Лакеев А.В. Системы линейных интервальных уравнений с конечным множеством решений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 3(23). С. 42-48.

Лакеев А.В.

УДК 519.6

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ РЕШЕНИЙ

В работе будем использовать стандартные обозначения $R, Q, Z,\ N$ для множеств вещественных, рациональных, целых и натуральных чисел, соответственно, и $N_+ = N \setminus \{0\}$. При этом через R^n (Q^n, Z^n, …) обозначается множество n-мерных векторов (столбцов) с координатами из $R(Q, Z, \ldots)$, а через $R^{m\times n}(Q^{m\times n}, Z^{m\times n}, \ldots)$ – множество $m\times n$-матриц с элементами из $R(Q, Z, \ldots)$.

Для векторов $a, b \in R^n$ (матриц $A, B \in R^{m\times n}$) неравенство $a \le b$ ($A \le B$), модуль $|a|$ ($|A|$) и операции $a^+ = \max\{\mathbf{0}_n, a\}$, $a^- = \max\{\mathbf{0}_n, -a\}$ ($A^+ = \max\{\mathbf{0}_{m\times n}, A\}$, $A^- = \max\{\mathbf{0}_{m\times n}, -A\}$) будем понимать покоординатно (поэлементно), где $\mathbf{0}_n$ – нулевой n-мерный вектор ($\mathbf{0}_{m\times n}$ – нулевая $m\times n$ -матрица).

Также будем использовать стандартные обозначения, принятые в интервальном анализе (см., например, [1]).

Если заданы два вектора $\underline{b}, \overline{b} \in R^m$, $\underline{b} \le \overline{b}$ (матрицы $\underline{A}, \overline{A} \in R^{m\times n}$, $\underline{A} \le \overline{A}$), то интервальным вектором $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ (интервальной матрицей $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$) будем называть множество $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] = \{b \in R^m \mid \underline{b} \le b \le \overline{b}\}$ ($\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in R^{m\times n} \mid \underline{A} \le A \le \overline{A}\}$). Множество всех n-мерных интервальных векторов обозначим IR^m и множество всех интервальных $m\times n$-матриц – $IR^{m\times n}$.

Основным объектом исследования данной работы является система линейных интервальных уравнений [1] вида

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] \in IR^{m\times n}$ – интервальная $m\times n$ -матрица, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in IR^m$ – интервальный m-мерный вектор.

Под множеством решений системы (1) будем понимать множество

$$\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in R^n \mid \exists A \in \mathbf{A}\ \exists b \in \mathbf{b}\ \ Ax = b\}, \tag{2}$$

называемое обычно объединенным множеством решений системы (1) [1].

При исследовании вычислительной сложности различных задач, связанных с интервальными системами линейных уравнений, большую роль играют системы, имеющие конечное объединенное множество решений [2–4]. Хорошо известно, что для обычных неинтервальных систем линейных уравнений множество решений будет либо пустым, либо одноэлементным, либо бесконечным.

В случае, когда число m уравнений системы (1) не больше, чем число n переменных, в принципе, ситуация такая же. Т.е. если $m = n$, то можно показать [2], что объединенное множество решений либо пусто, либо одноэлементно, либо бесконечно (однако, в отличие от неинтервальных систем, может быть невыпуклым). Также нетрудно показать, что если $m < n$, то множество решений либо пусто, либо бесконечно (содержит некоторый луч). Таким образом, эффект конечности множества решений появляется только при $m > n$.

В связи с вышесказанным представляется интересным получить некоторые критерии конечности объединенного множества решений, а также выяснить вычислительную сложность вопроса о конечности этого множества и вычислительную сложность задачи максимизации линейного функционала на нем, в случае его непустоты.

Приведем вначале критерий конечности $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, аналогичный одному из критериев регулярности интервальной матрицы из работы [5]. Для этого проясним структуру множества $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Введем следующие обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Для $n \in N_+$ обозначим $Q_n = \{x \in R^n \mid x_i \in \{-1, 1\},\quad i = \overline{1, n}\}$ – дискретный куб в R^n.

Для любого $y \in Q_n$ обозначим через R^n_y ортант в R^n, соответствующий набору знаков y, т.е.

$$R_y^n = \{x \in R^n \mid y_i x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Согласно теореме Оеттли–Прагора [6] объединенное множество решений для системы (1) можно записать в следующем виде:

$$\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{x \in R^n \mid |A_c x - b_c| \leq \Delta |x| + \delta\}, \qquad (3)$$

где $A_c = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $b_c = \frac{1}{2}(\overline{b} + \underline{b})$, $\delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})$. Заметим, что для $x \in R_y^n \; |x| = T_y x$, где $T_y = \operatorname{diag}(y_1,..., y_n)$ – диагональная матрица. Поэтому пересечение $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ с R_y^n можно записать в следующем виде:

$$\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b}) \cap R_y^n = \{x \in R^n \mid$$
$$-\Delta T_y x - \delta \leq A_c x - b_c \leq \Delta T_y x + \delta, T_y x \geq 0\} =$$
$$= \{x \in R^n \mid (A_c + \Delta T_y)x \geq b_c - \delta,$$
$$(A_c + \Delta T_y)x \leq b_c + \delta, T_y x \geq 0\},$$

т.е. оно является множеством решений системы $(2m+n)$ линейных неравенств от n переменных. Поэтому $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ конечно тогда и только тогда, когда для любого $y \in Q_n$ множество $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b}) \cap R_y^n$ не более чем одноэлементно. В дальнейшем нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $A \in R^{m \times n}, b \in R^m, c \in R^n$ *и система линейных неравенств вида*

$$\begin{cases} A\mathrm{x} \leq b, \\ \mathrm{x} \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

разрешима. Все решения этой системы лежат в некоторой гиперплоскости $c^T \mathrm{x} = \mathrm{const}$ *(*^{T} *– знак транспонирования) тогда и только тогда, когда существует решение системы*

$$\begin{cases} y_1^T A \geq c^T; \\ y_2^T A \geq -c^T; \\ (y_1^T + y_2^T)b = 0; \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим "удвоенную" систему (4), т.е.

$$\begin{cases} A\mathrm{x}_1 \leq b; \\ A\mathrm{x}_2 \leq b; \\ -\mathrm{x}_1 \leq 0; \\ -\mathrm{x}_2 \leq 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Очевидно, что для того чтобы все решения системы (4) лежали в некоторой гиперплоскости $c^T \mathrm{x} = \mathrm{const}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$ системы (6) выполнялось неравенство

$$c^T(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \leq 0, \qquad (7)$$

т.е. неравенство (7) – следствие системы неравенств (6).

Представляя систему (6) и неравенство (7) в виде

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \\ -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^T \; -c^T) \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{pmatrix} \leq 0,$$

где E – единичная матрица, получаем [7, следствие 7.1h], что (7) является следствием (6) тогда и только тогда, когда разрешима следующая система:

$$\begin{cases} (y_1^T \; y_2^T \; y_3^T \; y_4^T) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \\ -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} = (c^T \; -c^T), \\ (y_1^T \; y_2^T \; y_3^T \; y_4^T) \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Расписывая эту систему, получаем

$$\begin{cases} y_1^T A - y_3^T = c^T, \\ y_2^T A - y_4^T = -c^T, \\ y_1^T b + y_2^T b \leq 0, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Исключая из системы (8) переменные y_3 и y_4, получаем, что разрешимость этой системы эквивалентна разрешимости следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} y_1^T A \geq c^T, \\ y_2^T A \geq -c^T, \\ (y_1^T + y_2^T)b \leq 0, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Далее заметим, что, так как система (4) имеет решение, то по одному из вариантов леммы Фаркаша [7, следствие 7.1f] не существует решений системы

$$\begin{cases} y^T A \ge 0, \\ y^T b < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Если y_1, y_2 – решение системы (9), то, складывая два первых неравенства этой системы, получим, что $(y_1^T + y_2^T)A \ge 0$, и из неразрешимости системы (10) получаем, что строгое неравенство $(y_1^T + y_2^T)b < 0$ выполняться не может. Поэтому система (9) эквивалентна системе (5). Лемма доказана.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $y \in Q_n$ существовало решение одной из следующих линейных систем:*

$$\begin{cases} (x_1^T + x_2^T)\Delta \le (x_1^T - x_2^T)A_c T_y, \\ (x_1^T + x_2^T)\delta + (x_1^T - x_2^T)b_c < 0, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} (X_{11} + X_{12})\Delta + E_n \le (X_{11} - X_{12})A_c T_y, \\ (X_{21} + X_{22})\Delta - E_n \le (X_{21} - X_{22})A_c T_y, \\ (X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22})\,\delta + \\ (X_{11} - X_{12} + X_{21} - X_{22})\,b_c = 0, \\ X_{11} \ge 0, \ X_{12} \ge 0, \ X_{21} \ge 0, \ X_{22} \ge 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $T_y = \mathrm{diag}(y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{A} = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$, $\mathbf{b} = [b_c - \delta, b_c + \delta]$, $x_i \in R^n$, $i = 1,2$, $X_{ij} \in R^{n \times m}$, $i, j = 1,2$, E_n *– единичная* $n \times n$*-матрица.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, для того чтобы множество $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $y \in Q_n$ множество $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap R_y^n$ было не более чем одноэлементным. Это множество совпадает с множеством решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} (A_c - \Delta T_y)x \le b_c + \delta, \\ (A_c + \Delta T_y)x \ge b_c - \delta, \\ T_y x \ge 0. \end{cases}$$

Сделав в этой системе замену $T_y x = z$, получаем, что следующая система должна иметь не более одного решения:

$$\begin{cases} (A_c T_y - \Delta)z \le \delta + b_c, \\ -(A_c T_y + \Delta)z \le \delta + b_c, \\ z \ge 0. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим далее два случая: система (13) не имеет решений, либо система (13) имеет единственное решение. По одному из вариантов леммы Фаркаша [7, следствие 7.1f] получаем, что система (13) не имеет решений тогда и только тогда, когда существует решение системы

$$\begin{cases} x_1^T (A_c T_y - \Delta) - x_2^T (A_c T_y + \Delta) \ge 0, \\ x_1^T (\delta + b_c) + x_2^T (\delta - b_c) < 0, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

которая, очевидно, эквивалентна системе (11).

Рассмотрим теперь условия, при которых система (13) имеет единственное решение.

Обозначим e_i – i-й орт в R^n, $i = \overline{1,n}$. Тогда очевидно, что система (13) имеет единственное решение, если и только если для любого $i = \overline{1,n}$ все решения системы лежат в гиперплоскости $e_i^T z = \mathrm{const}$.

Используя лемму 1, получаем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы при всех $i = \overline{1,n}$ существовало решение системы

$$\begin{cases} u_{1i}^T (A_c T_y - \Delta) - u_{2i}^T (A_c T_y + \Delta) \ge e_i^T, \\ v_{1i}^T (A_c T_y - \Delta) - v_{2i}^T (A_c T_y + \Delta) \ge -e_i^T, \\ (u_{1i}^T + v_{1i}^T)(\delta + b_c) + (u_{2i}^T + v_{2i}^T)(\delta - b_c) = 0, \\ u_{1i} \ge 0, \ u_{2i} \ge 0, \ v_{1i} \ge 0, \ v_{2i} \ge 0, \end{cases}$$

которую после очевидных преобразований можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} (u_{1i}^T + u_{2i}^T)\Delta + e_i^T \le (u_{1i}^T - u_{2i}^T)A_c T_y, \\ (v_{1i}^T + v_{2i}^T)\Delta - e_i^T \le (v_{1i}^T - v_{2i}^T)A_c T_y, \\ (u_{1i}^T + u_{2i}^T + v_{1i}^T + v_{2i}^T)\delta + \\ + (u_{1i}^T + v_{1i}^T - u_{2i}^T - v_{2i}^T)b_c = 0, \\ u_{1i} \ge 0, \ u_{2i} \ge 0, \ v_{1i} \ge 0, \ v_{2i} \ge 0. \end{cases} \quad (14)$$

Объединяя системы (14) по всем $i = \overline{1,n}$ в одну систему и образуя из векторов-строк u_{1i}^T, u_{2i}^T, v_{1i}^T, v_{2i}^T матрицы $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$, соответственно, получаем систему (12). Теорема доказана.

Системы (11), (12) можно преобразовать в более компактный вид, если использовать модули векторов и матриц.

Следствие 1. *Для того чтобы множество $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $y \in Q_n$ существовало решение одной из следующих систем с модулями:*

$$\begin{cases} |x^T|\,\Delta \le x^T A_c T_y, \\ |x^T|\,\delta + x^T b_c < 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} |X_1|\,\Delta + E_n \le X_1 A_c T_y, \\ |X_2|\,\Delta - E_n \le X_2 A_c T_y, \\ (|X_1| + |X_2|)\delta + (X_1 + X_2)b_c = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где $x \in R^n$, $X_1, X_2 \in R^{n\times m}$.

Доказательство. Покажем, что разрешимость систем (11) или (12) эквивалентна разрешимости систем (15) или (16).

Пусть система (11) разрешима и x_1, x_2 – некоторое ее решение. Положим $x = x_1 - x_2$. Тогда очевидно, что $|x| \le x_1 + x_2$, и, учитывая неотрицательность матрицы Δ и вектора δ, получаем

$$|x^T|\Delta \le (x_1^T + x_2^T)\Delta \le (x_1^T - x_2^T)A_cT_y = x^T A_c T_y,$$

$$|x^T|\delta + x^T b_c \le (x_1^T + x_2^T)\delta + (x_1^T - x_2^T)b_c < 0,$$

т.е. вектор x будет решением системы (15).

Обратно, если x – решение системы (15), то, полагая $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$ (положительная и отрицательная часть вектора x соответственно), получаем, что $x = x_1 - x_2$ и $|x| = x_1 + x_2$. Следовательно, x_1, x_2 будут решением системы (11).

Эквивалентность разрешимости систем (12) и (16) (при условии, что существует решение системы (13)) доказывается аналогично. Следствие доказано.

Как известно [8], для выяснения вопроса о разрешимости системы линейных неравенств (а, следовательно, и для систем (11), (12) при фиксированном $y \in Q_n$) существует полиномиальный алгоритм. Однако, для того чтобы выяснить вопрос о конечности множества $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$, опираясь на теорему 1, необходимо выяснить разрешимость 2^n систем вида (11), (12), т.е. получаем, вообще говоря, экспоненциальный алгоритм. Как видно из следующей теоремы, если $P \ne NP$, то полиномиального алгоритма для выяснения конечности множества $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ не существует. Для доказательства этого утверждения нам потребуется следующая лемма, которая может быть получена из некоторых результатов работы [9], однако мы приведем совершенно элементарное доказательство.

Лемма 2 [9]. *Для заданного вектора* $d = (d_1,\dots,d_n)^T \in R^n$ *вектор* $x = (x_1,\dots,x_n)^T \in R^n$ *удовлетворяет системе неравенств*

$$\begin{cases} |x_i + d_i(d,x)| \le 1, & i = \overline{1,n}; \\ n \le \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \end{cases} \qquad (17)$$

тогда и только тогда, когда $x_i \in \{-1,1\}, i = \overline{1,n}$, *и* $(d,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i x_i = 0.$

Доказательство. То, что вектор $x \in R^n$ с координатами из $\{-1,1\}$ и такой, что $(d,x) = 0$, удовлетворяет системе (17), очевидно.

Покажем обратное. Пусть $x \in R^n$ удовлетворяет (17). Расписывая $\|x + (d,x)d\|^2$, получим

$$\|x + (d,x)d\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,(d,x)d) + \|(d,x)d\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2(d,x)(d,x) + (d,x)^2\|d\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2(d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right).$$

Из этого равенства получаем

$$\|x\|^2 = \|x + (d,x)\|^2 - 2(d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right). \qquad (18)$$

Тогда, используя неравенства (17), равенство (18) и хорошо известное неравенство $|a| \le \frac{1}{2}(1 + a^2)$, получаем

$$n \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(1 + x_i^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{2}(n + \|x\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(n + \|x + (d,x)d\|^2 - 2(d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^{n}(x_i + (d,x)d_i)^2 - \right.$$
$$\left. - 2(d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right)\right) \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(n + n - 2(d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right)\right) =$$
$$= n - (d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right).$$

И, следовательно, $(d,x)^2\left(1 + \frac{1}{2}\|d\|^2\right) \le 0.$

Что возможно только в случае $(d,x) = 0$. Поэтому из первых неравенств (17) получаем $|x_i| \le 1, i = \overline{1,n}$, и, учитывая неравенство $n \le \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, получаем $|x_i| = 1$, т.е. $x_i \in \{-1,1\}$, $i = \overline{1,n}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Задача выяснения по заданным матрицам* $\underline{A}, \overline{A} \in Z^{(m+1)\times m}$ *и векторам* $\underline{b}, \overline{b} \in Z^{m+1}$ *таким, что множество* $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ *непусто и ограничено, будет ли множество* $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ *конечным, является* NP*-трудной (более точно,* $co\text{-}NP$*-*

полной). Если, кроме того, задан вектор $c \in Z^m$, число $\alpha \in Z$ и известно, что $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ не пусто и конечно, то задача выяснения, верно ли, что $\max\left\{c^T x \,\middle|\, x \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})\right\} \geq \alpha$, NP-полна.

Доказательство. То, что первая задача лежит в $co\text{-}NP$, следует непосредственно из теоремы 1. Действительно, отрицание этой задачи, т.е. выяснение того, что множество $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ бесконечно, будет лежать в NP.

Недетерминированный полиномиальный алгоритм, выясняющий этот вопрос, состоит в следующем. Сначала "угадываем" тот ортант R^n_y, для которого системы (12), (13) будут неразрешимы, и затем с помощью полиномиального алгоритма [8] показываем их неразрешимость.

Покажем теперь, что известная NP-полная задача РАЗБИЕНИЕ [10] полиномиально сводится к задаче выяснения бесконечности множества $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$.

Задача РАЗБИЕНИЕ состоит в следующем.

УСЛОВИЕ. Заданы $n \geq 1$ чисел $d_1,\ldots,d_n \in N_+$.

ВОПРОС. Существует ли набор знаков $x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} x_i d_i = 0$?

Другими словами, если для заданного вектора $d = (d_1,\ldots,d_n)^T \in N^n_+$ обозначим $\Sigma_R(d) = \left\{x \in Q_n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i d_i = 0\right\}$, то задача РАЗБИЕНИЕ состоит в выяснении непустоты множества $\Sigma_R(d)$.

Итак, пусть задан вектор $d = (d_1,\ldots,d_n)^T \in N^n_+$. Обозначим $\tilde{d} = (\tilde{d}_1,\ldots,\tilde{d}_{n+2})^T$, $\tilde{d}_i = 2d_i$, $i = \overline{1,n}$, $\tilde{d}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} d_i$, $\tilde{d}_{(n+2)} = -\sum_{i=1}^{n} d_i$ и рассмотрим систему из $(n+5)$ уравнений от $(n+4)$ переменных $x_1,\ldots,x_{n+4}$, $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_{n+4})^T$.

Рассмотрим систему линейных интервальных уравнений

$$\begin{cases} x_i + \tilde{d}_i(\tilde{d},\tilde{x}) = [-1,1], \ i = \overline{1,n+2}, \\ \sum_{j=1}^{n} [-1,1]\, x_j = n+2, \\ x_{n+3} = x_{n+1} + x_{n+2}, \\ x_{n+4} + [-1,1]\, x_{n+3} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Пусть интервальные матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ соответствуют системе (19). Тогда по теореме Оеттли–Прагора и лемме 2 получаем, что система (19) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_i \in \{-1,1\}, \ i = \overline{1,n+2}, \\ 2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j d_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right) x_{n+1} - \left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right) x_{n+2} = 0, \\ x_{n+3} = x_{n+1} + x_{n+2}, \\ |\, x_{n+4} \,| \leq |\, x_{n+3} \,|. \end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что множество решений задачи РАЗБИЕНИЕ $\Sigma_R(d)$ непусто тогда и только тогда, когда множество решений системы (20) (т.е. $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$) бесконечно.

Пусть $\Sigma_R(d) = \left\{x \in Q_n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i d_i = 0\right\} \neq \varnothing$ и $x^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n)^T \in \Sigma_R(d)$. Тогда очевидно, что для любого $\alpha \in [-2, 2]$ вектор $\tilde{x}^0 \in R^{n+4}$ вида $\tilde{x}^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n, 1, 1, 2, \alpha)^T$ удовлетворяет системе (20) и, следовательно, принадлежит $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$. Таким образом, $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ – бесконечно.

Покажем обратное. Пусть $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ бесконечно. Посмотрим, за счет какой координаты в множестве векторов $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ может возникнуть бесконечность? Из системы (20) получаем, что, если $x = (x_1,\ldots,x_{n+4}) \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$, то $x_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1,n+2}$, $x_{n+3} \in \{-2, 0, 2\}$. Так как векторов из R^{n+3}, удовлетворяющих этим условиям, конечное число ($\leq 3 \cdot 2^{n+2}$), то в множестве $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ найдется вектор $\tilde{x}^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_{n+4})^T$ такой, что $x^0_{n+4} \neq 0$. Но тогда $|\, x_{n+3} \,| \geq |\, x_{n+4} \,| > 0$ и, следовательно, $x^0_{n+3} \in \{-2, 2\}$. В силу равенства $x^0_{n+3} = x^0_{n+1} + x^0_{n+2}$ и того, что $x^0_{n+1}, x^0_{n+2} \in \{-1, 1\}$, это возможно, только когда либо $x^0_{n+1} = x^0_{n+2} = 1$, либо $x^0_{n+1} = x^0_{n+2} = -1$. Но тогда в любом случае из второго уравнения системы (20) получаем, что $\sum_{i=1}^{n} x^0_i d_i = 0$, т.е. $x^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n)^T \in \Sigma_R(d)$. Следовательно, $\Sigma_R(d) \neq \varnothing$.

Таким образом, задача РАЗБИЕНИЕ полиномиально сводится к задаче выяснения бесконечности множества $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$. Кроме того, очевидно, что множество решений системы (20) при любых $d_1,\ldots,d_n \in N_+$ непусто и ограничено. Следовательно, задача выяснения бесконечности множества $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ будет NP-полной и поэтому задача выяснения конечности $\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b})$ будет $co\text{-}NP$-полной.

Рассмотрим теперь задачу максимизации. Недетерминированный полиномиальный алгоритм, решающий эту задачу, состоит в следующем. Сначала "угадываем" тот ортант R^n_y, в котором достигается максимум, и затем с помощью полиномиального алгоритма [8] показываем нужное неравенство.

Для доказательства NP-полноты опять используем задачу РАЗБИЕНИЕ. Пусть задан вектор $d \in N^n_+$. Образуем вектор $\widetilde{d}$ так же, как раньше, и рассмотрим систему из $(n+3)$ уравнений от $(n+2)$ переменных, состоящую из первых $(n+3)$-х уравнений системы (19).

Опять по теореме Оеттли–Прагора и лемме 2 получаем, что она эквивалентна первым $(n+3)$-м уравнениям системы (20).

Обозначим через $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{b}_0$ интервальные матрицу и вектор, соответствующие этой системе, $c_0 = (0,\dots,0,1,1)^T \in Z^{n+2}$ и $\alpha = 2$. Множество $\Sigma(\mathbf{A}_0,\mathbf{b}_0)$ непусто, так как $(1,\dots,1,-1,1)^T \in \Sigma(\mathbf{A}_0,\mathbf{b}_0)$ и, очевидно, конечно. Кроме того, $\max\left\{c_0^T x \,\middle|\, x \in \Sigma(\mathbf{A}_0,\mathbf{b}_0)\right\} \geq 2$ тогда и только тогда, когда в $\Sigma(\mathbf{A}_0,\mathbf{b}_0)$ имеется вектор вида $(x_1,\dots,x_n,1,1)^T$, что очевидно эквивалентно $\Sigma_R(d) \neq \varnothing$. Таким образом, задача РАЗБИЕНИЕ полиномиально сводится к задаче максимизации и, следовательно, последняя NP-полна. Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если $P \neq NP$, то не существует характеризации систем вида (1), имеющих конечное множество решений существенно лучше (относительно сложности проверки), чем полученная в теореме 1.

На следующий подкласс интервальных систем указал автору С.П. Шарый. В его работе [11] получены некоторые интересные свойства неотрицательных интервальных систем, при этом система вида (1) считается неотрицательной, если $\underline{A} \geq \mathbf{0}_{m\times n}$ (где $\mathbf{0}_{m\times n}$ – нулевая $m \times n$-матрица и "$\geq$" понимается поэлементно).

Рассмотрим еще более узкий класс интервальных систем. Обозначим $e^n = \sum_{i=1}^{n} e_i = (1,\dots,1)^T \in R^n$ и $E^{m,n} = e^m (e^n)^T$ – $m \times n$-матрицу, у которой все элементы равны единице.

Определение. Будем говорить, что система вида (1) с интервальной $m \times n$-матрицей $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$ и интервальным m-вектором $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ строго положительна, если $\underline{A} \geq E^{m,n}$, $\underline{b} \geq e^m$.

Введем следующее преобразование пары $(\mathbf{A},\mathbf{b})$, $\mathbf{A} = [\underline{A},\overline{A}] \in IR^{m\times n}$, $\mathbf{b} = [\underline{b},\overline{b}] \in IR^m$, в пару $(\mathbf{A}_p,\mathbf{b}_p)$,

где $\mathbf{A}_p = [\underline{A}_p,\overline{A}_p] \in IR^{(m+1)\times(n+1)}$,

$$\mathbf{b}_p = [\underline{b}_p,\overline{b}_p] \in IR^{m+1},$$

$$\overline{A}_p = \begin{pmatrix} \overline{A}+L & e^m \\ \gamma(e^n)^T & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_p = \begin{pmatrix} \underline{A}+L & e^m \\ \gamma(e^n)^T & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{b}_p = \begin{pmatrix} \overline{b}+\delta e^m \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_p = \begin{pmatrix} \underline{b}+\delta e^m \\ \delta \end{pmatrix},$$

$$L = \gamma e^m (e^n)^T = \gamma E^{m,n}, \quad \gamma = \max\left\{1, 1-\min_{i,j} \overline{a}_{ij}\right\},$$

$$\delta = \max\left\{1, 1-\min_i \overline{b}_i\right\}.$$

Отметим, что при этом $\Sigma(\mathbf{A}_p,\mathbf{b}_p) \subseteq R^{n+1}$ и будем записывать вектора из R^{n+1} в виде $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, где $x \in R^n$, $x_{n+1} \in R$. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любых* $\mathbf{A} \in IR^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in IR^m$ *система* $(\mathbf{A}_p,\mathbf{b}_p)$ *сильно положительна и*

$$\Sigma(\mathbf{A}_p,\mathbf{b}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \delta-\gamma(e^n)^T x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{b}) \right\}. \quad (21)$$

Доказательство. Покажем, что система $(\mathbf{A}_p,\mathbf{b}_p)$ ~~сильно~~ строго положительна. Очевидно, что выполняются следующие неравенства:

$$\underline{a}_{ij} + \gamma \geq \underline{a}_{ij} + 1 - \min_{k,l} \underline{a}_{kl} \geq 1,$$

$$\underline{b}_i + \gamma \geq \underline{b} + 1 - \min_k \underline{b}_k \geq 1,$$

$$\gamma \geq 1 \text{ и } \delta \geq 1.$$

Поэтому $\underline{A}_p \geq E^{m+1,n+1}$, $\underline{b}_p \geq e^{m+1}$.

Покажем теперь равенство (21). Заметим, что матрица $A_p \in \mathbf{A}_p$ (вектор $b_p \in \mathbf{b}_p$) тогда и только тогда, когда существует $A \in \mathbf{A}$ ($b \in \mathbf{b}$) такая, что $A_p = \begin{pmatrix} A+L & e^m \\ \gamma(e^n)^T & 1 \end{pmatrix}$ (соответственно,

$b_p = \begin{pmatrix} b + \delta e^m \\ \delta \end{pmatrix}$). Поэтому равенство $A_p \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = b_p$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} Ax + \gamma e^m (e^n)^T x + x_{n+1} e^m = b + \delta e^m, \\ \gamma (e^n)^T x + x_{n+1} = \delta. \end{cases} \qquad (22)$$

Вычитая из первого уравнения системы (22) второе, умноженное на e^m, получим, что эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ \gamma (e^n)^T x + x_{n+1} = \delta. \end{cases}$$

Поэтому $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \Sigma(\mathbf{A}_p, \mathbf{b}_p)$ тогда и только тогда, когда $x \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $x_{n+1} = \delta - \gamma (e^n)^T x_0$. Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что преобразование сохраняет (причем в обе стороны) такие свойства системы как непустота, ограниченность и конечность объединенного множества решений, а также разность между числом уравнений и переменных. Кроме того, очевидно, что целочисленные системы переходят в целочисленные, а максимизация линейного функционала на $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ эквивалентна его максимизации на $\Sigma(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p)$, и система $(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p)$ строится по системе ($\mathbf{A}, \mathbf{b}$) полиномиальным алгоритмом. Поэтому различные алгоритмические задачи для интервальных систем полиномиально эквивалентны соответствующей задаче для их подклассов строго положительных систем. В частности, верно

Следствие 2. *Задача выяснения по заданным матрицам* $\underline{A}, \overline{A} \in Z^{(m+1)\times m}$ *и векторам* $\underline{b}, \overline{b} \in Z^{m+1}$ *таким, что система строго положительна, а множество* $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ *непусто и ограничено, будет ли множество* $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ *конечным, является* co-NP*-полной. Задача максимизации линейного функционала на непустых конечных множествах решений строго положительных систем* NP*-полна.*

Работа частично поддержана грантом Президента РФ НШ-1676.2008.1 и грантом РФФИ № 07-01-00400.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Neumaier, A. Interval Methods for Systems of Equations / A. Neumaier. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
2. Lakeyev, A.V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties / A.V. Lakeyev, V. Kreinovich // Reliable Computing. – 1997. – Vol. 3, № 1. – P. 51–81.
3. Kreinovich, V. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computational / V. Kreinovich, A.V. Lakeyev, J. Rohn, P. Kahl. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – 472 p.
4. Lakeyev, A.V. Computational Complexity of Estimation of Generalized Sets of Solutions for Interval Linear Systems / A.V. Lakeyev // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 1. – С. 12–23.
5. Rohn, J. Systems of linear interval equations / J. Rohn // Linear Algebra and its Applications. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
6. Oettle, W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides / W. Oettle, W. Prager // Num. Math. – 1964. – Vol. 6. – P. 405–409.
7. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2 / А. Схрейвер. – М.: Мир, 1991.
8. Хачиян, Л.Г. Полиминальный алгоритм в линейном программировании / Л.Г. Хачиян // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 5. – С. 1093–1096.
9. Nemirovskii, A. Several NP-Hard Problems Arising in Robust Stability Analysis / A. Nemirovskii // Mathematics of Control, Signals and Systems. – 1993. – Vol. 6. – P. 99–105.
10. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982.
11. Shary, S.P. Solving interval linear systems with nonnegative matrices / S.P. Shary // Proc. of Conf. “Scientific Computation and Mathematical Modelling” / Ed. by S. Markov. – Sofia: DATECS Publishing, 1993. – P. 179–181.