О внутреннем оценивании множеств решений для интервальных линейных систем уравнений

С.П. Шарый

Федеральный исследовательский центр информационно-вычислительных технологий

Новосибирский государственный университет

I. Введение

интервальные линейные системы,

их множества решений, оценивание

Интервальные линейные системы

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальной $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$

и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ в правой части.

Системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с $m \times n$-матрицей $A = (\,a_{ij}\,)$ и m-вектором $b = (\,b_i\,)$.

Задача восстановления линейной зависимости

Нужно найти параметры x_1, x_2, ..., x_n линейной функции вида

$$b \;=\; x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

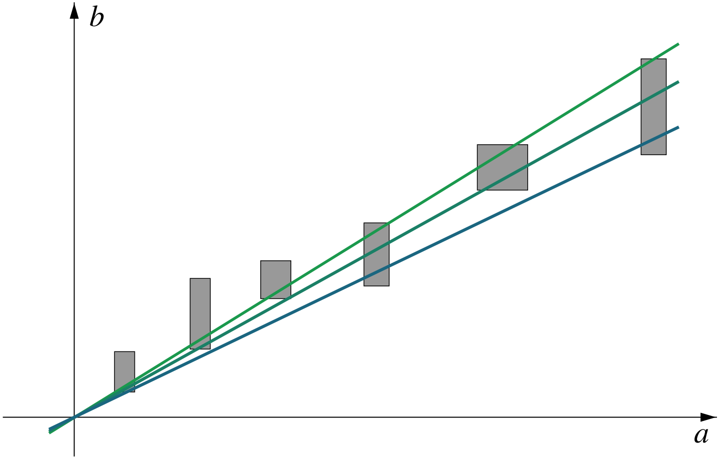
из ряда значений независимых переменных a_1, a_2, ..., a_n
(называемых также *экзогенными*, *предикторными* или *входными*)

и соответствующих значений зависимой переменной b
(называемой также *эндогенной*, *критериальной*, или *выходной*).

Как a_1, a_2, ..., a_n, так и b известны неточно, так что в каждом измерениии имеем лишь интервалы возможных значений

$$a_1 \in [\underline{a}_1, \overline{a}_1],\; a_2 \in [\underline{a}_2, \overline{a}_2],\; \ldots,\; a_n \in [\underline{a}_n, \overline{a}_n]$$

и $b \in [\underline{b}, \overline{b}]$.


b
a

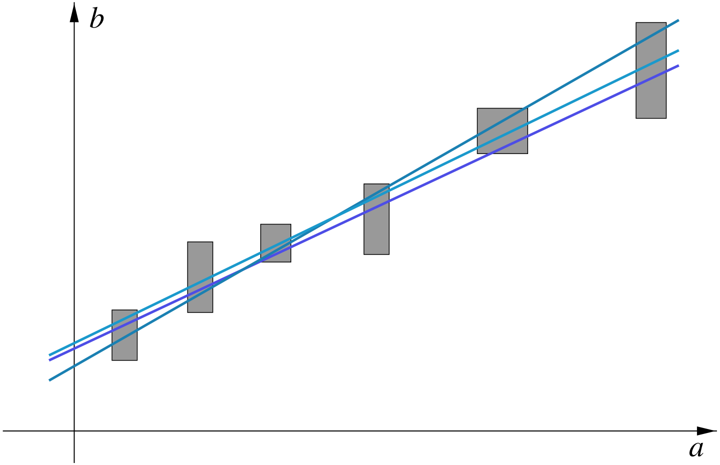
В результате m наблюдений (измерений) получаем:

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{a}_{11}, & \boldsymbol{a}_{12}, & \ldots & \boldsymbol{a}_{1n}, & \boldsymbol{b}_1, \\
\boldsymbol{a}_{21}, & \boldsymbol{a}_{22}, & \ldots & \boldsymbol{a}_{2n}, & \boldsymbol{b}_2, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{a}_{m1}, & \boldsymbol{a}_{m2}, & \ldots & \boldsymbol{a}_{mn}, & \boldsymbol{b}_m.
\end{array}$$

Подставляем эти данные в формулу для искомой линейной функции,

$$b \;=\; x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

получаем интервальную систему линейных алгебраических уравнений.


b
a

Интервальные линейные системы

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_0 + \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ x_0 + \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots \quad\;\; \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_0 + \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальной $m \times (n+1)$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$
и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ в правой части.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Решения или множества решений для интервальных систем уравнений (неравенств и т.п.) могут быть определены многими различными способами ...

Это является следствием
двойственного характера интервальной неопределённости.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Объединённое множество решений

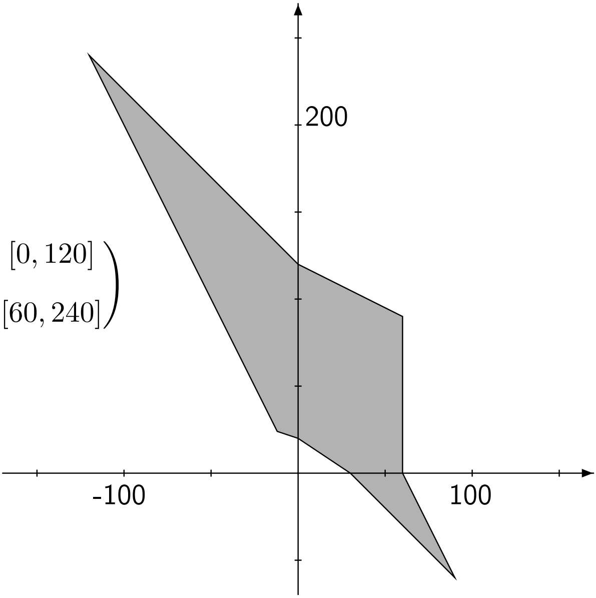
интервальной системы линейных уравнений —

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\}$$

— множество решений всевозможных точечных СЛАУ $Ax = b$, для которых матрица A берётся из $\boldsymbol{A}$, а правая часть b берётся из интервального вектора $\boldsymbol{b}$.

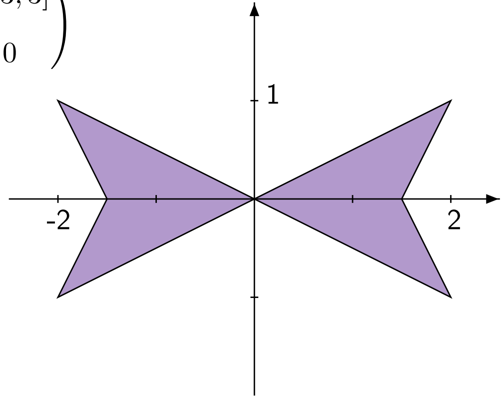
Пример — система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

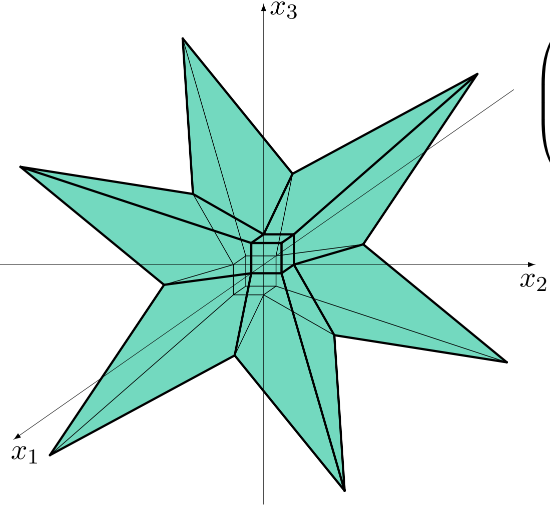


Пример — почти несвязное множество решений

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix}$$

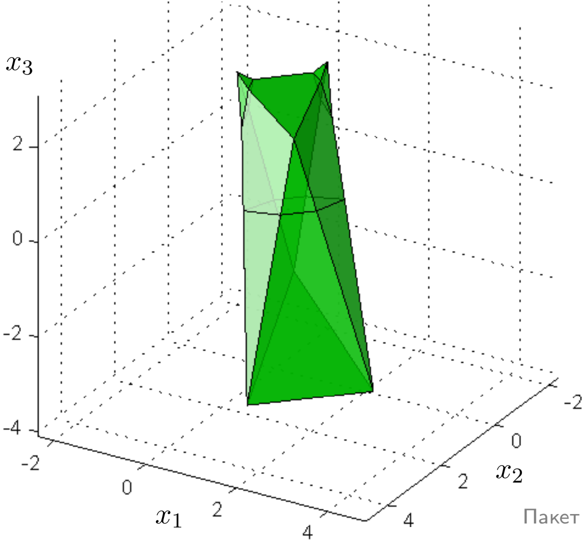


Пример — система Ноймайера



$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Пример: «безхвостый котик»



$$\begin{pmatrix} [0.8,1.2] & [0.8,1.2] & 1 \\ [0.8,1.2] & [1.8,2.2] & 1 \\ [0.8,1.2] & [2.8,3.2] & 1 \\ [1.8,2.2] & [0.8,1.2] & 1 \\ [1.8,2.2] & [1.8,2.2] & 1 \\ [1.8,2.2] & [2.8,3.2] & 1 \\ [2.8,3.2] & [0.8,1.2] & 1 \\ [2.8,3.2] & [1.8,2.2] & 1 \\ [2.8,3.2] & [2.8,3.2] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1,3] \\ [2,4] \\ [3,5] \\ [2,4] \\ [3,5] \\ [4,6] \\ [3,5] \\ [4,6] \\ [5,7] \end{pmatrix}$$

Пакет IntLinIncR3, автор Ирина Шарая

Объединённое множество решений

— полиэдральное (многогранное) множество.

Его пересечение с каждым ортантом выпукло.

Распознавание пустоты / непустоты
объединённого множества решений, т. е. того, что $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$

— NP-трудная задача (труднорешаемая):

А.В. Лакеев и С.И. Носков — 1993

V. Kreinovich,

J. Rohn

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Допусковое множество решений

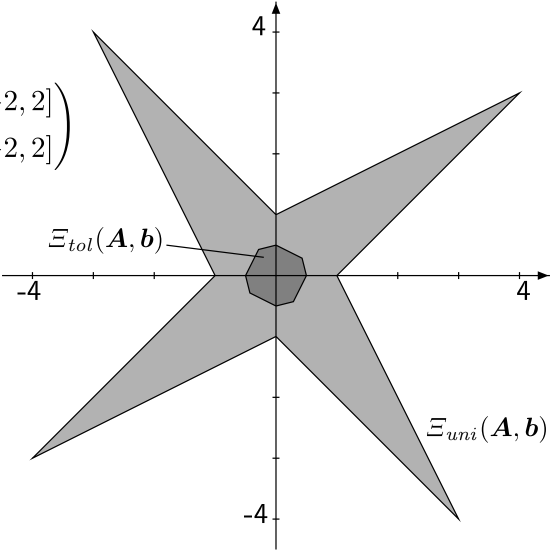
интервальной линейной системы уравнений —

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\,\}$$

— множество решений всевозможных точечных СЛАУ $Ax = b$, для которых произведение Ax при любых $A \in \boldsymbol{A}$ попадает в интервалы правых частей $\boldsymbol{b}$.

Пример — система Барта-Нудинга

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$

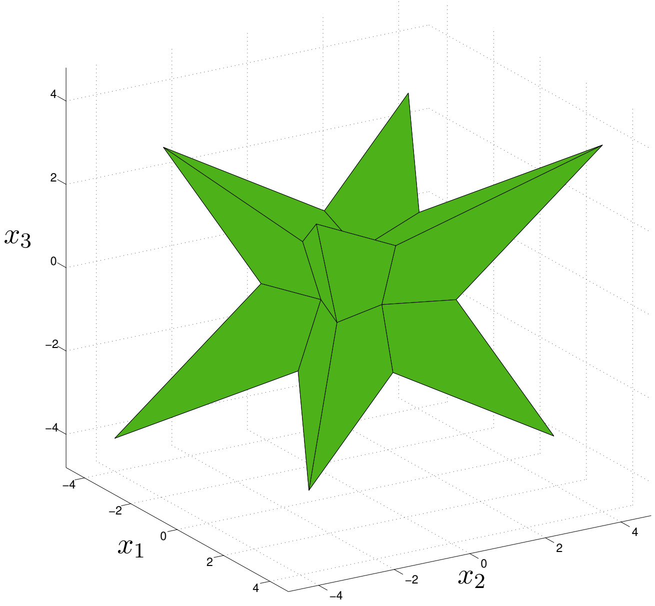


Пример

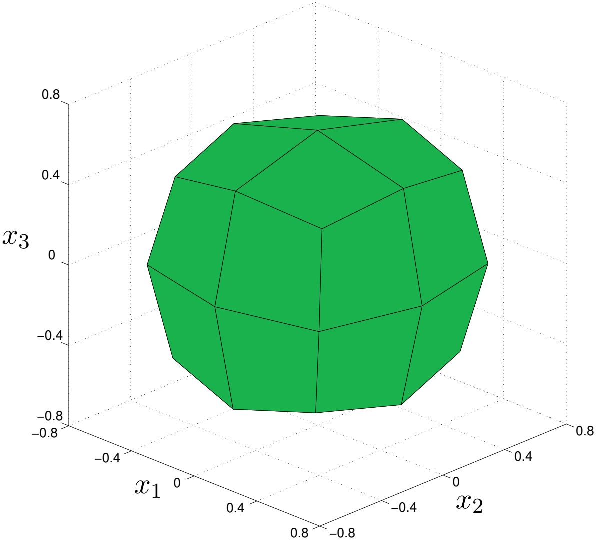
Интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-0.75, 0.65] & [-0.75, 0.65] \\ [-0.75, 0.65] & [2,3] & [-0.75, 0.65] \\ [-0.75, 0.65] & [-0.75, 0.65] & [2,3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$

Её объединённое и допусковое множества решений изображены на следующих слайдах и построенны с помощью пакета `IntLinInc3D`, созданного И.А. Шарой.



Объединёное множество решений нашей интервальной системы



Допусковое множество решений нашей интервальной системы

Интервальные линейные системы уравнений

$$\{\, x \in \mathbb{R}^m \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\}$$

$$\subseteq \ \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\},$$

и поэтому

$$\varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ \subseteq \ \varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$$

— допусковое множество решений
всегда является подмножеством
объединённого множества решений.

Пример пустого допускового множества решений

Допусковое множество решений может быть пустым, если интервалы правой части «слишком узки» в сравнении с интервалами матрицы.

Для интервального уравнения $[1, 2]\, x = [2, 3]$

допусковое множество решений пусто.

Допусковое множество решений

— выпуклое полиэдральное (многогранное) множество, сложность описания которого растёт экспоненциально от числа неизвестных.

Распознавание пустоты / непустоты
допускового множества решений, т. е. того, что $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$

— полиномиально сложная задача:

J. Rohn — 1985 год

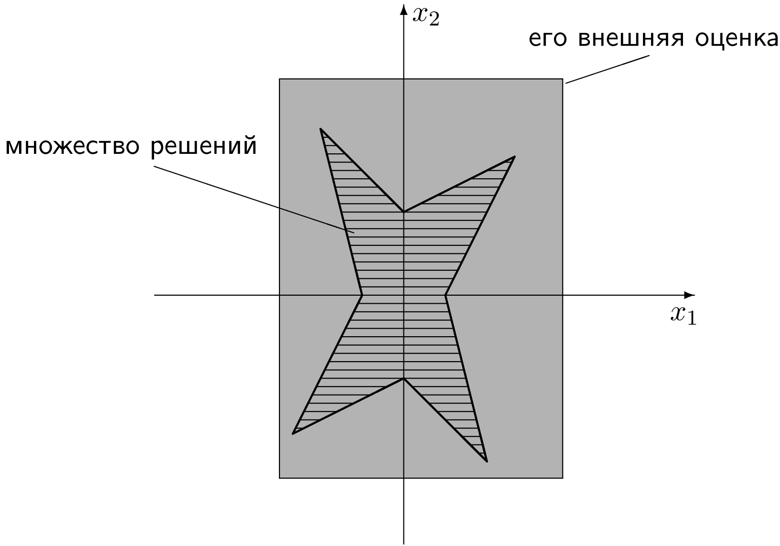
Интервальные линейные системы уравнений

Точное и полное описание множеств решений

- практически невозможно в силу огромной сложности,
- реально не нужно.

В большинстве случаев достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами (т.е. имеющими меньшую конструктивную сложность).

Задача внешнего оценивания («внешняя задача»)



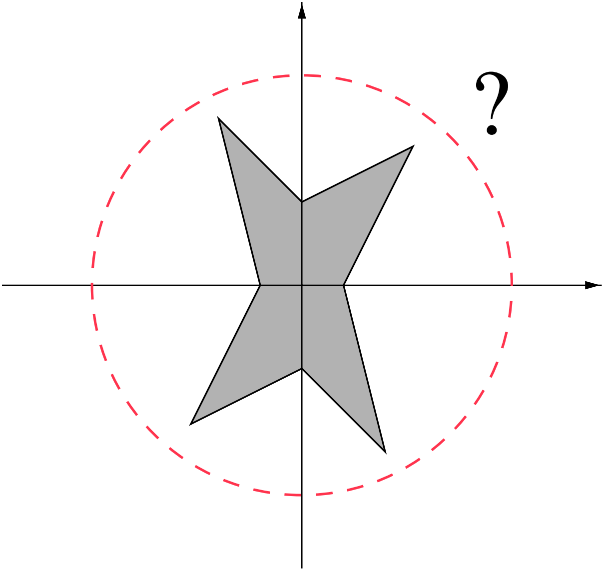
Постановка задачи

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

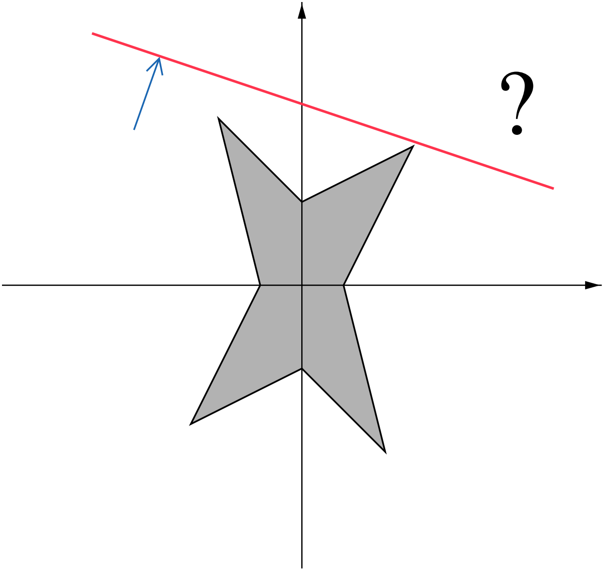
интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ предполагается неособенной

Найти (по-возможности меньший) брус $\boldsymbol{U}$, содержащий множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Задача внешнего оценивания («внешняя задача»)

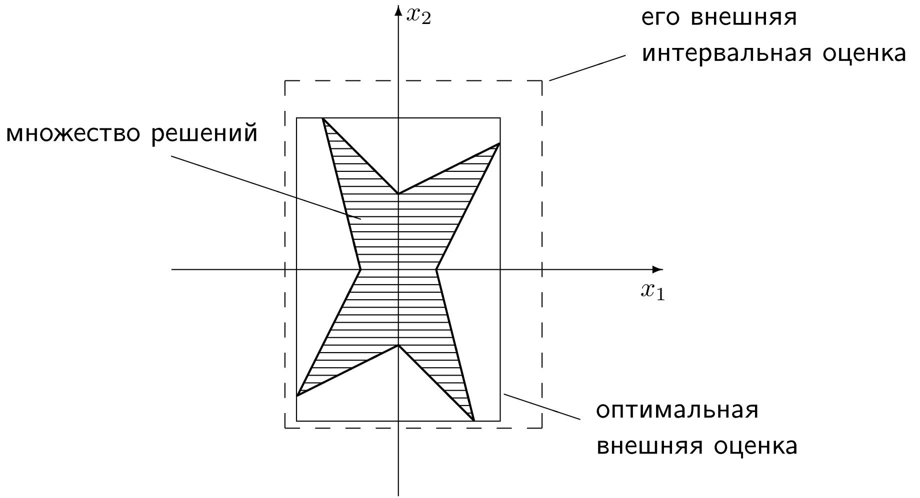


Задача внешнего оценивания («внешняя задача»)

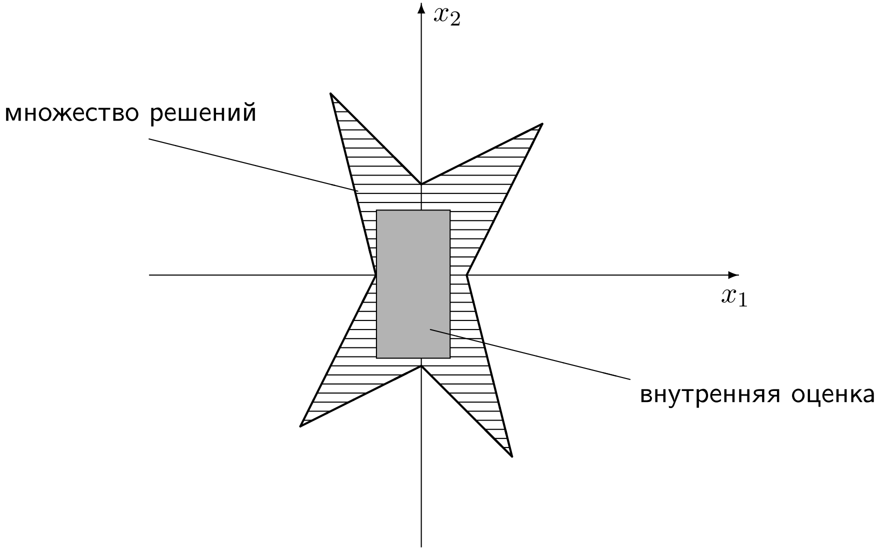


Оптимальное решение «внешней задачи»

— наименьший по включению интервальный вектор-брус, содержащий множество решений



Задача внутреннего оценивания («внутренняя задача»)



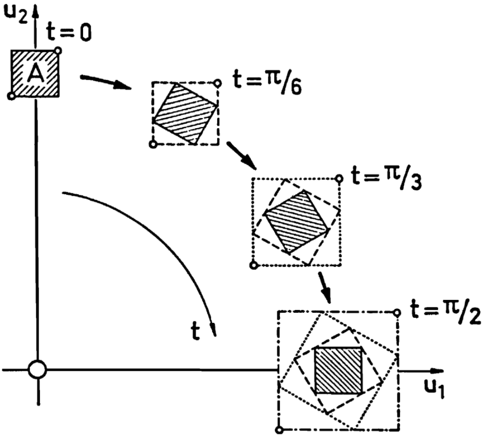
Чем оценивать? . . .

Figure 1. Solution of the differential system

$$\left\{\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= -u_1 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

with the initial data

$u(0) = A$



K. Nickel, How to fight wrapping effect? // Interval Mathematics 1985. – Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo: Springer-Verlag, 1986. – P. 121–132.

«Решение» интервального уравнения или системы

«Решение» интервального уравнения или системы

Нужно уточнить
желаемое множество решений

«Решение» интервального уравнения или системы

Нужно уточнить
желаемое множество решений

Нужно уточнить,
как его оценивать

«Решение» интервального уравнения или системы

Нужно уточнить
желаемое множество решений

Нужно уточнить,
как его оценивать

Нужно уточнить,
чем его оценивать

«Решение» интервального уравнения или системы

Нужно уточнить
желаемое множество решений

Нужно уточнить,
как его оценивать

Нужно уточнить,
чем его оценивать

Нужно уточнить
критерий близости оценки

II. Новый подход

к построению бруса внутренней оценки

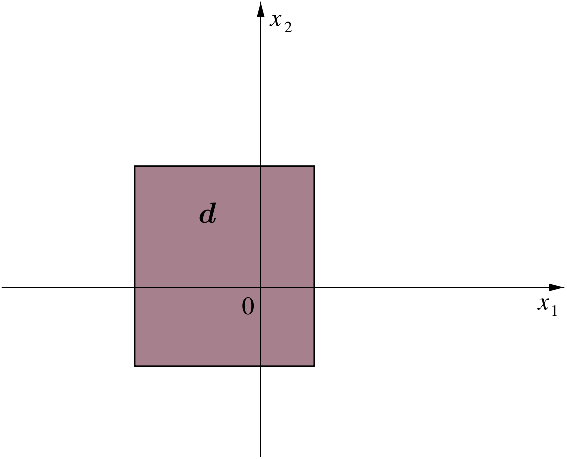
вокруг известного центра

Идея внутреннего оценивания

«Центровой подход» —

- Берём точку во множестве решений.
- «Раздуваем» её, в заданной пропорции, до бруса, проверяя включение во множество решений.

Как располагать оценку и какой формы? ...



— форма и расположение будут задаваться брусом $\boldsymbol{d}$,

таким что $\boldsymbol{d} \ni 0$

Постановка задачи

Дано: Интервальная система линейных уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Точка y из её допускового множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Интервальный вектор-брус $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d} \ni 0$.

Найти: Наибольший по включению интервальный вектор-брус $\boldsymbol{X}$, содержащийся во множестве решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, который расположен относительно y так же, как $\boldsymbol{d}$ относительно нуля.

Критерий бруса внутренней оценки

Факт

Точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A} \cdot \tilde{x} \ \subseteq \ \boldsymbol{b}.$$

Следует из свойства интервального матрично-векторного умножения:

$$\boldsymbol{A}\tilde{x} \ = \ \{\, A\tilde{x} \mid A \in \boldsymbol{A} \,\}.$$

Критерий бруса внутренней оценки

Теорема

Брус $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ является подмножеством допускового множества решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

— И.А. Шарая (2000-е годы)

Доказательство. Необходимость.

Пусть брус $\boldsymbol{X}$ является подмножеством допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, т. е.

$$\boldsymbol{X} \subseteq \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}).$$

Тогда для любого $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$ имеет место $\{\, A\tilde{x} \mid A \in \boldsymbol{A} \,\} \subseteq \boldsymbol{b}$.

Как следствие,

$$\bigcup_{\tilde{x} \in \boldsymbol{X}} \{\, A\tilde{x} \mid A \in \boldsymbol{A} \,\} = \{\, A\tilde{x} \mid A \in \boldsymbol{A},\ \tilde{x} \in \boldsymbol{X} \,\} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Но тогда верно также

$$\text{интервальная оболочка } \{\, A\tilde{x} \mid A \in \boldsymbol{A},\ \tilde{x} \in \boldsymbol{X} \,\} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

В силу свойств интервальных арифметических операций левая часть этого включения совпадает с произведением $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, что и требовалось.

Доказательство. Достаточность.

Пусть брус $\boldsymbol{X}$ удовлетворяет

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Тогда для любого $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$ в силу монотонности интервальных операций по включению справедливо

$$\boldsymbol{A} \cdot \tilde{x} \;\subseteq\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Это означает, что точка $\tilde{x}$ лежит в $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Так как рассуждение применимо к любой $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$,

то в целом $\boldsymbol{X} \subseteq \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

$\blacksquare$

Схема внутреннего оценивания

Пусть известна точка $y \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Всякий брус, который расположен относительно y так же как $\boldsymbol{d}$ относительно нуля, имеет вид $\boldsymbol{X} = y + \alpha\boldsymbol{d}$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Критерием включения бруса $\boldsymbol{X}$ во множество Ξ_{tol} является $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{b}$.

Задача сводится к отысканию максимального $\alpha \geq 0$, для которого

$$\boldsymbol{A}(y + \alpha\boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Итак, необходимо

$$\text{найти} \quad \alpha^\star = \max\left\{\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \boldsymbol{A}(y + \alpha\boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{b} \,\right\}.$$

Метод дихотомии для определения параметра раздутия

выбираем начальный интервал $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$;

DO WHILE $(\overline{\alpha} - \underline{\alpha} > \epsilon)$

$\alpha^\star \ \leftarrow \ \frac{1}{2}(\underline{\alpha} + \overline{\alpha})$;

IF $\boldsymbol{A}\,(y + \alpha^\star \boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{b}$

$\underline{\alpha} \leftarrow \alpha^\star$

ELSE

$\overline{\alpha} \leftarrow \alpha^\star$

END IF

END DO

Нахождение начального интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$

В качестве $\underline{\alpha}$ возьмем нуль,

так как при $\alpha = 0$ брус $\boldsymbol{X}$ совпадает с y.

Число $\overline{\alpha}$ можно взять из условия

$$\boldsymbol{A}\bigl(y + \overline{\alpha}\boldsymbol{d}\bigr) \;\not\subseteq\; \boldsymbol{b}.$$

Например, для этого достаточно

$$\mathrm{wid}\,\bigl(\boldsymbol{A}(y + \overline{\alpha}\boldsymbol{d})\bigr) \geq \mathrm{wid}\,\boldsymbol{b}.$$

Нахождение начального интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$

В силу свойств ширины

$$\begin{aligned} \operatorname{wid}\big(\boldsymbol{A}(y + \overline{\alpha}\boldsymbol{d})\big) \;&\geq\; |\boldsymbol{A}| \cdot \operatorname{wid}\,(y + \overline{\alpha}\boldsymbol{d}) \\ &=\; \overline{\alpha}\,|\boldsymbol{A}| \cdot \operatorname{wid}\,\boldsymbol{d}. \end{aligned}$$

Поэтому если

$$\overline{\alpha}\,|\boldsymbol{A}| \cdot \operatorname{wid}\,\boldsymbol{d} \;\geq\; \operatorname{wid}\,\boldsymbol{b},$$

то включения $\boldsymbol{A}\big(y + \overline{\alpha}\boldsymbol{d}\big) \subseteq \boldsymbol{b}$ быть не может.

Итак, достаточно взять

$$\overline{\alpha} \;=\; \max_{1 \leq i \leq n} \left(\operatorname{wid}\,\boldsymbol{b}_i \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{ij}|\,\operatorname{wid}\,\boldsymbol{d}_j \right).$$

Внутреннее оценивание объединённого множества решений

Для интервальных линейных систем

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

рассмотрим объединённое множество решений

$$\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\}.$$

Характеризация Бекка:

$$\tilde{x} \in \varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \in \boldsymbol{A}\tilde{x} - \boldsymbol{b}.$$

Принадлежность справа эквивалентна включению $0 \subseteq \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{x}$.

Преобразуем его в полной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$.

Полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$

— получена алгебраическим и порядковым пополнением классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$

Элементы $\mathbb{KR}$ — пары $\boldsymbol{x} := [\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,]$, причём не обязательно $\underline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}$

$$\begin{cases} \textit{правильные интервалы } \boldsymbol{x} \ \text{ с } \ \underline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{x}} \\ \textit{неправильные интервалы } \boldsymbol{x} \ \text{ с } \ \underline{\boldsymbol{x}} > \overline{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

Дуализация —

$$\operatorname{dual}[\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,] \ := \ [\,\overline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,]$$

Противоположный элемент —

$$\operatorname{opp}[\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,] \ := \ [\,-\underline{\boldsymbol{x}}, -\overline{\boldsymbol{x}}\,]$$

Добавим к обеим частям включения

$$0 \subseteq \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{x}$$

по $\operatorname{opp}(-\boldsymbol{A}\tilde{x})$, что алгебраически противоположно для $(-\boldsymbol{A}\tilde{x})$:

$$\operatorname{opp}(-\boldsymbol{A}\tilde{x}) \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Композиция opp и умножения на (-1) есть просто дуализация dual. Следовательно, получаем

$$\operatorname{dual}(\boldsymbol{A}\tilde{x}) \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Но $\operatorname{dual}(\boldsymbol{A}\tilde{x}) = (\operatorname{dual}\boldsymbol{A})\,\tilde{x}$, так как $\tilde{x}$ — точечный. Поэтому

$$\tilde{x} \in \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\operatorname{dual}\boldsymbol{A})\,\tilde{x} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

— характеризация в арифметике Каухера для точек из объединённого множества решений интервальной линейной системы.

Критерий бруса внутренней оценки

Теорема

Брус $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ является подмножеством объединённого множества решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{X} \ \subseteq\ \boldsymbol{b}.$$

— И.А. Шарая (2000-е годы)

Критерий бруса внутренней оценки

Теорема

Брус $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ является подмножеством объединённого множества решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{X} \;\subseteq\; \boldsymbol{b}.$$

— И.А. Шарая (2000-е годы)

Доказательство совершенно аналогично доказательству для допускового множества решений.

Схема внутреннего оценивания

Пусть известна точка $y \in \varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Всякий брус, который расположен относительно y так же как $\boldsymbol{d}$ относительно нуля, имеет вид $\boldsymbol{X} = y + \alpha\boldsymbol{d}$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Критерием включения бруса $\boldsymbol{X}$ во множество $\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является $(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{b}$.

Задача сводится к отысканию максимального $\alpha \geq 0$, для которого

$$(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A})(y + \alpha\boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Итак, необходимо

$$\text{найти} \quad \alpha^\star = \max\left\{\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid (\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A})(y + \alpha\boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{b} \,\right\}.$$

Метод дихотомии для определения параметра раздутия

выбираем начальный интервал $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$;

DO WHILE $(\overline{\alpha} - \underline{\alpha} > \epsilon)$

$\alpha^\star \leftarrow \frac{1}{2}(\underline{\alpha} + \overline{\alpha})$;

IF $(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A})(y + \alpha^\star \boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{b}$

$\underline{\alpha} \leftarrow \alpha^\star$

ELSE

$\overline{\alpha} \leftarrow \alpha^\star$

END IF

END DO

Нахождение начального интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$

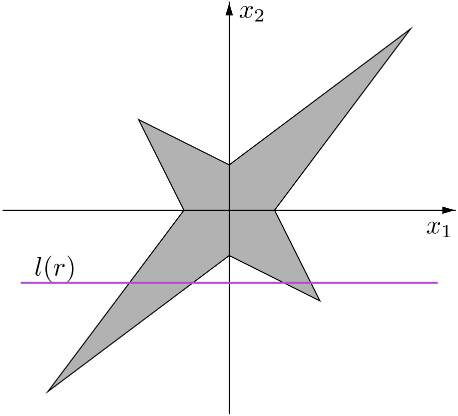
Метод осевых сечений.

Зафиксируем натуральный индекс $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ и рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ прямую линию l с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x_1 = r_1, \\ \vdots \\ x_{\nu-1} = r_{\nu-1}, \\ x_\nu = t, \\ x_{\nu+1} = r_{\nu+1}, \\ \vdots \\ x_n = r_n, \end{cases}$$

где $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$ — вещественные константы,

t — параметр, пробегающий вещественную ось $\mathbb{R}$.



Прямая l, которую будем называть «пробной», параллельна ν-ой координатной оси и полностью задаётся указанием $(n-1)$-мерного вещественного вектора $r = (\, r_1, \ldots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \ldots, r_n)^\top$.

Для указания параметров этой прямой используем обозначение $l(r)$.

«Подставим» параметрическое уравнение пробной прямой в интервальную систему уравнений —

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}.$$

Она превратится в «распавшуюся» систему из m одномерных линейных уравнений с интервальными коэффициентами и одной неизвестной переменной t:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{a}_{1\nu}t & + & \displaystyle\sum_{j=1,\,j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{1j}r_j & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m\nu}t & + & \displaystyle\sum_{j=1,\,j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{mj}r_j & = & \boldsymbol{b}_m. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Содержательный смысл этой процедуры:

При подстановке параметрического уравнения пробной прямой в точечную систему $Ax = b$ получаем некоторую систему из m одномерных уравнений, которая совпадает по структуре с $(*)$, но имеет вещественные коэффициенты.

Далее варьируем элементы a_{ij} матрицы и элементы b_i вектора правой части в пределах интервалов $\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$ соответственно.

Ясно, что множество всех полученных таким образом точечных систем уравнений как раз таки образует $(*)$.

Множество решений i-го уравнения системы $(*)$ есть

$$\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} r_j \right) \Big/ \boldsymbol{a}_{i\nu} \qquad (\blacklozenge)$$

В качестве «$/$» может потребоваться деление в расширенной арифметике Кэхэна, разрешающей нульсодержащие делители.

Множество решений i-го уравнения системы $(*)$ есть

$$\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} r_j \right) \Big/ \boldsymbol{a}_{i\nu} \qquad (\blacklozenge)$$

В качестве «$/$» может потребоваться деление в расширенной арифметике Кэхэна, разрешающей нульсодержащие делители.

Помимо обычных интервалов из $\mathbb{IR}$ элементами интервальной арифметики Кэхэна являются $]-\infty, p] \cup [q, +\infty[$, $]-\infty, p]$ и $[q, +\infty[$.

Результаты сложения, вычитания, умножения и деления $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$ при $0 \notin \boldsymbol{b}$ в классической интервальной арифметике и арифметике Кэхэна полностью совпадают. Но в арифметике Кэхэна определено ещё деление обычных интервалов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$, с $0 \in \boldsymbol{b}$.

Каждое из одномерных уравнений, образующих систему $(*)$, можем решить отдельно от других, а затем пересечь все получившиеся при этом множества решений $(\blacklozenge)$ друг с другом.

В пределах всех интервалов, входящих в систему $(*)$, коэффициенты изменяются независимо друг от друга, как и в исходной ИСЛАУ.

Поэтому результат раздельного решения уравнений и пересечения их одномерных множеств решений, даёт множество значений ν-ой координаты точек из $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r)$.

Пересечение получающихся интервалов-результатов организуется по формуле

$$\boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y} = \big[\max\{\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\}, \min\{\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}\}\big].$$

III. Обобщения

на множества кванторных решений

Двойственный характер интервальной неопределённости

— вытекает из двойственного смысла, который имеет интервал, как множество значений некоторой величины:

1. С одной стороны, интервал $[\underline{a}, \overline{a}]$ может представлять множество *всех* вещественных чисел, заключённых между концами $\underline{a}$ и $\overline{a}$.

2. С другой, интервал может быть вместилищем, двусторонними границами для какого-то *одного* числа между $\underline{a}$ и $\overline{a}$.

Двойственный характер интервальной неопределённости

Интервалы параметров допускают двоякую трактовку.

1. С одной стороны, интересующие нас свойства, условия и т. п. могут выполняться для всех значений из рассматриваемого интервала (бруса).

2. С другой стороны, эти свойства или условия могут выполняться лишь для некоторых (в крайнем случае — для одного) значения из интервала (бруса и т. д.).

Двойственный характер интервальной неопределённости

Пусть задано какое-либо свойство $\mathcal{P}(v)$, которое может выполняться или не выполняться для v из интервала параметров.

Например, $\mathcal{P}(v)$ может иметь вид:

«v является решением данного уравнения»,

«v является решением рассматриваемой задачи»

с параметрами, которые принимают значения из интервалов.

Принципиально различные ситуации:

1) свойство $\mathcal{P}(v)$ выполнено для *всех* значений $v \in \boldsymbol{v}$,

2) свойство $\mathcal{P}(v)$ выполнено для *некоторых* значений $v \in \boldsymbol{v}$.

Двойственный характер интервальной неопределённости

— хорошо описывается с помощью логических кванторов:

– в первом случае мы пишем «$(\forall v \in \boldsymbol{v})\,\mathcal{P}(v)$»
и говорим об *интервальной A-неопределённости*,

– во втором случае мы пишем «$(\exists v \in \boldsymbol{v})\,\mathcal{P}(v)$»
и говорим об *интервальной E-неопределённости*.

$\Rightarrow$ при работе с интервалами и постановке интервальных задач нужно различать эти типы интервальной неопределённости.

Двойственный характер интервальной неопределённости

— на этом пути возникают понятия кванторных решений
и AE-решений интервальных систем уравнений, неравенств и т. д.:
комбинируем кванторы с интервальными параметрами …

Но логические кванторы разного смысла не перестановочны:

$$\forall u \, \exists v \, \mathcal{P} \quad \not\equiv \quad \exists v \, \forall u \, \mathcal{P}$$

Если интервальная система уравнений

имеет N интервальных параметров,

то общее количество её кванторных множеств решений $\gg 2^N$.

Двойственный характер интервальной неопределённости

Удобна терминология, предложенная И.И. Ерёминым:

- Свойства, условия и пр., зависящие от интервального параметра с A-неопределённостью, т. е. выполняющиеся для всех значений параметра из заданного интервала, назовём сильными.
- Свойства, условия и пр., зависящие от интервального параметра с E-неопределённостью, т. е. выполняющиеся для некоторых значений параметра из заданного интервала, назовём слабыми.

AE-решения интервальных уравнений и систем

Кванторные решения интервальных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет AE-форму, т. е. в котором все вхождения квантора всеобщности “$\forall$” предшествуют вхождениям квантора существования “$\exists$”, называются AE-*решениями*.

Эти решения являются частным случаем кванторных решений, которые получаются фиксацией специального порядка логических кванторов в логической формуле (выделяющем предикате), определяющей решения.

Пусть $m \times n$-кванторная матрица $\mathcal{A} \in \{\forall, \exists\}^{m \times n}$ и m-кванторный вектор $\beta \in \{\forall, \exists\}^m$ задают типы неопределённости отдельных интервальных параметров $\boldsymbol{a}_{ij}$, $\boldsymbol{b}_i$ в матрице и правой части интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Введём вспомогательные интервальные матрицы $\boldsymbol{A}^{\forall} = (\boldsymbol{a}^{\forall}_{ij})$, $\boldsymbol{A}^{\exists} = (\boldsymbol{a}^{\exists}_{ij})$ и векторы $\boldsymbol{b}^{\forall} = (\boldsymbol{b}^{\forall}_i)$, $\boldsymbol{b}^{\exists} = (\boldsymbol{b}^{\exists}_i)$, имеющие те же размеры, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно, и образованные элементами:

$$\boldsymbol{a}^{\forall}_{ij} := \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}^{\forall}_i := \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \exists, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}^{\exists}_{ij} := \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}^{\exists}_i := \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \forall. \end{cases}$$

Тогда множество AE-решений для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ можно также определить как множество

$$\varXi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A' \in \boldsymbol{A}^{\forall})\,(\forall b' \in \boldsymbol{b}^{\forall})\,(\exists A'' \in \boldsymbol{A}^{\exists})\,(\exists b'' \in \boldsymbol{b}^{\exists}) \big((A' + A'')\,x = b' + b''\big) \big\}.$$

Справедлива следующая эквивалентная характеризация AE-решений в терминах полной интервальной арифметики Каухера:

$$x \in \varXi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(\boldsymbol{A}^{\forall} + \operatorname{dual}\boldsymbol{A}^{\exists}\big)\,x \subseteq \operatorname{dual}\boldsymbol{b}^{\forall} + \boldsymbol{b}^{\exists},$$

где “dual” означает оператор дуализации $\operatorname{dual} : \mathbb{KR} \to \mathbb{KR}$, меняющий местами концы интервала, т. е. такой, что $\operatorname{dual}[\,\underline{z}, \overline{z}\,] = [\,\overline{z}, \underline{z}\,]$.

IV. Сравнение с другими методами

Центровой подход

Теорема

Пусть точка $y \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений интервальной линейной $m \times n$-системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, т. е. $y \in \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, и пусть

$$\varrho \;:=\; \min_{1 \le i \le m} \; \max_{A \in \boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} |} \right\},$$

$$\boldsymbol{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^{\top}.$$

Тогда $\varrho \ge 0$ и интервальный вектор $\boldsymbol{U} = (y + \varrho \boldsymbol{e})$ с центром в y целиком лежит во множестве решений $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Может быть, этот результат потерял своё значение? ...

Может быть, этот результат потерял своё значение? . . .

Нет.

Результат имеет смысл для интервальный линейных систем со связанными параметрами, в частности, симметричных, кососимметричных и т. п. интервальных систем уравнений.

V. Сравнение с другими методами

Формально-алгебраический подход

Формальные решения интервальных уравнений

Определение

Интервал (интервальный вектор) называется *формальным решением* интервальной системы уравнений, если подстановка его в эту систему и выполнение всех интервальных арифметических, аналитических и т.п. операций приводят к равенству.

Определение

Интервал (интервальный вектор) называется *формальным решением* интервальной системы уравнений, если подстановка его в эту систему и выполнение всех интервальных арифметических, аналитических и т.п. операций приводят к равенству.

— обычное общематематическое понимание

«решения уравнения»

Определение

Интервал (интервальный вектор) называется *формальным решением* интервальной системы уравнений, если подстановка его в эту систему и выполнение всех интервальных арифметических, аналитических и т.п. операций приводят к равенству.

S. Berti (1969) — без названия

H. Ratschek & W. Sauer (1982) — *алгебраическое решение*

Лучше всего находить формальные решения

в полной интервальной арифметике Каухера.

Формально-алгебраический подход

Внешнее оценивание объединённого множества решений

(Апостолатос–Кулиш, Алефельд, Херцбергер)

Объединённое множество решений интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ совпадает с множеством решений системы в рекуррентном виде

$$x = \big(I - \boldsymbol{A}\big)\,x + \boldsymbol{b}, \tag{$\star$}$$

где I — единичная матрица.

Формальное решение интервальной системы ($\star$) даёт внешнюю интервальную оценку для объединённого множества решений, если

$$\rho\big(|I - \boldsymbol{A}|\big) < 1.$$

Формально-алгебраический подход

Внутреннее оценивание допускового множества решений

(русский фольклор)

Правильное формальное решение интервальной системы

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

(имеющей тот же вид, что и исходная интервальная система) даёт внутренний брус для допускового множества решений.

В большинстве случаев этот брус максимален по включению.

Формально-алгебраический подход

Внутреннее оценивание допускового множества решений

(русский фольклор)

Правильное формальное решение интервальной системы

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

(имеющей тот же вид, что и исходная интервальная система) даёт внутренний брус для допускового множества решений.

В большинстве случаев этот брус максимален по включению.

Если $\tilde{x} \in \boldsymbol{x}_a$, то $\boldsymbol{A}\tilde{x} \in \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Формально-алгебраический подход

Задача оценивания множества решений (внутреннего, внешнего или другого)

⇙

Задача нахождения формального решения некоторой специальной вспомогательной интервальной системы уравнений

Формально-алгебраический подход

Задача оценивания множества решений (внутреннего, внешнего или другого)

⇙

Задача нахождения формального решения некоторой специальной вспомогательной интервальной системы уравнений

Преимущество: эффективность и универсализм.

Недостаток: формальное решение вспомогательного интервального уравнения не обязательно существует и не всегда может быть проинтерпретировано.

Формально-алгебраический подход

Внутреннее оценивание объединённого множества решений

Для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ правильное формальное решение системы

$$(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A})\,x = \boldsymbol{b},$$

где dual — дуализация в арифметике Каухера (переворачивание концов интервалов), даёт внутреннюю интервальную оценку объединённого множества решений.

В большинстве случаев этот брус также максимален по включению.

Вычисление формальных решений ИСЛАУ

- Стационарные итерационные методы
- Субдифференциальный метод Ньютона

Вычисление формальных решений ИСЛАУ

- Стационарные итерационные методы
- Субдифференциальный метод Ньютона

Субдифференциальный метод Ньютона

находит формальное решение, как правило,

за конечное небольшое число шагов.

Формально-алгебраический подход

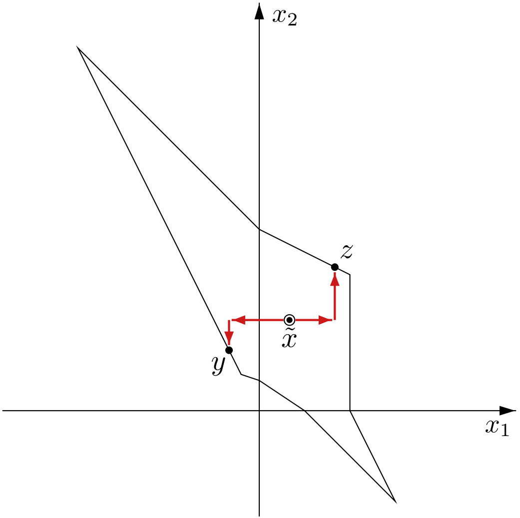
Недостатки:

- К сожалению, только квадратные линейные системы.
- Управлять положением бруса внутренней оценки нелегко.

VI. Сравнение с другими методами

Неотрицательные интервальные линейные системы

Как работает алгоритм `NonNeg`



— тоже полиномиально сложный алгоритм

Спасибо за внимание!