Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 1994. Том 35, № 5

УДК 519.35:519.862.6

О МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМИ ОПЕРАТОРОМ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. В. Лакеев, С. И. Носков

Введение

При решении задач из различных областей знаний математическими методами часто возникает проблема обработки информации приближенного характера. Эта приближенность может выражаться, в частности, в интервальном представлении результатов соответствующих измерений. Для решения проблем такого рода в последние годы интенсивно проводятся исследования в области так называемой интервальной математики [1]. Одной из них, которая может быть отнесена к классическим, является решение системы линейных уравнений при интервальном задании коэффициентов и правой части, т. е. описание множества решений x уравнения

$$\mathbb{A}x = \mathbb{B}, \tag{1}$$

где $\mathbb{A} \in I(R^{m\times n})$ — вещественная интервальная $m \times n$-матрица, $\mathbb{B} \in I(R^m)$ — m-мерный интервальный вектор, $x \in R^n$ [1]. Множество решений системы (1) может быть определено различными способами в зависимости от того, какими кванторами связываются коэффициенты матрицы и правой части [2]. В данной работе мы рассмотрим следующие четыре наиболее часто встречающиеся в литературе множества решений уравнения (1):

$\mathscr{R}_1 = \{x \in R^n \mid \exists C \in \mathbb{A}\ \exists c \in \mathbb{B}\ Cx = c\}$ — объединенное множество решений [3–5],

$\mathscr{R}_2 = \{x \in R^n \mid \forall C \in \mathbb{A}\ \exists c \in \mathbb{B}\ Cx = c\}$ — допустимое множество решений [6–8],

$\mathscr{R}_3 = \{x \in R^n \mid \forall c \in \mathbb{B}\ \exists C \in \mathbb{A}\ Cx = c\}$ — множество, впервые рассмотренное при решении интервальной задачи модального управления [9],

$\mathscr{R}_4 = \{(x \in R^n \mid \forall C \in \mathbb{A}\ \exists c \in \mathbb{B}\ Cx = c) \& (\forall d \in \mathbb{B}\ \exists D \in \mathbb{A}\ Dx = d)\}$ — множество всех точечных алгебраических интервальных решений [10, 11].

Целью настоящей работы является описание этих множеств в терминах концов интервалов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, при этом будет рассматриваться аналог уравнения (1) в произвольных упорядоченных векторных пространствах.

§ 1. Описание множеств решений

Введем необходимые понятия и обозначения, придерживаясь в основном терминологии, принятой в [12, 13].

Всюду в дальнейшем под F будем понимать некоторое упорядоченное векторное пространство над R^1, а под E — некоторую векторную решетку. Отношение порядка в E и F (и других упорядоченных и предупорядоченных пространствах, вводимых ниже) будем обозначать одним и тем же символом $\leqslant$. Как обычно, E_+ и F_+ — конусы положительных элементов в E и F. Если $x, y \in E$, то через $x \vee y$ и $x \wedge y$ будем обозначать точные верхнюю и нижнюю границы элементов x и y, а через x^+ и x^- — положительную и отрицательную части x, $|x| = x^+ + x^-$ — модуль элемента x. Если F_1 — некоторое другое упорядоченное векторное пространство, то пространство $L(F_1, F)$ линейных операторов из F_1 в F будем считать предупорядоченным с помощью конуса $L^+(F_1, F)$ монотонных операторов. Если $a, b \in F$, $a \leqslant b$ ($A, B \in L(F_1, F)$, $A \leqslant B$), то, как обычно, множество $[a, b] = \{c \in F \mid a \leqslant c \leqslant b\}$ ($[A, B] = \{C \in L(F_1, F) \mid A \leqslant C \leqslant B\}$) — интервал в $F(L(F_1, F))$ и $I(F) = (I(L(F_1, F)))$ — множество всех непустых интервалов в $F(L(F_1, F))$.

Через $\Lambda(F) \in I(L(F, F))$ будем обозначать множество мультипликаторов в F, т. е. $\Lambda(F) = [O_F, I_F]$, где O_F и I_F — нулевой и тождественный операторы в F. Если $F_1, F_2 \subseteq F$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in R^1$, то, как обычно, $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\}$.

Уравнение (1) будем рассматривать в случае, когда $\mathbb{A} = [A, B] \in I(L(E, F))$ и $\mathbb{B} = [a, b] \in I(F)$. При этом если для $x \in E$ обозначить $[A, B]x = \{Cx \mid C \in [A, B]\}$, то множества $\mathscr{R}_i$, $i = \overline{1, 4}$, представимы в виде:

$$\begin{gathered} \mathscr{R}_1 = \{x \in E \mid ([A, B]x) \cap [a, b] \neq \varnothing\}, \quad \mathscr{R}_2 = \{x \in E \mid [A, B]x \subseteq [a, b]\}, \\ \mathscr{R}_3 = \{x \in E \mid [A, B]x \supseteq [a, b]\}, \quad \mathscr{R}_4 = \{x \in E \mid [A, B]x = [a, b]\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Очевидны следующие соотношения между $\mathscr{R}_i$, $i = \overline{1, 4}$:

$$\mathscr{R}_1 \supseteq \mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3 \supseteq \mathscr{R}_4 = \mathscr{R}_2 \cap \mathscr{R}_3.$$

Введем понятия, которые понадобятся при описании этих множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что упорядоченное векторное пространство F *обладает свойством C* (сжимаемости), если для любых $x, y \in F_+$, $x \leqslant y$, существует мультипликатор $\alpha \in \Lambda(F)$, переводящий y в x, т. е. такой, что $\alpha y = x$. Класс упорядоченных векторных пространств, обладающих свойством C, обозначим через $\mathscr{K}(C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что векторная решетка E *обладает свойством D* (дизъюнктности), если для любых $x, y \in E_+$, $x \wedge y = 0$, существует мультипликатор $\alpha \in \Lambda(E)$, такой что $\alpha x = x$ и $\alpha y = 0$. Класс векторных решеток, обладающих свойством D, обозначим через $\mathscr{K}(D)$.

Характеризация классов $\mathscr{K}(C)$ и $\mathscr{K}(D)$ содержится в следующих леммах.

Лемма 1. *Для любого упорядоченного векторного пространства эквивалентны следующие условия:*

(*a*) $F \in \mathscr{K}(C)$;

(*b*) *для любого $x \in F_+$ выполнено равенство $\Lambda(F)x = [0, x]$;*

(*c*) *для любого упорядоченного векторного пространства F_1 и любых $[A, B] \in I(L(F_1, F))$, $y \in F_{1+}$ верно равенство $[A, B]y = [Ay, By]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (*b*) и (*a*) следует непосредственно из определения 1.

Покажем эквивалентность утверждений (*a*) и (*c*). Пусть $F \in \mathscr{K}(C)$, $[A, B] \in I(L(F_1, F))$ и $y \in F_{1+}$. Включение $[A, B]y \subseteq [Ay, By]$ очевидно.

Пусть $x \in [Ay, By]$. Тогда $0 \leqslant x - Ay \leqslant (B - A)y$ и, следовательно, существует $\alpha \in \Lambda(F)$ такое, что $\alpha(B-A)y = x - Ay$. Полагая $C = A + \alpha(B - A)$, получим $C \in [A, B]$ и $Cy = x$, т. е. $x \in [A, B]y$. Следовательно, $[Ay, By] \subseteq [A, B]y$ и (c) выполняется. Пусть теперь для F выполняется условие (c). Положим $F_1 = F$, $A = O_F$, $B = I_F$. Тогда для любого $x \in F_+$ справедливо равенство $[O_F, I_F]x = [0, x]$, поэтому $F \in \mathscr{K}(C)$.

Лемма 2. *Для любой векторной решетки E эквивалентны следующие условия:*

(a) $E \in \mathscr{K}(D)$;

(b) для любого $x \in E$ существует $\alpha \in \Lambda(E)$ такое, что выполнено равенство $\alpha x = x^+$;

(c) для любого упорядоченного векторного пространства F и любых $[A, B] \in I(L(E, F))$, $x \in E$ верно равенство $[A, B]x = [A, B]x^+ - [A, B]x^-$;

(d) для любого $x \in E$ верно равенство $\Lambda(E)x = \Lambda(E)x^+ - \Lambda(E)x^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (b) и (a) получается непосредственно из определения 2.

Покажем, что из (b) следует (c). Пусть F — упорядоченное векторное пространство, $[A, B] \in I(L(E, F))$ и $x \in E$. Включение $[A, B]x \subseteq [A, B]x^+ - [A, B]x^-$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $y \in [A, B]x^+ - [A, B]x^-$. Тогда $y = C_1x^+ - C_2x^-$ для некоторых $C_1, C_2 \in [A, B]$. Возьмем $\alpha \in \Lambda(E)$ такое, что $\alpha x = x^+$. Полагая $C = C_1\alpha + C_2(I_E - \alpha)$, получим $Cx = y$, и $C \in [A, B]$, т. е. $y \in [A, B]x$.

Для доказательства того, что из (c) следует (d), достаточно положить в условии (c) $F = E$, $A = O_E$, $B = I_E$.

То, что из (d) следует (b), очевидно, так как всегда $x^+ \in \Lambda(E)x^+ - \Lambda(E)x^-$. Лемма доказана.

Интересно отметить, что в определении класса $\mathscr{K}(D)$ можно обойтись без явного использования понятий верхней и нижней граней, как видно из следующего предложения.

Предложение 1. *Для любого упорядоченного векторного пространства F следующие условия эквивалентны:*

(a) F — векторная решетка и $F \in \mathscr{K}(D)$;

(b) для любого $x \in F$ существуют $x_1, x_2 \in F_+$ и $\alpha \in \Lambda(F)$ такие, что $x = x_1 - x_2$, $\alpha x_1 = x_1$, $\alpha x_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что условие (a) влечет (b), следует непосредственно из определения класса $\mathscr{K}(D)$.

Покажем обратное. Пусть F удовлетворяет условию (b). Известно [12], что если для любого $x \in F$ существует $x \vee 0$, то F — векторная решетка. Возьмем $x \in F$, $x_1, x_2 \in F_+$ и $\alpha \in \Lambda(F)$ такие, что $x = x_1 - x_2$, $\alpha x_1 = x_1$ и $\alpha x_2 = 0$. Покажем, что $x_1 = x \vee 0$. Действительно, очевидно, $x_1 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant x$, и если $y \geqslant 0$, $y \geqslant x$, то $y \geqslant \alpha y \geqslant \alpha x = \alpha x_1 - \alpha x_2 = x_1$. Следовательно, $x_1 = x \vee 0$, и F — векторная решетка. Кроме того, из равенства $x_1 = x \vee 0 = x^+$ следует, что $\alpha x = x^+$ и выполняется условие (b) леммы 2. Поэтому $F \in \mathscr{K}(D)$.

Как известно, в любой векторной решетке сумма двух интервалов будет интервалом. Оказывается, это утверждение верно и в упорядоченном векторном пространстве, обладающем свойством C.

Лемма 3. *Пусть $F \in \mathscr{K}(C)$, $[a, b]$, $[c, d] \in I(F)$. Тогда $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $[a, b] + [c, d] \subseteq [a + c, b + d]$ очевидно. Покажем обратное. Пусть $x \in [a + c, b + d]$. Тогда $0 \leqslant x - (a + c) \leqslant (b + d) - (a + c)$ и существует $\alpha \in \Lambda(F)$ такое, что $\alpha(b + d - a - c) = x - a - c$. Обозначим $x_1 = a + \alpha(b - a)$, $x_2 = c + \alpha(d - c)$. Тогда очевидно, что $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$ и $x_1 + x_2 = x$, т. е. $x \in [a, b] + [c, d]$.

Важность введенных классов $\mathscr{K}(C)$ и $\mathscr{K}(D)$ объясняется тем, что для них верна следующая теорема, позволяющая получить описание множеств $\mathscr{R}_i$, $i = \overline{1,4}$.

Теорема 1. *Пусть* $E \in \mathscr{K}(D)$, $F \in \mathscr{K}(C)$, $[A,B] \in I(L(E,F))$ *и* $x \in E$. *Тогда* $[A,B]x \in I(F)$ *и верна формула*

$$[A,B]x = [Ax^+ - Bx^-, Bx^+ - Ax^-]. \tag{3}$$

Доказательство получается применением утверждений (c) лемм 1, 2 и леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $E = R^n$, $F = R^m$ с покоординатными упорядочениями, данная теорема повторяет, по существу, известную теорему Оэттли — Прагора [14].

Непосредственно из теоремы 1 получаем описание $\mathscr{R}_i$, $i = \overline{2,4}$.

Теорема 2. *Пусть* $E \in \mathscr{K}(D)$, $F \in \mathscr{K}(C)$, $[A,B] \in I(L(E,F))$ *и* $[a,b] \in I(F)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_2 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0,\ Ax_1 - Bx_2 \geqslant a,\ Bx_1 - Ax_2 \leqslant b\},\\
\mathscr{R}_3 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1 \wedge x_2 = 0,\ Ax_1 - Bx_2 \leqslant a,\ Bx_1 - Ax_2 \geqslant b\},\\
\mathscr{R}_4 &= \{x_1 - x_2 \mid x_1 \wedge x_2 = 0,\ Ax_1 - Bx_2 \leqslant a,\ Bx_1 - Ax_2 = b\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим множества, стоящие в правой части формул (4), через $\overline{\mathscr{R}}_i$, $i = \overline{2,4}$. Покажем, что $\mathscr{R}_i = \overline{\mathscr{R}}_i$. Включение $\mathscr{R}_i \subseteq \overline{\mathscr{R}}_i$ для $i = \overline{2,4}$ получается из представления любого $x \in E$ в виде $x = x^+ - x^-$, формулы (3) и такого очевидного факта: если $[a_1,b_1],[a_2,b_2] \in I(F)$, то $[a_1,b_1] \subseteq [a_2,b_2]$ тогда и только тогда, когда $a_1 \geqslant a_2$ и $b_1 \leqslant b_2$. Обратное включение для $i = 3,4$ следует из того, что если $x = x_1 - x_2$ и $x_1 \wedge x_2 = 0$, то $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$ и опять применима формула (3). Покажем, что $\overline{\mathscr{R}}_2 \subseteq \mathscr{R}_2$. Пусть $x = x_1 - x_2 \in \overline{\mathscr{R}}_2$. Обозначим $\bar{x}_1 = x_1 - x_1 \wedge x_2$, $\bar{x}_2 = x_2 - x_1 \wedge x_2$. Очевидно, что $x = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = 0$, следовательно, $\bar{x}_1 = x^+$, $\bar{x}_2 = x^-$ и, кроме того, $A\bar{x}_1 - B\bar{x}_2 = Ax_1 - Bx_2 + (B - A)x_1 \wedge x_2 \geqslant a$, $B\bar{x}_1 - A\bar{x}_2 = Bx_1 - Ax_2 - (B - A)x_1 \wedge x_2 \leqslant b$, так как $B - A \geqslant 0$ и $x_1 \wedge x_2 \geqslant 0$. Поэтому по формуле (3) $[A,B]x \subseteq [a,b]$ и $x \in \mathscr{R}_2$. Теорема доказана.

Для того чтобы получить аналогичное описание множества $\mathscr{R}_1$, по крайней мере для случая, когда $E \in \mathscr{K}(D)$ и $F \in \mathscr{K}(C)$, необходимо в силу теоремы 1 иметь некоторый критерий непустоты пересечения интервалов в F. Легко заметить, что если $[a_1,b_1],[a_2,b_2] \in I(F)$ и $[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2] \neq \varnothing$, то $a_1 \leqslant b_2$ и $a_2 \leqslant b_1$. Выделим класс упорядоченных векторных пространств, для которых верно и обратное, т. е. если $a_1 \leqslant b_2$ и $a_2 \leqslant b_1$, то $[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2] \neq \varnothing$.

Введем отношение $\prec$ на непустых подмножествах F: если $F_1, F_2 \subseteq F$, то $F_1 \prec F_2$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$ для любых $x \in F_1$, $y \in F_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что упорядоченное векторное пространство F является *K_0-пространством*, если для любых непустых конечных подмножеств $F_1, F_2 \subseteq F$ выполняется условие

$$F_1 \prec F_2 \to (\exists \alpha \in F)\, F_1 \prec \{\alpha\} \prec F_2, \tag{5}$$

т. е. если $F_1 \prec F_2$, то существует элемент $\alpha \in F$, являющийся верхней границей для F_1 и нижней границей для F_2.

Заметим, что с помощью условия (5) можно определить и другие хорошо известные классы упорядоченных пространств. Например, если это условие выполняется для любых непустых подмножеств, из которых хотя бы одно конечно, то получаем определение условной векторной решетки, а если F — векторная решетка и условие (5) выполнено для любых непустых F_1, F_2 (из которых одно не более чем счетно), то получаем определение K-пространства (K_σ-пространства).

Лемма 4. *Для того чтобы упорядоченное векторное пространство F было K_0-пространством, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:*

(a) для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ если $a_i \leqslant b_j$, $i, j = 1, 2$, то существует элемент $c \in F$ такой, что $a_i \leqslant c \leqslant b_j$ (т. е. выполняется условие (5) для двухэлементных F_1, F_2);

(b) для любых двух интервалов $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in I(F)$ выполняется следующий критерий непустоты их пересечения: $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leqslant b_2$, $a_2 \leqslant b_1$.

Доказательство следует непосредственно из определения 3.

Очевидно, класс K_0-пространств содержит класс векторных решеток, а также замкнут относительно прямых произведений, прямых сумм и подпространств, пересечение которых с конусом положительных элементов нормально содержится в нем.

С помощью леммы 4 для K_0-пространств получаем описание множества $\mathscr{R}_1$.

Теорема 3. *Если $E \in \mathscr{K}(D)$, $F \in \mathscr{K}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$, $[a, b] \in I(F)$ и F является K_0-пространством, то*

$$\mathscr{R}_1 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \wedge x_2 = 0,\ Ax_1 - Bx_2 \leqslant b,\ Bx_1 - Ax_2 \geqslant a\}. \tag{6}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

В случае, когда векторное пространство F является векторной решеткой, используя центрально-симметричное представление интервалов, получаем следующее описание множеств $\mathscr{R}_i$.

Теорема 4. *Пусть $E \in \mathscr{K}(D)$, $F \in \mathscr{K}(C)$, $[A, B] \in I(L(E, F))$, $[a, b] \in I(F)$ и F является векторной решеткой. Положим*

$$C = \frac{1}{2}(A + B), \quad D = \frac{1}{2}(B - A), \quad c = \frac{1}{2}(a + b), \quad d = \frac{1}{2}(b - a).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_1 &= \{x \mid D|x| + d \geqslant |Cx - c|\}, \quad &\mathscr{R}_2 &= \{x \mid d \geqslant D|x| + |Cx - c|\}, \\ \mathscr{R}_3 &= \{x \mid D|x| \geqslant d + |Cx - c|\}, \quad &\mathscr{R}_4 &= \{x \mid Cx = c,\ D|x| = d\}. \end{aligned} \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (7) для $\mathscr{R}_1$ (для остальных $\mathscr{R}_i$ доказательство аналогично). Так как F — векторная решетка, F является и K_0-пространством, поэтому $\mathscr{R}_1$ представимо в виде (6). При этом, используя равенства $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$, получаем

$$\begin{aligned} Ax^+ - Bx^- &= \frac{1}{2}(A + B)x - \frac{1}{2}(B - A)|x| = Cx - D|x|, \\ Bx^+ - Ax^- &= \frac{1}{2}(A + B)x + \frac{1}{2}(B - A)|x| = Cx + D|x|. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее, как уже отмечалось, если $x = x_1 - x_2$ и $x_1 \wedge x_2 = 0$, то $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$, поэтому из (6) следует, что $x \in \mathscr{R}_1$ тогда и только тогда, когда

$$Ax^+ - Bx^- \leqslant b, \quad Bx^+ - Ax^- \geqslant a. \tag{9}$$

Подставляя в эти формулы равенства (8) и учитывая, что $a = c - d$, $b = c + d$, получим, что (9) эквивалентно $Cx - D|x| \leqslant c + d$, $Cx + D|x| \geqslant c - d$, или

$$D|x| + d \geqslant Cx - c \geqslant -(D|x| + d). \tag{10}$$

Так как F — векторная решетка, в ней для любых элементов $y, z \in F$ неравенство $-z \leqslant y \leqslant z$ эквивалентно неравенству $|y| \leqslant z$, поэтому (10) эквивалентно $D|x| + d \geqslant |Cx - c|$, что и требовалось доказать.

Отметим, что представление $\mathscr{R}_4$ в виде (7) верно и без предположения о том, что F — векторная решетка.

Для случая $E = R^n$, $F = R^m$ с покоординатными упорядочениями описание множества $\mathscr{R}_1$ в виде (7) получено в работе [14], а описание $\mathscr{R}_2$ как в виде (7), так и в виде (8) — в работе [8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Нелинейное условие $x_1 \wedge x_2 = 0$, присутствующее в описании множеств $\mathscr{R}_i$, $i = 1, 3, 4$, в совокупности с ограничением положительности $x_1, x_2 \in E_+$, в ряде случаев билинейно.

В частности, если решетка E архимедова, то, используя вложение E в качестве подрешетки в пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций на Q со значениями в $R^1 \cup \{+\infty, -\infty\}$ для некоторого экстремально несвязного компакта Q и используя операцию произведения функций в $C_\infty(Q)$, получаем, что существует симметричное билинейное отображение $\varphi : E \times E \to C_\infty(Q)$ такое, что для $x_1, x_2 \in E_+$ условия $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\varphi(x_1, x_2) = 0$ эквивалентны. Если, кроме того, E имеет конечную размерность n, то, как известно, E алгебраически и структурно изоморфно R^n с покоординатным упорядочением, и, следовательно, в качестве φ можно взять скалярное произведение. Более точно, существует симметричное билинейное отображение $\varphi : E \times E \to R^1$ такое, что порожденная им квадратичная форма положительно определена и для $x_1, x_2 \in E_+$ условия $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\varphi(x_1, x_2) = 0$ эквивалентны. Таким образом, для случая, когда $E = R^m$ и $F = R^n$ с покоординатным упорядочением, получаем следующее описание множеств $\mathscr{R}_i$.

Следствие. *Пусть* $[A, B] \in I(R^{m\times n})$, $[a, b] \in I(R^m)$. *Тогда*

$$\mathscr{R}_1 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ (x_1, x_2) = 0,\ Ax_1 - Bx_2 \leqslant b,\ Bx_1 - Ax_2 \geqslant a\},$$
$$\mathscr{R}_2 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ Ax_1 - Bx_2 \geqslant a,\ Bx_1 - Ax_2 \leqslant b\},$$
$$\mathscr{R}_3 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ (x_1, x_2) = 0,\ Ax_1 - Bx_2 \leqslant a,\ Bx_1 - Ax_2 \geqslant b\},$$
$$\mathscr{R}_4 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ (x_1, x_2) = 0,\ Ax_1 - Bx_2 = a,\ Bx_1 - Ax_2 = b\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — *скалярное произведение в* R^n.

§ 2. Исследование свойств классов $\mathscr{K}(C)$ и $\mathscr{K}(D)$

Займемся выяснением следующего вопроса: какие из известных классов упорядоченных векторных пространств обладают свойствами C или D? Отметим сначала некоторые структурные свойства классов $\mathscr{K}(C)$ и $\mathscr{K}(D)$, показывающие, в частности, что они достаточно обширны. Используемые при этом понятия и конструкции общеприняты [12].

Предложение 2. (a) *Классы* $\mathscr{K}(C)$ *и* $\mathscr{K}(D)$ *замкнуты относительно прямых произведений и прямых сумм.*

(b) *Если* $E \in \mathscr{K}(D)$ *и* E_1 — *нормальное подпространство в* E, *то* $E_1 \in \mathscr{K}(D)$.

(c) *Если* $F \in \mathscr{K}(C)$, F_1 — *подпространство* F *такое, что конус* $F_1 \cap F_+$ *нормально содержится в* F_+, *то* $F_1 \in \mathscr{K}(C)$.

(d) *Если* $E \in \mathscr{K}(D)$, E_0 — *линейно упорядоченное векторное пространство и* $E_0 \circ E$ — *лексикографическое произведение* E_0 *на* E [15], *то* $E_0 \circ E \in \mathscr{K}(D)$.

(e) *Если* $F \in \mathscr{K}(C)$, *то* $R^1 \circ F \in \mathscr{K}(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (a) следует непосредственно из определений.

Для доказательства (b) достаточно заметить, что если E_1 — нормальное подпространство в E, а $\alpha \in \Lambda(E)$, то $\alpha(E_1) \subseteq E_1$ и, следовательно, сужение α на E_1 принадлежит $\Lambda(E_1)$.

Пусть $F \in \mathscr{K}(C)$, F_1 — подпространство F и $F_{1+} = F_1 \cap F_+$ нормально содержится в F_+. Обозначим через $P : F \to F_1$ любой проектор F на F_1, и для $\alpha \in \Lambda(E)$ положим $\alpha_P = P\alpha$. Тогда легко показать, что $\alpha_P(F) \subseteq F_1$ и $\alpha_P x = \alpha x$ для любого $x \in F_{1+}$. Поэтому сужение α_P на F_1 принадлежит $\Lambda(F_1)$, и если $x, y \in F_{1+}$, $x \leqslant y$, и $\alpha \in \Lambda(E)$ такое, что $\alpha y = x$, то $\alpha_P y = \alpha y = x$. Следовательно, $F_1 \in \mathscr{K}(C)$.

Докажем теперь (d). По определению лексикографического произведения $E_0 \circ E = \{(x_0, x) \mid x_0 \in E_0, x \in E\}$ и $(E_0 \circ E)_+ = \{(x_0, x) \mid x_0 > 0 \vee (x_0 = 0 \& x \geqslant 0)\}$. В силу леммы 2 достаточно показать, что для любого $z \in E_0 \circ E$ найдется такое $\alpha \in \Lambda(E_0 \circ E)$, что $\alpha z = z^+$. Возьмем $z = (x_0, x) \in E_0 \circ E$. Так как E_0 линейно упорядочено, для x_0 имеем $(x_0 > 0) \vee (x_0 < 0) \vee (x_0 = 0)$. Если $x_0 > 0$, то $z^+ = z$ и $\alpha = I$. Если $x_0 < 0$, то $z^+ = 0$ и $\alpha = 0$. Если $x_0 = 0$, то $z^+ = (0, x^+)$ и, так как $E \in \mathscr{K}(D)$, существует $\alpha_0 \in \Lambda(E)$ такое, что $\alpha_0 x = x^+$. В этом случае легко показать, что, положив $\alpha : E_0 \circ E \to E_0 \circ E$, $\alpha(y_0, y) = ((1/2)y_0, \alpha_0 y)$, получим $\alpha \in \Lambda(E_0 \circ E)$, и при этом $\alpha z = z^+$. Следовательно, $E_0 \circ E \in \mathscr{K}(D)$.

Докажем (e). Возьмем $F \in \mathscr{K}(C)$, $z_1, z_2 \in (R^1 \circ F)_+$, $z_1 \leqslant z_2$. Надо показать, что найдется $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ такое, что $\alpha z_2 = z_1$. Пусть $z_i = (\lambda_i, x_i)$, $\lambda_i \in R^1$, $x_i \in F$, $i \in 1,2$. Тогда $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Рассмотрим отдельно три случая: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant 0$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ и, так как $F \in \mathscr{K}(C)$, существует $\alpha_0 \in \Lambda(F)$ такое, что $\alpha_0 x_2 = x_1$. Тогда, полагая $\alpha(\lambda, x) = ((1/2)\lambda, \alpha_0 x)$ для всех $(\lambda, x) \in R^1 \circ F$, получим $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ и $\alpha z_2 = z_1$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то $x_1 \leqslant x_2$. Положим $\alpha(\lambda, x) = \big(\lambda, x + \frac{\lambda}{\lambda_2}(x_1 - x_2)\big)$ для $(\lambda, x) \in R^1 \circ F$. Нетрудно показать, что в этом случае $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ и $\alpha z_2 = z_1$.

Если $\lambda_2 > \lambda_1 \geqslant 0$, то для $(\lambda, x) \in R^1 \circ F$ положим $\alpha(\lambda, x) = \frac{\lambda}{\lambda_2} z_1$. При этом также легко показать, что $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ и $\alpha z_2 = z_1$.

Итак, в любом случае найдется $\alpha \in \Lambda(R^1 \circ F)$ такое, что $\alpha z_2 = z_1$ и, следовательно, $R^1 \circ F \in \mathscr{K}(C)$. Предложение 2 доказано.

С помощью предложения 2, отправляясь от данных пространств, принадлежащих классам $\mathscr{K}(C)$ или $\mathscr{K}(D)$, можно получить новые пространства из этих же классов.

Ответом на сформулированный в начале § 2 вопрос является следующая теорема.

Теорема 5. *Класс $\mathscr{K}(C) \cap \mathscr{K}(D)$ содержит в себе*

(a) *все конечномерные векторные решетки;*

(b) *все векторные решетки, являющиеся K_σ-пространствами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) По теореме XV.4 из [15] любая конечномерная векторная решетка E либо является прямой суммой векторных решеток меньшей размерности, либо лексикографическим произведением $E = R^1 \circ E_0$ множества вещественных чисел R^1 и векторной решетки E_0 на единицу меньшей размерности. Так как, очевидно, $R^1 \in \mathscr{K}(C) \cap \mathscr{K}(D)$, требуемое утверждение получается индукцией по размерности с помощью предложения 2.

Докажем (b). Пусть E — K_σ-пространство. Покажем, что $E \in \mathscr{K}(D)$. Возьмем $x, y \in E_+$ такие, что $x \wedge y = 0$. Рассмотрим главную компоненту E_x, порожденную x [13]:

$$E_x = \{z \in E \mid \forall u \in E \ |u| \wedge x = 0 \to |u| \wedge |z| = 0\}.$$

По теореме IV.3.4 из [13] для любого $z \in E$ существует его ортогональная проекция $\Pr z$ на E_x и для $z \in E_+$

$$\Pr z = \sup_n (z \wedge nx). \tag{11}$$

При этом оператор Pr будет линейным. Из (11) ясно, что $0 \leqslant \Pr z \leqslant z$ для $z \in E_+$, поэтому $\Pr \in \Lambda(E)$. Кроме того, очевидно, что $\Pr x = x$, $\Pr y = 0$ и, следовательно, $E \in \mathscr{K}(D)$.

Покажем теперь, что $E \in \mathscr{K}(C)$. Возьмем $x, y \in E_+$, $y \leqslant x$. Вновь рассмотрим главную компоненту E_x и оператор ортогонального проектирования $\Pr : E \to E_x$. Пространство E_x, будучи нормальным подпространством E, само будет K_σ-пространством и по теореме IV.3.6 из [13] x будет единицей в E_x (т. е. для любого $z \in E_x$ если $z > 0$, то $x \wedge z > 0$). Кроме того, очевидно, что $y \in E_x$. Далее, по теореме V.8.1 из [13] в E_x можно определить операцию умножения элементов (некоторую функцию $\varphi : (E_x \times E_x) \to E_x$, вообще говоря, не всюду определенную) так, что E_x превращается в обобщенное полуупорядоченное коммутативное кольцо с единицей умножения (определение V.8.2 из [13]), в котором x будет совпадать с единицей умножения, т. е. для любого $z \in E_x$ значения $\varphi(z, x)$ и $\varphi(x, z)$ определены и $\varphi(z, x) = \varphi(x, z) = z$. При этом из определения обобщенного полуупорядоченного коммутативного кольца следует, что для любого $z \in E_x$ значение $\varphi(y, z)$ определено, так как $0 \leqslant y \leqslant x$ и $0 \leqslant \varphi(y, z) \leqslant \varphi(x, z) = z$, если $z \geqslant 0$. Более того, из этого же определения следует, что функция $\varphi(y, \cdot) : E_x \to E_x$ (как функция второго аргумента) является линейным оператором на E_x. Положим теперь $\alpha z = \varphi(y, \Pr z)$ для любого $z \in E$. Тогда $\alpha z = \varphi(y, \Pr z) \geqslant 0$ для $z \in E_+$, так как $\Pr z \geqslant 0$, $\alpha z = \varphi(y, \Pr z) \leqslant \Pr z \leqslant z$ и $\alpha x = \varphi(y, \Pr x) = \varphi(y, x) = y$, т. е. $\alpha \in \Lambda(E)$ и $\alpha x = y$. Следовательно, $E \in \mathscr{K}(C)$. Теорема доказана.

Приведем примеры упорядоченных векторных пространств, не обладающих свойствами C и D.

ПРИМЕР 1. Пусть F_0 — 3-мерное векторное пространство с базисом a_1, a_2, a_3. Упорядочим его с помощью конуса

$$F_{0+} = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \mid \alpha_i \in R^1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,3},\ \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \alpha_3\}.$$

Пусть E_0 — 3-мерная векторная решетка с покоординатным упорядочением, соответствующим базису $b_1, b_2, b_3 \in E_0$, т. е. $E_{0+} = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \mid \alpha_i \in R^1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,3},\}$. Покажем, что для пары F_0, E_0 теорема 1 неверна. Возьмем $A_0 \in L(E_0, F_0)$, определяемый на базисе E_0 следующим образом: $A_0 b_1 = a_1$, $A_0 b_2 = a_2$, $A_0 b_3 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + a_3$. Очевидно, что A_0 — положительный оператор, поэтому $[\mathbb{O}, A_0] \in I(L(E_0, F_0))$. При этом $A \in [\mathbb{O}, A_0]$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1/2]$ такие, что $Ab_1 = \lambda_1 a_1$, $Ab_2 = \lambda_2 a_2$, $Ab_3 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + (\beta_1 + \beta_2) a_3$. Возьмем $x \in E_{0+}$, $x = 2b_1 + 2b_3$. Очевидно, что $y = a_1 + a_2 \leqslant A_0 x = 3a_1 + a_2 + 2a_3$ и $y \geqslant 0$ в F_0, т. е. $y \in [0, A_0 x]$. В то же время, если бы для некоторого $A \in [\mathbb{O}, A_0]$ выполнялось $Ax = y$, то $2(\lambda_1 + \beta_1) a_1 + 2\beta_2 a_2 + 2(\beta_1 + \beta_2) a_3 = a_1 + a_2$ и, следовательно, $\beta_2 = 1/2$, $\beta_1 = -\beta_2 = -1/2 \notin [0, 1/2]$. Поэтому $y \notin [\mathbb{O}, A_0]x$ и $[\mathbb{O}, A_0]x \neq [0, A_0 x]$, т. е. формула (3) в этом случае неверна. В частности, отсюда следует, что $F_0 \notin \mathscr{K}(C)$.

Отметим также, что F_0 не является и K_0-пространством.

ПРИМЕР 2. Пусть F_1 — 2-мерное векторное пространство с базисом e_1, e_2 и $F_{1+} = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid (\alpha_1 = \alpha_2 = 0) \vee (\alpha_1 > 0 \& \alpha_2 > 0)\}$. Нетрудно показать, что F_1 является K_0-пространством и $F_1 \in \mathscr{K}(C)$, а так как F_1 не является векторной решеткой, то $F_1 \notin \mathscr{K}(D)$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим векторную решетку $C[0,1]$ непрерывных функций из отрезка $[0,1]$ в R^1 с естественным упорядочением, т. е. считаем $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ для всех $t \in [0,1]$. Известно [12, с. 181], что каждый мультипликатор $\alpha \in \Lambda(C[0,1])$ представим как оператор умножения на некоторую непрерывную функцию из $[0,1]$ в $[0,1]$, т. е. $\alpha \in \Lambda(C[0,1])$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi : [0,1] \to [0,1]$,

φ непрерывная и такая, что $(\alpha f)(t) = \varphi(t)f(t)$ для любых $f \in C[0,1]$ и $t \in [0,1]$. Покажем, что $C[0,1] \notin \mathscr{K}(C) \cup \mathscr{K}(D)$. Действительно, возьмем $f_1(t) = 1-2t$ при $t \in [0,1/2]$, $f_1(t) = 0$ при $t \in (1/2,1]$, $f_2(t) = 0$ при $t \in [0,1/2]$, $f_2(t) = 2t-1$ при $t \in (1/2,1]$. Ясно, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$ и $f_1 \wedge f_2 = 0$. Если $\alpha \in \Lambda(C[0,1])$ такой, что $\alpha f_1 = f_1$ и $\alpha f_2 = 0$, то для соответствующей α функции φ получаем $\varphi(t)f_1(t) = f_1(t)$, $\varphi(t)f_2(t) = 0$ при всех $t \in [0,1]$. Но тогда $\varphi(t) = 1$ при $t \in [0,1/2)$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \in (1/2,1]$. Поэтому φ не может быть непрерывной и, следовательно, $C[0,1] \notin \mathscr{K}(D)$. Далее, возьмем $f_3(t) = t^2\sin^2(1/t)$ при $t \in (0,1]$, $f_3(0) = 0$ и $f_4(t) = t^2$ при $t \in [0,1]$. Тогда $0 \leqslant f_3 \leqslant f_4$, и если $\alpha f_4 = f_3$ для некоторого $\alpha \in \Lambda(C[0,1])$, то для соответствующей α функции φ получаем $\varphi(t)f_4(t) = f_3(t)$ для всех $t \in [0,1]$. Но тогда $\varphi(t) = \sin^2(1/t)$ при $t \in (0,1]$ и φ не может быть непрерывной в точке $t = 0$. Следовательно, $C[0,1] \notin \mathscr{K}(C)$.

Из приведенных примеров видно, что произвольное упорядоченное векторное пространство может не обладать свойством C и не быть K_0-пространством; существуют упорядоченные векторные пространства, обладающие свойством C и являющиеся K_0-пространствами, которые не являются векторными решетками; архимедова векторная решетка может не обладать ни свойством C, ни свойством D.

§ 3. Алгоритмическая сложность

Рассмотрим задачу разрешимости уравнения (1), т. е. задачу выяснения непустоты множеств $\mathscr{R}_i$, $i = \overline{1,4}$, с точки зрения вычислительной сложности [16]. При этом ограничимся случаем $E = R^m$, $F = R^n$ с покоординатными упорядочениями и целочисленными матрицами A, B и векторами a, b. Точнее, при фиксированном $i = \overline{1,4}$ под задачей $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ будет пониматься следующая

ЗАДАЧА $\mathscr{R}_i$. *Заданы целочисленные $m \times n$-матрицы A и B, $A \leqslant B$, и целочисленные m-мерные векторы a и b, $a \leqslant b$. Существует ли n-мерный вещественный вектор x такой, что $x \in \mathscr{R}_i$?*

Легко заметить, что для любого $i = \overline{1,4}$ задача $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ принадлежит классу $\mathscr{NP}$ [16]. Действительно, недетерминированный алгоритм, решающий задачу $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ за полиномиальное время, строится следующим образом. Сначала «угадываются» знаки координат вектора x. Далее, при фиксированных знаках по теореме 4 задача $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ превращается в задачу разрешимости системы линейных неравенств, которая решается за полиномиальное время [17]. Кроме того, так как по теореме 2 множество $\mathscr{R}_2$ допускает описание в виде системы линейных неравенств, задача $\mathscr{R}_2 \neq \varnothing$ принадлежит классу $\mathscr{P}$ (разрешима за полиномиальное время). Относительно задач $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ для $i = 1,3,4$ верна следующая

Теорема 6. *Задачи $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ для $i = 1,3,4$ $\mathscr{NP}$-полные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что к задачам $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ полиномиально сводится следующая $\mathscr{NP}$-полная задача РАЗБИЕНИЕ [16].

ЗАДАЧА РАЗБИЕНИЕ. *Пусть заданы q положительных целых чисел $s_1, \dots, s_q$ ($q \geqslant 1$). Можно ли так подобрать знаки $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$, $i = \overline{1,q}$, для s_i, что $\varepsilon_1 s_1 + \dots + \varepsilon_q s_q = 0$, т. е. будет ли непустым множество*

$$\mathscr{R}_0 = \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)^T \;\middle|\; \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i s_i = 0,\ \varepsilon_i \in \{-1,1\},\ i = \overline{1,q} \right\},$$

где $(\cdot)^T$ означает транспонирование?

При сведении задач будем пользоваться описанием $\mathscr{R}_i$, полученным в теореме 4, и обычными матрично-векторными обозначениями.

В частности, пусть $\mathbb{O}_q$ — нулевая $q \times q$-матрица, E_q — единичная $q \times q$-матрица, $0_q = (0, \ldots, 0)^T$, $e_q = (1, \ldots, 1)^T$, $\varepsilon = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$, $s = (s_1, \ldots, s_q)^T$ — q-мерные векторы-столбцы. Отметим также, что модулем вектора x в рассматриваемом случае (конечномерное векторное пространство с покоординатным упорядочением) будет вектор, составленный из модулей координат вектора x.

Покажем, что задача РАЗБИЕНИЕ сводится к задаче $\mathscr{R}_1 \neq \varnothing$.

Пусть задан q-мерный вектор $s = (s_1, \ldots, s_q)^T$. Положим $m = 2q + 1$, $n = q$ и определим $(2q+1) \times q$-матрицы C, D и $(2q+1)$-мерные векторы d, c следующим образом:

$$D = \begin{pmatrix} 0_q^T \\ E_q \\ \mathbb{O}_q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} s^T \\ \mathbb{O}_q \\ E_q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_q \\ e_q \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ e_q \\ 0_q \end{pmatrix},$$

при этом $A = C - D$, $B = C + D$, $a = c - d$, $b = c + d$ целочисленные, и очевидно, что $A \leqslant B$, $a \leqslant b$. Покажем, что для так определенных A, B, a, b множество $\mathscr{R}_1$ совпадает с $\mathscr{R}_0$.

Действительно, по теореме 4 $x \in \mathscr{R}_1$ тогда и только тогда, когда $D|x| + d \geqslant |Cx - c|$, что в данном случае эквивалентно системе неравенств

$$0 \geqslant |s^T x|, \qquad |x| \geqslant e_q, \qquad e_q \geqslant |x|,$$

или $|x| = e_q$, $s^T x = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $x \in \mathscr{R}_0$. Поскольку очевидно, что матрицы A, B и векторы a, b строятся по вектору s за полиномиальное время, задача РАЗБИЕНИЕ полиномиально сводится к задаче $\mathscr{R}_1 \neq \varnothing$.

То, что задача РАЗБИЕНИЕ сводится к задаче $\mathscr{R}_4 \neq \varnothing$, доказывается аналогично, если положить $m = q + 1$, $n = q$,

$$D = \begin{pmatrix} 0_q^T \\ E_q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} s^T \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ e_q \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу $\mathscr{R}_3 \neq \varnothing$. Положим $m = 3q + 1$, $n = 2q$ и определим $(3q+1) \times 2q$-матрицы C, D и $(3q+1)$-мерные векторы c, d следующим образом:

$$D = \begin{pmatrix} 0_q^T & 0_q^T \\ \mathbb{O}_q & E_q \\ \mathbb{O}_q & E_q \\ E_q & \mathbb{O}_q \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} s^T & 0_q^T \\ \mathbb{O}_q & 2E_q \\ E_q & \mathbb{O}_q \\ \mathbb{O}_q & E_q \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ e_q \\ 0_q \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e_q \\ 0_q \\ 0_q \end{pmatrix},$$

при этом, как и раньше, $A = C - D$, $B = C + D$, $a = c - d$, $b = c + d$. Решения соответствующей интервальной задачи будем записывать в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где x и y — q-мерные векторы-столбцы. Тогда по теореме 4 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{R}_3$ эквивалентно

$$D\begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix} \geqslant d + \left| C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c \right|,$$

или следующей системе неравенств:

$$0 \geqslant |s^T x|, \qquad |y| \geqslant e_q + |2y - 2e_q|, \qquad |y| \geqslant |x|, \qquad |x| \geqslant |y|,$$

которая, очевидно, эквивалентна системе

$$s^T x = 0, \quad 2|y - e_q| - |y| + e_q \leqslant 0, \quad |x| = |y|. \tag{12}$$

Так как очевидно, что

$$|y - e_q| = 2|y - e_q| - |y - e_q| \leqslant 2|y - e_q| - (|y - e_q|) = 2|y - e_q| - |y| + e_q,$$

второе неравенство системы (12) эквивалентно $y = e_q$ и, следовательно, (12) можно записать в виде

$$s^T x = 0, \quad y = e_q, \quad |x| = e_q. \tag{13}$$

Из (13) следует, что если $x \in \mathscr{R}_0$, то $\begin{pmatrix} x \\ e_q \end{pmatrix} \in \mathscr{R}_3$ и, обратно, если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{R}_3$, то $y = e_q$, а $x \in \mathscr{R}_0$. Так как ясно, что матрицы A, B и векторы a, b строятся по вектору s за полиномиальное время, то задача РАЗБИЕНИЕ полиномиально сводится к задаче $\mathscr{R}_3 \neq \varnothing$. Теорема доказана.

Таким образом, если $\mathscr{P} \neq \mathscr{N}\mathscr{P}$, то при решении задачи $\mathscr{R}_i \neq \varnothing$ для $i = 1, 3, 4$ невозможно избавиться от экспоненциального перебора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Ватолин А. А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1629–1637.
3. *Oettli K. W.* On the solution set of a linear system with inacurate coefficients // SIAM J. Numer. Anal. 1965. V. 2. P. 115–118.
4. *Beeck H.* Ueber Struktur und Abschatzungen der Loesungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // Computing. 1972. V. 10. P. 231–244.
5. *Шарый С. П.* О характеризации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы // Красноярск, 1990. 20 с. Деп. в ВИНИТИ, № 726-В91.
6. *Шайдуров В. В., Шарый С. П.* Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. Красноярск, 1988. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 5).
7. *Шарый С. П.* О разрешимости линейной задачи о допусках // Интервальные вычисления. 1991. № 1. С. 92–98.
8. *Rohn J.* Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics, Freiburg, 1985. Berlin; New York: Springer-Verl., 1986. P. 157–158. (Lecture Notes in Computer Sci.; V. 212).
9. *Хлебалин Н. А., Шокин Ю. И.* Интервальный вариант метода модального управления // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 4. С. 846–850.
10. *Ratschek H., Sauer W.* Linear interval equations // Computing. 1982. V. 28, № 2. P. 105–115.
11. *Захаров А. В., Шокин Ю. И.* Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 292–295.
12. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.
13. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
14. *Oettli K. W., Prager W.* Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numer. Math. 1964. V. 6. P. 405–409.
15. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
16. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
17. *Хачиян Л. Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1093–1096.

г. Иркутск *Статья поступила 9 февраля 1993 г.*