвольного набора и порядка кванторов.

Задача. Посмотреть, как выглядит множество

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists a_1 \in [1,2])\,(\forall a_2 \in [1,2])\,(\forall b \in [-1,1])\,(a_1x_1 + a_2x_2 \geq b)\}.$$

Использование пакета. Нам надо увидеть множество решений неравенства

$$\left([1,2]^{\exists}\;\;[1,2]^{\forall}\right) x \;\geq\; \left([-1,1]^{\forall}\right).$$

В этой задаче конкретные данные для интервальной системы неравенств (3) выглядят так:

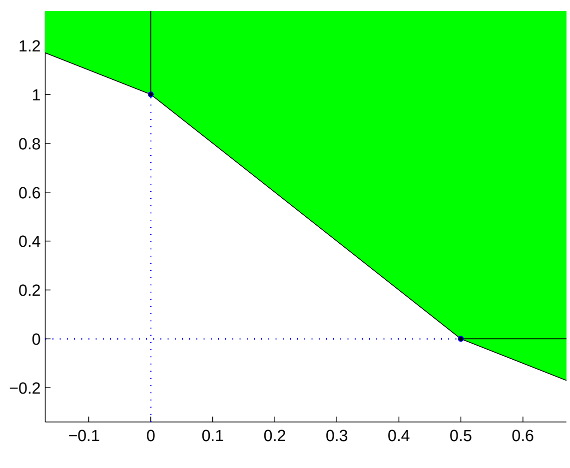
$$\underline{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},\; \overline{A} = \begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix},\; A^q = \begin{pmatrix}\exists & \forall\end{pmatrix},\; \underline{b} = \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix},\; \overline{b} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix},\; b^q = \begin{pmatrix}\forall\end{pmatrix}.$$

Введем эти данные последовательно и запустим функцию `GeqQtrR2`:

```
>> infA=[ 1 1 ];
>> supA=[ 2 2 ];
>> Aq=['E' 'A'];  % буквы 'A' и 'E' вводим на английском языке
>> infb=[ -1 ];
>> supb=[  1 ];
>> bq=['A'];
>> GeqQtrR2(infA,supA,Aq,infb,supb,bq);
```

Получим

```
Число ориентиров = 2
```




Примечание. Способ годится и для кванторных решений основных типов.

### 5.3.3 Множества кванторных решений неравенства $\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}$

Различные основные типы кванторных решений интервального неравенства $\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}$ вводятся аналогично соответствующим типам решений для противоположного неравенства $\boldsymbol{A}x \ge \boldsymbol{b}$, только в определениях знак неравенства в точечной системе $Ax \ge b$ надо заменить на противоположный.

Использование пакета `IntLinIncR2` для просмотра множеств кванторных решений неравенства $\boldsymbol{A}x \le \boldsymbol{b}$ отличается от того, как это делается в случае противоположного неравенства, только тем, что имена вызываемых вспомогательных функций должны начинаться на `Leq` (little or equal) вместо `Geq` (greater or equal).

В качестве примеров можно рассмотреть задачи из разделов 5.3.1 и 5.3.2. В их условиях правая часть $\boldsymbol{b}$ уравновешена (т.е. $-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$), поэтому, если мы заменим в этих задачах знак неравенства на противоположный, множество решений повернется вокруг начала координат на 180 градусов.

## 5.4 Множества кванторных решений интервальной системы линейных отношений $\boldsymbol{A}x\ \sigma\ \boldsymbol{b}$

Интервальная система отношений (5) построчно состоит из интервальных уравнений и неравенств вида $\boldsymbol{A}_{i:}x = \boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{A}_{i:}x \geq \boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{A}_{i:}x \leq \boldsymbol{b}_i$. Присутствие всех трех типов отношений в системе не обязательно. Интервальная система уравнений (2), а также интервальные системы неравенств (3) и (4) — это частные случаи интервальной смешанной системы отношений (5). Определение кванторного решения и основных типов кванторных решений для системы $\boldsymbol{A}x\ \sigma\ \boldsymbol{b}$ даны в [2].

### 5.4.1 Основные типы кванторных решений

*Основные типы кванторных решений* для интервальной системы линейных отношений (5) мы вводим также, как для системы интервальных линейных уравнений (или неравенств), а именно: вектор $x \in \mathbb{R}^n$ называем

$$\begin{aligned}
&\textit{слабым решением}, \text{ если } && (\exists A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\ \sigma\ b),\\
&\textit{допусковым решением}, \text{ если } && (\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\ \sigma\ b),\\
&\textit{управляемым решением}, \text{ если } && (\forall b \in \boldsymbol{b})\ (\exists A \in \boldsymbol{A})\ (Ax\ \sigma\ b),\\
&\textit{сильным решением}, \text{ если } && (\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\forall b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\ \sigma\ b).
\end{aligned}$$

*Задача.* Для интервальной системы отношений

$$\begin{pmatrix} [-1,1] & [-1,1] \\ [-1,1] & 0 \\ 0 & [-1,1] \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} = \\ \leq \\ \geq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-3,3] \\ [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix} \tag{9}$$

увидеть все множества кванторных решений основных типов.

*Использование пакета.* В рассматриваемой задаче конкретные данные для (5) такие:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} = \\ \leq \\ \geq \end{pmatrix}.$$

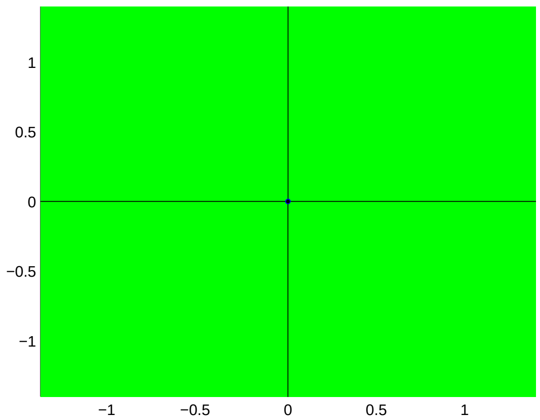
Введем их последовательно:

```
>> infA=[-1 -1; -1 0; 0 -1];
>> supA=[ 1  1;  1 0; 0  1];
>> infb=[-3; -2; -2];
>> supb=[ 3;  2;  2];
>> relations=['='; '<'; '>'];
```

Запуская соответствующие вспомогательные функции пакета, получаем:

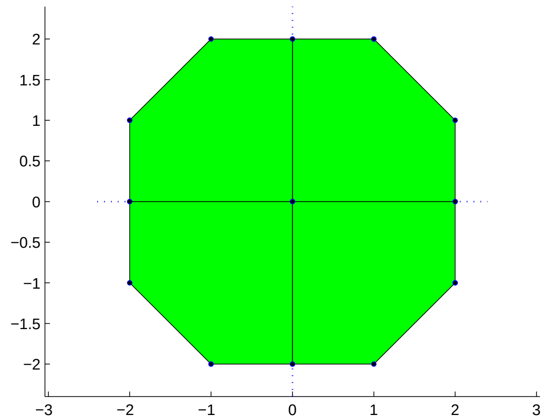
множество слабых решений

```
>> MixWeakR2(infA,supA,infb,supb,relations);
Число ориентиров = 1
```



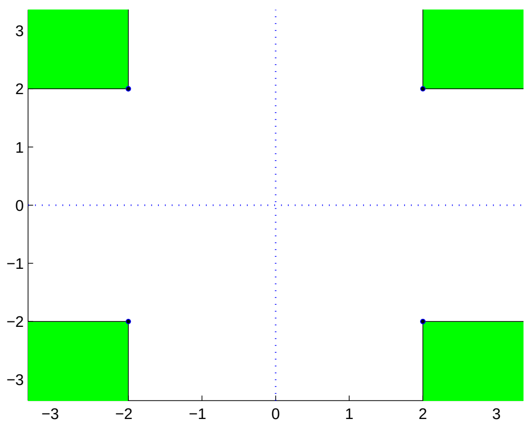

множество допусковых решений

```
>> MixTolR2(infA,supA,infb,supb,relations);
Число ориентиров = 13
```




множество управляемых решений

```
>> MixCtlR2(infA,supA,infb,supb,relations);
Число ориентиров = 4
```




множество сильных решений

```
>> MixStrongR2(infA,supA,infb,supb,relations);
Множество решений пусто
(нет граничных интервалов)
```

### 5.4.2 Множество кванторных решений не основного типа

Теперь перейдем к построению множеств кванторных решений для интервальной системы отношений (5) в случае, когда набор кванторов произвольный, а порядок кванторов ограничен следующим требованием: для строк с отношением равенства все приставки с квантором всеобщности (если они есть) предшествуют приставкам с квантором существования (если такие есть).

*Задача.* Увидеть множество всех $x \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию

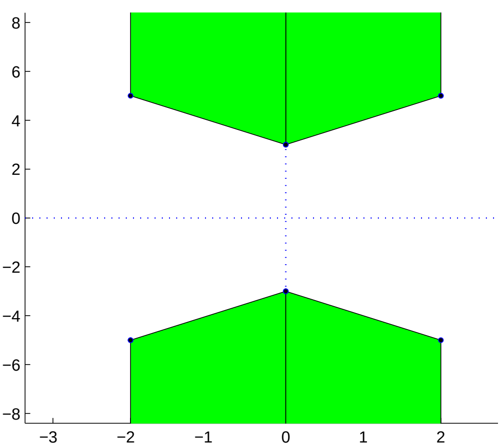
$$\Big( (\forall\, b_1 \in [-3, 3])\ (\forall A_{11} \in [-1, 1])\ (\exists A_{12} \in [-1, 1])\ \ (A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1) \Big)$$
$$\& \Big( (\exists\, b_2 \in [-2, 2])\ (\forall A_{21} \in [-1, 1])\ \ (A_{21}x_1 \le b_2) \Big)$$
$$\& \Big( (\exists\, b_3 \in [-2, 2])\ (\exists A_{32} \in [-1, 1])\ \ (A_{32}x_2 \ge b_3) \Big).$$

*Использование пакета.* Задача сводится к визуализации множества кванторных решений смешанной интервальной линейной системы (9). Указанное выше требование на порядок кванторных приставок в задаче выполнено. Наличие в системе точечных элементов ($\boldsymbol{A}_{22}$ и $\boldsymbol{A}_{31}$) допускает свободу в выборе кванторов для этих элементов. Зафиксируем один из вариантов, выбрав для кванторного решения системы (9) матрицу и вектор кванторов соответственно как $A^q = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \forall & \exists \\ \forall & \exists \end{pmatrix}$, $b^q = \begin{pmatrix} \forall \\ \exists \\ \exists \end{pmatrix}$. Введем данные и вызовем функцию `MixQtrR2`:

```
>> infA=[-1 -1; -1 0; 0 -1];
>> supA=[ 1  1;  1 0; 0  1];
>> infb=[-3; -2; -2];
>> supb=[ 3;  2;  2];
>> relations=['='; '<'; '>'];
>> Aq=[ 'A' 'E'; 'A' 'E'; 'A' 'E']
>> bq=[ 'A'; 'E'; 'E' ] % 'A' и 'E' - английские
>> MixQtrR2(infA,supA,Aq,infb,supb,bq,relations);
```

Получим

```
Число ориентиров = 6
```



### 5.5 Множества решений точечных систем отношений

#### 5.5.1 Множество решений системы $Ax + B|x| \geq c$

<u>*Задача.*</u> Увидеть множество решений системы (6), где

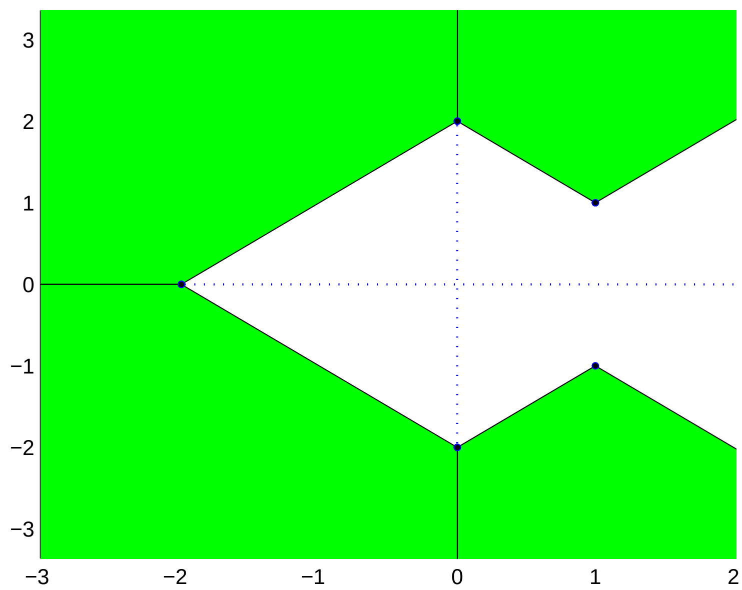
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>*Использование пакета.*</u> Введем данные задачи последовательно, а затем запустим вспомогательную функцию `Abs1R2`:

```
>> A=[ 0 0 ; -1 0 ];
>> B=[ .5 .5 ; 0 1 ];
>> c=[ 1 ; 0 ];
>> V=Abs1R2(A,B,c)
```

Получим

```
Число ориентиров = 5

V =
     1     0    -2     0     1
     1     2     0    -2    -1
```



### 5.5.2 Множество решений системы $|Ax - c| \le B|x| + d$

<u>*Задача.*</u> Увидеть множество решений системы (7), где

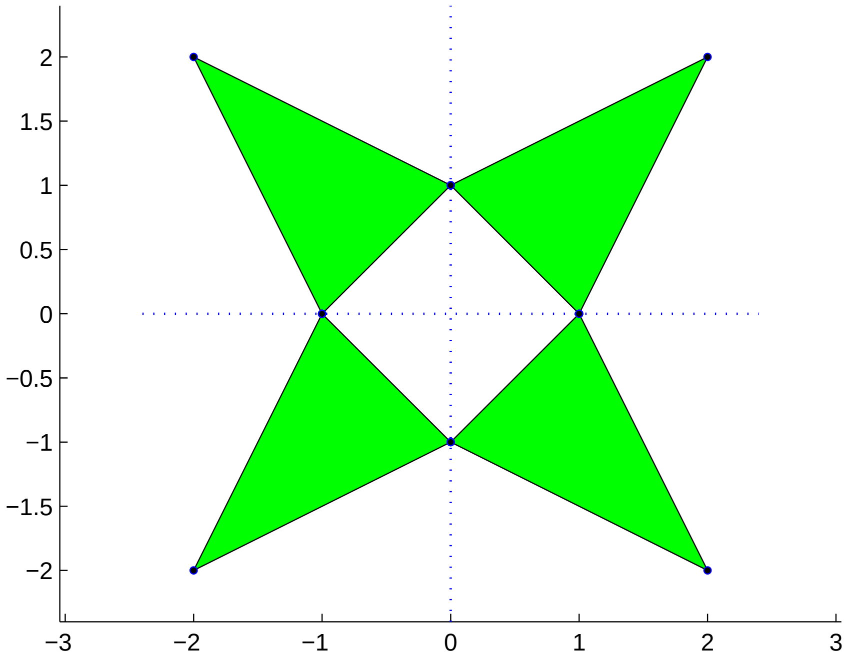
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>*Использование пакета.*</u> Введем последовательно данные задачи и запустим вспомогательную функцию `Abs2R2`:

```
>> A=[ 0 0 ; -2 0 ; 0 -2 ];
>> B=[ 1 1 ; 0 1 ; 1 0 ];
>> c=[ 1 ; 0 ; 0 ];
>> d=[ 0 ; 2 ; 2 ];
>> Abs2R2(A,B,c,d);
```

Получим

```
Число ориентиров = 8
```



#### 5.5.3 Множество решений смешанной системы уравнений и неравенств

Точечная система (8) представляет собой частный случай интервального включения (1). При этом соответствие между строками точечной системы (8) и строками интервального включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ таково:

| если $i$-ая строка точечной системы имеет вид | то ей соответствует строка $\boldsymbol{C}_{i:}x \subseteq \boldsymbol{d}_i$, в которой $\underline{C}_{i:} = \overline{C}_{i:} = A_{i:}$ и |
|---|---|
| $A_{i:}x = b_i$ | $\underline{d}_i = \overline{d}_i = b_i$ |
| $b_i \leq A_{i:}x$ | $\underline{d}_i = b_i,\ \overline{d}_i = \infty$ |
| $A_{i:}x \leq b_i$ | $\underline{d}_i = -\infty,\ \overline{d}_i = b_i$ |
| $u_i \leq A_{i:}x \leq v_i$ | $\underline{d}_i = -u_i,\ \overline{d}_i = v_i$ |

*Задача.* Увидеть множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ \quad x_2 \leq 1. \end{cases}$$

*Использование пакета.* Рассмотрим систему как включение $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$, где

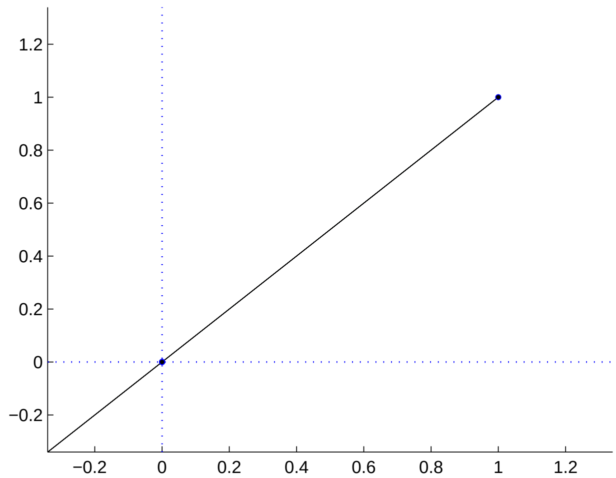
$$\underline{C} = \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \end{pmatrix}, \ \overline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем эти данные последовательно и запустим главную функцию `CxindR2`:

```
>> uC=[ 1 -1 ; 0 1 ];
>> oC=uC;
>> ud=[ 0 ; -Inf ];
>> od=[ 0 ;  1 ];
>> CxindR2(uC,oC,ud,od);
```

Получим:

```
Число ориентиров = 2
```



# 6 Порядок действий по установке и использованию пакета `IntLinIncR2`

1. Скачайте файл-архив в кодировке `UTF8` или `cp1251`:
   `interval.ict.nsc.ru/Programing/MCodes/IntLinIncR2_UTF8.zip`,
   `interval.ict.nsc.ru/Programing/MCodes/IntLinIncR2_cp1251.zip`.
2. Разархивируйте его в отдельную папку.
3. Обеспечьте доступ к этой папке из MATLAB.
4. В командном окне MATLAB набирайте данные для систем (1)–(8) и вызывайте пусковые функции, как показано в примерах этого руководства.

# 7 Список литературы


[1] Шарая И.А. Метод граничных интервалов и визуализация полиэдральных множеств — *готовится к печати в журнале «Вычислительные технологии»*

[2] Шарая И.А. Бескванторные описания для интервально-кванторных линейных систем // *Труды института математики и механики УрО РАН.* — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 311–323.
— (`http://interval.ict.nsc.ru/sharaya/Papers/trIMM14.pdf`)

[3] Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ.* —
`http://interval.ict.nsc.ru/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`

[4] Рон И. Разрешимость систем интервальных линейных уравнений и неравенств // *Задачи линейной оптимизации с неточными данными* / Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — Глава 2. — С. 64–117.
— (Электронная версия книги на английском языке доступна по адресу:
`http://interval.ict.nsc.ru/Library/InteBooks/InexactLP.pdf`)



И.А. Шарая 1 сентября 2014 г.
Институт вычислительных технологий СО РАН