

К ТЕОРИИ РЕАЛИЗАЦИИ СИЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ. II*)

А. В. Данеев, А. В. Лакеев, В. А. Русанов

Формализованы категории словаря апостериорного математического моделирования динамических систем, позволяющих с общих позиций подходить к исследованию свойств существования сильных неопровержимых (A, B) -моделей, формулируя утверждения о таких свойствах с помощью единой системы понятий и терминов.

В этой работе (являющейся продолжением [1]) обратимся к вопросу существования однородных пластов (обыкновенных и распределенных) с позиций решения задачи о распространении специального функционального линейного оператора, позволяющего принципиально по-новому по сравнению с [1–5] подойти к проблеме существования сильных неопровержимых (A, B) -моделей. (Терминология и обозначения [1] сохранены.)

1. ТЕОРЕМЫ О M -ПРОДОЛЖИМОСТИ

Пусть $T := [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега μ , и пусть $L(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — пространство классов эквивалентности всех μ -измеримых на T функций со значениями в $\mathbb{R}^q$ (соответственно $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — пространство вектор-функций из T в $\mathbb{R}^q$, интегрируемых по Бохнеру [6, с. 96]). Если $y \in L(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — класс эквивалентных функций, то через $y(\cdot)$ будем обозначать фиксированную функцию из этого класса. Условимся также, что знак $\cdot = \cdot$ (аналогично $\cdot < \cdot$ и $\cdot > \cdot$) означает равенство μ -почти всюду (соответственно больше или меньше μ -почти всюду).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейный оператор $M: L(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, имеющий форму аналитического представления вида $M(y)(t) \cdot = \cdot M(t)y(t)$, $t \in T$, где $t \mapsto M(t): T \rightarrow L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$ — матричнозначная μ -измеримая функция, будем называть матрицантом (или M -оператором), при этом нестационарную матрицу $M(\cdot)$ назовем M -формой оператора M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейный оператор $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, где E_0 — линейное множество в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, $p' \in (1, \infty)$, назовем:

M -продолжимым, если и только если M_0 допускает распространение до некоторого M -оператора $M: L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ (т. е. $M(y) = M_0(y)$) для любого $y \in E_0$;

M_k -продолжимым в том и только в том случае, если для некоторого натурального числа $k \leq \dim E_0$ сужение оператора M_0 на всякое k -мерное подпространство в E_0 является M -продолжимым.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05–01–00623), Российской федеральной целевой программы «Интеграция» (проект Б0077) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (программа 19, проект 2.5).

Пусть заданы некоторое линейное (не обязательно замкнутое) множество $E \subset L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, подмножество $G \subset E$, линейный (не обязательно непрерывный) оператор $M_0: E \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$. Требуется определить:

а) существует ли матрицант $M: L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ с элементами y своей M -формы из $L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, $p \in (1, \infty)$, $1/p' + 1/p = 1$, такой, что $M(y) = M_0(y)$ для любого $y \in \text{Span } G$;

б) обладает ли оператор M_0 для некоторого фиксированного натурального числа $k \leq \dim E_0$, $E_0 := \text{Span } G$, свойством M_k -продолжимости.

Задачи а), б) позволяют по-новому взглянуть на проблему существования сильных (A, B) -моделей. А именно, выделим класс линейных систем управления, описываемых векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) \cdot = \cdot A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T, \quad (1)$$

где $x(\cdot) \in AC(T, \mathbb{R}^n)$ — решение типа Каратеодори (K -решение), $u(\cdot) \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m)$, $A(\cdot) \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, $B(\cdot) \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $p, p' \in (1, \infty)$, $1/p' + 1/p = 1$. В такой постановке задача существования сильной неопровержимой (A, B) -модели над множеством $N \subset \Pi_{ACL} := AC(T, \mathbb{R}^n) \times L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^m)$, т. е. $\text{Span } N$ -ОЛД-совместимо, представляет частный случай задачи а), если считать, что $q = n + m$, $E = \Pi_{ACL}$, $G = N$, M_0 — оператор дифференцирования первой компоненты пары $(x, u) \in \Pi_{ACL}$, т. е. $M_0(x, u) = \dot{x}$. С другой стороны, вариант $G = \{F(x, u)\}$, $(x, u) \in \Pi_{ACL}$, $M_0(F(x, u)) = \dot{x}$, $F(x, u) \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — основа развития теории реализации линейно-параметрических систем $\dot{x}(t) \cdot = \cdot A(t)F(x(t), u(t))$ (см. заключение в [7]), в частности квазилинейных систем управления.

Предложение 1. M -оператор действует из $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ в $L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда все элементы его M -формы лежат в $L_p(T, \mu, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $M[L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)] \subset L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ и всех $j = 1, \dots, h$ M -оператор $M_{ij}: L(T, \mu, \mathbb{R}) \rightarrow L(T, \mu, \mathbb{R})$, определяемый элементом m_{ij} от M -формы для M , очевидно, действует из $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})$ в $L_1(T, \mu, \mathbb{R})$, поскольку если $z \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})$, то для вектора $y \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ с нулевыми элементами кроме j -й координаты, равной z , верно $M(y) = (m_{1j}z, \dots, m_{nj}z) \in L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, и, значит, $m_{ij}z \in L_1(T, \mu, \mathbb{R})$. Оператор M_{ij} регулярный [8, с. 31], так как $|M_{ij}(z)| \leq M_{ij}^\#(|z|)$, где $M_{ij}^\#$ — M -оператор с M -формой $|m_{ij}|$ и являющийся положительным оператором, если убедиться, что $M_{ij}^\#[L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})] \subset L_1(T, \mu, \mathbb{R})$. Действительно, пусть $z \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})$. Тогда из $M_{ij}[L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})] \subset L_1(T, \mu, \mathbb{R})$, следует $m_{ij}z \in L_1(T, \mu, \mathbb{R})$. Но тогда и $|m_{ij}z| \in L_1(T, \mu, \mathbb{R})$, откуда в силу $|(|m_{ij}|)z| = |m_{ij}z| \in L_1(T, \mu, \mathbb{R})$ приходим к $|m_{ij}|z \in L_1(T, \mu, \mathbb{R})$. Теперь, воспользовавшись теоремой 2.1 из [8, с. 30], заключаем, что M_{ij} — непрерывный оператор из $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})$ в $L_1(T, \mu, \mathbb{R})$. Далее, рассмотрим линейный функционал φ_{ij} на $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})$ вида

$$\varphi_{ij}(z) := \int_T M_{ij}(z)(t) \mu(dt).$$

Так как функционал φ_{ij} непрерывный, то существует функция $m'_{ij} \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$ такая, что для всех $z \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R})$ справедливо

$$\int_T m_{ij}(t)z(t) \mu(dt) = \int_T m'_{ij}(t)z(t) \mu(dt)$$

или

$$\int_T (m_{ij}(t) - m'_{ij}(t)) z(t) \mu(dt) = 0.$$

Выбирая $t \mapsto z(t) = \text{sign}(m_{ij}(t) - m'_{ij}(t))$, заключаем, что

$$\int_T |m_{ij}(t) - m'_{ij}(t)| \mu(dt) = 0.$$

Следовательно, $m_{ij}(t) = m'_{ij}(t)$, откуда $m_{ij} \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$.

Необходимость. Пусть $m_{ij} \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, где m_{ij} — произвольный элемент М-формы матрицанта M . Тогда для любого $y \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_T \|M(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt) &= \int_T \|M(t)y(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt) \leq \int_T \|M(t)\|_{L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q} \mu(dt) \\ &\leq \left(\int_T \|M(t)\|_{L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)}^p \mu(dt) \right)^{1/p} \left(\int_T \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{p'} \mu(dt) \right)^{1/p'} \\ &\leq c^* \left(\int_T \|M(t)\|_{\mathbb{R}^q \times n}^p \mu(dt) \right)^{1/p} \left(\int_T \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{p'} \mu(dt) \right)^{1/p'} < \infty, \end{aligned}$$

где c^* — константа из неравенства $\|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)} \leq c^* \|\cdot\|_{\mathbb{R}^q \times n}$. Следовательно, имеет место $M(y) \in L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. Если матрицант действует из $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ в $L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, то он непрерывен относительно метрических топологий, порожденных соответственно нормами

$$\left(\int_T \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{p'} \mu(dt) \right)^{1/p'}, \quad \int_T \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \mu(dt).$$

Для того чтобы охарактеризовать M -операторы в классе всех непрерывных операторов, действующих из $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ в $L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $Q \in \rho_\mu$, где ρ_μ — σ -алгебра μ -измеримых подмножеств из T , и $P_{Q,q} := L(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — оператор [8, с. 13], определяемый выражением

$$P_{Q,q}(y)(t) := \begin{cases} y(t), & t \in Q, \\ 0 \in \mathbb{R}^q, & t \in T \setminus Q. \end{cases}$$

Очевидно, что $P_{Q,q}$ можно представить как M -оператор $\chi_Q I$, где χ_Q — характеристическая функция множества Q , а I — единичная матрица соответствующей размерности. Очевидно также, что $P_{Q,q}$ является линейным проектором, т. е. $P_{Q,q}^2 = P_{Q,q}$, и пространство $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ инвариантно относительно действия $P_{Q,q}$ при любом $p \in [1, \infty]$. В качестве характеристического признака M -продолжимости со специальных линейных многообразий в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ выступает

Предложение 2. Пусть $E \subset L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — некоторое линейное множество, инвариантное относительно семейства операторов $\{P_{Q,q} : Q \in \rho_\mu\}$, и M_0 :

$E \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда существует матрицант $M: L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, продолжающий M_0 , если и только если для всех $Q \in \rho_\mu$ и любого $y \in E$ имеет место

$$M_0 \circ P_{Q,q}(y) = P_{Q,n} \circ M_0(y), \quad (2)$$

т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E - M_0 & \rightarrow & L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n) \\ \downarrow P_{Q,q} & & \downarrow P_{Q,n} \\ E - M_0 & \rightarrow & L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n) \end{array}$$

Доказательство. Если M — матрицант, продолжающий M_0 , то (2) проверяется непосредственно: $M(t)\chi_Q(t)y(t) = \chi_Q(t)M(t)y(t)$, где $M(\cdot)$ — M -форма оператора M . Покажем обратное. Пусть условие (2) выполнено. Рассмотрим линейный оператор $M_0^*: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, полагая

$$M_0^*(y) := \int_T M_0(y)(t) \mu(dt), \quad y \in E.$$

Так как оператор M_0 непрерывный, то непрерывным будет и M_0^* . Пусть M^* — непрерывное продолжение M_0^* на все пространство $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$. Означенное продолжение существует, поскольку каждая проекция $\text{Pr}_{R_i} \circ M_0^*$ в i -е координатное подпространство из $\mathbb{R}^n$ является линейным непрерывным функционалом на E и, следовательно, в силу теоремы Хана — Банаха любая из указанных проекций продолжима на все $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$. На основании представления линейных непрерывных функционалов на $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ [6, с. 153, теорема 1.5.20] заключаем, что существует M -форма $M \in L_{p'}(T, \mu, L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n))$, при которой

$$M^*(y) := \int_T M(t)y(t) \mu(dt), \quad y \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q).$$

Но тогда для фиксированного $y \in E$ и любого $Q \in \rho_\mu$ имеем

$$\begin{aligned} \int_Q M_0(y)(t) \mu(dt) &= \int_T P_{Q,n} \circ M_0(y)(t) \mu(dt) \\ &= \int_T M_0 \circ P_{Q,q}(y)(t) \mu(dt) = M_0^* \circ P_{Q,q}(y) = M^* \circ P_{Q,q}(y) = \int_T M(t)P_{Q,q}(y)(t) \mu(dt) \\ &= \int_Q M(t)y(t) \mu(dt) \Rightarrow \int_Q (M_0(y)(t) - M(t)y(t)) \mu(dt) = 0. \end{aligned}$$

Известно [6, с. 101, теорема 1.4.34], что если интеграл Бохнера от суммируемой на T вектор-функции равен нулю на любом подмножестве $Q \in \rho_\mu$, то она сама равна нулю μ -почти всюду на T . Следовательно, $M_0(y)(t) \cdot = \cdot M(t)y(t)$, $y \in E$, и, таким образом, $M_0(y) = M(y)$, $y \in E$, где M — матрицант, имеющий в качестве M -формы матричную функцию $M(\cdot)$.

Следствие 2. Непрерывный линейный оператор $M: L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ является M -оператором тогда и только тогда, когда для любого $Q \in \rho_\mu$ имеет место

$$M_0 \circ P_{Q,q} = P_{Q,n} \circ M_0.$$

Пусть $E_0 \subset L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — линейное множество и $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ — линейный оператор. Чтобы получить с помощью предложения 2 критерий продолжимости отображения M_0 до M -оператора, необходимо решить следующие задачи:

- расширить E_0 до линейного множества $E \subset L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, инвариантного относительно семейства проекторов $\{P_{Q,q}: Q \in \rho_\mu\}$;
- построить для M_0 расширение M^* на E и показать непрерывность M^* ;
- для расширения M^* проверить выполнение условия (2).

Решение первой из перечисленных задач содержит

Лемма 1. Пусть E_0 — линейное множество в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ и E — совокупность всех конечных сумм из элементов семейства $\{P_{Q,q}y: Q \in \rho_\mu, y \in E_0\}$. Тогда: а) E — наименьшее линейное множество в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, содержащее E_0 и инвариантное относительно $\{P_{Q,q}: Q \in \rho_\mu\}$; б) для любого $y \in E$ найдутся такие натуральное число k , семейство множеств $\{Q_i\}_{i=1,\dots,k} \subset \rho_\mu$ и семейство векторов $\{y_i\}_{i=1,\dots,k} \subset E_0$, что $Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$), и $y = \sum P_{Q_i,q}(y_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. а) Инвариантность E (с минимальностью относительно свойства инвариантности) следует из соотношения $P_{Q^*,q} \circ P_{Q^{**},q} = P_{Q^* \cap Q^{**},q}$.

б) Доказательство проведем индукцией по числу k в представлении $y \in E$, $y = \sum P_{Q_i,q}(y_i)$, $Q_i \in \rho_\mu, y_i \in E_0, i = 1, \dots, k$.

Индуктивный шаг. Рассмотрим сумму $\sum P_{Q_i,q}(y_i) + P_{Q^*,q}(y^*)$, где $Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$), $y_i, y^* \in E_0$. Положим $Q'_i := Q^* \cap Q_i, Q''_i := Q_i \setminus Q^*, Q''' := Q^* \setminus (\cup Q_i), i = 1, \dots, k$. Тогда Q'_i, Q''_i, Q''' не пересекаются между собой и $Q_i = Q'_i \cup Q''_i, Q^* = Q''' \cup (Q'_i), 1 \leq i \leq k$. Поэтому $P_{Q_i,q}(y_i) = P_{Q'_i,q}(y_i) + P_{Q''_i,q}(y_i), P_{Q^*,q}(y^*) = \sum P_{Q'_i,q}(y^*) + P_{Q''_i,q}(y^*), 1 \leq i \leq k$. Следовательно, справедливо

$$\begin{aligned} & \sum P_{Q_i,q}(y_i)_{1 \leq i \leq k} + P_{Q^*,q}(y^*) \\ &= \sum (P_{Q'_i,q}(y_i) + P_{Q''_i,q}(y_i) + P_{Q'_i,q}(y^*))_{1 \leq i \leq k} + P_{Q''_i,q}(y^*) \\ &= \sum (P_{Q'_i,q}(y_i + y^*) + P_{Q''_i,q}(y_i))_{1 \leq i \leq k} + P_{Q''_i,q}(y^*). \end{aligned}$$

Замечание 1. В разложении вектора $y = \sum P_{Q_i,q}(y_i)_{1 \leq i \leq k}$ можно считать, что $\cup(Q_i)_{1 \leq i \leq k} = T$, так как если $\cup(Q_i)_{1 \leq i \leq k} \subset T$, то, обозначая $Q_{i+1} := T \setminus (\cup Q_i)_{1 \leq i \leq k}, y_{i+1} := 0$, получим $y = \sum P_{Q_i,q}(y_i)_{1 \leq i \leq k}$ и $\cup(Q_i)_{1 \leq i \leq k} = T$, т. е. можно считать, что в представлении $y = \sum P_{Q_i,q}(y_i)_{1 \leq i \leq k}$ множества $Q_1, \dots, Q_k$ образуют разбиение отрезка T на непересекающиеся подмножества.

Теорема 1. Пусть E_0 — некоторое линейное множество в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ и $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ — линейный оператор. Тогда для существования матрицанта, продолжающего M_0 на $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi \in L_p(T, \mu, \mathbb{R}), \varphi(t) \leq 0$, такая, что для любого $y \in E_0$ имеет место

$$\|M_0(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varphi(t) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}, \quad t \in T. \quad (3)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $M: L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q) \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ — матрицант, продолжающий M_0 , и $M(\cdot)$ — его M -форма. Тогда

$$\|M_0(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|M(t)(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varphi(t) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q},$$

где $y \in E_0, \varphi(t) = \|M(t)\|_{L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)}$. Ясно, что в соответствии с предложением 1 верно $\varphi \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$.

Достаточность. Пусть $E \subset L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — линейное многообразие, определенное в формулировке леммы 1. Рассмотрим оператор $M^*: E \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, действующий по правилу $M^*(y) := \sum P_{Q_i, n} \circ M_0(y_i)_{1 \leq i \leq k}$, где векторы y , y_i и множества Q_i , $1 \leq i \leq k$, в силу леммы 1 и замечания 1 связаны следующими конструкциями: $y = \sum P_{Q_i, q}(y_i)_{1 \leq i \leq k}$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\cup(Q_i)_{1 \leq i \leq k} = T$, $i, j = 1, \dots, k$, $y_i \in E_0$. Покажем, что оператор M^* определен корректно, т. е. его значение от любого $y \in E$ не зависит от конкретизации представления $y = \sum P_{Q_i, q}(y_i)_{1 \leq i \leq k}$.

Пусть $y \in E$ и $y = \sum P_{Q_i, q}(y_i)_{1 \leq i \leq k} = \sum P_{Q_i, q}(y_j)_{1 \leq i \leq r}$, где $\{Q_i\}_{i=1, \dots, k}$ и $\{Q_j\}_{j=1, \dots, r}$ — некоторые фиксированные разбиения интервала T , а $y_i, y_j \in Y_0$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r$. Тогда семейство множеств $\{Q_{ij} : Q_{ij} = Q_i \cap Q_j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r\}$ также образует разбиение отрезка T . Далее, положим $y_{ij} := y_i - y_j$. Так как $y(t) \cdot = y_i(t) \cdot = y_j(t) \cdot$ при $t \in T$, то $y_{ij}(t) \cdot = 0$ на каждом Q_{ij} , поэтому в силу (3) $\|M_0(y_{ij})(t)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \leq \varphi(t) \|y_{ij}(t)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot = 0$, $t \in Q_{ij}$, и, таким образом, $M_0(y_{ij})(t) \cdot = 0$, $t \in Q_{ij}$. Следовательно, $M_0(y_i)(t) \cdot = M_0(y_j)(t) \cdot$, $t \in Q_{ij}$. Но тогда, обозначая $z'(t) := \sum P_{Q_i, n} \circ M_0(y_i)_{1 \leq i \leq k}$ и $z''(t) := \sum P_{Q_j, n} \circ M_0(y_j)_{1 \leq j \leq r}$, получаем $z'(t) = M_0(y_i)(t) \cdot = M_0(y_j)(t) \cdot = z''(t)$, $t \in Q_{ij}$. Учитывая, что система множеств $\{Q_{ij}\}$ образует разбиение интервала T , приходим к заключению, что $z'(t) \cdot = z''(t) \cdot$, $t \in T$, и, значит, оператор M^* определен корректно.

Для того чтобы доказать непрерывность отображения M^* , достаточно проверить, что для M^* справедливо соотношение (3) (в этом случае непрерывность оператора M^* следует из интегрального неравенства Гёльдера). Пусть, как и прежде, $y = \sum P_{Q_i, q}(y_i)$, $y_i \in Y_0$, $\{Q_i\}$ — разбиение отрезка T , $i = 1, \dots, k$. Тогда из $M^*(y) = \sum P_{Q_i, n} \circ M_0(y_i)_{1 \leq i \leq k}$ следует, что $M^*(y)(t) = M_0(y_i)(t)$, $t \in Q_i$, откуда в силу (3) для y_i справедливо $\|M^*(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|M_0(y_i)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varphi(t) \|y_i(t)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \varphi(t) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}$ μ -почти всюду на Q_i , а значит, μ -почти всюду в точках интервала T . Далее, чтобы завершить доказательство, остается подтвердить для M^* свойство (2). Пусть $y \in E$, $y = \sum P_{Q_i, q}(y_i)_{1 \leq i \leq k}$, $y_i \in Y_0$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\cup(Q_i)_{1 \leq i \leq k} = T$, $i, j = 1, \dots, k$, и $Q \subset T$. Тогда $P_{Q, q}(y) = \sum (P_{Q, q} \circ P_{Q_i, q}(y_i))_{1 \leq i \leq k} = \sum (P_{Q \cap Q_i, q}(y_i))_{1 \leq i \leq k}$, откуда в соответствии с определением конструкции оператора M^* , введенной выше, справедливо

$$\begin{aligned} M^* \circ P_{Q, q}(y) &= \sum (P_{Q \cap Q_i, n} \circ M_0(y_i))_{1 \leq i \leq k} = \sum (P_{Q, n} \circ P_{Q_i, n} \circ M_0(y_i))_{1 \leq i \leq k} \\ &= P_{Q, n} \circ \left(\sum P_{Q_i, n} \circ M_0(y_i) \right)_{1 \leq i \leq k} = P_{Q, n} \circ M^*(y). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Сопоставим линейному оператору M_0 из формулировки теоремы 1 нелинейный оператор $\Psi: E_0 \rightarrow L(T, \mu, \mathbb{R})$ вида

$$\Psi(y)(t) := \begin{cases} \|M_0(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} / \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}, & \text{если } y(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^q; \\ 0, & \text{если } y(t) = 0 \in \mathbb{R}^q. \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что конструкция (4) обобщает структуру оператора (4) из [1].

Прежде чем приступить к изучению аналитических свойств оператора Ψ , связанных с решением задачи моделирования сильных дифференциальных (A, B) -моделей, покажем, что конструкция (4) в своей основе опирается на хорошо известное (в вариационном анализе) отношение Рэля — Ритца [9, с. 211]. Пусть $(\Gamma, z) \mapsto \text{rel}(\Gamma, z): L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ — данное отношение, где Γ и z — матрица и вектор соответствующих размерностей. Тогда если принять, что $y = (x(t), u(t))$ — вектор-функция правой части дифференциальной системы (1), $M_0((x, u)) = \dot{x}$ и Ψ — оператор (4) с евклидовыми нормами $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$, $q = n + m$, то в силу (1) верно $\Psi((x, u))(t) = (\text{rel}(\Gamma(t), (x(t), u(t))))^{1/2}$, где $\Gamma(t) = [A(t), B(t)]' [A(t), B(t)]$, $[\cdot]'$ — операция транспонирования матрицы. В связи с последним замечанием оператор Ψ будем называть (вне зависимости от вида норм

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$, участвующих через соотношение (4) в его построении) оператором Рэлея — Ритца.

Теорема 2. Пусть E_0 — линейное множество в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ и Θ — некоторая (или, что эквивалентно, любая) ограниченная окрестность нуля в E_0 , и пусть Fr — граничный оператор, действующий в E_0 . Тогда линейный оператор $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ является M -продолжимым в том и только в том случае, если для оператора Рэлея — Ритца Ψ выполняются следующие условия:

- а) $\text{supp } M_0(y) \subset \text{supp}(y) \pmod{\mu}$ для любого $y \in \text{Fr } \Theta$;
- б) $\Psi[\text{Fr } \Theta] \subset L_p(T, \mu, \mathbb{R})$;
- в) существует $\varphi \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$ такая, что для всех $y \in \text{Fr } \Theta$ имеет место $\Psi(y)(t) \cdot \leq \varphi(t)$, $t \in T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вообще говоря, условие б) следует из условия в), однако его все-таки стоит выделить отдельно для удобства использования в дальнейшем и большей ясности «природы» M_1 -продолжимости (см. далее теорему 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия а) и конструкции (4) следует, что

$$\|M_0(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot = \cdot \Psi(y) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}, \quad y \in \text{Fr } \Theta, \quad t \in T,$$

поэтому из посылки в) имеет место $\|M_0(y)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \leq \cdot \varphi(t) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}$, $y \in \text{Fr } \Theta$, $t \in T$. Таким образом, M -продолжимость оператора M_0 — прямое следствие теоремы 1. В пункте в) и здесь (в сравнении с теоремой 1) условие $y \in E_0$ заменено более конструктивным $y \in \text{Fr } \Theta$, так как в качестве E_0 может выступать любое поглощающее множество в E_0 , поскольку оператор M_0 линейный и, следовательно, оператор Рэлея — Ритца постоянен на каждом множестве, представленном фиксированным одномерным подпространством из E_0 за вычетом из него нуль-вектора (т. е. $\Psi(\alpha y) = \Psi(y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha y \neq 0 \in \mathbb{R}$). Обратно, если M -продолжимость оператора M_0 существует, то пункты а)–в) есть следствие неравенства (3).

Следствие 3. Пусть $N \subset \Pi_{\text{ACL}}$, Θ — ограниченная окрестность нуля в $\text{Span } N$, и пусть Fr — граничный оператор в $\text{Span } N$. Тогда $\text{Span } N$ — ОЛД-совместимое множество (однородный обыкновенный пласт над N), если и только если существует такая неотрицательная функция $\varphi \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, что для любой пары $(x, u) \in \text{Fr } \Theta$ справедливо неравенство $\Psi((x, u))(t) \cdot \leq \cdot \varphi(t)$, $t \in T$, где Ψ — оператор Рэлея — Ритца (4) с $M_0((x, u)) = \dot{x}$.

Следствие 3 — прямой результат теоремы 2 и леммы 1 из [1].

Теорема 3. Пусть $E_0 \subset L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ — линейное множество, Θ — ограниченная окрестность нуля в E_0 и Fr — граничный оператор в E_0 . Тогда линейный оператор $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ является M_1 -продолжимым в том и только в том случае, если для оператора Рэлея — Ритца Ψ имеют место оба условия:

- а) для любого $y \in \text{Fr } \Theta$ имеет место $\text{supp } M_0(y) \subset \text{supp}(y) \pmod{\mu}$;
- б) $\Psi[\text{Fr } \Theta] \subset L_p(T, \mu, \mathbb{R})$.

Следствие 4. Пусть $N \subset \Pi_{\text{ACL}}$, Θ — некоторая ограниченная окрестность нуля в $\text{Span } N$, и пусть Fr — граничный оператор в $\text{Span } N$. Тогда $\text{Span } N$ является линейным РЛД-совместимым множеством над N в том и только в том случае, если $\Psi[\text{Fr } \Theta] \subset L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, где Ψ — оператор Рэлея — Ритца (4) с $M_0((x, u)) = \dot{x}$.

ПРИМЕР. Пусть в конструкции Π_{ACL} имеет место $n = m = 1$, $p = p' = 2$, $T = [0, 1]$ и $P_1 = \{(x_1(\cdot), u_1(\cdot)) : (x_1(t), u_1(t)) = (t, 1), t \in T\}$, $P_2 = \{(x_2(\cdot), u_2(\cdot)) : (x_2(t), u_2(t)) = (-t, t - 1), t \in T\}$, $N = P_1 \cup P_2$. Покажем, что $\text{Span } N$ — однородный распределенный пласт класса 1, не обладающий свойством ОЛД-совместимости. Выберем в качестве множества $\text{Fr } \Theta$ множество $\{\alpha_1(x_1, u_1) +$

$\alpha_2((x_1, u_1) + (x_2, u_2)) : \alpha_1, \alpha_2 \in R, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1\}$. Так как $\Psi[\text{Fr } \Theta] = \{t \mapsto |\alpha_1|/(\alpha_1^2 t^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 t)^2)^{1/2} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1\} \subset L_2(T, \mu, \mathbb{R})$ (здесь оператор Ψ с евклидовыми нормами в (4)), то для N справедливо следствие 4. Далее, если существует (A, B) -модель $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))$, реализующая N , то пара (x_1, u_1) индуцирует равенство $1 = \alpha(t)t + \beta(t)$, а пара (x_2, u_2) — равенство $1 = -\alpha(t)t + \beta(t)(t - 1)$, откуда $\alpha(t) = t^{-1}$ и $\beta(t) = 0$ и, следовательно, $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot)) \notin L_2(T, \mu, L(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \times L_2(T, \mu, L(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

2. ТЕОРЕМЫ О M_k -ПРОДОЛЖИМОСТИ

Продолжим начатое в разделе 1 исследование, чтобы ответить на вопрос, какие положительные результаты по M_k -продолжимости можно получить из усиления теорем 2 и 3 условием конечномерности пространства E_0 .

Пусть E_0 — подпространство в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, $\dim E_0 = k$, $\{y_i\}_{1 \leq i \leq k}$ — алгебраический базис в E_0 , $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ — некоторый линейный оператор, и пусть $z_i := M_0(y_i)$, $1 \leq i \leq k$. Обозначим через $Y(\cdot)$ и $Z(\cdot)$ соответственно нестационарные $q \times k$ -матрицу $[y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)]$ и $n \times k$ -матрицу $[z_1(\cdot), \dots, z_n(\cdot)]$. Тогда $E_0 = \{Y\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^k\}$ и $M_0[Y\alpha] = Z\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$, при этом $Y \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^q))$, $Z \in L_1(T, \mu, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$. В такой постановке оператор M_0 является M_k -продолжимым тогда и только тогда, когда существует матричнозначная функция $M \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n))$ такая, что для всех $\alpha \in \mathbb{R}^k$ верно $Z(t)\alpha = M(t)Y(t)\alpha$, $t \in T$. Ясно, что последнее равенство достаточно проверить только на элементах базиса из $\mathbb{R}^k$, поэтому для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы на отрезке T было справедливо матричное равенство

$$Z(t) \cdot = M(t)Y(t). \quad (5)$$

Для решения матричного уравнения (5) привлечем конструкцию обобщенной обратной (псевдообратной) матрицы Мура — Пенроуза [9, с. 500] для Y , которую обозначим через Y^* . Такая матрица всегда существует, единственна и может быть получена как предел $\lim\{[Y(t)]'(Y(t)[Y(t)]' + \tau I)^{-1} : \tau \rightarrow 0\}$ [9, с. 501].

Теорема 4. Пусть E_0 — k -мерное подпространство в $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$. Тогда линейный оператор $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$ является M_k -продолжимым в том и только в том случае, если выполнены оба следующих условия:

- а) $Z(t)Y^*(t)Y(t) \cdot = \cdot Z(t)$;
- б) $ZY^* \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n))$.

Доказательство теоремы предваряет простая, но важная

Лемма 2. Если отображение $Y(\cdot): T \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^q)$ μ -измеримо, то μ -измеримо и $Y^*(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $q \times q$ -матричнозначную функцию $Y^\sharp$ на T вида $t \mapsto Y^\sharp(t): Y(t)[Y(t)]'$, и пусть $f(t, \lambda) := \det[Y^\sharp(t) + \lambda I]$, $t \in T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $f(t, \lambda) = \beta_0(t) + \beta_1(t)\lambda + \dots + \beta_q(t)\lambda^q$, где все функции $\beta_i(\cdot)$, $0 \leq i \leq q$, являются μ -измеримыми, к тому же $\beta_q(\cdot) \equiv 1$. Пусть $t \mapsto \beta_{-1}(t) := 0$, $t \mapsto \beta(t) := \max\{|\beta_i(t)|; 0 \leq i \leq q\}$, $t \in T$ (функция $\beta(t)$ μ -измерима), и пусть $T_i := \{t \in T : |\beta_{-1}(t)| + \dots + |\beta_{i-1}(t)| = 0, |\beta_i(t)| > 0\}$, $0 \leq i \leq q$. Очевидно, что $T_i \in \rho_\mu$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, $i \neq j$, при этом $\cup\{T_i : 0 \leq i \leq q\} = T$. Положим $t \mapsto \tau(t) := \sum \chi_{T_i} |\beta_i(t)| / (\beta(t) + |\beta_i(t)|)_{0 \leq i \leq q}$, где χ_{T_i} — характеристическая функция множества T_i . Таким образом, $\tau(t) = |\beta_i(t)| / (\beta(t) + |\beta_i(t)|)$, $t \in T_i$, и поскольку $|\beta_i(t)| > 0$, $t \in T_i$, то $0 < \tau(t) < 1$, $t \in T$. Покажем, что для любого $t \in T_i$ и всех $\lambda \in (0, \tau(t))$ верно $f(t, \lambda) \neq 0$.

Действительно, пусть $t \in T_i$, $\lambda \in (0, \tau(t))$. Тогда $\lambda \in (0, |\beta_i(t)| / (\beta(t) + |\beta_i(t)|))$ и $\beta_j(t) = 0$, $j < i$, откуда $f(t, \lambda) = \beta_i(t)\lambda^i + \dots + \beta_q(t)\lambda^q$, при этом

$|f(t, \lambda)| = \lambda^i |\beta_i(t) + \beta_{i+1}(t)\lambda + \dots + \beta_q(t)\lambda^{q-i}| \geq \lambda^i (|\beta_i(t)| - |\beta_{i+1}(t)|\lambda - |\beta_q(t)|\lambda^{q-i})$. Очевидно, что $|\beta_{i+1}(t)|\lambda + \dots + |\beta_q(t)|\lambda^{q-i} \leq \beta(t)\lambda(1 + \lambda + \dots + \lambda^{q-i-1}) \leq \beta(t)\lambda(1 + \lambda + \dots + \lambda^{q-1}) \leq \beta(t)\lambda/(1 - \lambda)$, следовательно, $|f(t, \lambda)| \geq \lambda^i (|\beta_i(t)| - \beta(t)\lambda/(1 - \lambda)) = \lambda^i (|\beta_i(t)| - \lambda(\beta(t) + |\beta_i(t)|))/(1 - \lambda)$. Так как $0 < \lambda < 1$ и $\lambda < |\beta_i(t)|/(\beta(t) + |\beta_i(t)|)$, то $|\beta_i(t)| - \lambda(\beta(t) + |\beta_i(t)|) > 0$ и, значит, $|f(t, \lambda)| > 0$, т. е. $|f(t, \lambda)| \neq 0$.

Таким образом, для любого $t \in T$ и всех $\lambda \in (0, \tau(t))$ матрица $[Y^\sharp(t) + \lambda I]$ обратима и, следовательно, ее элементы, как вещественные функции на T , будут μ -измеримые. Поэтому последовательность матричнозначных функций $\{Y_j^*(\cdot)\}_{j=1,2,\dots}$ вида

$$Y_j^*(t) := \begin{cases} [Y(t)]'(Y^\sharp(t) + I/j)^{-1}, & 1/j < \tau(t), \\ 0 \in L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^k), & 1/j \geq \tau(t), \end{cases}$$

имеет μ -измеримые элементы-функции в каждой $Y_j^*(\cdot)$, а так как $Y^*(t) = \lim \{Y_j^*(t) : j = 1, 2, \dots\}$, то элементы матричной функции $Y^*(\cdot)$ также μ -измеримые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $t \mapsto M_0(t) := Z(t)Y^*(t)$. Тогда при выполнении пунктов а) и б) из условий теоремы 4 равенство (5) реализуется с $M(t) \cdot = \cdot M_0(t)$. Покажем обратное. Пусть некоторая матричнозначная функция $M \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n))$ удовлетворяет равенству (5) всюду на $T \setminus T_0$ для некоторого μ -нулевого $T_0 \in \rho_\mu$. Тогда для любого $t \in T \setminus T_0$ справедливо $Z(t)Y^*(t)Y(t) = M(t)Y(t)Y^*(t)Y(t) = M(t)Y(t) = Z(t)$, т. е. выполняется требование а). Теперь покажем необходимость условия б). Для этого заметим, что всегда выполняется $[Y^*(t)]' = [[Y(t)]']^*$ [10, с. 34]). Используя теорему 2 из [11, с. 263] для матрицы $[Y(t)]'$, покажем, что при всех $t \in T \setminus T_0$ и любых $\gamma \in \mathbb{R}^n$ справедливо $\|[M_0(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|[M(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $t \in T \setminus T_0$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Из матричного равенства (5) следует $[Z(t)]' = [Y(t)]'[M(t)]'$, и, полагая $b(t) := [Z(t)]'\gamma$, $c(t) := [M(t)]'\gamma$, получаем $[Y(t)]'c(t) - b(t) = 0$. Поэтому $\|[Y(t)]'c(t) - b(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0 = \min\{\|[Y(t)]'s - b(t)\|_{\mathbb{R}^n} : s \in \mathbb{R}^n\}$, откуда в силу пункта а) теоремы 2 из [11, с. 263] имеет место $\|[Y(t)]'c(t) - b(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0 = \|[Y(t)]'[[Y(t)]']^*b(t) - b(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, что дает (см. условие б) теоремы 2 из [11, с. 263]) $\|[[Y(t)]']^*b(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|c(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ и, значит, $\|[M_0(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n} = \|[Y^*(t)]'[Z(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n} = \|[Y(t)]']^*b(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|c(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|[M(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n}$, что и требовалось доказать. Но из $\|[M_0(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|[M(t)]'\gamma\|_{\mathbb{R}^n}$ (вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ произвольный) следует, что для матричной нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n \times q}$ ($\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n \times q}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^{n \times q}$) справедливо неравенство $\|[M_0(t)]'\|_{\mathbb{R}^n \times q} \leq \|[M(t)]'\|_{\mathbb{R}^n \times q}$, а следовательно, и $\|M_0(t)\|_{\mathbb{R}^n \times q} \leq \|M(t)\|_{\mathbb{R}^n \times q}$. Так как элементы матрицы $M(\cdot)$ лежат в $L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, то и элементы матрицы $M_0(\cdot)$ будут находиться в $L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, если они μ -измеримые. Последнее требование явным образом имеет место в силу конструкции $M_0(\cdot)$ и того факта, что все элементы из $Y^*(\cdot)$ являются μ -измеримыми (лемма 2).

Следствие 5. Пусть $N = \{(x_i, u_i)\}_{1 \leq i \leq k} \subset \text{ПАСЛ}$, $X_d := [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_k]$, $X := [x_1, \dots, x_k]$, $U := [u_1, \dots, u_k]$, $Y = [[X]', [U]']'$. Тогда над N существует однородный обыкновенный пласт, если и только если $X_d Y^* Y = X_d$ и $X_d Y^* \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n))$, при этом $X_d Y^*$ — (A, B) -модель реализации множества N системой (1).

Теперь уточним детали M_1 -продолжимости, поскольку последняя представляет очевидный прикладной интерес. В этом нам поможет

Лемма 3. Пусть $y \in L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$, $z \in L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ — евклидова норма и

$$M(t) := \begin{cases} z(t)[y(t)]' / \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^2, & \text{если } y(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^q, \\ 0, & \text{если } y(t) = 0 \in \mathbb{R}^q. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда M -оператор M такой, что $M(y) = z$, существует, если и только если для некоторой функции $\varphi \in L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, $\varphi(t) \cdot \geq \cdot 0$, справедливо $\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \cdot \varphi(t) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ — евклидова норма, при этом матричная функция $M(\cdot)$ — некоторая M -форма оператора M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование M -оператора — прямое следствие теоремы 1. Покажем, что аналитическое представление его M -формы может иметь частный вид (6). Пусть m_{ij} — ij -элемент функциональной матрицы $M(\cdot)$. Тогда при $y(t) \neq 0$ из (5) имеет место $m_{ij}(t) = z_i(t)y_j(t) / \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^2$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq q} m_{ij}^2(t) &= \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{-4} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq q} z_i^2(t) y_j^2(t) \\ &= \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{-4} \sum_{1 \leq i \leq n} z_i^2(t) \sum_{1 \leq j \leq q} y_j^2(t) = \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^{-2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$|m_{ij}(t)| \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq q} m_{ij}^2(t) \right)^{1/2} = \frac{\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}} \leq \varphi(t).$$

Если $y(t) = 0$, то из (6) имеем $m_{ij}(t) = 0$ и, таким образом, опять $|m_{ij}(t)| \leq \varphi(t)$. Поэтому все m_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq q$, лежат в $L_p(T, \mu, \mathbb{R})$, а значит, в силу предложения 1 матричная функция $M(\cdot)$ определяет M -оператор из $L_{p'}(T, \mu, \mathbb{R}^q)$ в $L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$. Далее, при $y(t) \neq 0$ имеет место $M(t)y(t) = z(t)[y(t)]' y(t) / \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}^2 = z(t)$. С другой стороны, в точках множества $\{t \in T : y(t) = 0\}$ в соответствии с $\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \cdot \varphi(t) \|y(t)\|_{\mathbb{R}^q}$ справедливо утверждение, что μ -почти всюду $z(t) = 0$, и, следовательно, опять $M(t)y(t) = z(t)$. Лемма доказана.

Чтобы в варианте $\dim E_0 = k$ получить некоторый характеристический признак M_1 -продолжимости линейного оператора $M_0: E_0 \rightarrow L_1(T, \mu, \mathbb{R}^n)$, рассмотрим вспомогательную конструкцию в виде отображения $M_0(\cdot, \cdot): T \times \mathbb{R}^k \rightarrow L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$, организованного в соответствии с правилом

$$M_0(t, \alpha) := \begin{cases} Z(t)\alpha[\alpha]'[Y(t)]' / \|Y(t)\alpha\|_{\mathbb{R}^q}^2, & \text{если } Y(t)\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}^q, \\ 0, & \text{если } Y(t)\alpha = 0 \in \mathbb{R}^q. \end{cases}$$

В такой постановке простую характеристику M_1 -продолжимости дает следующая теорема, доказательство которой прозрачно в силу леммы 3.

Теорема 5. Для M_1 -продолжимости M_0 необходимо и достаточно, что:

- а) для любого $\alpha \in \mathbb{R}^k$ существует μ -нулевое $T_\alpha \in \rho_\mu$ такое, что выполнение в точках множества $T \setminus T_\alpha$ равенства $Y(t)\alpha = 0$ влечет равенство $Z(t)\alpha = 0$;
- б) для любого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^k$ имеет место $M_0(t, \alpha) \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n))$.

Следствие 6. Пусть $N = \{(x_i, u_i)\}_{1 \leq i \leq k} \subset \Pi_{\text{ACL}}$, $X_d := [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_k]$, $X := [x_1, \dots, x_k]$, $U := [u_1, \dots, u_k]$, $Y = [[X]', [U]']'$. Тогда над N существует однородный распределенный пласт класса 1 в том и только в том случае, если для любого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^k$ имеет место $X_d \alpha[\alpha]'[Y]' / \|Y \alpha\|_{\mathbb{R}^q}^2 \in L_p(T, \mu, L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n))$.

Справедливость следствия 6 явным образом предопределена предшествующей теоремой и леммой 1 из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Данеев А. В., Русанов В. А., Русанов М. В. К теории реализации сильных дифференциальных моделей. I // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 1(21). С. 53–63.
2. Данеев А. В., Русанов В. А. Об одной теореме существования сильной модели // Автоматика и телемеханика. 1995. № 8. С. 64–73.
3. Данеев А. В., Русанов В. А. Геометрические характеристики свойств существования конечномерных (A, B) -моделей в задачах структурно-параметрической идентификации // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 3–8.
4. Данеев А. В., Русанов В. А. Порядковые характеристики свойств существования сильных линейных конечномерных дифференциальных моделей // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 43–50.
5. Данеев А. В., Русанов В. А. Об одном классе сильных дифференциальных моделей над счетным множеством динамических процессов конечного характера // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 32–40.
6. Варга Дж. Оптимальные управления дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
7. Данеев А. В., Русанов В. А. К аксиоматической теории идентификации динамических систем. II. Идентификация линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 9. С. 120–133.
8. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
11. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982.

г. Иркутск
Институт динамики систем
и теории управления СО РАН
E-mail: V.Rusanov@mail.ru

Статья поступила 17 ноября 2003 г.
Окончательный вариант 6 декабря 2004 г.