ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1993, том 330, № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 519.35

ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМИ ОПЕРАТОРОМ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

 А. В. Лакеев, С. И. Носков

Представлено академиком В.М. Матросовым 30.10.92 г.

Поступило 11.11.92 г.

1. При решении задач из различных областей знаний математическими методами часто возникает проблема обработки информации приближенного характера. Эта приближенность может выражаться, в частности, в интервальном представлении результатов соответствующих измерений. Для решения проблем такого рода в последние годы интенсивно проводятся исследования в области так называемой интервальной математики [1]. Одной из проблем, которая может быть отнесена к классическим, является решение системы линейных уравнений при интервальном задании коэффициентов правой части, т.е. описание множества решений x уравнения

$$\mathbb{A}x = \mathbb{B} \tag{1}$$

где $\mathbb{A} \in I(R^{m\times n})$ – вещественная интервальная матрица размерности $m \times n$, $\mathbb{B} \in I(R^m)$ – m-мерный интервальный вектор, $x \in R^n$ [1]. Множество решений системы (1) можно определить различными способами в зависимости от того, какими кванторами связываются коэффициенты матрицы и правой части [2]. В данной работе мы рассмотрим следующие четыре, наиболее часто встречающиеся в литературе, множества решений (1):

$\mathcal{R}_1 = \{x \in R^n |\ \exists C \in \mathbb{A}\ \exists c \in \mathbb{B}\ Cx = c\}$ – объединенное множество решений [3 - 5],

$\mathcal{R}_2 = \{x \in R^n |\ \forall C \in \mathbb{A}\ \exists c \in \mathbb{B}\ Cx = c\}$ – допустимое множество решений [6, 7],

$\mathcal{R}_3 = \{x \in R^n |\ \forall c \in \mathbb{B}\ \exists C \in \mathbb{A}\ Cx = c\}$ – множество, впервые рассмотренное при решении интервальной задачи модального управления [8],

$\mathcal{R}_4 = \{x \in R^n |\ \forall C \in \mathbb{A}\ \exists c \in \mathbb{B}\ Cx = c)\ \&\ (\forall d \in \mathbb{B}\ \exists D \in \mathbb{A}\ Dx = d\}$ – множество всех точечных алгебраических интервальных решений [9, 10].

Целью настоящей работы является описание этих множеств в терминах концов интервалов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, при этом мы будем рассматривать аналог уравнения (1) в произвольных упорядоченных векторных пространствах.

2. Введем необходимые п о н я т и я и о б о з н а ч е н и я, при этом будем придерживаться в основном терминологии, принятой в [11, 12].

Всюду в дальнейшем под F будем понимать некоторое упорядоченное векторное пространство над R^1, а под E – некоторую векторную решетку. Отношение порядка в E и F (и других упорядоченных и предупорядоченных пространствах, вводимых ниже) будем обозначать одним и тем же символом $\leq$. Как обычно, E_+ и F_+ – конусы положительных элементов в E и F соответственно. Если $x, y \in E$, то через $x \vee y$ и $x \wedge y$ будем обозначать точные верхнюю и нижнюю грани элементов x и y, а x^+ и x^- – положительную и отрицательную часть x, $|x| = x^+ + x^-$ – модуль элемента x. Если F_1 – некоторое другое упорядоченное векторное пространство, то пространство $L(F_1, F)$ линейных операторов из F_1 и F будем считать предупорядоченным с помощью конуса $L^+(F_1, F)$ монотонных операторов. Если $a, b \in F$, $a \leq b$ ($A, B \in L(F_1, F)$, $A \leq B$), то, как обычно, множество $[a, b] = \{c \in F |\ a \leq c \leq b\}$ ($[A, B] = \{C \in L(F_1, F) |\ A \leq C \leq B\}$) – интервал в F ($L(F_1, F)$) и $I(F)$ ($I(L(F_1, F))$) – множество всех непустых интервалов в F ($L(F_1, F)$).

Через $\Lambda(F) \in I(L(F, F))$ будем обозначать множество мультипликаторов в F, т.е. $\Lambda(F) = [O_F, I_F]$, где O_F и I_F – нулевой и тождественный операторы в F. Если $F_1, F_2 \subseteq F$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in R^1$, то, как обычно, $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 |\ x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$.

Будем рассматривать уравнение (1) в случае, когда $\mathbb{A} = [A, B] \in I(L(E, F))$ и $\mathbb{B} = [a, b] \in I(F)$. При этом, если для $x \in E$ обозначить $[A, B]x = \{Cx |\ C \in [A, B]\}$, то множества $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, представимы в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{x \in E |\ ([A, B]x) \cap [a, b] \neq \varnothing\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{x \in E |\ [A, B]x \subseteq [a, b]\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \{x \in E |\ [A, B]x \supseteq [a, b]\}, \\ \mathcal{R}_4 &= \{x \in E |\ [A, B]x = [a, b]\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Иркутский вычислительный центр
Сибирского отделения Российской Академии наук

Очевидны следующие соотношения между $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\mathcal{R}_1 \supseteq \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \supseteq \mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3.$$

Введем теперь некоторые понятия, которые понадобятся при описании этих множеств.

Определение 1. Будем говорить, что упорядоченное векторное пространство F обладает свойством (C) (сжимаемости), если для любых $x, y \in F_+$, $x \le y$ существует мультипликатор $\alpha \in \Lambda(F)$, переводящий y в x, т.е. такой, что $\alpha y = x$. Класс упорядоченных векторных пространств, обладающих свойством (C), обозначим $\mathcal{K}(C)$.

Определение 2. Будем говорить, что векторная решетка E обладает свойством (D) (дизъюнктности), если для любых $x, y \in E_+$, $x \wedge y = 0$ существует мультипликатор $\alpha \in \Lambda(E)$ такой, что $\alpha x = x$ и $\alpha y = 0$. Класс векторных решеток, обладающих свойством (D), обозначим $\mathcal{K}(D)$.

Характеризация классов $\mathcal{K}(C)$ и $\mathcal{K}(D)$ содержится в следующих леммах.

Лемма 1. *$F \in \mathcal{K}(C)$ тогда и только тогда, когда для любого упорядоченного векторного пространства F_1, любых $[A, B] \in I(L(F_1, F))$, $x \in F_{1+}$ верно равенство*

$$[A, B]x = [Ax, Bx].$$

Лемма 2. *$E \in \mathcal{K}(D)$ тогда и только тогда, когда для любого векторного пространства F, любых $[A, B] \in I(L(E, F))$, $x \in E$ верно равенство*

$$[A, B]x = [A, B]x^+ - [A, B]x^-.$$

Отметим некоторые свойства классов $\mathcal{K}(C)$ и $\mathcal{K}(D)$, показывающие, в частности, что они достаточно обширны.

Классы $\mathcal{K}(C)$ и $\mathcal{K}(D)$ замкнуты относительно прямых произведений и прямых сумм. Класс $\mathcal{K}(D)$ замкнут относительно нормальных подпространств, т.е. если $E \in \mathcal{K}(D)$ и $E_1 \subseteq E$, E_1 – нормальное подпространство E, то $E_1 \in \mathcal{K}(D)$. Если $F \in \mathcal{K}(C)$, F_1 – подпространство F такое, что конус $F_1 \cap F_+$ нормально содержится в F_+, то $F_1 \in \mathcal{K}(C)$.

Так как в любом K_σ-пространстве существует ортогональный проектор на любую главную компоненту, то верно следующее утверждение.

Предложение 1. *Если E – векторная решетка, являющаяся K_σ-пространством, то $E \in \mathcal{K}(D)$.*

Относительно класса $\mathcal{K}(C)$ верно

Предложение 2. *Если упорядоченное векторное пространство F является K-пространством, то $F \in \mathcal{K}(C)$.*

Это следует из теоремы Хана–Банаха–Канторовича и того, что в любой векторной решетке множество мультипликаторов совпадает с опорным множеством для сублинейного оператора, переводящего x в x^+.

Используя описание конечномерных векторных решеток [12, теорема XV. 4], получаем

Предложение 3. *Если E – конечномерная векторная решетка, то $E \in \mathcal{K}(C) \cap \mathcal{K}(D)$.*

Упорядоченное векторное пространство из $\mathcal{K}(C)$, вообще говоря, не обязано быть векторной решеткой. Тем не менее справедливо следующее утверждение о сумме интервалов.

Лемма 3. *Пусть $F \in \mathcal{K}(C)$, $[a, b], [c, d] \in I(F)$. Тогда*

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

Непосредственно из лемм 1, 2 и 3 получаем следующую, ключевую для описания множеств $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, теорему.

Теорема 1. *Если $E \in \mathcal{K}(D)$, $F \in \mathcal{K}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$, и $x \in E$, то $[A, B]x \in I(F)$ и верна формула*

$$[A, B]x = [Ax^+ - Bx^-, Bx^+ - Ax^-].$$

В случае, когда $E = R^n$ и $F = R^m$ с покоординатными упорядочениями, данная теорема повторяет по существу известную теорему Оэттли–Прагора [3, 13].

Из этой теоремы, представления $\mathcal{R}_i$ в виде (2) и свойств положительной и отрицательной части элементов в векторной решетке получаем описание множеств $\mathcal{R}_i$ для $i = 2, 3, 4$.

Теорема 2. *Если $E \in \mathcal{K}(D)$, $F \in \mathcal{K}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$ и $[a, b] \in I(F)$, то*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in E_+, Ax_1 - Bx_2 \ge a, \\ &\qquad Bx_1 - Ax_2 \le b\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in E_+, x_1 \wedge x_2 = 0, \\ &\qquad Ax_1 - Bx_2 \le a, Bx_1 - Ax_2 \ge b\}, \\ \mathcal{R}_4 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in E_+, x_1 \wedge x_2 = 0, \\ &\qquad Ax_1 - Bx_2 = a, Bx_1 - Ax_2 = b\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для того чтобы получить аналогичное описание множества $\mathcal{R}_1$, по крайней мере для случая, когда $E \in \mathcal{K}(D)$ и $F \in \mathcal{K}(C)$, необходимо, в силу теоремы 1, иметь некоторый критерий непустоты пересечения интервалов в F. Легко заметить, что если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in I(F)$ и $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \ne \varnothing$, то $a_1 \le b_2$ и $a_2 \le b_1$. Выделим класс упорядоченных векторных пространств, для которых верно и обратное, т.е. если $a_1 \le b_2$ и $a_2 \le b_1$, то $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \ne \varnothing$.

Введем следующее отношение $<$ на непустых подмножествах F: если $F_1, F_2 \subseteq F$, то $F_1 < F_2$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in F_1$, $y \in F_2$ $x \le y$.

Определение 3. Будем говорить, что упорядоченное векторное пространство F является K_0-пространством, если для любых непустых конечных подмножеств $F_1, F_2 \subseteq F$ выполняется условие:

$$F_1 < F_2 \to \exists\, a \in F \;\; F_1 < \{a\} < F_2, \tag{4}$$

т.е. если $F_1 < F_2$ то существует элемент $a \in F$, являющийся верхней гранью для F_1 и нижней гранью для F_2.

Заметим, что с помощью условия (4) можно определить и другие, хорошо известные классы упорядоченных пространств. Например, если это условие выполняется для любых непустых подмножеств, из которых хотя бы одно конечно, то получаем определение условной векторной решетки, а если F – векторная решетка и условие (4) выполнено для любых непустых F_1, F_2 (из которых одно не более чем счетно), то получаем определение K-пространства (K_σ-пространства).

Лемма 4. *Для того чтобы упорядоченное векторное пространство F было K_0-пространством, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий*:

1) *для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ если $a_i \le b_j$, $i, j = 1, 2$, то существует элемент $c \in F$ такой, что $a_i \le c \le b_j$ (т.е. выполняется условие (4) для двухэлементных F_1, F_2)*;

2) *для любых двух интервалов $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in I(F)$ выполняется следующий критерий непустоты их пересечения*:

$$[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \varnothing$$

тогда и только тогда, когда $a_1 \le b_2$, $a_2 \le b_1$.

Очевидно, класс K_0-пространств содержит класс векторных решеток, а также замкнут относительно прямых произведений, прямых сумм и подпространств, пересечение которых с конусом положительных элементов нормально содержится в нем.

Приведем пример упорядоченного векторного пространства, не являющегося K_0-пространством.

Пример. Пусть e_1, e_2, e_3 – базис в R^3. Обозначим: F_0 – упорядоченное трехмерное векторное пространство с конусом положительных элементов $K = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 |\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 \ge \alpha_3\}$. Очевидно, в F_0 $e_1 \ge 0$, $e_2 \ge 0$, $e_1 + e_3 \ge 0$ и $e_2 + e_3 \ge 0$. Полагая $a = 0$, $b = e_1$, $c = -e_3$, $d = e_2$, получим $a \le b$, $c \le d$ и для интервалов $[a, b]$, $[c, d]$ выполняется $a \le d$ и $c \le b$. Легко проверить, что интервалы $[a, b]$ и $[c, d]$ в F_0 будут совпадать с отрезками, соединяющими a с b и c с d. Поэтому $[a, b] \cap [c, d] = \varnothing$.

Отметим также, что $F_0 \notin \mathcal{K}(C)$ и, кроме того, если E_0 – трехмерная векторная решетка (с покоординатным упорядочением), то нетрудно подобрать оператор $A_0 \in L^+(E_0, F_0)$ и $x_0 \in E_0$, $x_0 \ge 0$ такие, что $[0, A_0]\, x_0 \neq [0, A_0 x_0]$. Отсюда, в частности, следует, что класс $\mathcal{K}(C)$ не совпадает с классом всех упорядоченных векторных пространств и теорема 1, вообще говоря, не верна, если F не обладает свойством (C).

С помощью леммы 4 для K_0-пространств получаем описание множества $\mathfrak{R}_1$.

Теорема 3. *Если $E \in \mathcal{K}(D)$, $F \in \mathcal{K}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$, $[a, b] \in I(F)$ и F является K_0-пространством, то*

$$\mathfrak{R}_1 = \{x_1 - x_2 |\ x_1, x_2 \in E_+, x_1 \wedge x_2 = 0,$$
$$Ax_1 - Bx_2 \le b, Bx_1 - Ax_2 \ge a\}.$$

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и F – векторная решетка. Тогда*

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \{x \in E |\ D|x| + d \ge |Cx - c|\}, \\ \mathfrak{R}_2 &= \{x \in E |\ d \ge D|x| + |Cx - c|\}, \\ \mathfrak{R}_3 &= \{x \in E |\ D|x| \ge d + |Cx - c|\}, \\ \mathfrak{R}_4 &= \{x \in E |\ Cx = c, D|x| = d\}. \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$C = \frac{1}{2}(A + B),\ D = \frac{1}{2}(B - A),$$
$$c = \frac{1}{2}(a + b),\ d = \frac{1}{2}(b - a).$$

Для случая $E = R^n$, $F = R^m$ с покоординатными упорядочениями описание множества $\mathfrak{R}_1$ в виде (5) получено в работе [13], а описание множества $\mathfrak{R}_2$ как в виде (3), так и в виде (5) – в работе [7].

Замечание. Нелинейное условие $x_1 \wedge x_2 = 0$, присутствующее в описании множеств $\mathfrak{R}_i$, в совокупности с ограничением положительности $x_1, x_2 \in E_+$, в ряде случаев является квадратичным. В частности, если решетка E архимедова, то, используя вложение E в качестве подрешетки в пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций на Q со значениями в $R^1 \cup \{+\infty, -\infty\}$ для некоторого экстремально несвязного компакта Q и операцию произведения функций в $C_\infty(Q)$, получаем, что существует симметричное билинейное отображение $\varphi: E \times E \to C_\infty(Q)$ такое, что для $x_1, x_2 \in E$ условия $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\varphi(x_1, x_2) = 0$ эквивалентны. Если, кроме того, E имеет конечную размерность n, то, как известно, E алгебраически и структурно изоморфно R^n с покоординатным упорядочением и, следовательно, в качестве φ можно взять скалярное произведение. Более точно, существует симметричное билинейное отображение $\varphi: E \times E \to R^1$ такое, что порожденная им квадратичная форма положительно определена и для $x_1, x_2 \in E_+$ условия $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\varphi(x_1, x_2) = 0$ эквивалентны. Таким образом, для случая, когда $E = R^m$ и $F = R^n$ с покоординатным упорядочением, получаем следующее описание множеств $\mathfrak{R}_i$.

Следствие 2. *Пусть $[A, B] \in I(R^{m \times n})$, $[a, b] \in I(\mathfrak{R}^m)$. Тогда*

$$\mathfrak{R}_1 = \{x_1 - x_2 |\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, (x_1, x_2) = 0, Ax_1 - Bx_2 \le b,$$
$$Bx_1 - Ax_2 \ge a\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ *– скалярное произведение в* R^n.

Аналогичное описание верно, очевидно, и для $\mathcal{R}_i$, $i = 2, 3, 4$ (для $\mathcal{R}_2$ нелинейное условие $(x_1, x_2) = 0$ отсутствует).

3. Рассмотрим задачу разрешимости уравнения (1), т.е. задачу выяснения непустоты множеств $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, в случае $E = R^m$, $F = R^n$ с покоординатным упорядочением. Более точно, под задачей $\mathcal{R}_i \neq \varnothing$ будем понимать следующую задачу:

Условие. Заданы целочисленные $(m \times n)$-матрицы A и B, $A \leq B$ и целочисленные m-мерные векторы a и b, $a \leq b$.

Вопрос. Существует ли n-мерный вектор $x \in \mathcal{R}_i$?

Из следствия 1 легко получить, что для любого $i = 1, 2, 3, 4$ задача $\mathcal{R}_i \neq \varnothing$ принадлежит классу $\mathcal{NP}$ [15]. Так как $\mathcal{R}_2$ допускает описание в виде линейной системы неравенств (теорема 2), то из результатов работы [14] следует, что задача $\mathcal{R}_2 \neq \varnothing$ принадлежит $\mathcal{P}$ (т.е. разрешима за полиномиальное время).

Теорема 4. *Задачи* $\mathcal{R}_i \neq \varnothing$ *для* $i = 1, 3, 4$ $\mathcal{NP}$*-полные.*

Это следует из того, что при $i = 1, 3, 4$ к задаче $\mathcal{R}_i \neq \varnothing$ полиномиально сводится $\mathcal{NP}$-полная задача РАЗБИЕНИЕ [15], которая может быть сформулирована следующим образом:

Условие. Заданы q, $q \geq 1$, положительных целых чисел $s_1, \ldots, s_q$.

Вопрос. Можно ли так подобрать знаки $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, q$, для s_i, что $\sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i s_i = 0$, т.е. будет ли непустым множество

$$\mathcal{R}_0 = \Big\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q \Big| \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i s_i = 0, \\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \ldots, q \Big\}?$$

Таким образом, если $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, то при решении задачи $\mathcal{R}_i \neq \varnothing$ для $i = 1, 3, 4$ невозможно избавиться от экспоненциального перебора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.
2. *Ватолин А.А.* // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 11. С. 1629 - 1637.
3. *Oettli W.* // SIAM J. Num. Anal. 1965. V. 2. P. 115 - 118.
4. *Beeck H.* // Computing. 1972. V. 10. P. 231 - 244.
5. *Шарый С.П.* Деп. ВИНИТИ. 1990. № 726-В91.
6. *Шайдуров В.В., Шарый С.П.* Препринт ВЦ СО АН СССР. Красноярск, 1988. № 5.
7. *Rohn J.* // Interval Mathematics 1985. N.Y.: Springer-Verlag, 1986. P. 157 - 158.
8. *Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И.* // ДАН. 1991. Т. 316. № 4. С. 846 - 850.
9. *Ratschek H., Sauer W.* // Computing. 1982. V. 28. N. 2. P. 105 - 115.
10. *Захаров А.В., Шокин Ю.И.* // ДАН. 1988. Т. 299. № 2. С. 292 - 295.
11. *Акилов Г.П., Кутателадзе С.С.* Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978. 368 с.
12. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
13. *Oettli W., Prager W.* // Num. Math. 1964. V. 6. P. 405 - 409.
14. *Хачиян Л.Т.* // ДАН. 1979. Т. 244. № 5. С. 1093 - 1096.
15. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.