Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–март, 2005. Том VIII, № 1(21)

УДК 517.926

К ТЕОРИИ РЕАЛИЗАЦИИ СИЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ. I*)

А. В. Данеев, А. В. Лакеев,
В. А. Русанов, М. В. Русанов

Исследованы тополого-алгебраические характеристики ОЛД- и РЛД-расширений и на их основе проведен качественный анализ существования сильных дифференциальных (A, B)-моделей, реализуемых над множествами наблюдаемых динамических процессов (семействами пар траектория — управление), допускающими апостериорное расширение.

Проблема элементарного (одноэлементного) алгебраического расширения обыкновенного линейно-дифференциального совместимого (ОЛД-совместимого) множества (по терминологии [1] (A, B)-множества) впервые была поставлена авторами в [2, 3]. Настоящая работа и круг рассматриваемых в ней вопросов возникли в связи с определившимися приложениями [4, 5] весьма продвинутой теории реализации сильных дифференциальных моделей [6–8], примыкающих к математическому моделированию сложных динамических объектов по результатам наблюдений их функционирования.

В методологическом плане теорию реализации можно рассматривать как первый шаг на пути построения теории структурной идентификации систем. В частности, Р. Калман, утверждая, что в теории систем задача реализации играет центральную роль [9, с. 267], сформулировал следующую позицию: «Мы рассматриваем сейчас задачу реализации как попытку угадать уравнения движения динамической системы по поведению ее входных и выходных сигналов или как задачу построения физической модели, объясняющей экспериментальные данные» [9, с. 286].

1. Постановка задач ОЛД- и РЛД-расширений

В этом разделе помимо формулировки проблемы существования обыкновенных линейно-дифференциальных расширений (ОЛД-расширений) и распределенных линейно-дифференциальных расширений (РЛД-расширений) приводятся базовые определения теории реализации непрерывных нестационарных динамических систем, а также вводятся обозначения и устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения. С этой целью рассмотрим класс линейных многомерных систем управления, описываемых векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) \doteq A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где μ — мера Лебега на T; символ $\doteq$ обозначает отношение равенства почти всюду в T относительно меры μ; $u(\cdot) \in \mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m)$; $x(\cdot) \in \mathrm{AC}(T, \mathbb{R}^n)$ —

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00898), Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект Б–0077) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (программа 19, проект 2.5).

решение типа Каратеодори (K-решение); $A(\cdot) \in \mathrm{L}_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$; $B(\cdot) \in \mathrm{L}_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$; здесь $p, p' \in (1, \infty)$, $1/p' + 1/\mathrm{p} = 1$ и $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство всех линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$; пару $(A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathrm{L}_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \times \mathrm{L}_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ будем называть (A, B)-моделью дифференциальной системы (1) (AC и L_p — «стандартные» функциональные пространства абсолютно непрерывных вектор-функций и классов эквивалентности всех μ-интегрируемых по Бохнеру [10, с. 96] на T вектор-функций с L_p-нормой).

На фиксированном множестве N из $\Pi_{\mathrm{ACL}} = \mathrm{AC}(T, \mathbb{R}^n) \times \mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m)$ рассмотрим два структурных свойства (ограничений на $\mathrm{Card}\, N$ — мощность множества N — не накладываем), центральных в дальнейшем изложении.

Определение 1 [3]. Подмножество $P \subset N$ обладает:

— обыкновенной линейно-дифференциальной совместимостью (ОЛД-совместимостью), если либо $P = \emptyset$, либо существует дифференциальная система (1) такая, что P лежит в классе ее K-решений;

— распределенной линейно-дифференциальной совместимостью (РЛД-совместимостью) класса k, когда либо $P = \emptyset$, либо любые k элементов из $\mathrm{abs\,co}(P)$ образуют ОЛД-совместимое множество (здесь $\mathrm{abs\,co}(P)$ означает абсолютно выпуклую оболочку множества P).

Замечание 1. Наличие у множества P свойства ОЛД-совместимости не гарантирует единственность (A, B)-модели, для которой система (1) «реализует» P. Свойство РЛД-совместимости произвольного класса не является достаточным для ОЛД-совместимости. При этом условие абсолютной выпуклости множества $\mathrm{abs\,co}(P)$ существенно, так как возможно положение, когда любой «набор» из k элементов выпуклой оболочки множества P является ОЛД-совместимым, в то время как само P не обладает РЛД-совместимостью класса k.

Свойства ОЛД- и РЛД-совместимости являются инвариантными относительно действия оператора Span, где $\mathrm{Span}(P)$ — линейная оболочка множества P (принцип суперпозиции [11]). Это означает, что P является ОЛД- или РЛД-совместимым множеством тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает $\mathrm{Span}\, P$. Ниже неоднократно будем пользоваться этой особенностью оператора Span без каких-либо дальнейших на то ссылок, но здесь отметим, что именно с этой особенностью формирования линейной оболочки согласовано

Определение 2 [1–3]. Пусть P^* $(P^\sharp)$ — максимальное подмножество из N со свойством ОЛД-совместимости (РЛД-совместимости класса k). Тогда линейное пространство E^* $(E^\sharp)$, натянутое на P^* $(P^\sharp)$, назовем обыкновенным пластом над N (распределенным пластом класса k над N), и если $N \subset E^*$ $(E^\sharp)$, то будем говорить, что он однородный.

Замечание 2. Может случиться так, что над N существует как обыкновенный, так и распределенный пласт (при этом они могут не совпадать и быть не единственными) или существует распределенный однородный пласт произвольного класса, но отсутствует какой бы то ни было обыкновенный.

Следующее утверждение показывает, что свойство РЛД-совместимости произвольного класса есть свойство конечного характера [12, с. 28] (чего нельзя сказать в отношении ОЛД-совместимости).

Предложение 1. *Пусть $N \subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ и k — натуральное число. Тогда свойство РЛД-совместимости класса k в N есть свойство конечного характера.*

Доказательство. Если $N = \emptyset$, то предложение тривиально, поэтому положим $N \neq \emptyset$. Допустим, что N — непустое РЛД-совместимое множество класса k, $D \subset N$, и пусть D^* — произвольное конечное подмножество в D. Тогда поскольку $\mathrm{abs\,co}(D^*) \subset \mathrm{abs\,co}(D)$, то любой набор из k элементов от $\mathrm{abs\,co}(D^*)$ будет ОЛД-совместимым подмножеством, следовательно, D^* — РЛД-совместимое множество класса k. Теперь покажем обратное. Пусть K^* — произвольный РЛД-совместимый набор класса k из k элементов от множества N и, следовательно, от $\operatorname{abs}\operatorname{co}(N)$. Поскольку множество K^* конечно, то всякий набор из k элементов от $\operatorname{abs}\operatorname{co}(K^*)$ является ОЛД-совместимым и, в частности, ОЛД-совместимо само множество K^*, откуда N является РЛД-совместимым множеством класса k. Доказательство завершено.

Предложение 1 показывает, что всякое $N \subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ в соответствии с леммой Тейхмюллера — Тьюки [12, с. 28] либо не содержит ни одного непустого подмножества со свойством РЛД-совместимости (а значит, и ОЛД-совместимости), либо над N заведомо существует распределенный пласт (возможно, не единственный), причем вопрос о реализации для обыкновенного пласта формализует

Определение 3 [1]. Если для подмножества N существует обыкновенный пласт E^*, то (A, B)-модель, для которой система (1) реализует пласт E^*, называется сильной (A, B)-моделью над N, и если $N \subset E^*$, то данная модель называется сильной неопровержимой (A, B)-моделью над N.

Обозначим через $H_{p'}$ декартово произведение банаховых пространств $\mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^n) \times \mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m)$ с нормой

$$\|(\omega_1, \omega_2)\|_{H_{p'}} = \left(\int\limits_T \left(\|\omega_1(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|\omega_2(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\right)\mu(dt)\right)^{1/p'},$$
$$\omega_1 \in \mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^n), \quad \omega_2 \in \mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m).$$

Пусть $L(H_{p'}, \mathbb{R}^n)$ — пространство всех линейных операторов, действующих из $H_{p'}$ в $\mathbb{R}^n$. (Напомним, что по терминологии [1] конструкция $L(H_{p'}, \mathbb{R}^n)$ — пространство ξ-моделей.) Обозначим через $\|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{L(H_{p'},\mathbb{R}^n)}$ операторные нормы в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $L(H_{p'}, \mathbb{R}^n)$, и пусть $\mathbb{L}_p = \mathrm{L}_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \times \mathrm{L}_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $p \in (1, \infty)$, — банахово пространство (A, B)-моделей с нормой

$$\|(A, B)\|_{\mathbb{L}_p} = \left(\int\limits_T \left(\|A(t)\|^p_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} + \|B(t)\|^p_{L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}\right)\mu(dt)\right)^{1/p}.$$

Теперь установим топологическое строение пластов в пространстве $H_{p'}$.

Предложение 2. *Пусть k — натуральное число, E — обыкновенный пласт над Π_{ACL}. Тогда:*
а) *E — распределенный пласт класса k над Π_{ACL};*
б) *пласт E замкнут в $H_{p'}$.*

Доказательство. а) Рассуждаем от противного. Пусть линейное пространство $E_1 = \mathrm{Span}\{E \cup \{(x^*, u^*)\}\}$ обладает РЛД-совместимостью класса k для некоторого ОЛД-совместимого одноточечного множества $\{(x^*, u^*)\} \not\subset E$. В силу леммы 1 [1] и теоремы 4 [13] пласт E — множество всех допустимых пар $(x, u) \in \Pi_{\mathrm{ACL}}$ некоторой единственной дифференциальной системы (1). Выберем в E пару (x^{**}, u^*) такую, что $x^{**}(t_0) = x^*(t_0)$. Тогда $(x^{**}, u^*) - (x^*, u^*) = (x^{**} - x^*, 0) \in E_1$, где $x^{**} - x^* \neq 0$ (поскольку $(x^*, u^*) \notin E$). Таким образом, $(x^{**} - x^*, 0)$ — ненулевое решение некоторой однородной системы (1) с нулевым начальным условием (по вектору состояния) в t_0; получаем противоречие.

б) Как было отмечено выше, существует единственная дифференциальная система (1) такая, что E — класс всех ее допустимых пар $(x, u) \in \Pi_{\mathrm{ACL}}$, откуда, используя принцип суперпозиции [11, с. 63], имеем $E = V + U$, где $V = \{(x, u) \in E : u(\cdot) = 0\}$, $U = \{(x, u) \in E : x(t_0) = 0,\, u \in \mathrm{L}_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m)\}$.

Так как V — конечномерное подпространство (как линейное многообразие всех решений однородной системы (1)), то в соответствии с теоремой 1.42 [12, с. 41] утверждение б) будет доказано, коль скоро установим, что линейное многообразие U замкнуто в $H_{p'}$.

Очевидно, что топология в $H_{p'}$ совпадает с топологией произведения банаховых пространств $\mathrm{L}_{p'}(T,\mu,\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{L}_{p'}(T,\mu,\mathbb{R}^m)$. Далее, в соответствии с формулой Коши (о представлении решения линейного дифференциального уравнения) U — график оператора $J\colon \mathrm{L}_{p'}(T,\mu,\mathbb{R}^m)\to \mathrm{AC}(T,\mathbb{R}^n)$ вида

$$J(u)(t)=K(t)\int\limits_{T_t} K^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\mu(d\tau),$$

где $K\colon T\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ — оператор Коши уравнения $\dot{x}(t)\doteq A(t)x(t)$ и T_t — интервал $[t_0,t]\subset T$. Как легко показать, оператор J является непрерывным, а значит, в силу следствия 2.3.22 [12, с. 136] график оператора J замкнут в $H_{p'}$.

Следствие 1. *Замыкание ОЛД-совместимого множества в пространстве $H_{p'}$ является ОЛД-совместимым.*

В силу следствия 1 любое ОЛД-совместимое множество, не замкнутое в пространстве $H_{p'}$, всегда можно топологически расширить (действием оператора замыкания Куратовского [12, с. 36]) до его замыкания в $H_{p'}$ с сохранением свойства ОЛД-совместимости (что не всегда справедливо по отношению к свойству РЛД-совместимости). По этой причине такое расширение ОЛД-совместимого множества будем называть элементарным топологическим ОЛД-расширением. Введенная конструкция наводит на очевидный вопрос: существуют ли в пространстве $H_{p'}$ незамкнутые линейные многообразия, обладающие свойством ОЛД-совместимости (т. е. допускающие элементарное топологическое ОЛД-расширение). Следующий простой пример поможет обнаружить одну из схем их образования.

Пример 1. Пусть N — счетная линейно независимая система элементов из некоторого обыкновенного пласта. Пронумеруем элементы из N, и пусть $P_j=\{(x_i,u_i)\in N : i=1,\ldots,j\}$, $E=\cup\{\operatorname{Span}P_j : j=1,2,\ldots\}$. Ясно, что E — обыкновенный однородный пласт над N. Поскольку $\operatorname{Span}P_j$ — собственное подпространство в $\operatorname{Span}P_k$ при $j<k$, то $\operatorname{Span}P_j$, $j=1,2,\ldots$, нигде не плотно в E и, следовательно, E — множество первой категории в себе, откуда в силу теоремы Бэра E не плотно, а значит, и не замкнуто в пространстве $H_{p'}$. По ходу рассмотрения примера получаем

Следствие 2. *Если обыкновенный или распределенный пласт над $N\subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ замкнут в $H_{p'}$, то его базис Гамеля либо конечный, либо несчетный.*

Некоторые важные предложения об ОЛД- и РЛД-расширениях (точные определения будут даны ниже) подмножеств из Π_{ACL}, имеющие место для элементарного топологического ОЛД-расширения, не могут быть выведены исключительно на основе действия оператора замыкания и даже не выполняются, вообще говоря, для произвольных множеств из Π_{ACL} (в частности, со свойством РЛД-совместимости). Поэтому естественно выделить из совокупности подобных подмножеств специальные пары, аналитические структуры которых удовлетворяют тем или иным дополнительным условиям, позволяющим, в свою очередь, судить о возможности конструирования из компонент таких пар новых расширенных множеств с заданными свойствами ОЛД- и РЛД-совместимости.

Определение 4. Пусть $E_1,E_2\subset\Pi_{\mathrm{ACL}}$ — ненулевые линейные многообразия, обладающие свойством ОЛД-совместимости (аналогично, свойством РЛД-совместимости класса k). Алгебраическим ОЛД-расширением (алгебраическим

РЛД-расширением класса k) пары (E_1, E_2) назовем линейное множество E_1+E_2, если и только если последнее является ОЛД-совместимым (обладает свойством РЛД-совместимости класса k) и $E_1 \neq E_1 + E_2 \neq E_2$.

Замечание 3. Если некоторая пара (E_1, E_2) допускает алгебраическое ОЛД-расширение, то пара $([E_1]_{H_{p'}}, [E_2]_{H_{p'}})$, где $[E_1]_{H_{p'}}$, $[E_2]_{H_{p'}}$ — элементарные топологические ОЛД-расширения соответственно множеств E_1 и E_2, таковым свойством может не обладать (см. ниже полезное уточнение этого замечания в следствии 3). Тот факт, что $[E_1]_{H_{p'}}$ и $[E_2]_{H_{p'}}$ представляют линейные многообразия в пространстве входов $H_{p'}$, обладающие свойством ОЛД-совместимости, — прямая констатация пункта (c) теоремы 1.13 [14, с. 18] и следствия 1.

Нашей ближайшей целью является построение содержательной теории ОЛД- и РЛД-расширений (для РЛД-совместимости ограничимся РЛД-расширением класса 1).

2. Геометрические критерии ОЛД- и РЛД-расширений

В этом разделе рассмотрим способы (критерии) алгебраических ОЛД- и РЛД-расширений. Начнем с введения структуры, которая потребуется для формализации понятия, связанного с «угловой обособленностью» элементов и подпространств пространства $H_{p'}$.

Определение 5 [15]. Угловым расстоянием между векторами g и m, $g, m \neq 0$, банахова пространства $(H_{p'}, \|\cdot\|_{H_{p'}})$ назовем число

$$\gamma[g,m] = \left\| \frac{g}{\|g\|_{H_{p'}}} - \frac{m}{\|m\|_{H_{p'}}} \right\|_{H_{p'}}.$$

Если G и M — подпространства в $H_{p'}$ такие, что $G, M \neq \{0\}$, то число

$$\gamma[G,M] = \inf\{\gamma[g,m] : g \in G \setminus \{0\},\, m \in M \setminus \{0\}\}$$

назовем угловым расстоянием между подпространствами G и M. Функцию $\gamma[\cdot,\cdot]$, сопоставляющую паре (G, M) число $\gamma[G, M]$ (аналогично, паре (g, m) число $\gamma[g, m]$) будем называть угловым расстоянием.

Пусть $E_1, E_2 \subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ — некоторые линейные ОЛД-совместимые множества, и пусть F — семейство классов эквивалентности $\pmod{\mu}$ всех характеристических функций на элементах из σ-алгебры ρ_μ μ-измеримых подмножеств из T. Обозначим через Ω_1 и Ω_2 замыкания в пространстве $H_{p'}$ соответственно множеств $\mathrm{Span}\{(\chi x, \chi u) : \chi \in F, (x,u) \in E_1\}$ и $\mathrm{Span}\{(\chi x, \chi u) : \chi \in F, (x,u) \in E_2\}$. Подпространство Ω_j, $j = 1, 2$, будем называть сигнатурой в $H_{p'}$ линейного многообразия E_j. Сформулируем простое достаточное условие ОЛД-расширения.

Теорема 1. *Линейное многообразие $E_1 + E_2$ является алгебраическим ОЛД-расширением пары (E_1, E_2), если $\gamma[\Omega_1, \Omega_2] > 0$, где γ — функция углового расстояния в $H_{p'}$ и Ω_j — сигнатура линейного многообразия E_j, $j = 1, 2$.*

Доказательство. Поскольку $\gamma[\Omega_1, \Omega_2] > 0$, то $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Следовательно, $E_1 \neq E_1 + E_2 \neq E_2$, при этом любая пара $(x_0, u_0) \in E_1 + E_2$ единственным образом представляется в виде $(x_0, u_0) = (x_1, u_1) + (x_2, u_2)$, $(x_1, u_1) \in E_1$, $(x_2, u_2) \in E_2$. Далее, в соответствии с теоремой 2 [1] для любого множества $S \in \rho_\mu$ будет $\nu_1^-(S) \leq \big(\nu_1^+(S)\big)^{1/p}(\nu_1(S))^{1/p'}$ и $\nu_2^-(S) \leq (\nu_2^+(S))^{1/p}\big(\nu_2(S)\big)^{1/p'}$,

$p \in (1, \infty)$, $1/p' + 1/p = 1$, где

$$\begin{aligned} \nu_1^-(S) &= \int_S \|\dot{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt), \quad \nu_1(S) = \int_S \left(\|x_1(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|u_1(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\right)\mu(dt), \\ \nu_2^-(S) &= \int_S \|\dot{x}_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt), \quad \nu_2(S) = \int_S \left(\|x_2(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|u_2(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\right)\mu(dt) \end{aligned} \tag{2}$$

— абсолютно непрерывные относительно μ и не зависящие от «конкретизаций» S и (x_0, u_0), ν_1^+ и ν_2^+ — некоторые положительные меры. В силу теоремы 2 [1] справедливость теоремы 1 будет установлена, как только покажем, что существует такая положительная мера ν_+, абсолютно непрерывная относительно μ, что при произвольном выборе пары (x_0, u_0) и множества $S \in \rho_\mu$ выполняется неравенство $\nu_-(S) \le (\nu_+(S))^{1/p}(\nu(S))^{1/p'}$, где меры ν_- и ν соответственно равны

$$\nu_-(S) = \int_S \|\dot{x}_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt), \quad \nu(S) = \int_S \left(\|x_0(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|u_0(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\right)\mu(dt). \tag{3}$$

Введем в рассмотрение пространство-произведение $\Omega_1 \times \Omega_2$, которое наделим нормой

$$\|\omega', \omega''\|^* = \left(\|\omega'\|^{p'}_{H_{p'}} + \|\omega''\|^{p'}_{H_{p'}}\right)^{1/p'}, \quad \omega' \in \Omega_1, \ \omega'' \in \Omega_2;$$

ясно, что это пространство является банаховым. Обозначим через G взаимно однозначное соответствие между пространством $\Omega_1 \times \Omega_2$ и линейным многообразием $\Omega_1 + \Omega_2$ пространства $H_{p'}$ (с нормой, индуцированной из $H_{p'}$), определенное по правилу $(\omega', \omega'') \mapsto G(\omega', \omega'') = \omega' + \omega''$. Очевидно, отображение G линейно и непрерывно. На основании леммы 11.D [15, с. 21] и теоремы Банаха об обратном операторе (пункт (b) следствия 2.12 [14, с. 60]) заключаем, что непрерывен также и оператор G^{-1}. Пусть c^* — норма оператора G, и пусть $c = \max\{1, c^*\}$.

Рассмотрим меру $\nu_+ = c^p(\nu_1^+ + \nu_2^+)$. Покажем, что ν_+ отвечает выдвинутому выше требованию (неравенству). С учетом непрерывности оператора G^{-1}, а также формул (2), (3) и неравенства Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \nu_-(S) &= \int_S \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt) \le \int_S \|\dot{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt) + \int_S \|\dot{x}_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt) \\ &\le \left(\nu_1^+(S)\right)^{1/p}(\nu_1(S))^{1/p'} + \left(\nu_2^+(S)\right)^{1/p}(\nu_2(S))^{1/p'} \\ &\le \left(\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S)\right)^{1/p}\left(\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S)\right)^{1/p'} \\ &= \left(\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S)\right)^{1/p}\|\chi_S(x_1, u_1), \chi_S(x_2, u_2)\|^* \\ &\le c\left(\nu_1^+(S) + \nu_2^+(S)\right)^{1/p}\|\chi_S(x_1 + x_2, u_1 + u_2)\|_{H_{p'}} = (\nu_+(S))^{1/p}(\nu(S))^{1/p'}, \end{aligned}$$

где χ_S — характеристическая функция множества $S \in \rho_\mu$. Теорема доказана.

Достаточное условие, сформулированное в теореме 1, не является необходимым. В тоже время оно позволяет обнаружить соотношения между элементарным топологическим и алгебраическим ОЛД-расширениями.

Следствие 3. *Если для линейных многообразий $E_1, E_2 \subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ угловое расстояние между их сигнатурами ненулевое, то $([E_1]_{H_{p'}}, [E_2]_{H_{p'}})$ обладает алгебраическим ОЛД-расширением, замкнутым в пространстве $H_{p'}$, при этом если $E_1 + E_2 \ne [E_1]_{H_{p'}} + [E_2]_{H_{p'}}$, то базис Гамеля в $[E_1]_{H_{p'}} + [E_2]_{H_{p'}}$ несчетный.*

Пример 2. Пусть $n = m = 1$, $p = p' = 2$, $T = [0, 1]$, $N = \{(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) : i = 1, 2, \dots\}$, где $(x_i(t), u_i(t)) = \chi_{T_i}(t)(2^i\varphi(2^i(t - t_i)), \operatorname{sgn}(\sin(2^{i+1}\pi(t - t_i))))$, $t \in T$,

$t_{i+1} = t_i + 2^{-i}$, $t_1 = 0$, $\varphi(\tau)$ — расстояние от τ до ближайшего целого числа, χ_{T_i} — характеристическая функция интервала $T_i = [t_i, t_{i+1}]$. Положим $P_i = \{(x_i, u_i)\} \subset N$, $i = 1, 2, \dots$. Покажем, что для любого $k > 1$ существует обыкновенный однородный пласт над $N_k = \cup\{P_i : i = 1, \dots, k\}$, допускающий аналитическое представление $\bigotimes_{i=1}^{k} E_i$, где $\bigotimes$ — знак внутренней прямой алгебраической суммы, $E_i = \operatorname{Span} P_i$. Последнее условие эквивалентно тому, что означенный пласт представляет индуктивное алгебраическое ОЛД-расширение для упорядоченных пар $\left(\bigotimes_{i=1}^{j} E_i, E_{j+1}\right)$, $j = 1, \dots, k-1$.

Построение алгебраического ОЛД-расширения проведем по индукции. Для этого сформулируем следующее

Утверждение. *Пусть $k \geq 2$. Если E_k и $\bigotimes_{i=1}^{k-1} E_i$ — линейные ОЛД-совместимые множества, то таковым будет и $\bigotimes_{i=1}^{k} E_i$, причем $\bigotimes_{i=1}^{k-1} E_i \neq \bigotimes_{i=1}^{k} E_i \neq E_k$.*

Непосредственно проверяется, что для любого индекса $j \leq k$ имеем $\bigotimes_{i=1}^{j-1} E_i \neq \bigotimes_{i=1}^{j} E_i \neq E_j$ и E_j является ОЛД-совместимым множеством (согласно примеру из [2]).

При $k = 2$ (базис индукции) утверждение следует из теоремы 5.1, поскольку прямое вычисление дает $\gamma[\Omega_1, \Omega_2] = 2^{1/p'}$ (здесь Ω_1 и Ω_2 — сигнатуры в $H_{p'}$ множеств E_1 и E_2).

Предположим, что утверждение справедливо для $k-1$ при некотором $k \geq 2$, и пусть Ω^{k-1} — сигнатура в $H_{p'}$ линейного многообразия $\bigotimes_{i=1}^{k-1} E_i$. Поскольку $\gamma[\Omega^{k-1}, \Omega_2] = 2^{1/p'}$ (простую, но рутинную проверку этого равенства опускаем), то на основании теоремы 1 заключаем, что утверждение верно и для k.

Теперь перейдем к рассмотрению группы вопросов, связанных с топологическим строением РЛД-расширения; везде далее предполагаем, что линейные многообразия $E_1, E_2 \subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ не обладают свойством ОЛД-совместимости, если это не оговорено специально или не следует из контекста.

Лемма 1. *Пусть $(x, u) \in \Pi_{\mathrm{ACL}}$ и ν, ν_- — меры, определяемые (3) для (x, u). Тогда для лебеговски пополненных мер ν и ν_- справедливо $\rho_\nu \subset \rho_{\nu_-}$.*

Замечание 4. Важным обстоятельством в условиях леммы является тот факт, что для функционального множества $\{(x, u)\}$ заведомо не оговаривается наличие свойства ОЛД-совместимости. (Если a priori допустить, что $\{(x, u)\}$ — ОЛД-совместимое множество, то утверждение леммы очевидно.)

Доказательство. Покажем, что для любой пары $(x, u) \in \Pi_{\mathrm{ACL}}$ равенство $\dot{x}(t) = 0$ выполняется μ-почти всюду на $T_{xu} = \{t \in T : x(t) = 0,\, u(t) = 0\}$. Пусть $T_x = \{t \in T : x(t) = 0\}$. Поскольку $T_x \supset T_{xu}$, то в случае $\mu(T_x) = 0$ утверждение леммы не вызывает сомнений. Поэтому рассмотрим вариант $\mu(T_x) \neq 0$.

Обозначим через $T_\circ$ множество $\{t \in T_x : \mu((t - \delta, t + \delta) \cap T_x) = 0$ для некоторого $\delta > 0\}$. Покажем, что $\mu(T_\circ) = 0$. Для этого выберем по каждому $t \in T_\circ$ константу δ_t так, что $\mu((t - \delta_t, t + \delta_t) \cap T_x) = 0$. Найдем рациональные $\delta'_t, \delta''_t > 0$ такие, что $\delta'_t \in (t - \delta_t, t)$, $\delta''_t \in (t, t + \delta_t)$, и положим $I^t = (\delta'_t, \delta''_t)$. Тогда семейство $\{I^t\}_{t \in T_\circ}$ покрывает $T_\circ$. Так как каждый интервал I^t является открытым интервалом с рациональными концами, то семейство $\{I^t\}_{t\in T_\circ}$ содержит счетное подсемейство $\{I^{t_i}\}_{i=1,2,\dots}$, также являющееся покрытием $T_\circ$. Далее, так как для любого $i=1,2,\dots$ выполняется $I^{t_i}\subset(t_i-\delta_{t_i},t_i+\delta_{t_i})$, то $\mu(I^{t_i}\cap T_\circ)=0$, а значит, $\mu(T_\circ)=\mu(T_\circ\cap(\cup\{I^{t_i}:i=1,2,\dots\}))=\mu(\cup\{T_\circ\cap I^{t_i}:i=1,2,\dots\})\le\sum_{i=1,2,\dots}\mu(T_\circ\cap I^{t_i})=0$, откуда $\mu(T_\circ)=0$. Теперь проведем завершающую часть доказательства.

Пусть $t\in T_x\setminus T_\circ$. Тогда, очевидно, для любого $\delta>0$ имеем $\mu((t-\delta,t+\delta)\cap T_x)>0$. Поскольку $\dot x\in \mathrm{AC}(T,\mathbb{R}^n)$, то найдется $T^*\subset T$, $\mu(T^*)=0$ и для любого $t\in T_x\setminus T^*$ существует $\dot x(t)$. Покажем, что $\dot x(t)=0$ для $t\in T_x\setminus(T_\circ\cup T^*)$. Действительно, для любого целого k имеем $\mu((t-1/k,t+1/k)\cap T_x)>0$ и, следовательно, найдется $t_k\ne t$, $|t_k-t|<1/k$, $t_k\in T_x$. Но тогда

$$\dot x(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t-\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim_{k\to\infty}\frac{x(t_k)-x(t)}{t_k-t}=0,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $E_{(A,B)}$ обыкновенный пласт над Π_{ACL}, индуцированный заданной (A,B)-моделью $(A,B)\in\mathbb{L}_p$ (согласно лемме 1 из [1] и теореме 4 из [13] соответствие между пластами $E_{(A,B)}$ и парами $(A,B)\in\mathbb{L}_p$ взаимно однозначное), и пусть $D_{\mathrm{HL}}=\cup\{E_{(A,B)}\times\{(A,B)\}\subset\Pi_{\mathrm{ACL}}\times\mathbb{L}_p:(A,B)\in\mathbb{L}_p\}$. Далее, пусть $W_{xu}\subset\mathbb{L}_p$ — семейство всех (A,B)-моделей таких, что $\{(x,u)\}\times W_{xu}\subset D_{HL}$, где $\{(x,u)\}$ — фиксированное ОЛД-совместимое множество; заметим, что множество W_{xu} замкнуто в $\mathbb{L}_p$. Сопоставляя точкам из $\mathrm{AC}(T,\mathbb{R}^n)$ их классы эквивалентности из $H_{p'}$, корректно (с долей разумной условности) рассматривать D_{HL} как подмножество в пространстве $H_{p'}\times\mathbb{L}_p$ (произведение пространства входных сигналов ξ-моделей и пространства I-эквивалентных им (A,B)-моделей).

Введем на Π_{ACL} с топологической структурой, наследованной из пространства $H_{p'}$, граничный оператор [12, с. 51], который обозначим через Fr. Для свойства РЛД-совместимости класса 1 следующая теорема является локальным аналогом теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть E^* и $E^\sharp$ — ненулевые линейные многообразия в Π_{ACL} со свойством РЛД-совместимости класса 1, Q^* и $Q^\sharp$ — некоторые (или, что эквивалентно, любые) ограниченные окрестности нуля соответственно в E^* и $E^\sharp$. Через* Fr *обозначим граничный оператор, действующий в $E^*+E^\sharp$. Тогда пара $(E^*,E^\sharp)$ допускает алгебраическое РЛД-расширение класса 1, если для всякой четверки $((x^*,u^*),(x^\sharp,u^\sharp))\in\mathrm{Fr}\,Q^*\times\mathrm{Fr}\,Q^\sharp$ существует такая константа $1>c^*>0$, что $\mu(\{t\in T:\cos\varphi(t)\ge c^*-1\})=0$, где $\varphi(t)$ — угол в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ в момент времени $t\in T$ между вектор-функциями $(x^*(t),u^*(t))$ и $(x^\sharp(t),u^\sharp(t))$.*

Доказательство теоремы распадается на две нижеследующие леммы, представляющие самостоятельный интерес. Но прежде чем перейти к формулировке лемм, введем в рассмотрение оператор Ψ, действующий на Π_{ACL} со значениями в пространстве классов эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на T функций и определяемый конструкцией

$$\Psi((x,u))(t)=\begin{cases}\|\dot x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\|(x(t),u(t))\|^{-1}_{\mathbb{R}^{n+m}}, & \text{если } (x(t),u(t))\ne 0\in\mathbb{R}^{n+m},\\ 0, & \text{если } (x(t),u(t))=0\in\mathbb{R}^{n+m},\end{cases}\qquad(4)$$

где $(x,u)\in\Pi_{\mathrm{ACL}}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n+m}}$ — произвольные фиксированные нормы соответственно в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+m}$.

Замечание 5. В силу леммы 1 $\operatorname{supp}\|\dot x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\subset\operatorname{supp}\|(x(t),u(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}$, поэтому вторая строка из конструкции оператора Ψ лишь конкретизирует в формуле (4) значение $\Psi((x,u))(t)$, когда это значение формально определяется отношением 0/0 (т. е. ее конструкция позволяет утверждать, что образ $\Psi((x,u))$

для любой пары $(x,u) \in \Pi_{\mathrm{ACL}}$ всегда представляет некоторый класс эквивалентности μ-измеримых на T функций).

Лемма 2. *Одноэлементное множество* $\{(x',u')\} \subset \Pi_{\mathrm{ACL}}$ *обладает ОЛД-совместимостью в том и только том случае, если функция* $t \mapsto g(t) = \Psi((x',u'))(t)$ *принадлежит* $\mathrm{L}_p(T,\mu,\mathbb{R})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(A',B') \in \mathbb{L}_p$ — некоторая (A,B)-модель, для которой четверка $((x',u'),(A',B'))$ превращает формулу (1) в тождество. Тогда в силу неравенства Гёльдера $g(t) \leq c'\big(\|A'(t)\|^p_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} + \|B'(t)\|^p_{L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}\big)^{1/p}$, где c' — константа, отвечающая неравенству $\big(\|\cdot\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|\cdot\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\big)^{1/p'} \leq c'\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n+m}}$ (так как все нормы в $\mathbb{R}^{n+m}$ эквивалентны). Значит, $g(\cdot) \in \mathrm{L}_p(T,\mu,\mathbb{R})$.

Достаточность. Согласно лемме 1 и интегральному неравенству Гёльдера имеем

$$\int\limits_S \|\dot{x}'(t)\|_{\mathbb{R}^n}\mu(dt) \leq c''\bigg(\int\limits_S g^p(t)\mu(dt)\big)^{1/p}\int\limits_S \big(\|x'(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|u'(t)\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\big)\mu(dt)$$

для любого $S \in \rho_\mu$, где c'' — константа из неравенства $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n+m}} \leq c''\big(\|\cdot\|^{p'}_{\mathbb{R}^n} + \|\cdot\|^{p'}_{\mathbb{R}^m}\big)^{1/p'}$. Следовательно, по теореме 2 из [2] множество $\{(x',u')\}$ ОЛД-совместимо.

Лемма 3. *Пусть* $\{(x_1,u_1)\}$ *и* $\{(x_2,u_2)\}$ *ОЛД-совместимы и* $\varphi(t)$ *— угол в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^{n+m}$ *в момент* $t \in T$ *между* $(x_1(t),u_1(t))$ *и* $(x_2(t),u_2(t))$. *Тогда если для некоторой константы* $1 > c' > 0$ *имеет место равенство* $\mu(\{t \in T : \cos\varphi(t) \geq c'-1\}) = 0$, *то свойством ОЛД-совместимости будет обладать и любое одноэлементное множество* $\{(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha u_1+\beta u_2)\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Замечание 6. Примем соглашение, что в случае, если в момент $t \in T$ хотя бы один из векторов $(x_1(t),u_1(t))$, $(x_2(t),u_2(t))$ равен нулевому вектору, то $\cos\varphi(t) = 0$.

Доказательство. В соответствии с леммой 2 достаточно для функции $t \mapsto g(t) = \Psi((\alpha x_1+\beta x_2, \alpha u_1+\beta u_2))(t)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (где в конструкции (4) оператора Ψ норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n+m}}$ евклидова) подтвердить, что $g(\cdot) \in \mathrm{L}_p(T,\mu,\mathbb{R})$. Вначале заметим, что вещественная функция двух переменных $(z,y) \mapsto zy(z+y)^{-2}$ в области $\{(z,y) : z \geq 0, y \geq 0, (z,y) \neq (0,0)\}$ достигает своего максимума, равного $1/4$, в точках диагонали $\{(z,y) : z = y, (z,y) \neq (0,0)\}$ (технические детали этого замечания опускаем). Далее, пусть $t \mapsto g^+(t) = \Psi((x_1,u_1))(t) + \Psi((x_2,u_2))(t)$. Ясно, что в силу леммы 2 имеет место $g^+(t) \in \mathrm{L}_p(T,\mu,\mathbb{R})$. Теперь с точностью до точек μ-нулевого множества из области $\operatorname{supp} g(\cdot)$ будет справедлива следующая цепочка отношений:

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq (\alpha\|\dot{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \beta\|\dot{x}_2(t)\|_{\mathbb{R}^n})\big(\alpha^2\|(x_1(t),u_1(t))\|^2_{\mathbb{R}^{n+m}} + 2\alpha\beta\cos\varphi(t)\\
&\quad\times \|(x_1(t),u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}\|(x_2(t),u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}} + \beta^2\|(x_2(t),u_2(t))\|^2_{\mathbb{R}^{n+m}}\big)^{-1/2}\\
&\leq g^+(t)(\alpha\|(x_1(t),u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}} + \beta\|(x_2(t),u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}})((\alpha\|(x_1(t),u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}\\
&\qquad + \beta\|(x_2(t),u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}})^2\\
&\qquad - 2\alpha\beta(1-\cos\varphi(t))\|(x_1(t),u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}\|(x_2(t),u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}})^{-1/2}\\
&= g^+(t)(1 - 2\alpha\beta(1-\cos\varphi(t))\|(x_1(t),u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}\|(x_2(t),u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}\\
&\qquad (\alpha\|(x_1(t),u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}} + \beta\|(x_2(t),u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}})^2)^{-1/2} \leq (2/c')^{1/2}g^+(t).
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что в области $\operatorname{supp} g(\cdot)$ будет выполняться неравенство $\alpha\beta\|(x_1(t), u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}\|(x_2(t), u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}/(\alpha\|(x_1(t), u_1(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}}+\beta\|(x_2(t), u_2(t))\|_{\mathbb{R}^{n+m}})^2 \leq 1/4$. Доказательство завершено.

То обстоятельство, что в отличие от элементарного топологического ОЛД-расширения свойство РЛД-совместимости в общем случае не инвариантно по отношению к действию оператора Fr в пространстве $H_{p'}$, оправдывает введение в рассмотрение следующего определения.

Определение 6. Распределенный пласт, замыкание которого в пространстве $H_{p'}$ не обладает свойством РЛД-совместимости, назовем рыхлым.

Замечание 7. Рыхлый пласт, очевидно, всегда бесконечномерный.

Теорема 3. *Пусть E — рыхлый пласт, $D_E = \cup\{\{(x,u)\}\times W_{xu} : (x,u) \in E\}$, $((x^*, u^*), (A^*, B^*))$ — четверка из $H_{p'} \times \mathrm{L}_p$, находящаяся в нулевой близости от множества D_E и ему не принадлежащая, $\{((x_i, u_i), (A_i, B_i))\}_{i=1,2,\ldots}$ — последовательность в D_E, сходящаяся к $((x^*, u^*), (A^*, B^*))$, и пусть $E^* = \operatorname{Span}\{(x^*, u^*)\}$. Тогда пара (E, E^*) обладает алгебраическим РЛД-расширением класса 1, если для любой пары $(x^\sharp, u^\sharp) \in E$ в $\{(x_i, u_i)\}_{i=1,2,\ldots}$ существует подпоследовательность $\{(x_{i_j}, u_{i_j})\}_{j=1,2,\ldots}$ такая, что $\int\limits_T \Psi^p((x^\sharp + x_{i_j}, u^\sharp + u_{i_j}))(t)\mu(dt) \leq c^\sharp$ для некоторой константы $c^\sharp > 0$.*

Замечание 8. В действительности определяющая часть теоремы должна содержать дополнительный пункт, а именно, $\{x^\sharp, u^\sharp)\}$ — ОЛД-совместимое множество, но это является очевидным следствием теоремы 31.D [15, с. 111].

Доказательство. Достаточно (лемма 2) показать, что для любой пары $(x^\sharp, u^\sharp) \in E$ функция $t \mapsto g(t) = \Psi((x^* + x^\sharp, u^* + u^\sharp))(t)$ μ-суммируемая на T с p-й степенью. С этой целью зафиксируем $(x^\sharp, u^\sharp) \in E$, и пусть $\{((x_i, u_i), (A_i, B_i))\}_{i=1,2,\ldots}$ — последовательность в D_E, сходящаяся к $((x^*, u^*), (A^*, B^*))$. Поскольку отображение $G\colon D_{HL} \to \mathrm{L}_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, действующее согласно правилу $((x,u),(A,B)) \mapsto G((x,u),(A,B)) = A(\cdot)x(\cdot) + B(\cdot)u(\cdot)$, непрерывно, то последовательность $\{G((x_i, u_i), (A_i, B_i))\}_{i=1,2,\ldots}$ сходится к $\dot{x}^*$ в топологии пространства $\mathrm{L}_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, существует такая подпоследовательность $\{(x_{i_j}, u_{i_j}), (A_{i_j}, B_{i_j}))\}_{j=1,2,\ldots}$, что $(x_{i_j}, u_{i_j}) \underset{j\to\infty}{\to} (x^*, u^*)$ и $\dot{x}_{i_j} \underset{j\to\infty}{\to} \dot{x}^*$ поточечно μ-почти всюду в интервале T, при этом $\int\limits_T \Psi^p((x^\sharp{+}x_{i_j}, u^\sharp{+}u_{i_j}))(t)\mu(dt) \leq c^\sharp$. Ясно, что при $j \to \infty$ функции $\Psi^p((x^\sharp + x_{i_j}, u^\sharp + u_{i_j}))$ μ-почти всюду на T поточечно сходятся к функции g. Отсюда заключаем, что $g \in \mathrm{L}_p(T, \mu, \mathbb{R})$ в силу теоремы Фату об ограниченной сходимости. Теорема доказана.

Опираясь на предложение 1, лемму Тейхмюллера — Тьюки [12, с. 28] и теорему 31.D [15, с. 111], заключаем, что справедлива

Теорема 4. *Если E — распределенный не рыхлый пласт произвольного (фиксированного) класса над Π_{ACL}, то множество $D_E = \cup\,\{\{x,u\} \times W_{xu} : (x,u) \in E\}$ замкнуто в пространстве-произведении $H_{p'} \times \mathbb{L}_p$.*

Остается открытым вопрос: будет ли множество D_E замкнутым, если пласт E над Π_{ACL} рыхлый.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данеев А. В., Русанов В. А.* Об одной теореме существования сильной модели // Автоматика и телемеханика. 1995. № 8. С. 64–73.
2. *Данеев А. В., Русанов В. А.* Порядковые характеристики свойств существования сильных линейных конечномерных дифференциальных моделей // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, №1. С. 43–50.

3. *Данеев А. В., Русанов В. А.* Об одном классе сильных дифференциальных моделей над счетным множеством динамических процессов конечного характера // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 32–40.

4. *Данеев А. В., Куменко А. Е., Русанов В. А.* Задача спектральной идентификации математической модели линейной динамической системы управления ЛА // Изв. вузов. Авиационная техника. 1999. № 1. С. 20–24.

5. *Данеев А. В., Русанов В. А.* О спектрально-векторной идентификации линейной непрерывной нестационарной конечномерной системы управления // Изв. вузов. Приборостроение. 2001. Т. 44, № 8. С. 25–32.

6. *Данеев А. В., Русанов В. А.* Геометрические характеристики свойств существования конечномерных (A, B)-моделей в задачах структурно-параметрической идентификации // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 3–8.

7. *Русанов В. А., Данеев А. В., Дмитриев А. В., Мартьянов В. И.* Аналитический подход к теории структурной идентификации: характеризация линейных дифференциальных моделей управления на основе оператора Релея — Ритца // Тр. Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'2000», Москва, 26–28 сентября 2000. М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2000. С. 525–536.

8. *Русанов В. А., Данеев А. В., Русанов М. В.* От реализации Калмана — Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Тр. II Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'2003», Москва, 29–31 января 2003. М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2003. С. 2184–2194.

9. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

10. *Варга Дж.* Оптимальные управления дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Наука, 1986.

13. *Данеев А. В., Русанов В. А.* К аксиоматической теории идентификации динамических систем. II. Идентификация линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 9. С. 120–133.

14. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

15. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.

г. Иркутск
Институт динамики систем
и теории управления СО РАН
E-mail: v.rusanov@mail.ru

Статья поступила 17 ноября 2003 г.
Окончательный вариант 29 октября 2004 г.