

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»
Институт математики, экономики и информатики

А. В. Лакеев

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ГРАФОВ

Учебное пособие

ИРКУТСК
издательство
ИГУ
2 0 1 4

УДК 519.17(075.8)

ББК 22.176я723

Л19

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ ИГУ

**Издание выходит в рамках
программы стратегического развития
ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012-2016 гг.,
проект Р121-02-002**

Рецензенты:

д-р тех. наук С.И.Носков
канд. физ.-мат. наук, доц. И.Л.Васильев

Лакеев А.В.

Л19 Элементы теории обыкновенных графов : учеб. пособие /

А.В.Лакеев. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. – 83 с.

Излагаются основные понятия теории обыкновенных графов (инварианты, связность, обходы, раскраска, планарность). Помимо теоретического материала приводятся задачи и упражнения для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов младших курсов университетов и пединститутов, обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Информационная безопасность».

Библиогр. 9 назв.

УДК 519.17(075.8)

ББК 22.176я723

©Лакеев А.В., 2014

©ФГБОУ ВО «ИГУ», 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Графы: определение и элементы	9
1.1. Определение	9
1.2. Диаграмма графа	10
1.3. Изоморфизм	11
1.4. Подграфы	12
1.5. Валентность	12
1.6. Маршруты, цепи, циклы	13
1.7. Некоторые специальные классы графов	15
1.8. Двудольные графы	16
1.9. Операции над графами	16
1.10. Инварианты графа	17
1.11. Способы задания графов	18
1.11.1. Матрицы смежности и инциденций	19
1.11.2. Список смежностей	19
1.11.3. Массивы ребер	20
1.12. Дополнения и замечания	20
1.12.1. Инварианты	20
1.12.2. Изоморфизм	22
1.12.3. Проблема восстановления	24
Глава 2. Связные графы	25
2.1. Определения	25
2.2. Точки сочленения, мосты, блоки	27
2.3. Оценка числа ребер через число вершин и число компонент связности	29
2.4. Меры связности	30

2.5. Теорема Менгера	31
2.5.1. Непересекающиеся цепи и разделяющие множества	31
2.5.2. Теорема Менгера в «вершинной форме»	32
2.6. Варианты теоремы Менгера	35
2.7. Теорема Холла	36
Глава 3. Обходы графов	38
3.1. Эйлеровы графы	38
3.2. Оценка числа помеченных эйлеровых графов	41
3.3. Гамильтоновы циклы	41
3.3.1. Гамильтоновы графы	42
3.3.2. Задача коммивояжера	44
Глава 4. Двудольные графы, теорема Кенига	46
Глава 5. Деревья	49
5.1. Основные свойства деревьев	50
5.2. Центры дерева	54
5.3. Кодирование деревьев	55
Глава 6. Раскраска графов	58
6.1. Хроматическое число	58
Глава 7. Планарность	63
7.1. Формула Эйлера	64
7.2. Другие характеристики планарности	69
7.3. За пределами планарности: род, толщина, крупность, число скрещиваний	71
7.4. Раскраска плоских графов	73
Задачи	75
Заключение	82
Рекомендуемая литература	83

Введение

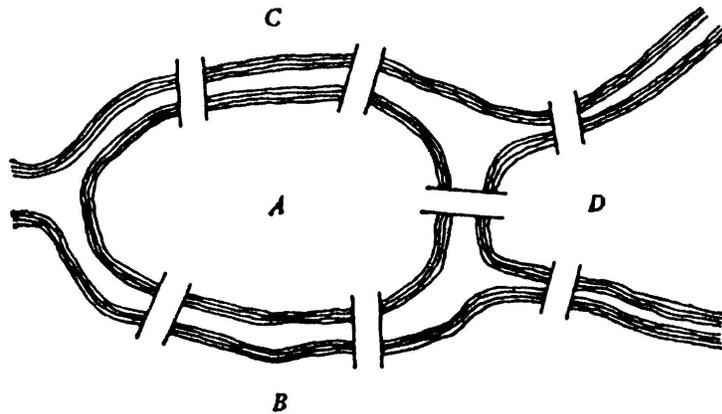
В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее, — экономику, социологию, лингвистику и др. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. Важная взаимосвязь существует между теорией графов и теоретической кибернетикой (особенно теорией автоматов, исследованием операций, теорией кодирования, теорией игр). Широко используется теория графов при решении различных задач на вычислительных машинах.

Теория графов «открывалась» независимо много раз: ее с полным основанием можно считать разделом прикладной математики. В самом деле, наиболее раннее известное упоминание этой теории встречается в работах Эйлера, и хотя проблему, которой он занимался, можно рассматривать как обычную головоломку, все же она возникла из практики. Последующие переоткрытия теории графов Кирхгофом и Кэли также уходят своими корнями в реальную действительность. Изучение Кирхгофом электрических цепей привело к разработке им основных понятий и получению ряда теорем, касающихся деревьев в графах. В свою очередь Кэли подошел к исследованию деревьев, решая задачи перечисления органических изомеров. Другой подход к графам, связанный с рассмотрением головоломок, был предложен Гамильтоном. После этого появилась знаменитая гипотеза четырех красок, которая до сих пор пользуется широкой известностью. Перечислим известные задачи, из которых выросла теория графов.

Задача о кёнигсбергских мостах

Отцом теории графов (так же как и топологии) считается Л. Эйлер, решивший в 1736 г. широко известную в то время задачу, называвшуюся проблемой кёнигсбергских мостов. В городе Кёнигсберге было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Преголя и друг с другом так, как показано на рисунке. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту. Легко, конечно, попытаться решить эту задачу эмпирически, производя перебор всех маршрутов, но все попытки окон-

чатся неудачей. Исключительный вклад Эйлера в решение этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута.



Парк в городе Кёнигсберге, 1736 г.

Отправляясь от этого частного случая, Эйлер обобщил постановку задачи и нашел критерий существования обхода (специального маршрута) у данного графа, а именно граф должен быть связным и каждая его вершина должна быть инцидентна четному числу ребер.

Задача о трех домах и трех колодцах

Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Требуется провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались. Эта задача также не имеет решения. В 1930 году Куратовским было доказано намного более сильное утверждение, а именно достаточность условия существования решения для всех задач типа задачи о трёх домах и трёх колодцах (необходимость этого условия была известна и ранее).

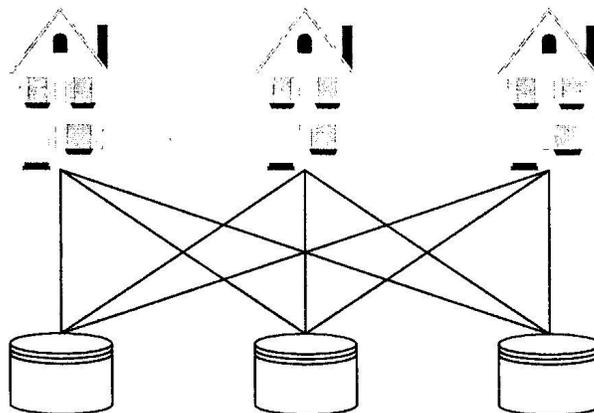


Иллюстрация к задаче о трех домах и трех колодцах

Задача о четырех красках

Наиболее известная задача в теории графов и, возможно, во всей математике — знаменитая проблема четырех красок. Эту замечательную задачу каждый математик в течение пяти минут может объяснить любому прохожему на улице. В конце объяснения оба будут хорошо понимать проблему, но не будут способны ее решить.

Любую карту на плоскости раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом.

Гипотеза четырех красок является проблемой теории графов, потому что каждая карта порождает граф, в котором страны (включая внешнюю область) — это вершины и две вершины соединяются реб-

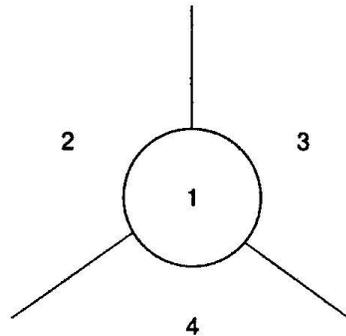


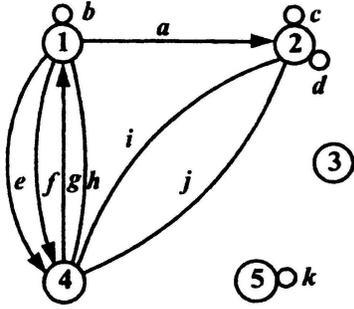
Иллюстрация к задаче о четырех красках

ром, если соответствующие им страны смежны. Ясно, что такой граф можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер (в точках, отличных от вершин графа). Таким образом, если удалось бы показать, что вершины любого планарного графа можно раскрасить четырьмя или меньшим числом красок так, чтобы смежные вершины имели разные цвета, то гипотеза четырех красок была бы обоснована.

Что же такое граф? Начнем не с формального определения, а с поясняющего примера.

На следующем рисунке изображен граф, вершинами которого служат нумерованные кружки, а ребрами — линии (со стрелками или без), соединяющие некоторые из этих кружков. Ребро a — ориентированное (направленное): оно соединяет вершину 1 с вершиной 2, но не соединяет 2 с 1 (и вообще не соединяет никакую другую пару вершин); к такому типу ребер, называемых дугами, относятся также e, f, g . Ребро h — неориентированное (ненаправленное): оно одновременно соединяет как вершину 1 с 4, так и 4 с 1; к ребрам этого типа, называемым звеньями, относятся также i и j . Наконец, каждое из ребер b, c, d, k является петлей — соединяет вершину с ней же самой. О ребрах a, b, e, f, g, h говорят еще, что

они инцидентны вершине 1, а о вершине — что она инцидентна каждому из этих ребер; в отношении дуг можно еще уточнить: дуги a , e , f исходят из вершины 1, а дуга g в нее заходит. Вершины 3 и 5 — изолированные: ни одно ребро не соединяет такую вершину с другой или другую с ней; вершину 3 можно еще назвать голой, желая подчеркнуть, что при ней нет даже петель. Рассмотренный граф является конечным: множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ его вершин и множество $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ ребер конечны.



Особо важную роль играют так называемые обыкновенные графы. Граф этого класса характеризуется следующими четырьмя свойствами:

- 1) он конечен;
- 2) он является неориентированным, т. е. не содержит дуг;
- 3) он не содержит петель;
- 4) он не содержит «параллельных» («кратных») ребер, таких как, например, i и j на рисунке — иначе говоря, никакие две его вершины не могут соединяться более чем одним ребром (звенем).

В данном пособии мы будем изучать только обыкновенные графы. Поэтому везде далее граф=обыкновенный граф.

Глава 1

Графы: определение и элементы

Для множества V будем обозначать $V^{[2]}$ — множество двухэлементных подмножеств множества V , т. е. $V^{[2]} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$.

1.1. Определение

Основное определение. *Графом* (или *обыкновенным графом*) называется пара множеств $G = (V, E)$, где V — конечное множество и $E \subseteq V^{[2]}$. Элементы множества V называются *вершинами* графа G , элементы E — *ребрами* графа G . Вершины $u, v \in V$ *смежны*, если $\{u, v\} \in E$, и *несмежны*, если $\{u, v\} \notin E$. Ребро $x = \{u, v\} \in E$ *соединяет* вершины u и v (или, что то же, v и u), а также *инцидентно* каждой из них. Два ребра $x, y \in E$ *смежны*, если они инцидентны одной и той же вершине.

В дальнейшем $p(G) = |V|$ и $q(G) = |E|$ обозначают число вершин и ребер графа G соответственно. Граф с p вершинами и q ребрами часто называют (p, q) -графом.

Комментарий. Из определения обыкновенного графа автоматически следуют четыре свойства, которыми он был охарактеризован во введении:

1) конечность множества вершин V влечет конечность множества $V^{[2]}$, а значит, и любого его подмножества E ; точнее, если $p(G) = |V|$ — число вершин, а $q(G) = |E|$ — число ребер графа $G = (V, E)$, то всегда

$$0 \leq q(G) \leq \frac{p(G)(p(G) - 1)}{2};$$

2) неориентированность графа G обусловлена тем, что в качестве ребер фигурируют только неупорядоченные пары вершин;

3) отсутствие у G петель следует из того, что множество $V^{[2]}$ по своему определению состоит только из пар различных вершин;

4) отсутствие кратных ребер у G вытекает из самого смысла теоретико-множественных понятий в определении обыкновенного графа: неупорядоченные пары $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$ считаются одним и тем же элементом множества $V^{[2]}$ в том и только том случае, если $u_1 = u_2 \& v_1 = v_2$ или $u_1 = v_2 \& v_1 = u_2$; но тогда обе пары представляют собой один и тот же элемент множества E , т.е. одно и то же ребро графа G .

1.2. Диаграмма графа

Геометрическое представление (диаграмма) графа

Любой граф можно нарисовать на плоскости, если каждой вершине $v \in V$ сопоставить точку на плоскости (разные для разных вершин) и для каждого ребра $x = \{u, v\} \in E$ соединить точки, сопоставленные u и v , непрерывной кривой.

Пример. На рисунке 1.1 приведен пример диаграммы графа, имеющего четыре вершины и пять ребер. Множество вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, множество ребер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}\}$. В этом графе вершины v_1 и v_2 , v_1 и v_4 , v_2 и v_3 , v_2 и v_4 , v_3 и v_4 смежны, а вершины v_1 и v_3 несмежны. Смежные ребра: e_1 и e_2 , e_1 и e_4 , e_1 и e_5 , e_2 и e_3 , e_2 и e_5 , e_3 и e_4 , e_3 и e_5 , e_4 и e_5 . Несмежные ребра: e_1 и e_3 , e_2 и e_4 .

Такое представление очень наглядно для графов с небольшим числом вершин и, в частности, позволяет легко увидеть различные свойства графов. Но оно практически бесполезно, если число вершин и ребер графа большое.

Граф называется *помеченным* (или *перенумерованным*), если его вершины отличаются одна от другой какими-либо пометками, например v_1, v_2, \dots, v_p . Графы G_1 и G_2 на рис. 1.2 помеченные, а граф G_3 — нет.

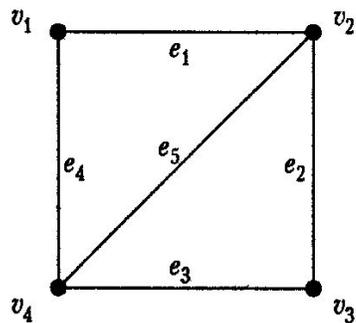


Рис. 1.1. Диаграмма графа

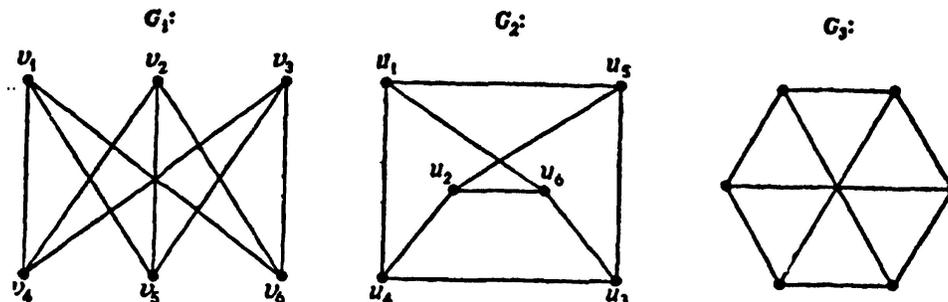


Рис. 1.2. Помеченные (G_1, G_2) и непомеченные (G_3) графы

1.3. Изоморфизм

Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ будем называть *изоморфными* (одинаковыми с математической точки зрения, обозначается $G_1 \simeq G_2$), если существует биективное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, такое, что $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$.

Отношения изоморфизма на графах будет отношением эквивалентности, т.е. оно рефлексивно ($G \simeq G$), симметрично ($G_1 \simeq G_2 \Rightarrow G_2 \simeq G_1$) и транзитивно ($G_1 \simeq G_2 \& G_2 \simeq G_3 \Rightarrow G_1 \simeq G_3$).

Пример. На рисунке 1.2 три внешне различные диаграммы являются диаграммами изоморфных графов. Для графов G_1 и G_2 изоморфизмом будет отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, $\varphi(v_i) = (u_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Упражнение. Докажите, что G_3 изоморфен G_1 и G_2 .

Проблема выяснения по двум заданным графам $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, будут ли они изоморфны, хотя и решается за конечное число шагов (нужно перебрать все $p!$ биективных отображений $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, где $p = |V_1| = |V_2|$, и проверить для них соответствующее условие),

но является очень сложной. В настоящее время неизвестно, существует ли алгоритм, позволяющий выяснить, будут ли графы изоморфны за полиномиальное от p число шагов.

1.4. Подграфы

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G_2 = (V_2, E_2)$, если $V_1 \subseteq V_2$ и $E_1 \subseteq E_2$. Обозначается $G_1 \subseteq G_2$.

Подграф называется *порожденным подграфом* (или *правильным подграфом*), если G_1 содержит все возможные ребра G_2 , т. е. $u, v \in V_1$ & $\{u, v\} \in E_2 \Rightarrow \{u, v\} \in E_1$.

Если $V_1 = V_2$, то G_1 называется *остовным подграфом* G_2 .

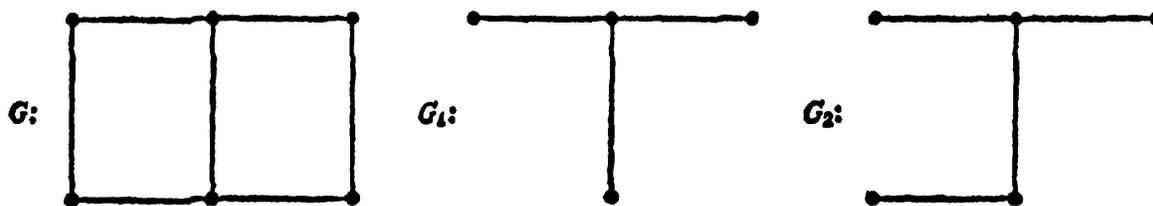


Рис. 1.3. Граф и два его подграфа

На рисунке 1.3 G_2 – остовный подграф графа G , а G_1 – нет; G_1 – порожденный подграф, а G_2 – нет.

1.5. Валентность

Если v – вершина графа $G = (V, E)$, то через $\Gamma(v) = \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$ будем обозначать *окружение* вершины v , т.е. множество вершин, смежных с v .

Количество вершин в $\Gamma(v)$ называется *степенью* (или *валентностью*) вершины v . Обозначается $\deg(v) = |\Gamma(v)|$. Ясно, что это число также равно количеству ребер графа G , инцидентных вершине v .

Очевидно, что для любой вершины v

$$0 \leq \deg(v) \leq p(G) - 1.$$

Если степень вершины равна 0 (т.е. $\deg(v) = 0$), то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна 1 (т.е. $\deg(v) = 1$), то вершина называется *висячей*.

Следующая теорема считается исторически первой теоремой теории графов и опубликована Леонардом Эйлером в 1736 г.

Теорема. Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2q.$$

Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа ребро вносит двойку. ■

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

В дальнейшем будем обозначать *минимальную степень* вершин графа G через $\delta(G)$, а *максимальную* — через $\Delta(G)$:

$$\delta(G(V, E)) = \min_{v \in V} \deg(v), \quad \Delta(G(V, E)) = \max_{v \in V} \deg(v).$$

Если степени всех вершин равны k , то граф называется *регулярным* степени k .



Рис. 1.4. Регулярные графы степени 3 с 6 вершинами

Пример. На рисунке 1.4 приведена диаграмма двух регулярных графов степени 3 с 6 вершинами. Второй из них изоморфен каждому из трех графов, изображенных на рис. 1.2.

1.6. Маршруты, цепи, циклы

Сразу отметим, что эти понятия являются одними из базовых понятий теории графов. Через них определяются или могут быть описаны (как увидим в дальнейшем) многие важные классы графов. Например: связные, эйлеровы, гамильтоновы, двудольные, деревья, планарные.

Определение. *Маршрутом* в графе $G(V, E)$ называется последовательность вершин

$$v_0, v_1, \dots, v_n,$$

в которой любые две соседние вершины смежны (т.е. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ для всех $i = 0, 1, \dots, n - 1$). Число n , т.е. количество ребер в графе (с повторениями), называется *длиной маршрута*.

Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*, иначе *открыт*.

Если все ребра $\{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется *простой цепью*. В цепи v_0, \dots, v_k вершины v_0 и v_k называются *концами* цепи. Говорят, что цепь с концами u и v *соединяет* вершины u и v . Цепь, соединяющая вершины u и v , будем называть $\{u, v\}$ -цепью и обозначать $\langle u, v \rangle$.

Упражнение. Доказать, что если есть цепь, соединяющая вершины u и v , то в ней содержится простая цепь, соединяющая эти вершины.

Замкнутая цепь называется *циклом*; цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *простым циклом*. Простой цикл полностью определяется множеством ребер между его вершинами и часто отождествляется с этим множеством. Число простых циклов в графе G обозначается $z(G)$. Граф без циклов называется *ациклическим*.

Пример. В графе, диаграмма которого приведена на рис. 1.5:

- 1) v_1, v_3, v_1, v_4 — маршрут, но не цепь;
- 2) $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$ — цепь, но не простая цепь;
- 3) v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 — простая цепь;
- 4) $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1$ — цикл, но не простой цикл;
- 5) v_1, v_3, v_4, v_1 — простой цикл.

Расстоянием между вершинами u и v (обозначается $d(u, v)$) называется длина кратчайшей $\{u, v\}$ -цепи, а сама кратчайшая цепь называется *геодезической*.

Диаметром графа G (обозначается $D(G)$) называется длина длиннейшей геодезической.

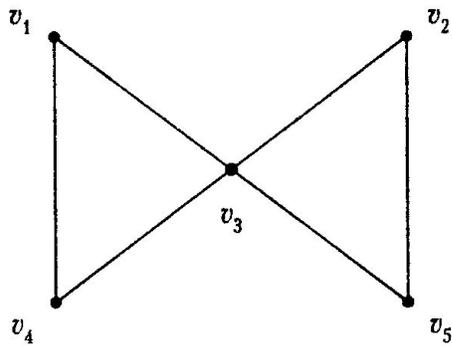


Рис. 1.5. Маршруты, цепи, циклы

Если не существует цепи, соединяющей вершины u и v , то по определению $d(u, v) = +\infty$.

1.7. Некоторые специальные классы графов

Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*.

Граф, состоящий из простого цикла с n вершинами, называется *n -угольником*, обозначается C_n . Граф C_3 часто называют треугольником, а C_4 квадратом.

Простая цепь с l ребрами (и с $(l + 1)$ -й вершиной) называется *l -цепью* и обозначается Z_l .

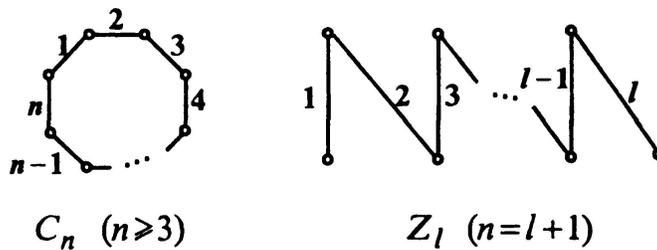


Рис. 1.6. Простой цикл и простая цепь

Граф, в котором все вершины несмежны, называется *безреберным*. Безреберный граф с p вершинами обозначается E_p .

Граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*. Полный граф с p вершинами обозначается K_p , он имеет максимально возможное число ребер:

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Полный подграф (некоторого графа) называется *кликой* этого графа. *n -мерным единичным кубом* называется граф B^n с множеством вер-

шин

$$V = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\}$$

и множеством ребер $E = \{\{\alpha, \beta\} \mid \rho(\alpha, \beta) = 1\}$, где $\rho(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$ — расстояние Хэмминга.

1.8. Двудольные графы

Двудольный граф (или *биграф*, или *четный граф*) — это граф $G(V, E)$, такой, что множество V разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ & $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (т.е. соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа. Если двудольный граф содержит все возможные ребра, соединяющие множества V_1 и V_2 , то он называется *полным двудольным графом*. Если $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$, то полный двудольный граф обозначается $K_{m,n}$.

Пример. На рисунке 1.7 приведена диаграмма графа $K_{3,3}$.

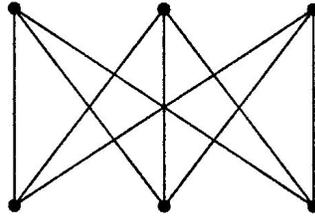


Рис. 1.7. Диаграмма графа $K_{3,3}$

1.9. Операции над графами

Введем следующие операции над графами.

1. *Дополнением графа* $G(V, E)$ (обозначение $\overline{G}(V, \overline{E})$) называется граф с тем же самым множеством вершин, а множество ребер $\overline{E} = V^{[2]} \setminus E$.

2. *Объединением графов* $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$ или $G = G_1 \cup G_2$) называется граф $G(V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$. Если при этом $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (а следовательно, и $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), то $G = G_1 \cup G_2$ называется *дизъюнктивным объединением*.

Пример. $\overline{K}_{3,3} = C_3 \cup C_3$.

3. *Удаление вершины* v из графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1) - v$)

при условии $v \in V_1$) дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1 \setminus \{v\} \ \& \ E_2 = E_1 \setminus \{e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 = v \vee v_2 = v\}.$$

Пример. $C_3 - v = K_2$.

4. *Удаление ребра e* из графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1) - e$ при условии $e \in E_1$) дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1 \ \& \ E_2 = E_1 \setminus \{e\}.$$

Пример. $K_2 - e = \overline{K_2}$.

5. *Добавление ребра e* в граф $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1) + e$, при условии $e \notin E_1$) дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$V_2 = V_1 \ \& \ E_2 = E_1 \cup \{e\}.$$

6. *Стягивание подмножества A* вершин графа $G_1(V_1, E_1)$ или подграфа $G(A, E)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1)/A$ или $G_1(V_1, E_1)/G$ при условии $A \subseteq V_1, E \subseteq E_1$) дает граф $G_2(V_2, E_2)$, где

$$(V_2 = V_1 \setminus A) \cup \{v\} \ \& \ E_2 = (E_1 \setminus \{e = \{u, w\} \mid u \in A \vee w \in A\}) \cup \{e = \{v, u\} \mid u \in \Gamma(A)\}.$$

Пример. $K_4/C_3 = K_2$.

7. *Стягивание ребра.* Частный случай предыдущей операции, если A состоит из двух вершин, образующих ребро в графе G .

8. *Подразбиение ребра.* Пусть $x = \{u, v\}$ — ребро графа G , а w не является вершиной графа G . Говорят, что ребро x *подразбито*, если оно заменено на ребра $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$.

1.10. Инварианты графа

Числовая характеристика графа, одинаковая для всех изоморфных графов, называется (числовым) *инвариантом* графа.

Очевидно, что инвариантами будут следующие уже введенные характеристики: $p(G)$ — число вершин, $q(G)$ — число ребер, $\delta(G)$ — минимальная степень вершин, $\Delta(G)$ — максимальная степень вершин, $z(G)$ — количество простых циклов в графе.

Имеется более общее понятие инварианта графа как некоторой функции $f(G)$, принимающей значения в множестве H произвольной приро-

ды. Такая функция называется инвариантом, если на изоморфных графах ее значения совпадают, т.е.

$$G_1 \simeq G_2 \Rightarrow f(G_1) = f(G_2).$$

Например, если для графа G с $p = p(G)$ вершинами можно образовать p -мерный вектор степеней его вершин (d_1, \dots, d_p) , $d_i = \deg(v_i)$, $i = 1, \dots, p$, занумеровав вершины G так, чтобы числа d_1, \dots, d_p не убывали: $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p$. Ясно, что этот вектор будет инвариантом графа.

В настоящее время не известно «легко» вычислимого набора инвариантов, определяющего граф с точностью до изоморфизма.

1.11. Способы задания графов

Мы уже рассмотрели один из способов представления графов — диаграммы на плоскости. Однако этот способ не подходит, например, для хранения и обработки графов на ЭВМ.

Известны различные способы представления графов в памяти компьютера, которые различаются объемом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций над графами. Представление выбирается, исходя из потребностей конкретной задачи. Далее приведены четыре наиболее часто используемых представления с указанием характеристики $n(p, q)$ — объема памяти для каждого представления. Здесь p — число вершин, а q — число ребер.

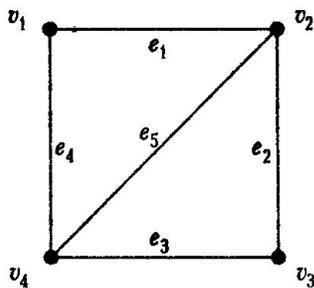


Рис. 1.8. Диаграмма графа, используемого в качестве примера

Представления иллюстрируются на конкретном примере графа G , диаграмма которого изображена на рис. 1.8.

1.11.1. Матрицы смежности и инцидентий

Представление графа с помощью квадратной булевой матрицы, отражающей смежность вершин.

Пусть у графа $G(V, E)$ пронумерованы вершины $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ и ребра $E = \{e_1, \dots, e_q\}$.

Матрицей смежности графа G называется $(p \times p)$ -матрица $A(G) = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, p$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ смежна с вершиной } v_j, \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ несмежна с вершиной } v_j. \end{cases}$$

Очевидно, что у матрицы A на диагонали стоят нули и, кроме того, матрица A симметричная. Поэтому можно хранить только элементы, стоящие выше диагонали и $n(p, q) = O(p^2)$.

Пример. Для графа G на рисунке 1.8

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицей инцидентий графа G называется $(p \times q)$ -матрица $B(G) = (b_{ij})$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Для графа G на рисунке 1.8

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы инцидентий $n(p, q) = O(p, q)$.

1.11.2. Список смежностей

Представление графа с помощью списочной структуры, отражающей смежность вершин и состоящей из массива указателей на списки смеж-

ных вершин, называется *списком смежности*. В этом случае $n(p, q) = O(p + 2q)$.

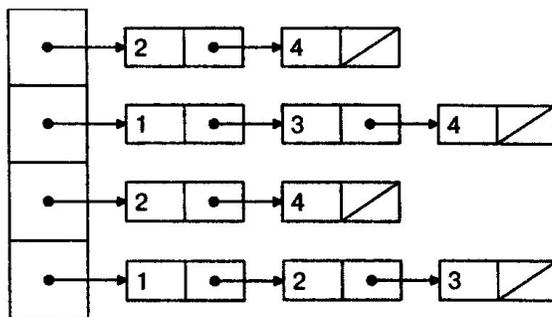


Рис. 1.9. Список смежности для графа G

1.11.3. Массивы ребер

b	e
1	2
1	4
2	3
2	4
3	4

Представление графа с помощью массива, отражающего список пар смежных вершин, называется *массивом ребер*. Для массива ребер $n(p, q) = O(2q)$.

Для графа G на рис. 1.10 представление с помощью массива ребер показано в следующей таблице.

Рис. 1.10. Массив ребер для графа G

1.12. Дополнения и замечания

1.12.1. Инварианты

Следующие инварианты описаны в книге А. А. Зыкова [1].

Плотностью графа G называется число вершин наибольшего полного подграфа (наибольшей клики) в G , плотность обозначается через $\varphi(G)$.

Неплотностью графа G называется число вершин наибольшего порожденного подграфа, не имеющего ребер, неплотность обозначается через $\varepsilon(G)$. Это число также часто называют *вершинным числом независимости* графа G , обозначается через $\beta_0(G)$ (см. Ф. Харари [3]).

Ясно, что эти числа являются инвариантами и, кроме того, $\varphi(G) = \varepsilon(\overline{G})$.

Пример. На рисунке 1.11 плотность первого графа равна 3, плотность

второго графа равна 2.

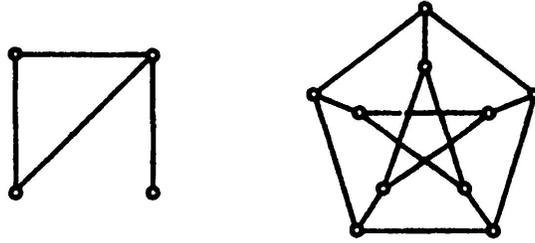


Рис. 1.11. Плотность графа

Матрица смежностей — не инвариант графа: при перенумеровании вершин она претерпевает *перестановку рядов*, состоящую из перестановки строк и точно такой же перестановки столбцов. Но любая функция элементов a_{ij} , не меняющаяся ни при каких перестановках рядов матрицы $A(G)$, является инвариантом графа G ; к числу таких функций относятся сумма всех ее элементов, неупорядоченный набор сумм элементов каждой строки или сумм элементов каждого столбца, определитель матрицы $\det A(G)$, ее характеристический многочлен $\det (A(G) - \lambda E)$ и корни последнего и др.

Ввиду симметричности матрицы $A(G)$ для ее задания достаточно выписать в определенном порядке лишь те элементы, которые расположены над главной диагональю, т.е., например, задать кортеж

$$(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, \dots, a_{n-1,n})$$

длины $\frac{n(n-1)}{2}$. Число

$$a_{12} \cdot 2^0 + a_{13} \cdot 2^1 + a_{23} \cdot 2^2 + a_{14} \cdot 2^3 + \dots + a_{n-1,n} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$$

(при записи которого в двоичной системе количество единиц равно a_{12} , количество двоек a_{13} , количество четверок a_{23} и т.д.) назовем *двоичным кодом матрицы $A(G)$* . Двоичные коды матриц смежностей одного и того же графа, отвечающих разным нумерациям его вершин, конечно, не обязаны совпадать; наименьший из этих кодов (при всевозможных $n!$ нумерациях вершин) будем называть *мини-кодом $\underline{\mu}(G)$* , а наибольший — *макси-кодом $\bar{\mu}(G)$* графа G . Оба эти кода, очевидно, инварианты, и, более того, по любому из них и количеству вершин легко восстанавливается одна из матриц смежностей графа, а значит, и сам граф (с точностью

до изоморфизма). Получаем, что пара инвариантов $(p(G), \underline{\mu}(G))$ и пара $(p(G), \bar{\mu}(G))$ будет полной системой инвариантов.

Решают ли эффективно эти инварианты проблему изоморфизма? Нет, и вот почему. Хотя из равенства $\underline{\mu}(G) = \underline{\mu}(G')$ следует, что $G \simeq G'$, процесс вычисления самого инварианта $\underline{\mu}$ для заданного n -вершинного графа столь же труден, как и лобовой перебор $n!$ соответствий вершин двух таких графов, поскольку надо выбирать наименьший из двоичных кодов всех $n!$ матриц смежностей графа, и лишь в некоторых частных случаях удается избежать полного перебора. Так же обстоит дело и с макси-кодом.

Иными словами, в общем случае использование $\underline{\mu}$ или $\bar{\mu}$ не устраняет факториального перебора, а лишь передвигает его на другое место. Это и не удивительно: оба кода не отражают (в общем случае) структуру графа, и для изучения его при таком способе задания все равно надо сперва восстановить матрицу смежностей, т.е. фактически «сам граф», после чего приступить к его исследованию «с азов».

Мы не можем категорически утверждать, что всякий инвариант графа либо не является полным, либо требует для своего вычисления практически неэффективной процедуры типа полного перебора порядка $n!$ или, скажем, 2^n ; однако до сих пор дело обстоит именно так.

1.12.2. Изоморфизм

Для решения проблемы изоморфизма В. Г. Визинг нашел изящную конструкцию, названную им модульным произведением.

Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — два графа с количествами вершин $p = p(G) = |V|$ и $p' = p(G') = |V'|$, причем $p \leq p'$; построим новый граф $G \square G' = (V_1, E_1)$ следующим образом.

За множество вершин V_1 возьмем декартово произведение $V \times V'$, т.е. вершинами будут служить упорядоченные пары (v, v') , где $v \in V$, $v' \in V'$, количество вершин нового графа $p(G \square G') = |V_1| = p \cdot p'$. Для наглядности расположим вершины V_1 в таблицу (рис. 1.12), что позволит говорить о «строках» и «столбцах» этого множества.

Смежность вершин графа $G \square G'$, т.е. множество E_1 его ребер, определим так. Никакие две вершины, расположенные в одной и той же строке или в одном и том же столбце, ребром не соединяем. Верши-

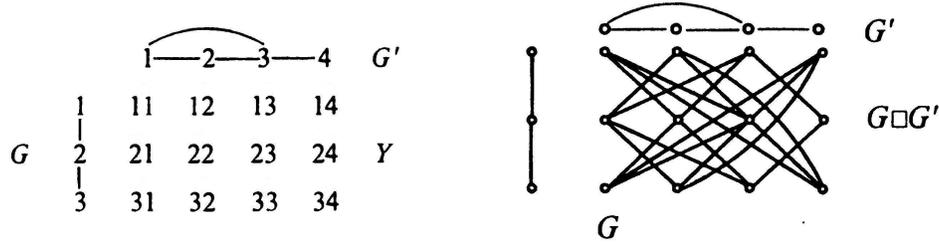


Рис. 1.12. Построение графа $G \square G'$

ны же uu' и vv' из разных строк и столбцов, т.е. такие, что $u, v \in V$, $u', v' \in V'$, $u \neq v$ и $u' \neq v'$, соединяем тогда и только тогда, когда либо $\{u, v\} \in E \& \{u', v'\} \in E'$, либо $\{u, v\} \notin E \& \{u', v'\} \notin E'$, иными словами, когда при совмещении вершин u и v графа G соответственно с вершинами u' и v' графа G' отношения смежности пар $\{u, v\}$ и $\{u', v'\}$ оказываются одинаковыми: либо обе пары смежны (каждая в своем графе), либо обе несмежны.

Весь граф $G \square G'$ для конкретных G и G' изображен на рис. 1.12 (идентификаторы вершин опущены). В общем случае ясно, что $\varphi(G \square G') \leq p$, ибо никакая клика графа $G \square G'$ не может содержать двух вершин из одной строки или одного столбца, а $p \leq p'$. Оказывается, равенство $\varphi(G \square G') = p$ имеет место в том и только том случае, если в графе G' есть подграф, изоморфный G . При доказательстве можно считать без нарушения общности, что вершинами обоих графов служат натуральные числа: $V = \{1, 2, \dots, p\}$, $V' = \{1, 2, \dots, p, \dots, p'\}$.

Допустим сначала, что G' содержит подграф $G'' = (V'', E'')$, изоморфный G , и что изоморфизм порождается соответствием вершин

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & p & \text{в графе } G, \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p & \text{в графе } G''; \end{array}$$

надо показать, что подграф графа $G \square G'$, порожденный n вершинами $1i_1, 2i_2, \dots, pi_p$, является кликой. Но это почти очевидно: если ki_k и li_l — любые две различные вершины ($k \neq l$), то, поскольку соответствие \leftrightarrow между вершинами G и G' — изоморфизм, либо k и l смежны в G , а i_k и i_l смежны в G'' , либо k и l несмежны в G , а i_k и i_l — в G'' ; в обоих случаях вершины ki_k и li_l графа $G \square G'$ смежны между собой.

Наоборот, пусть в графе $G \square G'$ вершины $1i_1, 2i_2, \dots, pi_p$ порождают

кликлу. Тогда соответствие вершин, обозначенное так же, как и выше, является изоморфизмом графа G на подграф G'' графа G' , порожденный множеством вершин $V'' = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, ибо, как следует из определения графа $G \square G'$, $\{k, l\} \in E$ в том и только том случае, если $\{i_k, i_l\} \in E'$.

Итак, *проблема изоморфного вхождения* — выяснить, имеется ли в G' подграф типа G , свелась к нахождению плотности $\varphi(G \square G')$ вспомогательного графа с $p \cdot p'$ вершинами, а точнее лишь к выяснению, равна ли эта плотность p или меньше. В частности, при $p = p'$ получается сведение *проблемы изоморфизма* к нахождению плотности вспомогательного p^2 -вершинного графа. Сама по себе конструкция Визинга не решает эту проблему, а лишь сводит ее к другой задаче, не менее сложной (несмотря на кажущуюся простоту).

1.12.3. Проблема восстановления

Мы уже знаем, что значениями инварианта f в общем случае могут быть элементы произвольного множества M ; если этими элементами служат тоже графы или системы графов, то соответствующие проблемы существования и единственности графа G с заданным $f(G) \in M$ принято называть *проблемами восстановления*. Классическим примером служит следующая проблема Улама [8].

Для p -вершинного графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \geq 2$, можно образовать набор $\{G - v_i \mid i = 1, 2, \dots, p\}$ всех $(p - 1)$ -вершинных подграфов. Допустим теперь, что каждый из этих подграфов задан независимо от остальных изоморфно; это, в частности, исключает какую бы то ни было информацию типа «такая-то вершина вот этого подграфа совпадает в G с такой-то вершиной вон того». Определяется ли по набору $\{G - v_i\}$ исходный граф G изоморфно?

При $n = 2$ это заведомо не так, а для $3 \leq n \leq 9$ положительный ответ получен непосредственной проверкой. Кроме того, *восстанавливаемость* — изоморфную определяемость по набору всех $(n - 1)$ -вершинных подграфов — удалось доказать для ряда классов графов, например несвязных или с несвязным дополнением. Однако полностью проблема до сих пор не решена (см. далее задачу 25).

Глава 2

Связные графы

2.1. Определения

Определение. Говорят, что две вершины в графе *связаны*, если они равны или существует соединяющий их маршрут. Граф, в котором все вершины связаны, называется *связным*.

Так как для различных вершин существует соединяющий их маршрут тогда и только тогда, когда существует соединяющая их простая цепь (см. задачу 2), то в этом определении можно заменить слово «маршрут» на «простая цепь». Поэтому далее в зависимости от ситуации будем использовать определение связности вершин либо через маршрут, либо через простую цепь.

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Для вершин $u, v \in V$ будем обозначать $u \sim v$, если вершины u и v связаны в G . Тем самым мы определили некоторое бинарное отношение на множестве вершин, называемое отношением *связности*.

Лемма. *Отношение связности вершин является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Нужно проверить, что отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность, т.е. $u \sim u$, очевидна.

Симметричность. Пусть $u \sim v$. Если $u = v$, то ясно, что и $v \sim u$. Если $u \neq v$, то существует $\{u, v\}$ -маршрут. Но тогда, записывая его в обратном порядке, получим $\{v, u\}$ -маршрут и, следовательно, $v \sim u$.

Транзитивность. Пусть $u \sim v$ и $v \sim w$. Будем считать, что $u \neq v$ и $v \neq w$ (случай $u = v$ или $v = w$ очевиден). Тогда в G существуют $\{u, v\}$ -маршрут и $\{v, w\}$ -маршрут. Объединяя их, получим $\{u, w\}$ -маршрут. ■

Согласно основному свойству отношения эквивалентности множество вершин V графа G разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных вершин. Обозначим через V_1, \dots, V_k эти классы эквивалентности, т.е. $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$, $V_i \neq \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, и две вершины u и v принадлежат одному и тому же V_i тогда и только тогда, когда $u \sim v$.

Рассмотрим подграфы $G_i(V_i, E_i)$ графа G , порожденные множествами V_i , т.е. для $u, v \in V_i$ выполняется $\{u, v\} \in E_i \Leftrightarrow \{u, v\} \in E$. Так как любые две вершины из V_i связаны маршрутом в G , то этот маршрут будет связывать их и в G_i . Следовательно, G_i — связный.

Нетрудно проверить, что множества E_i образуют разбиение множества E (возможен случай $E_i = \emptyset$ для некоторых i , в этом случае $G_i(V_i, E_i)$ — тривиальный) и для графа G будет выполняться $G(V, E) = G_1(V_1, E_1) \cup \dots \cup G_k(V_k, E_k)$ — дизъюнктивное объединение графов $G_1(V_1, E_1), \dots, G_k(V_k, E_k)$. При этом подграфы G_1, \dots, G_k называются *компонентами связности* графа G . Число компонент связности обозначается $k(G)$.

Граф G является связным тогда и только тогда, когда $k(G) = 1$. Если $k(G) > 1$, то G — *несвязный* граф. Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором $k(G) = p(G)$ и $r(G) = 0$), называется *вполне несвязным*.

Разложение графа G на компоненты связности часто позволяет сводить различные вопросы о графе к аналогичным вопросам для связных графов.

Другая характеристика компонент связности графа G содержится в следующей теореме.

Теорема. *Подграф $G_0(V_0, E_0)$ графа $G(V, E)$ является его компонентой связности тогда и только тогда, когда G_0 — максимальный связный подграф графа G (т.е. если $G_1(V_1, E_1)$ — связный подграф $G(V, E)$, такой, что G_0 является подграфом G_1 , то $G_0 = G_1$).*

Доказательство. Пусть $G_0(V_0, E_0)$ — компонента связности. Покажем, что G_0 — максимальный. Берем связный подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа

G , такой, что $G_0(V_0, E_0) \subseteq G_1(V_1, E_1)$, т.е. $V_0 \subseteq V_1$ и $E_0 \subseteq E_1$. Тогда для любых вершин $v_1 \in V_0$ и $v_2 \in V_1$ существует $(v_2 - v_1)$ -маршрут в G_1 (так как G_1 — связный), который будет маршрутом и в G . Следовательно, $v_2 \sim v_1 \in V_0$ и $v_2 \in V_0$. Значит, $V_1 \subseteq V_0$ и $V_1 = V_0$. Но тогда и $E_1 = E_0$, так как G_0 — порожденный подграф и $G_0 = G_1$.

Обратно. Пусть G_0 — максимальный связный подграф G . Покажем, что G_0 — компонента связности G . Так как G_0 — связный, то для любых двух вершин $u, v \in V_0$ существует $(u - v)$ -маршрут и, следовательно, $u \sim v$. Но тогда множество вершин V_0 целиком содержится в некотором классе эквивалентности V_i и граф G_i будет связным подграфом G , содержащим G_0 . Следовательно, $G_0 = G_i$ в силу максимальной G_0 . ■

2.2. Точки сочленения, мосты, блоки

Точкой сочленения графа называется вершина, удаление которой увеличивает число компонент; ребро с таким же свойством называется *мостом*. Таким образом, если v — точка сочленения связного графа G , то граф $G - v$ несвязен. *Неразделимым графом* называется связный, непустой, не имеющий точек сочленения граф. *Блок* графа — это его максимальный неразделимый подграф. Если G — неразделимый граф, то часто он сам называется блоком.

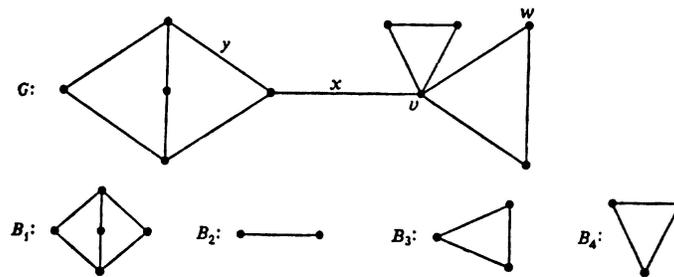


Рис. 2.1. Граф и его блоки

На рисунке 2.1 v — точка сочленения, а w — нет, x — мост, а y — нет; отдельно приведены четыре блока графа G .

Каждое ребро графа принадлежит точно одному из его блоков, так же как и каждая вершина, не являющаяся ни изолированной, ни точкой сочленения. Далее, ребра любого простого цикла графа G также принадлежат только одному блоку. В следующих теоремах устанавливаются несколько эквивалентных условий, обеспечивающих существование у графа точки сочленения и моста.

Теорема. Пусть v — вершина связного графа G . Следующие утверждения эквивалентны:

1) v — точка сочленения графа G ;

2) существуют такие вершины u и w , отличные от v , что v принадлежит любой простой $\{u, w\}$ -цепи;

3) существует разбиение множества вершин $V - \{v\}$ на такие два подмножества U и W , что для любых вершин $u \in U$ и $w \in W$ вершина v принадлежит любой простой $\{u, w\}$ -цепи.

Доказательство. (1) влечет (3). Так как v — точка сочленения графа G , то граф $G - v$ несвязен и имеет по крайней мере две компоненты. Образуем разбиение $V - \{v\}$, отнеся к U вершины одной из этих компонент, а к W — вершины всех остальных компонент. Тогда любые две вершины $u \in U$ и $w \in W$ лежат в разных компонентах графа $G - v$. Следовательно, любая простая $\{u, w\}$ -цепь графа G содержит v .

(3) влечет (2). Это немедленно следует из того, что (2) — частный случай утверждения (3).

(2) влечет (1). Если v принадлежит любой простой цепи в G , соединяющей u и w , то в G нет простой цепи, соединяющей эти вершины в $G - v$. Поскольку $G - v$ несвязен, то v — точка сочленения графа G . ■

Теорема. Пусть x — ребро связного графа G . Следующие утверждения эквивалентны:

1) x — мост графа G ;

2) x не принадлежит ни одному простому циклу графа G ;

3) в G существуют такие вершины u и v , что ребро x принадлежит любой простой цепи, соединяющей u и v ;

4) существует разбиение множества V на такие подмножества U и W , что для любых вершин $u \in U$ и $w \in W$ ребро x принадлежит любой простой $\{u, w\}$ -цепи.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. ■

Упражнение. Доказать эту теорему.

Лемма. В любом нетривиальном графе есть (по крайней мере) две вершины, которые не являются точками сочленения.

2.3. Оценка числа ребер через число вершин и число компонент связности

Инварианты $p(G)$, $q(G)$ и $k(G)$ не являются независимыми.

Теорема. Пусть p — число вершин, q — число ребер, k — число компонент связности графа. Тогда

$$p - k \leq q \leq \frac{(p - k)(p - k + 1)}{2}.$$

Доказательство

1. $p - k \leq q$. Индукция по p . База: $p = 1$, $q = 0$, $k = 1$. Пусть оценка верна для всех графов с числом вершин меньше p . Рассмотрим граф G , $p(G) = p$. Удалим в G вершину v , которая не является точкой сочленения: $G' := G - v$. Тогда, если v — изолированная вершина, то $p' = p - 1$, $k' = k - 1$, $q' = q$. Имеем $p - k = p' - k' \leq q' = q$. Если v — не изолированная вершина, то $p' = p - 1$, $k' = k$, $q' < q$. Имеем $p - k = 1 + p' - k' \leq 1 + q' \leq q$.

2. $q \leq (p - k)(p - k + 1)/2$. Метод выделения «критических» графов. Число ребер q графа с p вершинами и k компонентами связности не превосходит числа ребер в графе с p вершинами и k компонентами связности, в котором все компоненты связности суть полные графы. Следовательно, достаточно рассматривать только графы, в которых все компоненты связности полные. Среди всех графов с p вершинами и k полными компонентами связности наибольшее число ребер имеет граф

$$K_{p-k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} K_1.$$

Действительно, пусть есть две компоненты связности G_1 и G_2 , такие, что $1 < p_1 = p(G_1) \leq p_2 = p(G_2)$. Если перенести одну вершину из компоненты связности G_1 в компоненту связности G_2 , то число ребер изменится на $\Delta q = p_2 - (p_1 - 1) = p_2 - p_1 + 1 > 0$. Следовательно, число ребер возросло. Таким образом, достаточно рассмотреть случай

$$K_{p-k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} K_1.$$

Но при этом

$$q(K_{p-k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} K_1) = (p-k+1)(p-k+1-1)/2 + 0 = (p-k)(p-k+1)/2.$$

■

2.4. Меры связности

Вершинной связностью графа G (обозначается $\kappa(G)$) называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Пример

$\kappa(G) = 0$, если G несвязен;

$\kappa(G) = 1$, если G имеет точку сочленения;

$\kappa(K_p) = p - 1$, если K_p — полный граф.

Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) = k$.

Реберной связностью графа G (обозначается $\lambda(G)$) называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Пример

$\lambda(G) = 0$, если G несвязен;

$\lambda(G) = 1$, если G имеет мост;

$\lambda(K_p) = p - 1$, если K_p — полный граф.

Теорема. $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Доказательство. Докажем, что $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Если $\lambda = 0$, то $\kappa = 0$. Если $\lambda = 1$, то есть мост, а значит, либо есть точка сочленения, либо $G = K_2$. В любом случае $\kappa = 1$. Пусть теперь $\lambda \geq 2$. Тогда, удалив $\lambda - 1$ ребро, получим граф G' , имеющий мост $\{u, v\}$. Для каждого из удаляемых $\lambda - 1$ ребер удалим инцидентную вершину, отличную от u и v . Если после такого удаления вершин граф несвязен, то $\kappa \leq \lambda - 1 < \lambda$. Если связан, то удалим один из концов моста u или v . Имеем $\kappa \leq \lambda$.

Докажем, что $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Если $\delta = 0$, то $\lambda = 0$. Пусть вершина v имеет наименьшую степень $\deg(v) = \delta$. Удалим все ребра, инцидентные

v . Тогда $\lambda \leq \delta$. ■

Отметим, что все неравенства в этой теореме могут быть строгими (см. рис. 2.2).

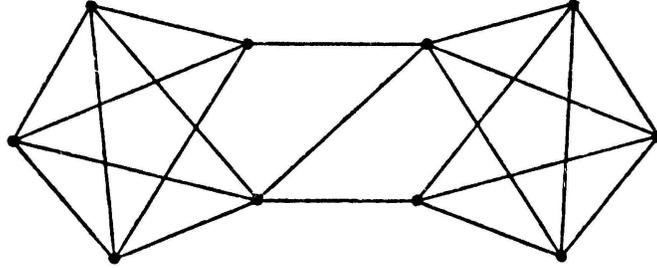


Рис. 2.2. Граф, для которого $\kappa = 2, \lambda = 3, \delta = 4$

2.5. Теорема Менгера

Интуитивно очевидно, что граф тем более связан, чем больше существует различных цепей, соединяющих одну вершину с другой, и тем менее связан, чем меньше нужно удалить промежуточных вершин, чтобы отделить одну вершину от другой. Далее приводится теорема Менгера, которая придает этим неформальным наблюдениям точный и строгий смысл.

2.5.1. Непересекающиеся цепи и разделяющие множества

Пусть $G(V, E)$ — связный граф, u и v — две его несмежные вершины. Две $\{u, v\}$ -цепи называются *вершинно-непересекающимися*, если у них нет общих вершин, отличных от u и v . Две $\{u, v\}$ -цепи называются *реберно-непересекающимися*, если у них нет общих ребер. Если две цепи вершинно не пересекаются, то они и реберно не пересекаются. Множество вершинно-непересекающихся цепей $\langle u, v \rangle$ обозначим через $P(u, v)$:

$$P(u, v) \triangleq \{ \langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle_1 \in P \ \& \ \langle u, v \rangle_2 \in P \Rightarrow \langle u, v \rangle_1 \cap \langle u, v \rangle_2 = \{u, v\} \}.$$

Множество S вершин (и/или ребер) графа G *разделяет* две вершины u и v , если u и v принадлежат разным компонентам связности графа $G - S$. *Разделяющее множество ребер* называется *разрезом*. *Разделяющее множество вершин* для вершин u и v обозначим $S(u, v)$:

$$S(u, v) \triangleq \{ w \in V \mid G - S = G_1 \cup G_2, \ v \in G_1, \ u \in G_2 \}.$$

Замечание. Если u и v принадлежат разным компонентам связности графа G , то $|P(u, v)| = 0$ и $|S(u, v)| = 0$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что G — связный граф.

2.5.2. Теорема Менгера в «вершинной форме»

Теорема (Менгера). Пусть u и v — несмежные вершины в графе $G = (V, E)$. Наименьшее число вершин в множестве, разделяющем u и v , равно наибольшему числу вершинно-непересекающихся простых $\{u, v\}$ -цепей:

$$\max |P(u, v)| = \min |S(u, v)|.$$

Замечание. Пусть G — связный граф, и вершины u и v несмежны. Легко видеть, что $|P| \leq |S|$. Действительно, любая $\langle u, v \rangle$ -цепь проходит через S . Если бы $|P| > |S|$, то в S была бы вершина, принадлежащая более чем одной цепи из P , что противоречит выбору P . Таким образом, $\forall P \forall S |P| \leq |S|$. Следовательно, $\max |P| \leq \min |S|$. Утверждение теоремы состоит в том, что в любом графе существуют такие P и S , что достигается равенство $|P| = |S|$.

Доказательство. Пусть G — связный граф, u и v — несмежные вершины. Индукция по $p + q$. База: наименьший граф, удовлетворяющий условиям теоремы, состоит из трех вершин u, w, v и двух ребер $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$. В нем $P(u, v) = \{\langle u, w, v \rangle\}$ и $S(u, v) = \{w\}$. Таким образом, $|P(u, v)| = |S(u, v)| = 1$. Пусть утверждение теоремы верно для всех графов с числом вершин и ребер меньше $p + q$. Рассмотрим граф G с p вершинами и q ребрами. Пусть $u, v \in V$, u, v несмежны и S — некоторое наименьшее множество вершин, разделяющее u и v , $n = |S|$.

Граф $G - S$ несвязный. Обозначим $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — компоненты связности $G - S$, содержащие вершины u и v соответственно. Можно считать, что $V = V_1 \cup V_2 \cup S$, так как в противном случае подграф $G_0 = (V_1 \cup V_2 \cup S, E_0)$, порожденный множеством вершин $V_1 \cup V_2 \cup S$, будет собственным подграфом графа G и, кроме того, множество S будет очевидно наименьшим множеством вершин, разделяющим u и v в G_0 . Но тогда по индуктивному предположению существует n вершинно-непересекающихся $\{u, w\}$ -цепей в G_0 , а следовательно, и в G . Далее рассмотрим четыре случая.

1. $|V_1| > 1$ и $|V_2| > 1$.

Образуем два новых графа G_u и G_v стягиванием множеств V_1 и V_2 на u и v соответственно, т.е. $G_u = G/V_1$ и $G_v = G/V_2$. S по-прежнему является наименьшим разделяющим множеством для u и v как в G_u , так и в G_v . Действительно, допустим, например, что S не является наименьшим разделяющим множеством для u и v в G_u (рис. 2.3) и пусть $S_1 \subseteq S \cup V_2$ разделяют u и v в G_u , $|S_1| < |S|$. Тогда в графе G существует $\{u, w\}$ -цепь $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$, не содержащая вершин из S_1 (так как S – наименьшее в G).

Выберем наибольшее i , такое, что $u_i \in V_1$. Тогда $u_{i+1} \in S$ (так как вершины из V_1 и V_2 несмежны между собой) и $\{u, w\}$ -цепь $v, u_{i+1}, \dots, u_k = v$ в G_u не содержит вершин из S_1 . Что противоречит тому, что S_1 разделяет u и v в G_u . Так как $|V_1| > 1$ и $|V_2| > 1$, то G_u и G_v имеют меньше вершин, чем G . Следовательно, по индуктивному предположению в G_u и в G_v имеется n вершинно-непересекающихся простых цепей. Комбинируя отрезки этих цепей от S до v и от u до S , получаем n вершинно-непересекающихся простых цепей в G .

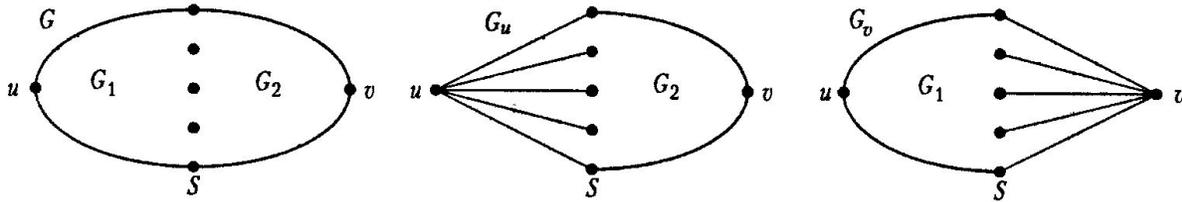


Рис. 2.3. Доказательство теоремы Менгера, случай 1

2. $|V_1| = 1$ или $|V_2| = 1$. Тогда все вершины S смежны с u или с v (для определенности пусть с u), и пусть среди вершин S есть вершина w , смежная одновременно с u и с v (рис. 2.4).

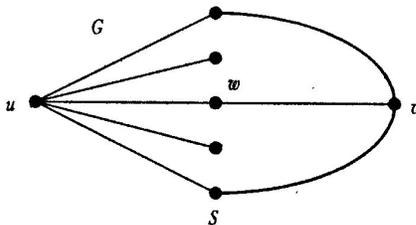


Рис. 2.4. Доказательство теоремы Менгера, случай 2

Рассмотрим граф $G' = G - w$. В нем $S \setminus \{w\}$ – разделяющее множество для u и v , причем наименьшее. По индуктивному предположению в G' имеется $|S \setminus \{w\}| = n - 1$ вершинно-непересекающихся простых цепей. Добавим к ним цепь $\langle u, w, v \rangle$. Она простая и вер-

шинно не пересекается с остальными. Таким образом, имеем n вершинно-непересекающихся простых цепей в G .

3. $|V_1| = 1$ или $|V_2| = 1$. Тогда опять все вершины S смежны с u или с v (для определенности пусть с u), и среди вершин S нет вершин, смежных одновременно с вершиной u и с вершиной v .

Рассмотрим кратчайшую $\{u, v\}$ -цепь $u, w_1, w_2, \dots, v, w_1 \in S, w_2 \neq v$ (рис. 2.5).

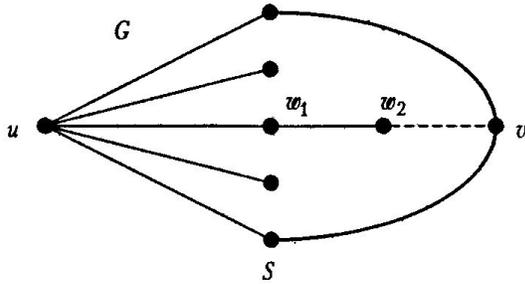


Рис. 2.5. Доказательство теоремы Менгера, случай За

Рассмотрим граф $G' := G/\{w_1, w_2\}$, полученный из G стягиванием ребра $\{w_1, w_2\}$ в вершину w_1 . Имеем $w_2 \notin S$, в противном случае цепь $\langle u, w_2, \dots, v \rangle$ была бы еще более короткой. Следовательно, в графе G' множество S по-прежнему является разделяющим u и v , и граф G' имеет (по крайней мере) на одно ребро меньше. Далее рассмотрим

два подслучая.

За. Множество S — наименьшее разделяющее u и v в G' . Тогда по индуктивному предположению в G' существуют n вершинно-непересекающихся простых цепей. Каждая из этих цепей содержит одну (и только одну) из вершин S . При этом цепи, проходящие через вершины $S \setminus \{w_1\}$, будут цепями и в графе G .

Рассмотрим ту простую цепь, которая проходит через w_1 . Пусть она имеет вид u, w_1, t, \dots, v , где вершина t смежна с w_1 в графе G' . Если t смежна с w_1 и в графе G , то эта цепь тоже будет цепью в G . В противном случае t смежна в G с w_2 , и тогда u, w_1, w_2, t, \dots, v будет цепью в G . Ясно, что в любом случае получаем n вершинно-непересекающихся путей в G .

Зб. Множество S не является наименьшим разделяющим множеством для u и v в G' . То, что это возможно, видно на следующем примере, где $S = \{u_1, w_1\}$ (рис. 2.6).

Берем S_1 — наименьшее разделяющее множество для u и v в G' и $|S_1| \leq |S| - 1$. Заметим, что тогда множество $S_0 = S_1 \cup \{w_2\}$ будет

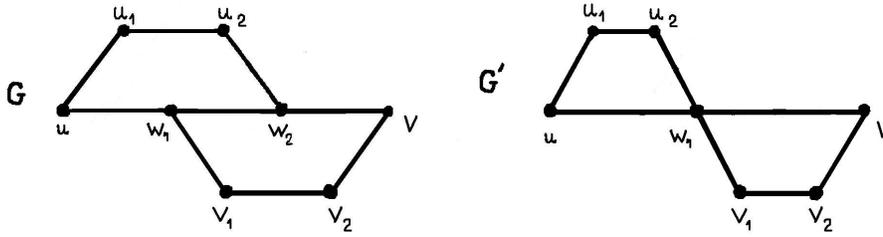


Рис. 2.6. Доказательство теоремы Менгера, случай 3б

разделяющим для u и v в G . Действительно, если это не так, то в G существует $\{u, v\}$ -цепь, не содержащая вершин из $S_1 \cup \{w_2\}$, но тогда она будет $\{u, v\}$ -цепью и в графе G' и не содержит вершин из S_1 , что противоречит выбору S_1 . Ясно также, что $w_2 \notin S_1$, так как в противном случае $S_0 = S_1$ и $|S_0| \leq |S| - 1$, что противоречит минимальности S .

Далее покажем, что $w_1 \in S_1$. Допустим противное, т.е. $w_1 \notin S_1$. Так как S_1 не является множеством, разделяющим u и v в G , то существует простая $\{u, v\}$ -цепь в $G - S_1$. Но тогда эта цепь содержит вершину w_2 (так как $S_1 \cup \{w_2\}$ — разделяющее множество для u и v). Пусть цепь имеет вид $u = u_0, u_1, \dots, u_i = w_2, u_{i+1}, \dots, u_k = v$. Тогда $\{u, v\}$ -цепь $u = u_0, w_1, u_{i+1}, \dots, u_k = v$ будет $\{u, v\}$ -цепью в G' , не проходящей через вершины из S_1 , что противоречит выбору S_1 .

Итак, получаем, что имеется множество S_0 , разделяющее u и v в графе G , $w_1 \in S_0$, $w_2 \in S_0$, u несмежна с w_2 , а v несмежна с w_1 . Но тогда для $G - S_0$ будут выполняться условия случая 1. ■

2.6. Варианты теоремы Менгера

Теорема Менгера представляет собой весьма общий факт, который в разных формулировках встречается в различных областях математики. Комбинируя вершинно- и реберно-непересекающиеся цепи, разделяя не отдельные вершины, а множества вершин, используя инварианты κ и λ , можно получить множество результатов «типа теоремы Менгера». Например:

Теорема. Для любых двух несмежных вершин u и v графа G наибольшее число реберно-непересекающихся $\{u, v\}$ -цепей равно наименьшему числу ребер в (u, v) -разрезах.

Теорема. Чтобы граф G был k -связным, необходимо и достаточно, чтобы любые две несмежные вершины были соединены не менее чем k

вершинно-непересекающимися простыми цепями.

Другими словами, в любом графе G любые две несмежные вершины соединены не менее чем $\kappa(G)$ вершинно-непересекающимися простыми цепями.

2.7. Теорема Холла

Теорема Холла, рассматриваемая в этом разделе, имеет множество различных применений и интерпретаций, с которых мы и начинаем ее изложение.

Задача о свадьбах. Пусть имеется конечное множество юношей, каждый из которых знаком с некоторым подмножеством множества девушек. В каком случае всех юношей можно женить так, чтобы каждый женился на знакомой девушке?

Трансверсаль. Пусть $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ — семейство подмножеств конечного множества E . S_k не обязательно различны и могут пересекаться. Системой различных представителей S (или трансверсалью S) называется подмножество $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ из m элементов множества E , таких, что $c_k \in S_k$. В каком случае существует трансверсаль?

Замечание. C является множеством, а потому все элементы C различны, откуда и происходит название «система различных представителей».

Совершенное паросочетание. Паросочетанием (или независимым множеством ребер) называется множество ребер, в котором никакие два не смежны. Независимое множество называется максимальным, если никакое его надмножество не является независимым.

Пусть $G(V_1, V_2, E)$ — двудольный граф. Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2 называется паросочетание, покрывающее вершины V_1 . В каком случае существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 ?

Замечание. Совершенное паросочетание является максимальным.

Вообще говоря, задача о свадьбах, трансверсаль и совершенное паросочетание — это одна и та же задача. Действительно, задача о свадьбах сводится к задаче о совершенном паросочетании следующим образом. V_1 — множество юношей, V_2 — множество девушек, ребра — знакомства юношей с девушками. В таком случае совершенное паросочетание — ис-

комый набор свадеб. Задача о трансверсали сводится к задаче о совершенном паросочетании следующим образом. Положим $V_1 = S$, $V_2 = E$, ребро (S_k, e_i) существует, если $e_i \in S_k$. В таком случае совершенное паросочетание — искомая трансверсаль.

Следующая теорема дает условия существования совершенного паросочетания.

Теорема (Холла). Пусть $G(V_1, V_2, E)$ — двудольный граф. Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует тогда и только тогда, когда $\forall A \subset V_1 |A| \leq |\Gamma(A)|$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 . Тогда в $\Gamma(A)$ входит $|A|$ вершин из V_2 , парных к вершинам из A , и, возможно, еще что-то. Таким образом, $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

Достаточность. Добавим в G две новые вершины u и v так, что u смежна со всеми вершинами из V_1 , а v смежна со всеми вершинами из V_2 . Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует тогда и только тогда, когда существуют $|V_1|$ вершинно-непересекающихся простых (u, v) -цепей (рис. 2.7). Ясно, что $|P(u, v)| \leq |V_1|$ (так как V_1 разделяет u и v).

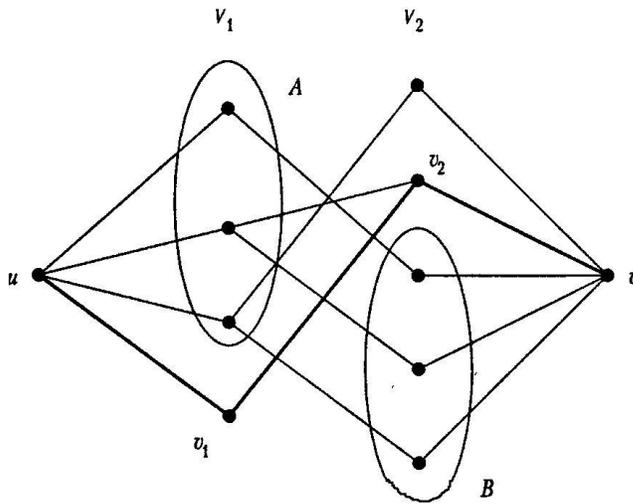


Рис. 2.7. Иллюстрация к доказательству теоремы Холла

тательно, $|S| = |A| + || \geq |A| + |V_1 \setminus A| = |V_1|$. ■

По теореме Менгера $\max |P(u, v)| = \min |S(u, v)| = |S|$, где S — наименьшее множество, разделяющее вершины u и v . Имеем $|S| \leq |V_1|$. Покажем, что $|S| \geq |V_1|$. Пусть $S = A \cup B$, $A \subset V_1$, $B \subset V_2$. Тогда $\Gamma(V_1 \setminus A) \subset B$. Действительно, если бы $\Gamma(V_1 \setminus A) \not\subset B$, то существовал бы «обходной» путь $\langle u, v_1, v_2, v \rangle$, и S не было бы разделяющим множеством для u и v . Имеем $|V_1 \setminus A| \leq |\Gamma(V_1 \setminus A)| \leq |B|$. Следова-

Глава 3

Обходы графов

В этой главе изучаются эйлеровы и гамильтоновы графы. Понятие эйлерова графа появилось, когда Эйлер решал задачу о кёнигсбергских мостах. Отрицательное решение Эйлером этой задачи привело к первой опубликованной работе по теории графов в 1736 г. Далее приводятся две характеристики эйлеровых графов. Затем рассматриваются гамильтоновы графы, для которых приведены некоторые достаточные и необходимые условия их существования.

3.1. Эйлеровы графы

Если граф имеет цикл (не обязательно простой), содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется *эйлеровым* циклом, а граф называется *эйлеровым* графом. Если граф имеет цепь (не обязательно простую), содержащую все ребра по одному разу, то такая цепь называется *эйлеровой* цепью, а граф называется *полуэйлеровым* графом.

Эйлеров цикл содержит не только все ребра (по одному разу), но и все вершины графа (возможно, по нескольку раз). Ясно, что эйлеровым может быть только связный граф.

Теорема (характеризация эйлеровых графов). *Если граф G связан и нетривиален, то следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) G — эйлеров граф;
- 2) каждая вершина G имеет четную степень;
- 3) множество ребер G можно разбить на простые циклы.

Доказательство. Из (1) следует (2). Пусть Z — эйлеров цикл, Z :

$v_0, v_1, \dots, v_n = v_0$. Пусть v — некоторая вершина графа G . Рассмотрим множество индексов i , при которых $v_i = v$, т.е. $I_v = \{i \mid v_i = v, i = 0, 1, \dots, n\}$ и $k = |I_v|$. Тогда для любого $i \in I_v$ ребра $\{v_{i-1}, v_i\}$ и $\{v_i, v_{i+1}\}$ инцидентны v (если $i = 0$, то ребра $\{v_0, v_1\}$ и $\{v_{n-1}, v_n\}$). Так как в цикле Z каждое ребро встречается ровно один раз, то степень вершины v будет $\deg(v) = 2|I_v| = 2k$ — четная.

(2) влечет (3). Так как G — связный и нетривиальный граф, то степень каждой вершины равна по крайней мере 2. Покажем, что G содержит простой цикл. Берем произвольную вершину v_0 и строим последовательность вершин v_0, v_1, \dots так, чтобы выполнялось условие v_{i-1} и v_{i+1} смежны с v_i и $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ (это всегда возможно, так как $\deg(v) \geq 2$). Так как число вершин конечно, то найдутся $i < j$, такие, что $v_i = v_j$. Выберем $i_0 < j_0$ так, что $i_0 < j_0$, $v_{i_0} = v_{j_0}$ и среди вершин $v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_{j_0-1}$ нет одинаковых (почему?). Тогда $v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_{j_0-1}, v_{j_0}$ — простой цикл.

Удаление ребер цикла Z приводит к остовному подграфу G_1 , в котором также каждая вершина имеет четную степень. Если в G_1 нет ребер, то (3) уже доказано; в противном случае применим высказанные выше соображения к G_1 и получим граф G_2 , в котором опять степени всех вершин четны, и т. д. Одновременно с пустым графом G_n получаем разбиение ребер графа G на n простых циклов.

(3) влечет (1). Пусть Z_1 — один из простых циклов этого разбиения. Если G состоит только из этого цикла, то очевидно, что G — эйлеров граф. В противном случае другой простой цикл Z_2 в G имеет вершину v , общую с Z_1 (**доказать в качестве упражнения**). Маршрут, начинающийся с v и состоящий из цикла Z_1 и следующего непосредственно за ним цикла Z_2 , является замкнутой цепью, которая содержит ребра этих двух циклов. Продолжая эту процедуру, мы можем построить замкнутую цепь, содержащую все ребра графа G ; следовательно, G — эйлеров граф. ■

Для эйлеровых графов существует процедура, называемая алгоритмом Флери, которая позволяет быстро построить один из существующих эйлеровых циклов.

Алгоритм Флери

1. В графе G с числом вершин p выбираем произвольную вершину v_1 и произвольное ребро, инцидентное этой вершине. Присваиваем вы-

бранному ребру номер 1 и помечаем его e_1 . Переходим по этому ребру в следующую вершину. Вычеркиваем ребро e_1 , считая его пройденным.

2. Находясь в вершине $v_i, i = 2, \dots, p$, выбираем ребро без номера, инцидентное этой вершине, следуя правилам:

а) не выбирать ребро, соединяющее вершину v_i с вершиной v_1 , если имеется возможность другого выбора;

б) не выбирать ребро, которое является мостом, т. е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру.

Присваиваем выбранному ребру следующий номер и переходим по этому ребру в другую вершину. Вычеркиваем ребро, считая его пройденным.

3. Продолжаем процесс присваивания номеров и вычеркивания ребер до тех пор, пока имеются инцидентные соответствующим вершинам не занумерованные ребра.

4. После того как в графе G будут занумерованы все ребра, получаем эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

Следствие. *Связный нетривиальный граф G будет полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в G имеются две вершины нечетной степени, при этом эйлерова цепь начинается в одной из вершин нечетной степени, а заканчивается в другой.*

Доказательство. Необходимость. Берем эйлерову цепь в графе G . Далее, рассуждая так же, как при доказательстве первой части теоремы, получим, что все вершины, кроме первой и последней, будут четной степени, а первая и последняя — нечетной.

Достаточность. Добавим к графу новую вершину и соединим ее ребрами с вершинами нечетной степени. Получим граф, у которого все вершины имеют четную степень. ■

3.2. Оценка числа помеченных эйлеровых графов

Напомним, что по теореме Эйлера $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2q$. Поэтому для любого графа G число вершин нечетной степени четно.

Пусть $\mathcal{G}(p)$ — множество всех помеченных графов с p вершинами, а $\mathcal{E}(p)$ — множество эйлеровых помеченных графов с p вершинами.

Теорема. *Эйлеровых графов почти нет, т.е.*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{E}(p)|}{|\mathcal{G}(p)|} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}'(p)$ — множество помеченных графов с p вершинами и четными степенями. Тогда по предыдущей теореме $\mathcal{E}(p) \subset \mathcal{E}'(p)$ и $|\mathcal{E}(p)| \leq |\mathcal{E}'(p)|$. В любом графе число вершин нечетной степени четно, следовательно, любой граф из $\mathcal{E}'(p)$ можно получить из некоторого графа $\mathcal{G}(p-1)$, если добавить новую вершину с пометкой p и соединить ее со всеми старыми вершинами нечетной степени. Следовательно, $|\mathcal{E}'(p)| \leq |\mathcal{G}(p-1)|$. Но $|\mathcal{G}(p)| = 2^{C(p,2)}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} C(k, 2) - C(k-1, 2) &= \frac{k!}{2!(k-2)!} - \frac{(k-1)!}{2!(k-3)!} = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \\ &= \frac{(k-1)(k-k+2)}{2} = k-1. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(p)| &\leq |\mathcal{E}'(p)| \leq |\mathcal{G}(p-1)| = 2^{C(p-1,2)} = 2^{C(p,2)-(p-1)} = |\mathcal{G}(p)| 2^{-(p-1)} \\ \text{и } \frac{\mathcal{E}(p)}{\mathcal{G}(p)} &\leq \frac{1}{2^{p-1}}, \text{ откуда } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{E}(p)|}{|\mathcal{G}(p)|} = 0. \end{aligned}$$

■

3.3. Гамильтоновы циклы

Название «гамильтонов цикл» произошло от задачи «Кругосветное путешествие», придуманной Вильямом Гамильтоном в 1859 г.: нужно обойти все вершины графа, диаграмма которого показана на рис. 3.1 (в исходной формулировке это были названия столиц различных стран), по одному разу и вернуться в исходную точку. Этот граф представляет собой укладку додекаэдра. Гамильтон продал свою идею одному мастеру

игрушек за 25 гиней; это был жестокий поступок, ибо описанная игра не сулит никакой финансовой удачи.

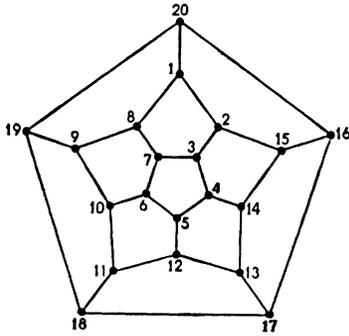


Рис. 3.1. Задача «Кругосветное путешествие»

На языке теории графов задача формулируется так: найти остовный цикл в графе додекаэдра. Граф показан на рис. 3.1. Вершины графа пронумерованы числами $1, 2, \dots, 20$ (вместо названий городов, скажем, Амстердам, Анн-Арбор, Берлин, Будапешт, Дублин, Эдинбург, Иерусалим, Лондон, Мельбурн, Москва, Новосибирск, Нью-Йорк, Париж, Пекин, Прага, Рио-де-Жанейро, Рим, Сан-Франциско, Токио и

Варшава). Существование остовного цикла очевидно.

3.3.1. Гамильтоновы графы

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа (по одному разу), то такой цикл называется *гамильтоновым* циклом, а граф называется *гамильтоновым* графом.

Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа. Ясно, что гамильтоновым может быть только связный граф.

Если граф имеет простую цепь, содержащую все вершины графа, то такая цепь называется *гамильтоновой* цепью.

В следующей теореме даны достаточные условия гамильтоновости графа.

Теорема (Оре). *Если в графе $G(V, E)$, $p(G) \geq 3$ и для любых двух несмежных вершин u и v $\deg(u) + \deg(v) \geq p$, то G — гамильтонов граф.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. в некотором графе, удовлетворяющем условию теоремы, не существует гамильтонова цикла. Без нарушения общности можно считать, что в G есть такая пара вершин u, v $\{u, v\} \notin E$, $u \neq v$, которая соединена гамильтоновой цепью $Z : u = u_1, \dots, u_p = v$, (т.е. граф $G + \{u, v\}$ уже обладает искомым циклом): в самом деле, добавление ребер без добавления вершин не нарушает условие теоремы, а в полном графе гамильтонов цикл наверняка есть (рис. 3.2).

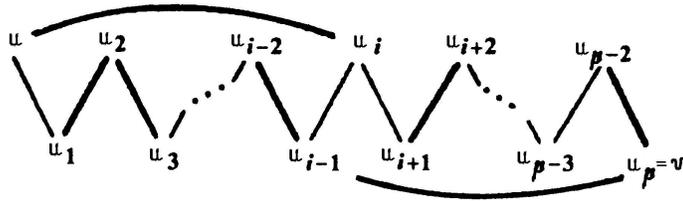


Рис. 3.2. Гамильтонова цепь в G

Пусть u и v — такая пара вершин. Если найдется вершина u_i , смежная с $u = u_1$, и такая, что при этом u_{i-1} смежна с $v = u_p$, то очевидно, что в G существует гамильтонов цикл $u = u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_p = v, u_{p-1}, u_{p-2}, \dots, u_{i-1}, u_i, u_1 = u$ (см. рис. 3.2). Поэтому если u смежна с u_i , то v несмежна с u_{i-1} для всех $i = 2, \dots, p-1$. Следовательно, число вершин, не смежных с v , т.е. $p-1 - \deg(v)$, больше либо равно числу вершин, смежных с u , т.е. $\deg(u)$. Получаем $p-1 - \deg(v) \geq \deg(u)$, или $p-1 \geq \deg(u) + \deg(v) \geq p$, противоречие. ■

В качестве следствия приведем еще следующее утверждение.

Следствие (Дирак). *Если в графе $G(V, E)$ $p(G) > 3$ и для любой вершины v графа G : $\deg(v) \geq p/2$, то G — гамильтонов граф.*

В качестве примера приведем (также без доказательства) следующие достаточные условия гамильтоновости, из которых следует теорема Оре.

Теорема (Поша). *Пусть G имеет $p \geq 3$ вершин. Если для всякого n , $1 \leq n < (p-1)/2$, число вершин со степенями, не превосходящими n , меньше, чем n , и для нечетного p число вершин степени $(p-1)/2$ не превосходит $(p-1)/2$, то G — гамильтонов граф.*

В следующем утверждении содержатся некоторые необходимые условия для того, чтобы граф G был гамильтоновым.

Тэта-графом называется блок, содержащий только вершины степени 2 и две несмежные вершины степени 3. Таким образом, тэта-граф состоит из двух вершин степени 3 и трех непересекающихся простых цепей, соединяющих эти вершины, причем длина каждой из этих цепей не меньше 2.

Теорема. *Каждый гамильтонов граф двусвязен. Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит тэта-подграф.*

Легко найти тэта-подграф в негамильтоновом блоке, приведенном на рис. 3.3.

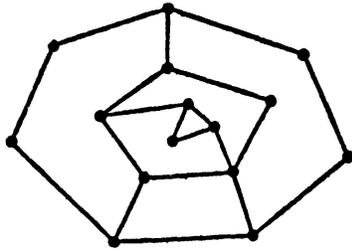


Рис. 3.3. Негамильтонов блок

рема 8.10).

Кажущееся отсутствие взаимосвязи между эйлеровыми и гамильтоновыми графами иллюстрируется на рис. 3.4, здесь каждый граф — это блок с 8 вершинами. Однако эти понятия можно связать, используя так называемые «реберные графы» ([3], гл. 8, теорема 8.10).

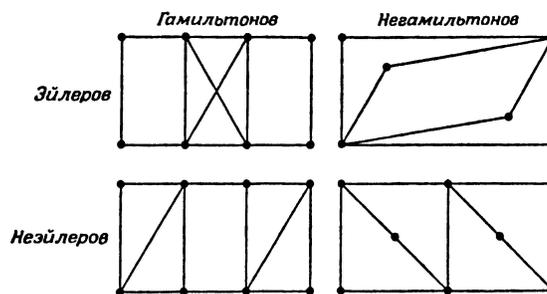


Рис. 3.4. Эйлеровы и гамильтоновы графы

3.3.2. Задача коммивояжера

Рассмотрим следующую задачу, известную как задача коммивояжера. Имеется p городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжер должен посетить все p городов по одному разу, вернувшись в тот, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Очевидно, что задача коммивояжера — это задача отыскания кратчайшего гамильтонова цикла в полном графе.

Можно предложить следующую простую схему решения задачи коммивояжера: сгенерировать все $p!$ возможных перестановок вершин полного графа, подсчитать для каждой перестановки длину маршрута и выбрать из них кратчайший. Очевидно, такое вычисление потребует $O(p!)$ шагов.

Как известно, $p!$ с ростом p растет быстрее, чем любой полином от p , и даже быстрее, чем 2^p . Таким образом, решение задачи коммивояжера

описанным методом *полного перебора* оказывается практически неосуществимым даже для сравнительно небольших p . Более того, известно, что задача коммивояжера принадлежит к числу так называемых *NP-полных* задач, подробное обсуждение которых выходит за рамки этого пособия. Вкратце суть проблемы *NP-полноты* сводится к следующему. В различных областях дискретной математики, комбинаторики, логики и т. п. известно множество задач, принадлежащих к числу наиболее фундаментальных, для которых, несмотря на все усилия, не удалось найти алгоритмов решения, имеющих полиномиальную трудоемкость. Более того, если бы удалось отыскать эффективный алгоритм решения хотя бы одной из этих задач, то из этого немедленно следовало бы существование эффективных алгоритмов для всех остальных задач данного класса. На этом основано общепринятое мнение, что таких алгоритмов не существует.

Полезно сопоставить задачи отыскания эйлеровых и гамильтоновых циклов, рассмотренные в этой главе. Внешне формулировки этих задач очень похожи, однако они оказываются принципиально различными с точки зрения практического применения. Уже давно Эйлером получено просто проверяемое необходимое и достаточное условие существования в графе эйлерова цикла. Что касается гамильтоновых графов, то для них не известно необходимых и достаточных условий. На основе необходимого и достаточного условия существования эйлерова цикла можно построить эффективные алгоритмы отыскания такого цикла. В то же время задача проверки существования гамильтонова цикла оказывается *NP-полной* (так же, как и задача коммивояжера). Далее, известно, что почти нет эйлеровых графов и эффективный алгоритм отыскания эйлеровых циклов редко оказывается применимым на практике. С другой стороны, можно показать, что почти все графы гамильтоновы, т.е.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|H(p)|}{|G(p)|} = 1,$$

где $H(p)$ — множество гамильтоновых графов с p вершинами, а $G(p)$ — множество всех графов с p вершинами. Таким образом, задача отыскания гамильтонова цикла или эквивалентная задача коммивояжера являются практически востребованными, но для них неизвестен (и, скорее всего, не существует) эффективный алгоритм решения.

Глава 4

Двудольные графы, теорема Кенига

Напомним, что двудольный граф G — это граф, множество вершин V которого можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных множеств (будем говорить, что ребра графа G соединяют множества V_1 и V_2).

Прежде чем провести характеристику двудольных графов, докажем следующую лемму.

Лемма. *Любой замкнутый маршрут нечетной длины содержит простой цикл нечетной длины.*

Доказательство. Индукция по длине маршрута. Так как в (обыкновенном) графе нет маршрутов длины 1, то наименьшая возможная длина такого замкнутого маршрута равна 3. Также нетрудно показать, что если замкнутый маршрут имеет длину 3, то он будет простым циклом длины 3.

Пусть для всех замкнутых маршрутов нечетной длины, меньшей либо равной $2k - 1$, утверждение верно и имеется замкнутый маршрут $v_0, v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1} = v_0$ длины $2k + 1$ ($k \geq 2$). Если в нем все вершины, кроме первой и последней, различны, то он будет простым циклом. В противном случае найдутся вершины $v_i = v_j, 0 \leq i < j \leq 2k$. Но тогда два маршрута $v_0, v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1} = v_0$ и $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j = v_i$ будут замкнуты, длина каждого из них $\geq 2k$, причем один из них будет иметь нечетную длину (так как сумма их длин равна длине исходного маршрута). Поэтому по индуктивному предположению один из них (а следовательно, и исходный маршрут) содержит простой цикл нечетной длины. ■

Следующая классическая теорема Кенига, характеризующая двудольные графы в терминах его структуры, кажется почти тривиальной, однако значение ее для теории графов и многих приложений трудно переоценить (недаром она впоследствии не один раз переоткрывалась).

Теорема Кенига (характеризация двудольных графов). *Граф G — двудольный тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

Доказательство. Если G — двудольный граф, то множество его вершин V можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что любое ребро этого графа соединяет некоторую вершину из множества V_1 с некоторой вершиной из V_2 . Поэтому каждый цикл $v_1v_2 \dots v_nv_1$ графа G содержит вершины из V_1 , скажем, с нечетными номерами и вершины из V_2 с четными, поэтому длина n этого цикла является четным числом.

Чтобы доказать обратное, предположим, не теряя общности, что G — связный граф (поскольку каждую компоненту графа G можно рассматривать отдельно). Возьмем произвольную вершину $v_1 \in V$ и обозначим через V_1 множество, состоящее из v_1 и всех вершин $u \in V$, таких, что существует простая $\{v_1 - u\}$ -цепь нечетной длины, а V_2 — множество вершин $u \in V$, таких, что существует простая $\{v_1 - u\}$ -цепь четной длины.

Из связности графа G сразу получаем, что $V = V_1 \cup V_2$. Если $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ и $u \in V_1 \cap V_2$, то существуют две $\{v_1 - u\}$ -цепи, одна четной длины, другая нечетной длины. Но тогда, объединяя эти цепи, получим замкнутый маршрут нечетной длины в графе G и, по лемме, простой цикл нечетной длины, что невозможно по условию теоремы. Далее, если некоторые две различные вершины $u_1, u_2 \in V_1$ (или $u_1, u_2 \in V_2$) смежны между собой, то существуют две цепи из v_1 в u_1 и из v_1 в u_2 нечетной (четной) длины, что опять, вместе с ребром $\{u_1, u_2\}$, приводит к замкнутому маршруту нечетной длины. ■

Следующий простой алгоритм позволяет выяснить, будет ли связный граф двудольным, и если будет, то построить одно из разбиений множества вершин на доли.

Алгоритм распознавания двудольности графа

1. Выбираем произвольную вершину v графа G , приписываем ей номер 0.

2. Каждой вершине без номера, смежной с вершиной номера 0, присываем номер 1.

3. Всем вершинам без номера, смежным с вершинами номера 1, присываем номер 0.

4. Продолжаем процесс присваивания номеров вершинам, описанный в пунктах 2 и 3, до тех пор, пока все вершины не будут занумерованы.

5. Строим два множества V_0 и V_1 , которые включают все вершины с номерами соответственно 0 и 1.

Если порожденные подграфы G_0 и G_1 , построенные на множествах V_0 и V_1 соответственно, являются вполне несвязными (т. е. не содержат ни одного ребра), то граф G двудольный, если нет (т. е. один из них содержит хотя бы одно ребро), то граф G не является двудольным.

Глава 5

Деревья

Деревья заслуживают отдельного и подробного рассмотрения по двум причинам.

1. Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для графов в общем случае. Применительно к деревьям многие доказательства и рассуждения оказываются намного проще. Выдвигая какие-то гипотезы при решении задач теории графов, целесообразно сначала их проверять на деревьях.

2. Деревья являются самым распространенным классом графов, применяемых в различных областях знания, в том числе и в программировании, причем в самых разных ситуациях.

Изучение деревьев целесообразно начать с самых общих определений и установления основных свойств.

Определения

Граф без циклов называется *ациклическим*, или *лесом*. Связный ациклический граф называется (*свободным*) *деревом*. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.

Замечание. Прилагательное «свободный» употребляется в том случае, когда нужно подчеркнуть отличие деревьев от других объектов, родственных деревьям: ориентированных деревьев, упорядоченных деревьев и т. д.

В связном графе G выполняется неравенство $q(G) \geq p(G) - 1$ (см. задачу 6). Граф G , в котором $q(G) = p(G) - 1$, называется *древовидным*.

В ациклическом графе G $z(G) = 0$. Пусть u, v — несмежные вершины графа G , $x = (u, v) \notin E$. Если граф $G + x$ имеет только один простой цикл, $z(G + x) = 1$, то граф G называется *субциклическим*.

Пример. На рисунке 5.1 показаны диаграммы всех различных (свободных) деревьев с 5 вершинами, а на рис. 5.2 — диаграммы всех различных (свободных) деревьев с 6 вершинами.

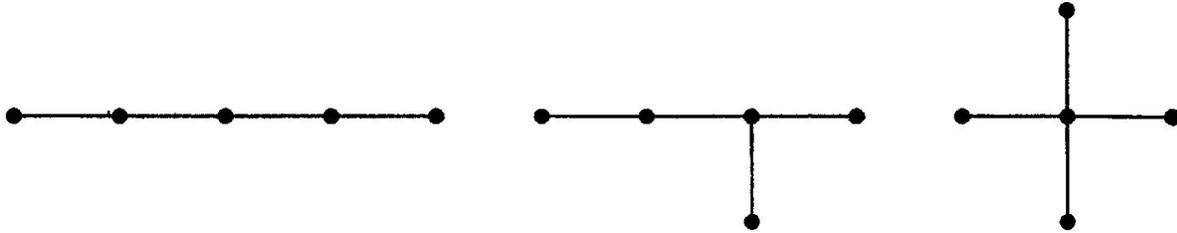


Рис. 5.1. Свободные деревья с 5 вершинами

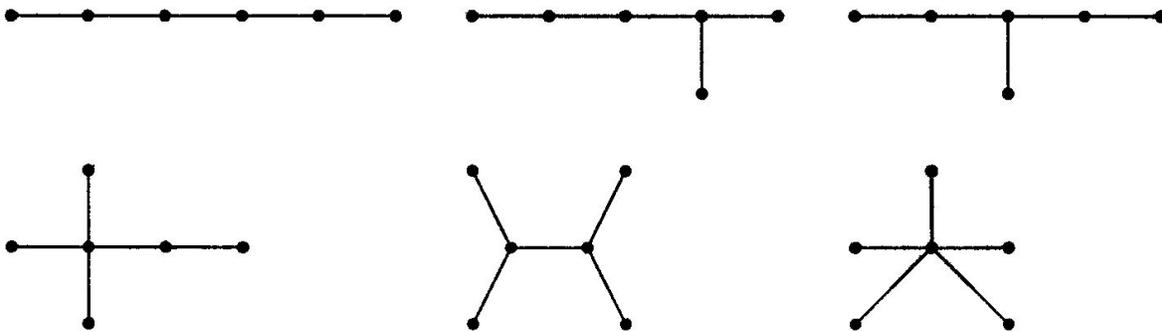


Рис. 5.2. Свободные деревья с 6 вершинами

5.1. Основные свойства деревьев

Следующая теорема устанавливает, что два из четырех свойств — связность, ациклическость, древовидность и субциклическость — характеризуют граф как дерево, что приводит к условиям (1) и (4)–(8) (в (7) и (8) — за некоторыми исключениями), а также эквивалентность этих условий условиям (2) и (3).

Теорема (характеризация деревьев). Пусть $G(V, E)$ — граф с p вершинами, q ребрами, k компонентами связности и z простыми циклами. Пусть далее x — ребро, соединяющее любую пару несмежных вершин в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) G — дерево, т. е. связный граф без циклов (связный и ациклический), $k(G) = 1$ & $z(G) = 0$;

2) любые две вершины соединены в G единственной простой цепью, $\forall u, v \exists! \langle u, v \rangle$;

3) G — связный граф, и любое ребро есть мост, $k(G) = 1$ & $\forall e \in E k(G - e) > 1$;

4) G — связный и древовидный, $k(G) = 1$ & $q(G) = p(G) - 1$;

5) G — ациклический и древовидный, $z(G) = 0$ & $q(G) = p(G) - 1$;

6) G — ациклический и субциклический, $z(G) = 0$ & $z(G + x) = 1$;

7) G — связный, субциклический и неполный, $k(G) = 1$ & $G \neq K_p$ & $p \geq 3$ & $z(G + x) = 1$;

8) G — древовидный и субциклический (за двумя исключениями), $q(G) = p(G) - 1$ & $G \neq K_1 \cup K_3$ & $G \neq K_2 \cup K_3$ & $z(G + x) = 1$.

Доказательство

1 \Rightarrow 2: От противного. Пусть существуют две цепи $\langle u, v \rangle$ (рис. 5.3 слева). Тогда w_1, w_2 — простой цикл.

2 \Rightarrow 3: Имеем $\forall u, v \exists! \langle u, v \rangle$, следовательно, $k(G) = 1$. Далее от противного. Пусть ребро x — не мост. Тогда в $G - x$ концы этого ребра связаны цепью. Само ребро x — вторая цепь.

3 \Rightarrow 4: Индукция по p . База $p = 1 \Rightarrow q = 0$. Пусть $q(G) = p(G) - 1$ для всех графов G с числом вершин меньше p . Тогда удалим из G ребро x (которое является мостом). Получим две компоненты G' и G'' , удовлетворяющие индуктивному предположению. Имеем

$$q' = p' - 1, q'' = p'' - 1, q = q' + q'' + 1 = p' - 1 + p'' - 1 + 1 = p - 1.$$

4 \Rightarrow 5: От противного. Пусть есть цикл. Тогда, удаляя ребро, лежащее на цикле, получим связный граф (задача 7), имеющий $\geq p - 1$ ребро (опять см. задачу 6). Следовательно, $q \geq p$, что противоречит условию $q = p - 1$.

5 \Rightarrow 1: Граф без циклов, следовательно, его компоненты — деревья.

Пусть их k . Имеем

$$q = \sum_{i=1}^k q_i = \sum_{i=1}^k (p_i - 1) = \sum_{i=1}^k p_i - k = p - k.$$

Но $q = p - 1$, следовательно, $k = 1$.

5 \Rightarrow 6: По ранее доказанному 5 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2. Имеем $\forall u, v \exists! \langle u, v \rangle$. Соединив две несмежные вершины, получим единственный простой цикл.

6 \Rightarrow 7: При $p \geq 3$ граф K_p содержит цикл, следовательно, $G \neq K_p$. Далее от противного. Пусть G несвязен, тогда при соединении ребром двух компонент связности цикл не возникнет.

7 \Rightarrow 2: Имеем $k(G) = 1$, следовательно, $\forall u, v \exists \langle u, v \rangle$. Пусть цепь не единственная. Тогда существует цикл Z , причем $Z = K_3 = C_3$. Действительно, пусть $Z > C_3$, тогда, соединив две несмежные вершины этого цикла, получим два цикла. Но G связан и $\neq K_3$, следовательно, существует другая вершина w , смежная с $Z = K_3$ (см. рис. 5.3 справа). Если w смежна с более чем одной вершиной Z , то имеем больше одного цикла. Если w смежна только с одной вершиной Z , то, соединив ее с другой вершиной, получим два цикла.

7 \Rightarrow 8: Имеем $k(G) = 1$, следовательно, $G \neq K_2 \cup K_3$, $G \neq K_1 \cup K_3$. Имеем по доказанному: 7 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4, т.е. $q = p - 1$.

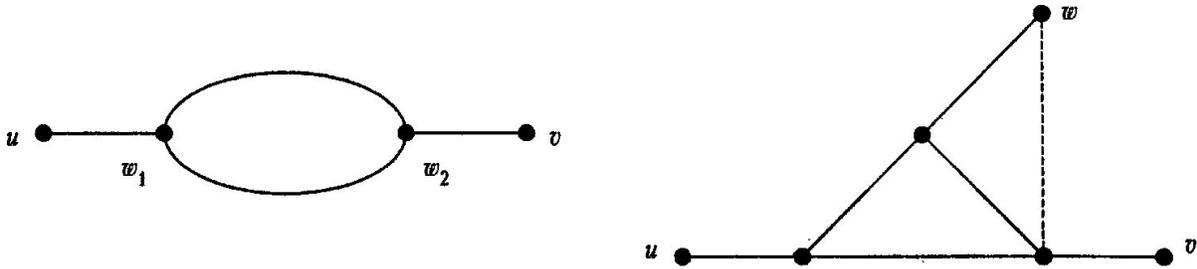


Рис. 5.3. Иллюстрации к доказательству теоремы о свойствах деревьев

8 \Rightarrow 5: От противного. Пусть в G есть цикл $Z = C_n$. Если $n > 3$, то если внутри Z уже есть смежные вершины, имеем два цикла. Если в Z нет смежных вершин, то, соединив несмежные вершины в Z , получим два цикла. Следовательно, $Z = K_3$. Этот цикл Z является компонентой связности G . Действительно, пусть это не так. Тогда существует вершина w , смежная с Z . Если w смежна более чем с одной вершиной Z , то имеем

больше одного цикла. Если w смежна только с одной вершиной Z , то, соединив ее с другой вершиной, получим два цикла. Рассмотрим $G' = G - Z$. Имеем $p = p' + 3$, $q = q' + 3$. Но $q = p - 1$, следовательно, $q' = p' - 1$. Отсюда $z(G') = 0$, так как один цикл уже есть. Следовательно, компоненты G' — деревья. Пусть их k . Имеем

$$q' = \sum_{i=1}^k q_i = \sum_{i=1}^k (p_i - 1) = \sum_{i=1}^k p_i - k = p' - k,$$

но $q' = p' - 1$, следовательно, $k = 1$, т. е. дерево одно. Если в этом дереве соединить несмежные вершины, то получим второй цикл. Два исключения: деревья, которые не имеют несмежных вершин, — это K_1 и K_2 .

Общая схема доказательства представлена на рис. 5.4. Граф доказательства сильно связан, следовательно, теорема доказана. ■

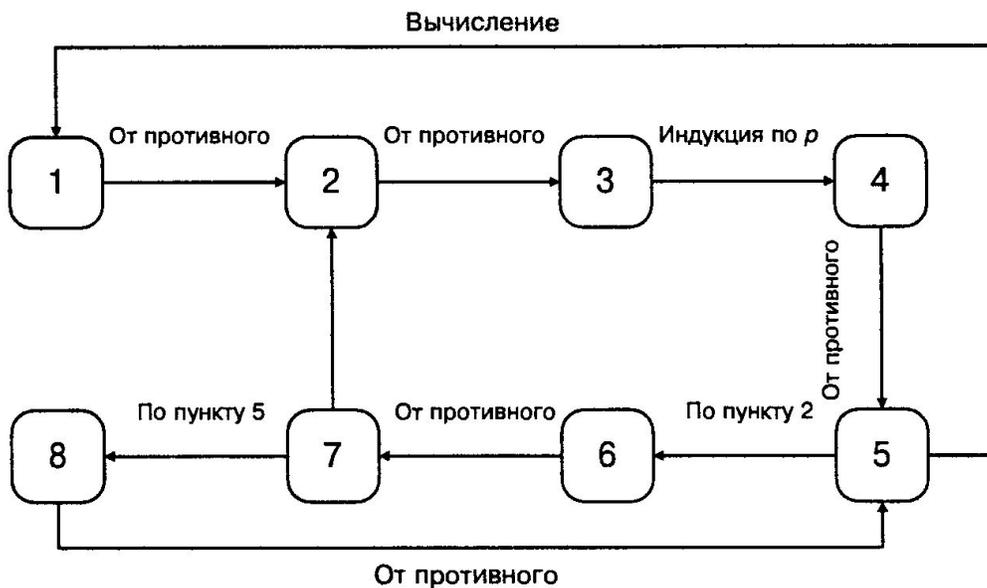


Рис. 5.4. Схема доказательства теоремы о свойствах деревьев

Следствие. В любом нетривиальном дереве имеются по крайней мере две висячие вершины.

Доказательство. Рассмотрим дерево $G(V, E)$. Дерево — связный граф, следовательно,

$$\forall v_i \in V \ d(v_i) \geq 1.$$

Далее от противного. Пусть $\forall v_i \in 1, \dots, p-1 \deg(v) > 1$. Тогда

$$2q = \sum_{i=1}^p d(v_i) > 2(p-1) + 1 = 2p - 1.$$

Но $q = p - 1$, т.е. $2q = 2p - 2$. Имеем противоречие: $2p - 2 > 2p - 1$. ■

5.2. Центры дерева

Эксцентриситет $e(v)$ вершины v в связном графе G определяется как $\max d(u, v)$ по всем вершинам u в G . Радиусом $r(G)$ называется наименьший из эксцентриситетов вершин. Заметим, что наибольший из эксцентриситетов равен диаметру графа. Вершина v называется *центральной вершиной* графа G , если $e(v) = r(G)$; *центр* графа G — это множество всех центральных вершин.

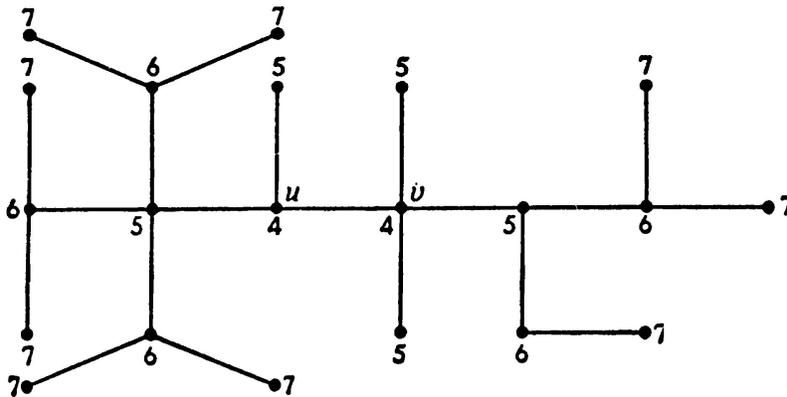


Рис. 5.5. Эксцентриситеты вершин дерева

На рисунке 5.5 представлено дерево, у которого показан эксцентриситет каждой вершины. Это дерево имеет диаметр 7, радиус 4, а его центр состоит из двух смежных вершин u и v с эксцентриситетом 4.

Теорема. Каждое дерево имеет центр, состоящий или из одной вершины, или из двух смежных вершин.

Доказательство. Утверждение очевидно для деревьев K_1 и K_2 . Покажем, что у любого другого дерева T те же центральные вершины, что и у дерева T' , полученного из T удалением всех его висячих вершин. Ясно, что расстояние от данной вершины u дерева T до любой другой вершины v может достигать наибольшего значения только тогда, когда v — висячая вершина.

Таким образом, эксцентриситет каждой вершины дерева T' точно на единицу меньше эксцентриситета этой же вершины в дереве T . Отсюда вытекает, что вершины дерева T , имеющие наименьший эксцентриситет в T , совпадают с вершинами, имеющими наименьший эксцентриситет в T' , т.е. центры деревьев T и T' совпадают.

Если процесс удаления висячих вершин продолжить, то мы получим последовательность деревьев с тем же центром, что и у T . В силу конечности T мы обязательно придем или к K_1 , или к K_2 . В любом случае все вершины дерева, полученного таким способом, образуют центр дерева T , который, таким образом, состоит или из единственной вершины, или из двух смежных вершин. ■

5.3. Кодирование деревьев

Задавать деревья можно по-разному. Одним из экономных способов записи помеченных деревьев является *код Прюфера*.

Пусть T — некоторое дерево, вершины которого занумерованы числами $1, 2, \dots, n$. Тогда код Прюфера для T строится по следующим правилам.

Удаляем висячую вершину с наименьшим номером и записываем номер ее соседа. В оставшемся дереве снова удаляем висячую вершину с наименьшим номером и выписываем номер ее соседа рядом с уже записанным. Повторяем эту процедуру $n - 1$ раз. Полученная последовательность из $n - 1$ чисел называется кодом Прюфера для T .

Теорема. *Для любой последовательности (a_1, \dots, a_{n-1}) натуральных чисел, такой, что*

$$1 \leq a_i \leq n \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2), \quad a_{n-1} = n,$$

существует единственное дерево на множестве вершин $\{1, 2, \dots, n\}$, код Прюфера которого совпадает с данной последовательностью.

Доказательство. Заметим сначала, что в силу следствия из теоремы характеристики деревьев последним числом в коде Прюфера должно быть n .

Единственность. Пусть T — дерево и (a_1, \dots, a_{n-1}) — его код Прюфера. Обозначим через b_i , $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$ номер вершины, которую мы удаляли на шаге i . Очевидно, $b_i \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i\}$. Кроме того,

$b_i \neq \{a_{i+1}, \dots, a_n\}$, поскольку при $j > i$ вершина a_j принадлежит дереву $T \setminus \{b_1, \dots, b_i\}$. И наоборот, если $k \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}$, то k является висячей вершиной в $T \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}\}$ (иначе на каком-нибудь шаге $q > i$ она оказалась бы соседней с висячей вершиной b_q и совпала бы с a_q). Значит,

$$b_i = \min\{k \mid k \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}\}. \quad (*)$$

Таким образом, последовательность (a_1, \dots, a_{n-1}) однозначно (по правилу $(*)$) определяет последовательность $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$. Поскольку (b_i, a_i) — ребро в T для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, последовательность (a_1, \dots, a_{n-1}) однозначно определяет T .

Существование. Пусть последовательность (a_1, \dots, a_{n-1}) удовлетворяет условиям теоремы. По правилу $(*)$ построим соответствующую ей последовательность $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ и проведем ребра (b_i, a_i) для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Получим некоторый граф G . Обозначим

$$G_i = G \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}\}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Покажем, что

- а) G — дерево,
- б) код Прюфера для G есть (a_1, \dots, a_{n-1}) .

Для доказательства (а) достаточно убедиться, что b_i — висячая вершина в G_i для любого i , а для (б) — что номер любой висячей вершины в G_i не меньше чем b_i .

Поскольку согласно $(*)$ $a_i \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}\}$, имеем $a_i \in V(G_i)$. Следовательно, b_i смежна с некоторой вершиной из G_i . Предположим, что b_i смежна в G_i с какой-то вершиной $x \neq a_i$. Тогда ребро, соединяющее b_i с этой вершиной, должно иметь вид (a_j, b_j) , где $j > i$, так как $b_j \in V(G_i)$. Поскольку все b_k различны, имеем $b_j \neq b_i$. Значит, $b_i = a_j$ и $j > i$, что противоречит $(*)$. Следовательно, наше предположение неверно, и вершина b_i смежна в G_i лишь с a_i . Итак, все G_i являются деревьями.

Предположим теперь, что в G_i есть висячая вершина k и $k < b_i$. Поскольку при построении последовательности $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ по правилам $(*)$ мы не положили $b_i = k$, то это значит, что или $k \in \{b_1, \dots, b_{i-1}\}$, или $k \in \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}$. Первое невозможно, так как $\{b_1, \dots, b_{i-1}\} \cap V(G_i) = \emptyset$. Значит, $k = a_j$ для некоторого $j > i$. Как отмечалось, b_j — висячая вершина в G_j , смежная с a_j . Но $a_j = k$ — висячая вершина в G_i ,

а следовательно, и в G_j . Таким образом, G_j имеет только две вершины: a_j и b_j , т.е. $j = n - 1$ и $a_j = n$. Но $n \geq b_i > k$. ■

В качестве следствия получаем следующую теорему.

Теорема Кэли. *Число n -вершинных деревьев с помеченными вершинами равно n^{n-2} .*

Глава 6

Раскраска графов

6.1. Хроматическое число

Задача раскрашивания графов, которая на первый взгляд кажется просто праздной головоломкой, имеет неожиданно широкое применение в программировании, особенно при решении фундаментальных теоретических проблем (см., например, [7]).

Раскраской графа называется такое приписывание цветов (натуральных чисел) его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинаковый цвет. Наименьшее возможное число цветов в раскраске называется *хроматическим числом* и обозначается $\chi(G)$. Очевидно, что существует m -раскраска графа G для любого m в диапазоне $\chi(G) \leq m \leq p$. Множество вершин, покрашенных в один цвет, называется *одноцветным классом*. Одноцветные классы образуют независимые множества вершин, т.е. никакие две вершины в одноцветном классе не смежны.

Граф G называется n -раскрашиваемым, если $\chi(G) \leq n$, и n -хроматическим, если $\chi(G) = n$.

Способ явного выражения хроматического числа через другие инварианты графа неизвестен. Известны только некоторые оценки, часть из которых приведена в этой главе.

Пример. Легко найти хроматические числа некоторых известных графов: $\chi(\overline{K}_p) = 1$, $\chi(K_p) = p$, $\chi(K_{m,n}) = 2$, $\chi(C_{2n}) = 2$, $\chi(C_{2n+1}) = 3$, $\chi(T) = 2$, где T — свободное дерево.

Очевидно, что граф является 1-хроматическим тогда и только тогда, когда он вполне несвязен.

Нетрудно заметить, что граф является 2-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда он двудольный. Поэтому теорему Кенига о двудольных графах можно переформулировать следующим образом.

Теорема. *Граф 2-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины.*

Простой алгоритм выяснения двудольности графа, приведенный после теоремы Кенига, показывает, что 2-раскрашиваемость графа с p вершинами можно установить за полиномиальное от p число шагов.

Совсем по-другому обстоит дело для n -раскрашиваемых графов при $n \geq 3$.

Похоже, что проблема характеристики n -раскрашиваемых графов для $n \geq 3$ все еще не решена. Не найдены также эффективные методы определения хроматического числа произвольного графа.

Более того, при любом фиксированном $n \geq 3$ задача выяснения, будет ли граф n -раскрашиваемым, является NP -полной.

Однако известно несколько оценок для $\chi(G)$, в которых используются другие инварианты. Одна очевидная нижняя оценка — это число вершин в наибольшем полном подграфе графа G . Мы рассмотрим сейчас верхние оценки.

Теорема. *Для любого графа G*

$$\chi(G) \leq 1 + \max \delta(G'),$$

где максимум берется по всем порожденным подграфам G' графа G .

Доказательство Утверждение очевидно для вполне несвязных графов. Пусть G — произвольный n -хроматический граф, $n \geq 2$, а H — любой наименьший порожденный подграф, для которого $\chi(H) = n$. Таким образом, $\chi(H - v) = n - 1$ для всех вершин v графа H . Следовательно, $\deg(v) \geq n - 1$, так что $\delta(H) \geq n - 1$, и потому

$$n - 1 \leq \delta(H) \leq \max \delta(H') \leq \max \delta(G'),$$

где первый максимум берется по всем порожденным подграфам H' графа H , а второй — по всем порожденным подграфам G' графа G . Отсюда вытекает, что

$$\chi(G) = n \leq 1 + \max \delta(G').$$

■

Следствие. Для любого графа G хроматическое число не больше чем на 1 превышает максимальную степень:

$$\chi \leq 1 + \Delta.$$

Приведем без доказательства следующее утверждение, показывающее, что часто эту оценку можно улучшить.

Теорема. Если $\Delta(G) = n$, то граф G всегда n -раскрашиваем, за исключением следующих двух случаев:

- 1) $n = 2$ и G имеет компоненту, являющуюся нечетным циклом;
- 2) $n > 2$ и K_{n+1} — компонента графа G .

Следующие оценки содержат вершинное число независимости $\beta_0(G)$ (или неплотности, в другой терминологии). Напомним, что $\beta_0(G)$ равно числу вершин наибольшего порожденного подграфа графа G , не имеющего ребер.

Теорема. Для любого графа G

$$p/\beta_0 \leq \chi \leq p - \beta_0 + 1.$$

Доказательство. Если $\chi(G) = n$, то множество V можно разбить на n одноцветных классов V_1, V_2, \dots, V_n , каждый из которых, как отмечалось выше, является независимым множеством вершин. Если $|V_i| = p_i$, то $p_i \leq \beta_0$ для всех i , так что $p = \sum p_i \leq n\beta_0$ и $p/\beta_0 \leq n$.

Пусть $S \subset V$ — наибольшее независимое множество, $|S| = \beta_0(G)$. Тогда $\chi(G-S) \leq |V-S| = p - \beta_0(G)$. Из n -раскраски $G-S$ можно получить $(n+1)$ -раскраску G , так как все вершины из S можно покрасить в один новый цвет. Следовательно,

$$\chi(G) \leq \chi(G-S) + 1 \leq p - \beta_0 + 1.$$

■

В следующей теореме имеются оценки суммы и произведения хроматических чисел графа и его дополнения.

Теорема. Пусть $\chi = \chi(G)$, $\bar{\chi} = \bar{\chi}(G)$. Тогда

$$2\sqrt{p} \leq \chi + \bar{\chi} \leq p + 1,$$

$$p \leq \chi \bar{\chi} \leq \left(\frac{p+1}{2} \right)^2.$$

Доказательство.

1. Пусть $\chi(G) = n$, V_1, \dots, V_n — одноцветные классы, $p_i = |V_i|$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n p_i = p,$$

следовательно,

$$\max_{i=1}^n p_i \geq p/n.$$

Но V_i — независимые множества в G , следовательно, V_i — клики в \bar{G} .
Значит,

$$\bar{\chi} \geq \max_{i=1}^n p_i \geq p/n.$$

Имеем $\chi \bar{\chi} \geq n \cdot p/n = p$.

2. Известно, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Следовательно, $\chi + \bar{\chi} \geq 2\sqrt{\chi \bar{\chi}} \geq 2\sqrt{p}$.

3. Докажем индукцией по p , что $\chi + \bar{\chi} \leq p + 1$. База: $p = 1 \Rightarrow \chi = 1 \ \& \ \bar{\chi} = 1$. Пусть $\chi + \bar{\chi} \leq p + 1$ для всех графов с $p - 1$ вершинами. Рассмотрим граф G с p вершинами и вершину $v \in V$. Тогда, очевидно,

$$\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1 \ \& \ \chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - v) + 1.$$

Если $\chi(G) < \chi(G - v) + 1 \vee \chi(\bar{G}) < \chi(\bar{G} - v) + 1$, то

$$\chi + \bar{\chi} = \chi(G) + \chi(\bar{G}) < \chi(G - v) + 1 + \chi(\bar{G} - v) + 1 \leq p + 2.$$

Следовательно, $\chi + \bar{\chi} \leq p + 1$. Пусть теперь

$$\chi(G) = \chi(G - v) + 1 \ \& \ \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{G} - v) + 1.$$

Положим $d = \deg(v)$ в графе G , тогда $\bar{d} = p - d - 1$ — степень v в графе \bar{G} . Имеем $d \geq \chi(G - v)$. Действительно, $\chi(G) = \chi(G - v) + 1$, и если бы $d < \chi(G - v)$, то вершину v можно было бы раскрасить в любой из свободных $\chi(G - v) - d$ цветов и получить $\chi(G - v)$ -раскраску графа G . Аналогично, $\bar{d} = p - d - 1 \geq \chi(\bar{G} - v)$. Таким образом,

$$\chi + \bar{\chi} = \chi(G) + \chi(\bar{G}) =$$

$$= \chi(G - v) + 1 + \chi(\bar{G} - v) + 1 \geq d + 1 + p - d - 1 + 1 = p + 1.$$

4. Имеем $2\sqrt{\chi\bar{\chi}} \leq \chi + \bar{\chi} \leq p + 1$. Следовательно, $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \geq \chi\bar{\chi}$. ■

Глава 7

Планарность

Как в теории, так и в приложениях особо важную роль играют те топологические свойства графа, которые связаны с возможностью или невозможностью поместить его в плоскость. Известно, что евклидова плоскость гомеоморфна сфере, из которой удалена одна точка; соответствующее отображение можно осуществить, например, с помощью стереографического проектирования (рис. 7.1). Этим же отображением топологический граф на сфере переводится в изоморфный топологический граф на плоскости и наоборот. Граф, допускающий такие топологические представления, называется *планарным*, а его конкретное представление в плоскости — *плоским графом*.

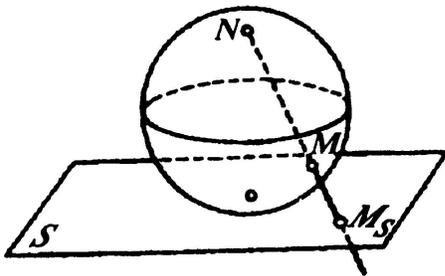


Рис. 7.1. Стереографическая проекция

множественное объединение краев всех граней равно G_S , поэтому каждое ребро и каждая вершина принадлежат краю хотя бы одной грани, и ясно также, что никакое ребро (в отличие от вершины) не может принадлежать краям более чем двух граней.

Ровно одна из граней плоского графа G_S является *внешней* (бесконеч-

Если G_S — топологическое представление графа G в плоскости S , то компоненты связности (связность здесь понимается в топологическом смысле, т.е. возможность соединить любые две точки непрерывной кривой) множества $S \setminus G_S$ называются *гранями* плоского графа G_S , а множество граничных точек грани — ее *краем*; теоретико-

ной), причем всегда можно так изменить его расположение в плоскости S (т.е. построить изоморфный ему граф G'_S), чтобы наперед заданная грань стала внешней: для этого достаточно сначала отобразить стереографически G_S на сферу, затем повернуть ее так, чтобы полюс N попал в образ облюбованной грани, и, наконец, спроектировать граф обратно на плоскость S .

Пример. Например, кубический граф, показанный на рис. 7.2, а, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рис. 7.2, б.

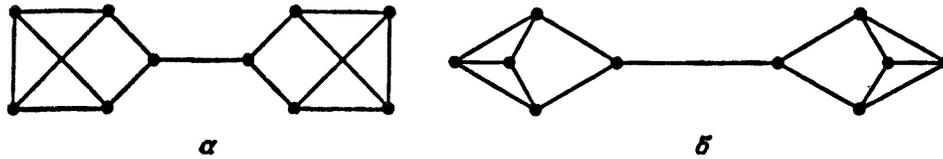


Рис. 7.2. Планарный граф и его укладка

Если границей грани плоского графа является простой цикл, то иногда под гранью будем понимать этот цикл. Плоский граф, представленный на рис. 7.3, имеет две внутренние грани f_1 , f_2 и одну внешнюю f_3 . Из этих граней только f_2 ограничена простым циклом.

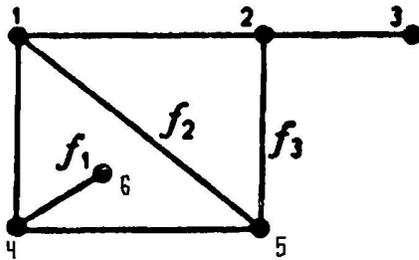


Рис. 7.3. Плоский граф

Изучение планарных графов было начато Эйлером в его исследованиях выпуклых многогранников. С каждым выпуклым многогранником связан граф, состоящий из его вершин и ребер. Этот граф называется *1-скелетом*. Например, граф B^3 есть 1-скелет 3-мерного единичного куба. Формула Эйлера для выпуклых много-

гранников – один из классических результатов в математике.

7.1. Формула Эйлера

Теорема (формула Эйлера для выпуклых многогранников.) *Для любого выпуклого многогранника, имеющего V вершин, E ребер и F граней,*

$$V - E + F = 2.$$

Аналогом этой теоремы для плоских графов является следующая теорема, которую также будем называть формулой Эйлера.

Теорема (формула Эйлера). Если G — связный плоский граф с $p = p(G)$ вершинами, $q = q(G)$ ребрами и $r = r(G)$ гранями, то

$$p - q + r = 2.$$

Доказательство. Индукция по числу ребер графа G .

База индукции: если $q = 0$, то $p = 1, r = 1$ и $p - q + r = 2$.

Пусть теорема верна для всех плоских связных графов с числом ребер $< q$. Берем граф G с $q = q(G)$ ребрами и любое ребро $e = \{u, v\}$ графа G . Тогда граф $G' = G - e$ также будет плоским (но уже не обязательно связным).

Рассмотрим два случая: G' — несвязный и G' — связный. Пусть G' — несвязный граф (рис. 7.4). Тогда, так как G' получен из связного графа удалением ребра, то число компонент связности G' равно 2, то есть $G' = G_1 \cup G_2$. При этом можно считать, что u — вершина графа G_1 , v — вершина графа G_2 и, кроме того, лежат на границе внешних граней G_1 и G_2 .

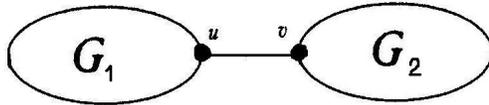


Рис. 7.4. G' несвязный

Пусть $p_i = p(G_i), q_i = q(G_i), r_i = r(G_i), i = 1, 2$. Тогда очевидно, что $p = p_1 + p_2, q = q_1 + q_2 + 1$ и $r = r_1 + r_2 - 1$ (так как общая внешняя грань для G_1 и G_2 будет посчитана два раза).

По индуктивному предположению $p_i - q_i + r_i = 2, i = 1, 2$. Тогда $p - q + r = p_1 + p_2 - (q_1 + q_2 + 1) + r_1 + r_2 - 1 = p_1 - q_1 + r_1 + p_2 - q_2 + r_2 - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$.

Пусть теперь G' — связный граф и $p' = p(G'), q' = q(G')$. Очевидно, что $p = p', q = q' + 1$. Кроме того, ясно, что вершины u и v лежат на границе одной и той же грани G' и при добавлении к G' ребра e эта грань разобьется на две. Поэтому $r = r' + 1$. По индуктивному предположению $p' - q' + r' = 2$ и, следовательно, $p - q + r = p' - (q' + 1) + r' + 1 = p' - q' + r' = 2$. ■

Край(граница) каждой грани Γ плоского графа представляет собой некоторый замкнутый маршрут. *Степенью грани* Γ (по аналогии со степенью вершины) называется длина ограничивающего ее маршрута, обозначается $\deg(\Gamma)$. Например, у плоского графа на рис. 7.3 краем грани f_1 будет замкнутый маршрут 1, 5, 4, 6, 4, 1 и ее степень $\deg(f_1) = 5$. Аналогом теоремы о сумме степеней вершин графа является следующая теорема.

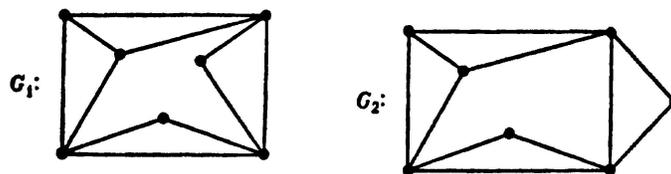


Рис. 7.5. Две укладки двусвязного графа на плоскости

Теорема. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ — все грани плоского связного графа G . Тогда, если $q = q(G)$ — число ребер G , то

$$\sum_{i=1}^r \deg(\Gamma_i) = 2q.$$

Доказательство. Заметим, что если ребро является мостом, то оно принадлежит краю одной грани, и при подсчете степени этой грани будет посчитано два раза. Если же ребро не является мостом, то оно принадлежит краям двух различных граней и опять будет посчитано в сумме степеней граней два раза. ■

Для связного плоского графа G обозначим $r_k(G)$ количество граней G степени k . Ясно, что всегда $r_1(G) = r_2(G) = 0$. Также достаточно очевидно, что всегда $\deg(\Gamma) \leq 2q$ (достигается для дерева, у которого всегда одна грань Γ и $\deg(\Gamma) = 2q$). Поэтому $r_k(G) = 0$ для всех $k > 2q$. Отметим, что числа $r_k(G)$, вообще говоря, не являются инвариантами графа. Например, для графа G_1 на рис. 7.5 имеем $r_3(G_1) = 4$, $r_4(G_1) = 1$, $r_5(G_1) = 0$, $r_6(G_1) = 1$ и $r_k(G_1) = 0$ при $k \geq 7$. А для графа G_2 , изоморфного G_1 , $r_3(G_2) = 4$, $r_4(G_2) = 0$, $r_5(G_2) = 2$, $r_6(G_2) = 0$ и $r_k(G_2) = 0$, $k \geq 7$.

Запишем в этих обозначениях равенство предыдущей теоремы.

Теорема. Пусть для связного плоского графа G $r_k = r_k(G)$, $k = 3, \dots, 2q$ — количество граней степени k и $q = q(G)$ — число ребер.

Тогда

$$\sum_{k=3}^{2q} kr_k = 2q.$$

Доказательство. Запишем сумму степеней граней, распределив грани по возрастанию их степеней:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \deg(\Gamma_i) &= \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{r_3} + \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{r_4} + \dots + \\ &+ \underbrace{k + k + \dots + k}_{r_k} + \dots = \sum_{k=3}^{2q} kr_k. \end{aligned}$$

■

Из этого соотношения и формулы Эйлера получается много различных утверждений о плоских и планарных графах.

Следствие 1. Если G — планарный связный граф с p вершинами и q ребрами, то $q \leq 3p - 6$.

Доказательство. Так как $2q = \sum_{k=3}^{2q} kr_k = 3r_3 + 4r_4 + \dots \geq 3(r_3 + r_4 + \dots)$ и очевидно, что $r_3 + r_4 + \dots = r$, то $2q \geq 3r$, или $r \leq \frac{2}{3}q$. Тогда из формулы Эйлера получаем $r = 2 - p + q \leq \frac{2}{3}q$, т. е. $\frac{1}{3}q \leq p - 2$ и $q \leq 3p - 6$.

■

Следствие 2. Если G — планарный связный граф с p вершинами и q ребрами, у которого нет граней степени 3 (в частности, если у графа G нет циклов длины 3), то $q \leq 2p - 4$.

Доказательство. Так как по условию $r_3 = 0$, то $2q = \sum_{k=3}^{2q} kr_k = 4r_4 + 5r_5 + \dots \geq 4(r_4 + r_5 + \dots) = 4r$, т. е. $r \leq \frac{1}{2}q$. Тогда опять по формуле Эйлера получаем $r = 2 - p + q \leq \frac{1}{2}q$, т. е. $\frac{1}{2}q \leq p - 2$ и $q \leq 2p - 4$.

■

Следствие 3. Графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарные.

Доказательство. Для графа K_5 имеем $p = p(K_5) = 5$, $q = q(K_5) = 10$. Если бы K_5 был планарным, то по следствию 1 было бы $q = 10 \leq 3p - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$, что невозможно.

Для графа $K_{3,3}$ имеем $p = p(K_{3,3}) = 6, q = q(K_{3,3}) = 9$. Так как граф $K_{3,3}$ двудольный, то в нем нет циклов нечетной длины и, в частности, циклов длины 3. Поэтому, если бы $K_{3,3}$ был планарным, то для его плоского представления было бы $r_3 = 0$ и, по следствию 2, было бы $q = 9 \leq 2p - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$, что невозможно. ■

Из следствия 3 получаем, что задача о трех домах и трех колодцах не имеет решения.

Следствие 4. *Если G — связный планарный граф, то в G имеется вершина степени ≤ 5 .*

Доказательство. Если все вершины имеют степень ≥ 6 , то из равенства $2q = \sum_{v \in V} \deg(v)$ получаем $2q \geq 6p$, или $q \geq 3p$. Но по следствию 1 $q \leq 3p - 6$, противоречие. ■

Более детальное исследование неравенства следствия 1 показывает, что таких вершин по крайней мере три (естественно, если $p \geq 3$).

Введем следующие инварианты графа G . Обозначим $p_k(G)$ число вершин графа G степени $k, k = 0, 1, \dots, p - 1$.

Следствие 5. *Если G — связный планарный граф и $p_k = p_k(G), k = 1, \dots, p - 1$, то выполняется неравенство*

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12 + \sum_{k=7}^{p-1} (k - 6)p_k.$$

Доказательство. Преобразуем сумму степеней вершин так же, как ранее преобразовывали сумму степеней граней. А именно, очевидно, выполняется равенство

$$2q = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{k=1}^{p-1} kp_k.$$

Тогда, учитывая, что $p = \sum_{k=1}^{p-1} p_k$ и $q \leq 3p - 6$, получаем $6p - 12 \geq 2q$ или $6p \geq 12 + 2q$

$$6 \left(\sum_{k=1}^{p-1} p_k \right) \geq 12 + \sum_{k=1}^{p-1} kp_k.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем нужное неравенство. ■

Следствие 6. Если G — связный планарный граф и $p(G) \geq 3$, то в G имеются по крайней мере три вершины степени ≤ 5 .

Доказательство. Из следствия 5 получаем неравенство

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12.$$

Но тогда $5(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \geq 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12$ и, следовательно, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \geq 2,4$. А так как слева стоит целое число, то

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \geq 3,$$

что и означает, что вершин степени ≤ 5 по крайней мере 3. ■

Пусть $x = \{u, v\}$ — ребро графа G , а w не является вершиной графа G . Напомним операцию подразделения ребра. Говорят, что ребро x *подразбито*, если оно заменено на ребра $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$.

Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма. 1. Если H — подграф планарного графа G , то H — планарный. 2. Если два графа гомеоморфны, то либо они оба планарны, либо оба непланарны.

Следующая (исторически первая) теорема дает комбинаторную характеристику планарных графов.

Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф G планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Доказательство. Необходимость следует из непланарности графов $K_5, K_{3,3}$ и предыдущей леммы. Доказательство достаточности выходит за рамки данного курса. ■

Эта теорема была доказана Л. С. Понтрягиным в 1927 г. и доложена на семинаре МГУ, но не опубликована. К. Куратовский передоказал ее в 1930 г.

7.2. Другие характеристики планарности

Еще одна, также комбинаторная, характеристика планарных графов получается из следующих соображений.

Элементарное стягивание в графе G получается отождествлением двух смежных вершин u и v , т.е. удалением u и v и добавлением новой вершины w , смежной с теми вершинами графа, которые были смежны или с u , или с v . Граф G называется *стягиваемым* к графу H , если H можно получить из G с помощью некоторой последовательности элементарных стягиваний. Например, как показано на рис. 7.6, *а* и *б*, граф Петерсена стягивается к K_5 в результате стягивания в новую вершину w_i ребер $u_i v_i$, соединяющих пятиугольник с пентаграммой.

Поскольку каждая вершина графа Петерсена имеет степень 3, у него нет подграфов, гомеоморфных K_5 ; на рис. 7.6, *в* показан один из его подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$.

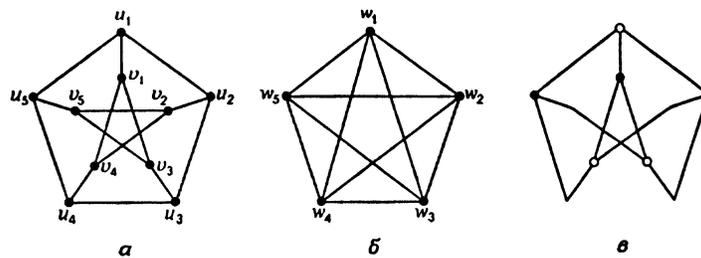


Рис. 7.6. Непланарность графа Петерсена

Следующее условие планарности было найдено независимо Вагнером и Харари и Таттом.

Теорема. *Граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, стягиваемых к K_5 и $K_{3,3}$.*

Рассмотрим множество простых циклов Z_1, Z_2, \dots, Z_k некоторого графа G , где каждый цикл будем понимать как множество его ребер. Они называются *зависимыми*, если существует набор индексов $i \leq i_1 < \dots < i_s \leq k$, такой, что $Z_{i_1} \oplus Z_{i_2} \oplus \dots \oplus Z_{i_s} = \emptyset$. Здесь \oplus — симметрическая разность, \emptyset — пустое множество.

Если множество циклов не является зависимым, то оно называется *независимым*. Можно показать, что у связного графа любое максимальное независимое множество циклов состоит из $m = q - p + 1$ цикла. Каждое такое множество называется *базисом циклов*, а $m = q - p + 1$ называется *циклическим рангом* графа G .

Еще один критерий планарности, предложенный Мак-Лейном, основан на рассмотрении циклической структуры графа.

Теорема. *Граф G планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок, имеющий по крайней мере три вершины, обладает таким базисом циклов Z_1, Z_2, \dots, Z_m и таким дополнительным циклом Z_0 , что любое ребро блока принадлежит точно двум из этих $m + 1$ циклов.*

Мы только наметим доказательство более простой части этого утверждения, а именно необходимости. Можно полагать, что все внутренние грани двусвязного плоского графа G образуют базис циклов Z_1, Z_2, \dots, Z_m , где m – циклический ранг графа G . Пусть Z_0 – внешний простой цикл графа G . Понятно, что любое ребро графа G принадлежит точно двум из $m + 1$ циклов Z_i .

Для доказательства достаточности нужно построить плоскую укладку данного графа G , обладающую определенными свойствами. ■

Все указанные критерии планарности графа G приведены в следующем списке эквивалентных условий:

- 1) G – планарный граф;
- 2) в G нет подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$;
- 3) в G нет подграфов, стягиваемых к K_5 и $K_{3,3}$;
- 4) каждый нетривиальный блок графа G обладает таким базисом циклов Z_1, Z_2, \dots, Z_m и таким дополнительным циклом Z_0 , что любое ребро принадлежит точно двум из этих $m + 1$ циклов.

7.3. За пределами планарности: род, толщина, крупность, число скрещиваний

В этом разделе рассматриваются четыре топологических инварианта графа G : род – наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы уложить G ; толщина – наименьшее число планарных графов, объединение которых есть G ; крупность – наибольшее число непланарных подграфов в G , не пересекающихся по ребрам; число скрещиваний – число пересечений ребер, которое должно быть при расположении G на плоскости.

Как заметил Кениг, любой граф можно уложить на некоторой ориентируемой поверхности. Это легко понять, если нарисовать произвольный граф G на плоскости, причем некоторые ребра могут пересекаться, и для

каждого (двойного) пересечения добавить к плоскости ручку; затем провести одно ребро по ручке, а другое — под ней. Например, на рис. 7.7 показана укладка графа K_5 на плоскости, к которой добавлена одна ручка. Конечно, при таком способе укладки используется, как правило, больше ручек, чем на самом деле требуется. Кениг также показал, что при любой укладке графа на ориентируемой поверхности с наименьшим числом ручек все его грани будут связными областями.

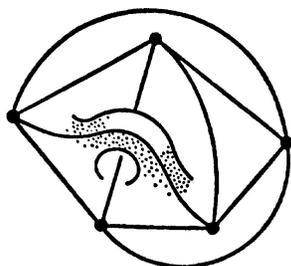


Рис. 7.7. Укладка графа K_5 на ориентируемой поверхности

Уже отмечалось, что планарные графы можно уложить на сфере. *Тороидальным графом* называется граф, который можно уложить на торе. Графы K_5 и $K_{3,3}$ тороидальные. На рис. 7.8 и 7.9 показаны укладки графов K_7 и $K_{4,4}$ на торе, представленном здесь хорошо известным способом с помощью прямоугольника, в котором отождествлены обе пары противоположных сторон.

Пока еще не найдено ни одной характеристики тороидальных графов, аналогичной теореме Понтрягина-Куратовского. Однако для тора и любой другой ориентируемой поверхности существует лишь конечное число запрещенных подграфов.

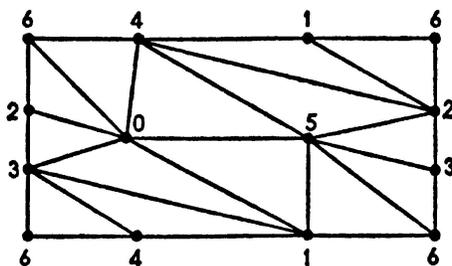


Рис. 7.8. Укладка графа K_7 на торе

Род $\gamma(G)$ графа G определяется как наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы граф G можно было уложить на получившейся поверхности. Конечно, $\gamma(G) = 0$ тогда и только тогда, когда G — планарный граф; гомеоморфные графы имеют одинаковый род.

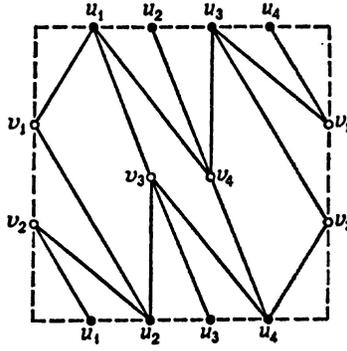


Рис. 7.9. Укладка графа $K_{4,4}$ на торе

Обобщением теоремы Эйлера на графы рода γ является следующее утверждение.

Теорема. Пусть G — связный граф рода $\gamma = \gamma(G)$ и r — число граней (связных областей поверхности, на которые она разбивается) при некоторой укладке графа на поверхности рода γ . Тогда $p - q + r = 2 - 2\gamma$.

Задача вычисления рода графа достаточно сложна. В настоящее время вычислены рода графов $K_p, K_{m,n}, B^n$:

$$\gamma(K_p) = \left\{ \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\},$$

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\},$$

$$\gamma(B^n) = 1 + (n-4)2^{n-3},$$

где $\{\alpha\}$ — наименьшее целое число $\geq \alpha$.

7.4. Раскраска плоских графов

Теорема. Всякий планарный граф можно раскрасить пятью красками.

Доказательство. Достаточно рассматривать связные графы, потому что, если G_1, \dots, G_n — компоненты связности графа G , то

$$\chi \left(\bigcup_{i=1}^n G_i \right) = \max_{i=1}^n \chi(G_i).$$

Индукция по p . База: если $p \leq 5$, то $\chi \leq p \leq 5$. Пусть теорема верна для всех связных планарных графов с p вершинами. Рассмотрим граф

G с $p + 1$ вершиной. По третьему следствию к формуле Эйлера $\exists v \in V d(v) \leq 5$. По индуктивному предположению $\chi(G - v) \leq 5$. Нужно раскрасить вершину v .

1. Если $\deg(v) < 5$, то в 5-раскраске $G - v$ существует цвет, свободный для v .
2. Если $\deg(v) = 5$ и для $\Gamma(v)$ использованы не все пять цветов, то в 5-раскраске $G - v$ существует цвет, свободный для v .
3. Остался случай, когда $\deg(v) = 5$ и все пять цветов использованы (вершина v_i покрашена в цвет i , рис. 7.10).

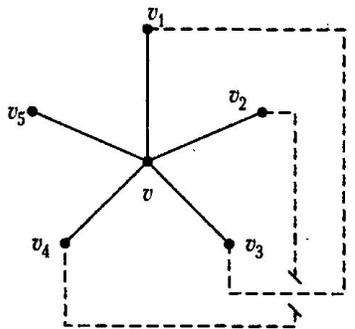


Рис. 7.10. Иллюстрация к доказательству теоремы о пяти красках

Пусть G_{13} – правильный подграф $G - v$, порожденный всеми вершинами, покрашенными в цвета 1 или 3 в 5-раскраске графа $G - v$. Если v_1 и v_3 принадлежат разным компонентам связности графа G_{13} , то в той компоненте, в которой находится v_1 , произведем перекраску $1 \leftrightarrow 3$. При этом получится 5-раскраска $G - v$, но цвет 1 будет свободен для v . В противном случае

существует простая цепь, соединяющая v_1 и v_3 , состоящая из вершин, покрашенных в цвета 1 и 3. В этом случае v_2 и v_4 принадлежат разным компонентам связности подграфа G_{24} (так как граф G – планарный). Перекрасим вершины $2 \leftrightarrow 4$ в той компоненте связности графа G_{24} , которой принадлежит v_2 , и получим 5-раскраску графа $G - v$, в которой цвет 2 свободен для v . ■

Задачи

1. Обозначим через $p_i(G)$ число вершин степени i в графе G . Построить все попарно неизоморфные графы без петель и кратных ребер, у которых:

1) $p_2(G) = 1, p_3(G) = p_4(G) = 2$ и $p_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$;

2) $p_2(G) = 3, p_3(G) = 2, p_4(G) = 1$ и $p_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

3) $p_2(G) = p_3(G) = p_4(G) = 2$ и $p_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

4) $p_2(G) = p_3(G) = p_4(G) = 3$ и $p_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

2. Доказать, что если две различные вершины соединены некоторым маршрутом, то внутри маршрута содержится простая цепь, соединяющая эти вершины.

3. Показать, что в любом графе, содержащем не менее 2 вершин, найдутся 2 вершины с одинаковыми степенями.

4. Доказать, что для всякого $p \geq 3$ существует p -вершинный связный граф без петель и кратных ребер, содержащий $p - 1$ вершин с неравными друг другу степенями.

5. Доказать, что в графе всякий замкнутый маршрут нечетной длины $l \geq 3$ содержит простой цикл. Справедливо ли аналогичное утверждение для маршрутов четной длины?

6. Индукцией по p доказать, что связный граф с p вершинами содержит не менее $p - 1$ ребер ($p \geq 1$).

7. Доказать, что если из связного графа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором цикле, то новый граф будет также связным.

8. Доказать, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют хотя бы одну общую вершину. Верно ли, что у них всегда есть общее ребро?

9. Доказать, что всякий связный граф, имеющий не менее двух вершин, содержит вершину, не являющуюся разделяющей.
10. Показать, что если в графе степень каждой вершины больше 1, то в нем есть цикл.
11. Пусть G — произвольный граф, а \overline{G} — его дополнение. Доказать, что
- 1) хотя бы один из графов G или \overline{G} связан;
 - 2) если в G более 4 вершин, то хотя бы в одном из графов G или \overline{G} имеется цикл;
 - 3) если граф G несвязен или его диаметр не меньше 3, то диаметр графа \overline{G} не больше 3;
 - 4) если v — разделяющая вершина графа G , то она не является разделяющей в графе \overline{G} .
12. Граф называется самодополнительным, если он изоморфен своему дополнению.
- 1) Показать, что если граф самодополнительный, то число вершин в нем равно либо $4l$ ($l \geq 1$), либо $4l - 1$ ($l \geq 0$).
 - 2) Доказать, что среди 4-вершинных графов самодополнительным является только один, а среди 5-вершинных — только два.
 - 3) Показать, что самодополнительный граф связан.
 - 4) Доказать, что диаметр самодополнительного нетривиального графа G удовлетворяет неравенствам $2 \leq D(G) \leq 3$.
13. Доказать, что если в графе имеются ровно две вершины нечетной степени, то существует цепь, соединяющая их.
14. Доказать, что во всяком дереве с $p \geq 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.
15. Пусть p_1 — число висячих вершин у p -вершинного дерева, не содержащего вершин степени 2. Доказать, что $p_1 \geq \frac{p}{2} + 1$.
16. Среди пар графов, изображенных на рис. 1–5, указать пары изоморфных и пары неизоморфных графов. Ответ обосновать.

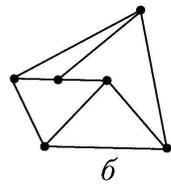
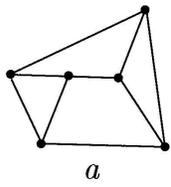


Рис.1

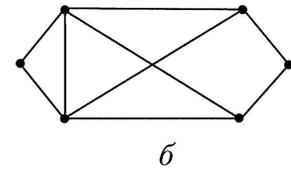
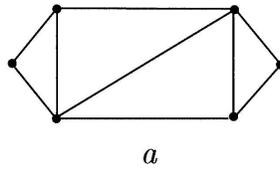


Рис.2

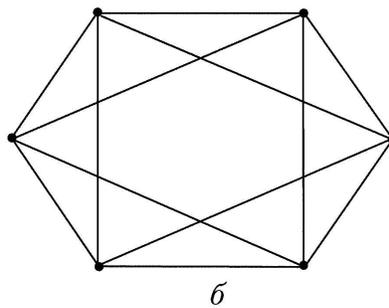
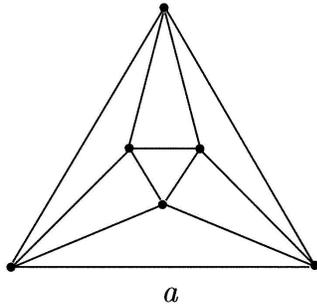


Рис.3

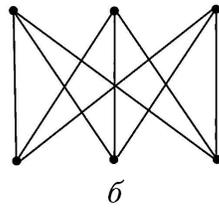
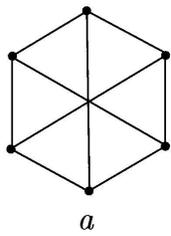


Рис.4

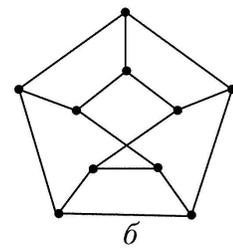
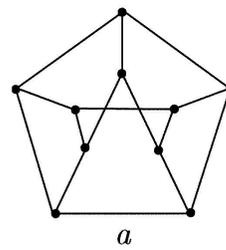
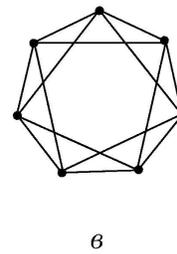
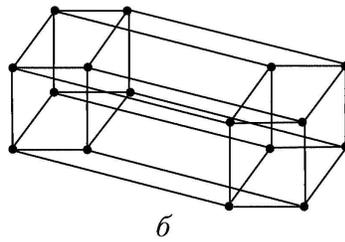
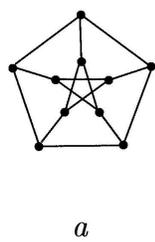


Рис.5

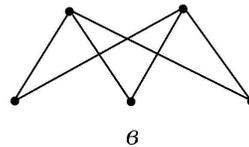
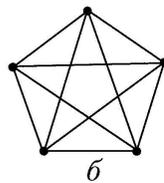
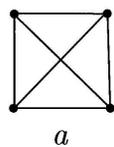


a

б

в

Рис. 6



a

б

в

Рис.7

17. Выяснить, существуют ли в графах, изображенных на рисунке 6, подграфы, гомеоморфные графу G :

1) $G = K_4$ (рисунок 7, а); 2) $G = K_5$ (рис. 7, б); 3) $G = K_{2,3}$ (рис. 7, в).

18. Привести пример связного однородного графа степени 4, не содержащего остовного простого цикла.

19. Используя формулу Эйлера, доказать непланарность следующих графов:

1) граф Петерсена (рис. 6, а);

2) граф, изображенный на рис. 6, в.

20. Плоский связный граф без висячих вершин, каждая грань которого, включая и внешнюю, ограничена циклом длины 3, называется триангуляцией. Показать, что триангуляция с $p \geq 3$ вершинами имеет $3p - 6$ ребер и $2p - 4$ граней.

21. Доказать, что если у связного планарного графа, имеющего p вершин и q ребер, каждый простой цикл содержит не менее k ребер ($k \geq 3$), то $q \leq \frac{k(p-2)}{(k-2)}$.

22. Доказать, что в любом планарном графе, имеющем не менее 4 вершин, найдутся хотя бы 4 вершины, степени которых не больше 5.

23. Показать, что плоский кубический граф, граница каждой грани которого имеет не менее 5 вершин, содержит по крайней мере 20 вершин. Привести пример такого графа.

24. Пусть G — плоский связный кубический граф. Через f_i ($i \geq 3$) обозначим число тех граней графа G , каждая из которых ограничена i ребрами. Доказать, что $\sum_{i \geq 3} (6 - i)f_i = 12$.

25. Пусть $p \geq 3$, и пусть задано семейство $F(G) = \{H_1, H_2, \dots, H_p\}$ графов, в котором граф H_i получен из p -вершинного графа G удалением вершины с номером i ($i = 1, \dots, p$). Отметим, что в графах H_i вершины не помечены. Доказать, что по семейству $F(G)$ можно

1) найти число ребер графа G ;

2) найти для каждого H_i степень той вершины, удалением которой из G получен граф H_i ;

3) определить для произвольного графа L , имеющего не более $p - 1$

вершин, является ли он подграфом графа G ;

4) определить, является ли граф G связным;

5) восстановить граф G , если он не является связным.

26. Показать, что если графы G и H гомеоморфны, то:

1) для каждого $d \neq 2$ число вершин степени d в обоих графах одинаково;

2) существует взаимно однозначное отображение множества простых циклов графа G на множество простых циклов графа H , при котором число вершин степени d в соответствующих циклах одинаково для всех $d \neq 2$.

27. Операция надразбиения заключается в замене двух смежных ребер $\{u, v\}$ и $\{v, w\}$, общая вершина v которых имеет степень 2, одним ребром $\{u, w\}$. Применяя шаг за шагом операцию надразбиения, можно получить из произвольного графа G , содержащего вершины степени 2, псевдограф, не содержащий вершин степени 2. Этот псевдограф будет называться полным надразбиением графа G .

1) Показать, что полное надразбиение графа G не зависит от того, в каком порядке применялась операция надразбиения к парам смежных ребер графа G .

2) Показать, что графы G и H гомеоморфны тогда и только тогда, когда их полные надразбиения изоморфны (как псевдографы).

28. Доказать, что в каждом из графов K_n , $K_{m,n}$, B^n имеется гамильтонов цикл.

29. Показать, что граф, у которого имеются две несмежные вершины третьей степени, а остальные вершины имеют степень, не большую чем 2, не обладает гамильтоновым циклом.

30. Восстановить граф G по его подграфам G_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, где $G_1 = K_4 - e$, $G_2 = P_3 \cup K_1$, $G_3 = K_{1,3}$, $G_4 = G_5 = K_{1,3} + e$.

31. Доказать, что граф G связан тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества вершин V на два подмножества V_1 и V_2 существует ребро графа G , соединяющее некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2 .

32. Доказать, что конечное метрическое пространство (S, d) изоморф-

но пространству расстояний некоторого графа тогда и только тогда, когда

- 1) расстояние между любыми двумя вершинами из S есть целое число;
- 2) если $d(u, v) \geq 2$, то найдется третья вершина w , такая, что $d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)$.

33. Пусть G будет (p, q) -графом, степени вершин которого равны k или $k + 1$. Доказать, что если G имеет $p_k > 0$ вершин степени k и p_{k+1} вершин степени $k + 1$, то $p_k = (k + 1)p - 2q$.

34. Доказать, что наименьшее число вершин в кубическом графе, имеющем мост, равно 10.

35. Доказать, что вершина v графа G является точкой сочленения тогда и только тогда, когда найдутся такие смежные с v вершины u и w , что v лежит на любой простой $\{u, w\}$ -цепи.

36. Доказать, что связный граф с не менее чем двумя ребрами является блоком тогда и только тогда, когда любые два смежных ребра лежат на некотором простом цикле.

37. Пусть G — связный граф, имеющий по крайней мере три вершины. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

- 1) в G нет мостов;
- 2) любые две вершины графа G лежат на некотором общем цикле;
- 3) любая вершина и любое ребро графа G лежат на некотором общем цикле;
- 4) любые два ребра графа G лежат на некотором общем цикле;
- 5) для любой пары вершин и любого ребра графа G существует цепь, соединяющая эти вершины и содержащая данное ребро;
- 6) для любой пары вершин и любого ребра графа G существует простая цепь, соединяющая эти вершины и не содержащая данное ребро;
- 7) для любых трех вершин существует цепь, соединяющая любые две из них и не содержащая третью.

38. Доказать, что следующие четыре утверждения эквивалентны:

- 1) G — одноциклический граф;

2) G связен и $p = q$;

3) для некоторого ребра x графа G граф $G - x$ является деревом;

4) G связен и множество его ребер, которые не являются мостами, образует простой цикл.

39. Напомним, что два помеченных графа называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм, сохраняющий пометки. Под e -графом понимается граф, в котором каждая вершина имеет четную степень. Доказать, что:

1) число помеченных графов с p вершинами равно $\frac{p(p-1)}{2}$.

2) число помеченных e -графов с p вершинами равно числу помеченных графов с $p - 1$ вершинами.

40. Доказать, что любой максимальный внешнепланарный граф G с p вершинами имеет

1) $2p - 3$ ребра;

2) по крайней мере три вершины со степенями, не превышающими 3;

3) по крайней мере две вершины степени 2;

41. Доказать, что если (p_1, q_1) и (p_2, q_2) графы гомеоморфны, то $p_1 + q_2 = p_2 + q_1$.

42. Доказать, что если G — внешнепланарный граф, не имеющий треугольников, то $q \leq (3p - 4)/2$.

43. Доказать, что в n -раскраске однозначно n -раскрашиваемого графа подграф, порожденный объединением любых двух одноцветных классов, связен.

44. Доказать, что каждый однозначно 4-раскрашиваемый планарный граф является максимальным планарным графом.

45. Доказать, что каждая внешнеплоская карта 3-раскрашиваема.

46. Доказать, что каждый 3-хроматический максимальный планарный граф однозначно 3-раскрашиваем.

47. Доказать, что внешнепланарный граф, имеющий по крайней мере 3 вершины однозначно 3-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он является максимальным внешнепланарным.

Заключение

В учебном пособии изложены основы теории графов. Первая глава посвящена понятиям необходимым для развития теории. Основными здесь являются определения цепи и цикла. С их помощью вводятся связность графа и компоненты связности графа.

Поскольку любой граф можно разбить на компоненты связности, то многие вопросы о графах сводятся к аналогичным вопросам о связанных графах, что показывает их особую роль в теории графов.

Также с помощью понятия цикла определяются важные классы графов такие как эйлеровы, гамильтоновы и деревья (последние как графы не имеющие циклов). Исследованию этих классов графов посвящены главы 2,3 и 5.

Понятие двудольного графа, изучаемое в главе 4, с помощью теоремы Кенига, также сводится к отсутствию некоторых циклов, а именно циклов нечетной длины.

В главах 6 и 7 определены и изучаются раскраски графов и укладки графов на плоскости.

Отметим, что за рамками пособия осталась такая важная тема, как алгоритмы на графах. Надеемся включить ее в следующее издание пособия.

Рекомендуемая литература

Основная

1. Зыков А. А. Основы теории графов / А.А. Зыков. – М. : Вузовская книга, 2004. — 664 с.
2. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: учеб/ для вузов / Ф.А.Новиков.– 3-е изд. — СПб. : Питер, 2009. – 384 с.
3. Харари Ф.Теория графов / Ф.Харари.– 2-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

Дополнительная

4. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1979.
5. Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. , Сапоженко. — 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2005. - 416 с.
6. Ершов А. П. Введение в теоретическое программирование / А.П. Ершов. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
7. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2005. — 1296 с.
8. Косточка А. В. Дискретная математика : учеб. пособие / А.В. Косточка, Ф.И. Соловьева. – Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2001. – Ч.1. – 62 с.
9. Улам С.М. Нерешенные математические задачи. – М. : Наука, 1964 – 168 с.

Учебное издание

Лакеев Анатолий Валентинович

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ГРАФОВ

Редактор В.В.Попова
Дизайн обложки: П.О.Ершов

Темплан 2014 г. Поз. 140

Подписано в печать 22.12.2014. Формат 60 × 90 1/16
Уч.-изд. л. 5,0 Усл.-печ. л. 5,3. Тираж 100 экз. Заказ 184

Издательство ИГУ
664025, Иркутск, бульвар Гагарина, 36