ДОПУСКОВОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СО СВЯЗАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

И.А. Шарая

Институт вычислительных технологий, Новосибирск
e-mail: sharaya@ict.nsc.ru

Аннотация. В статье предложен и обоснован метод отыскания допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений с группами пропорционально связанных коэффициентов. Суть метода — сведение исходной задачи к аналогичной задаче без связей.

Ключевые слова: допусковое множество решений, связанные (зависимые) параметры, интервальная линейная система уравнений.

Введение

Договоримся для различéния вещественных и интервальных объектов (чисел, векторов, матриц) использовать толщину шрифта: интервальные объекты будем обозначать жирным шрифтом, а вещественные – обычным.

В задачах математической экономики, технологического проектирования и автоматического управления иногда требуется решить вещественную систему уравнений вида $Ax = b$, в которой

- вместо вещественных коэффициентов заданы интервалы возможных значений этих коэффициентов,
- вместо параметров правой части заданы интервалы допускаемых значений этих параметров,
- требуется найти такие значения x, при которых для всех возможных значений матрицы коэффициентов величина Ax удовлетворяет заданным допускам на правую часть.

Для решения таких задач в интервальном анализе введено понятие допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений.

Определение. *Для интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ и интервального вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ допусковым множеством решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ называется множество таких вещественных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, что для всех вещественных матриц A из интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ значение Ax не выходит за границы интервала $\boldsymbol{b}$:*

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \bigcup_{A\in\boldsymbol{A}} Ax \subseteq \boldsymbol{b} \Big\}. \qquad (1)$$

Для допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ разработаны методы оценивания и точного нахождения [1, 2, 3].

В определении допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений предполагается, что элементы вещественной матрицы A независимы, а как быть в случае, когда

[1]Работа выполнена в рамках Президентской программы поддержки ведущих научных школ "Разработка информационно-вычислительных технологий в задачах поддержки принятия решений" (грант № НШ-931.2008.9).

в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ требуется рассматривать не все, а только вещественные матрицы специального вида (например, только симметричные)? В данной работе будет предложен метод нахождения допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений, при условии, что в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ требуется рассматривать только вещественные матрицы A с группами пропорциональных элементов.

1. Постановка задачи

Мы будем говорить, что *коэффициенты интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ связаны (зависимы)*, когда множество их совместных значений меньше прямого произведения интервалов значений отдельных коэффициентов.

Связью на коэффициенты будем называть описание (в любой форме), которое позволяет выделить множество совместных значений коэффициентов в множестве $\boldsymbol{A}$. Ниже в качестве связи мы будем использовать подмножество в $\mathbb{R}^{m\times n}$, обозначая его символом S.

Определение. *Для интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ и интервального вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ допусковым множеством решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связью $S \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ на матрицу коэффициентов будем называть множество таких вещественных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, что для всех вещественных матриц A из $\boldsymbol{A} \cap S$ значение Ax не выходит за границы интервала $\boldsymbol{b}$:*

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, S, \boldsymbol{b}) := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \bigcup_{A\in(\boldsymbol{A}\cap S)} Ax \subseteq \boldsymbol{b} \Big\}.$$

Мы ограничимся рассмотрением связей, которые можно представить в следующей параметрической форме:

$$S = \bigcup_{s\in\mathbb{R}^k} A(s),$$

$$A(s) \text{ – матрица с компонентами } a_{ij}(s), \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$a_{ij}(s) = c_{ij} s_{l(i,j)}, \tag{2}$$

где $c_{ij} \in \mathbb{R}$ – вещественные константы, $s = (s_1,\ldots,s_k)$ – вектор дополнительных параметров задачи, $s_{l(i,j)} \in \{s_1,\ldots,s_k\}$ – один из дополнительных параметров. Это требование означает, что все компоненты вещественной матрицы $A = A(s)$ разбиты на k групп так, что элементы каждой группы пропорциональны одному дополнительному параметру $s_l \in \{s_1,\ldots,s_k\}$.

Обозначим через $\mathrm{Ind}(l)$ множество пар индексов тех элементов матрицы $A(s)$, которые пропорциональны дополнительному параметру s_l:

$$\mathrm{Ind}(l) := \{(i,j) \mid a_{ij}(s) = c_{ij} s_l\}. \tag{3}$$

Потребуем, чтобы компоненты, пропорциональные одному дополнительному параметру, не попадали в одну строку матрицы $A(s)$:

$$\Big(\big((i,j) \in \mathrm{Ind}(l)\big) \;\&\; \big((i,j') \in \mathrm{Ind}(l)\big)\Big) \;\Rightarrow\; (j = j'). \tag{4}$$

Множество S, соответствующее соотношениям (2), является линейным подпространством в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Примеры вещественных матриц, связь между элементами которых можно описать в виде (2)–(4):

1) *Симметричная (симметрическая) матрица (symmetric matrix)* — квадратная матрица, в которой элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны: $a_{ij} = a_{ji}$. Для квадратной матрицы размера $n \times n$ длина вектора дополнительных параметров s равна $n(n+1)/2$, а один из вариантов параметризации

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} \\ s_3 & s_{n+2} & s_{2n} & \dots & s_{3n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{2n-1} & s_{3n-3} & \dots & s_{n(n+1)/2} \end{pmatrix}.$$

2) *Кососимметричная (кососимметрическая, антисимметричная, антисимметрическая) матрица (skew-symmetric, antisymmetric matrix)* — квадратная матрица, в которой элементы, симметричные относительно главной диагонали, противоположны: $a_{ij} = -a_{ji}$. Для квадратной матрицы размера $n \times n$ длина вектора дополнительных параметров s равна $n(n+1)/2$, а один из вариантов параметризации

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ -s_2 & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} \\ -s_3 & -s_{n+2} & s_{2n} & \dots & s_{3n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_n & -s_{2n-1} & -s_{3n-3} & \dots & s_{n(n+1)/2} \end{pmatrix}.$$

3) *Матрица Теплица (Toeplitz matrix)* — квадратная матрица, в которой каждая диагональ, параллельная главной, состоит из равных элементов: $a_{ij} = s_{i-j}$. Для матрицы размера $n \times n$ длина вектора дополнительных параметров $s = (s_{-(n-1)}, \dots, s_{n-1})$ равна $2n-1$, а сама матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{-1} & s_{-2} & \dots & s_{-(n-1)} \\ s_1 & s_0 & s_{-1} & \ddots & \vdots \\ s_2 & s_1 & s_0 & \ddots & s_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & s_{-1} \\ s_{n-1} & \dots & s_2 & s_1 & s_0 \end{pmatrix}.$$

4) *Матрица Ганкеля (Hankel matrix)* — квадратная матрица, в которой каждая диагональ, параллельная побочной, состоит из равных элементов: $a_{ij} = s_{i+j-2}$. Для матрицы размера $n \times n$ длина вектора дополнительных параметров $s = (s_0, s_1 \dots, s_{2n-2})$ равна $2n-1$. Матрица Ганкеля имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \iddots & s_{n-1} & \vdots \\ s_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & s_{n-1} & \iddots & \iddots & \vdots \\ s_{n-1} & \dots & \dots & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

5) *Матрица Гурвица (Hurwitz matrix)* — квадратная матрица размера $n \times n$, элементы которой описываются через дополнительные параметры $s_0, s_1, \dots, s_n$ по правилу $a_{ij} = s_{2j-i}$, где $s_0 \neq 0$, $s_k = 0$, при $k < 0$ или $k > n$. Например,

$$\text{при } n = 5 \quad \begin{pmatrix} s_1 & s_3 & s_5 & 0 & 0 \\ s_0 & s_2 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_3 & s_5 & 0 \\ 0 & s_0 & s_2 & s_4 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & s_3 & s_5 \end{pmatrix}, \qquad \text{при } n = 6 \quad \begin{pmatrix} s_1 & s_3 & s_5 & 0 & 0 & 0 \\ s_0 & s_2 & s_4 & s_6 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_3 & s_5 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_2 & s_4 & s_6 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & s_3 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & s_0 & s_2 & s_4 & s_6 \end{pmatrix}.$$

6) *Циркулянт (циклическая матрица) (circulant matrix)* — квадратная матрица, которую при размере $n \times n$ можно описать через дополнительные параметры $s_1, \dots, s_n$ по правилу $a_{ij} = s_{((n+j-i) \mod n)+1}$. Циркулянт имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_{n-1} & s_n & s_1 & \dots & s_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_1 \end{pmatrix}.$$

Формулировка задачи. Найти (оценить) допусковое множество решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связью вида (2)–(4) на матрицу коэффициентов.

3. Метод решения

Множество матриц $\boldsymbol{A} \cap S$, где связь S на коэффициенты системы уравнений имеет вид (2), легко описать параметрически. Оно состоит из тех матриц $A(s)$, удовлетворяющих требованию (2), которые попадают в интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$. Из условия

$$a_{ij}(s) = c_{ij} s_{l(i,j)} \ \in \ \boldsymbol{a}_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \ \ j = 1, \dots, n,$$

получаем ограничения на дополнительные параметры s:

$$s \in \boldsymbol{s}, \qquad \text{где} \quad \boldsymbol{s}_l := \bigcap_{(i,j) \in \mathrm{Ind}(l)} \boldsymbol{a}_{ij} / c_{ij}, \qquad l = 1, \dots, k. \tag{5}$$

Отсюда

$$\boldsymbol{A} \cap S = \bigcup_{s \in \boldsymbol{s}} A(s). \tag{6}$$

Поэтому в нашей задаче

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, S, \boldsymbol{b}) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ \bigcup_{s \in \boldsymbol{s}} (A(s)x) \ \subseteq \ \boldsymbol{b} \Big\}.$$

Поскольку $\boldsymbol{b}$ – интервальный вектор (т.е. множество равное прямой сумме своих координатных проекций), включение можно расписать покомпонентно:

$$\bigcup_{s \in \boldsymbol{s}} (A(s)x) \subseteq \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} \bigcup\limits_{s \in \boldsymbol{s}} \sum_j a_{1j}(s) x_j \subseteq \boldsymbol{b}_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bigcup\limits_{s \in \boldsymbol{s}} \sum_j a_{mj}(s) x_j \subseteq \boldsymbol{b}_m. \end{cases}$$

Теперь воспользуемся условием (4) отсутствия в строке двух коэффициентов, пропорциональных одному дополнительному параметру. Это условие позволяет пронести операцию объединения к отдельным слагаемым:

$$\bigcup_{s\in\boldsymbol{s}}\sum_j a_{ij}(s)x_j \subseteq \boldsymbol{b}_i \iff \sum_j \bigcup_{s\in\boldsymbol{s}}(a_{ij}(s)x_j) \subseteq \boldsymbol{b}_i.$$

После очевидного преобразования

$$\bigcup_{s\in\boldsymbol{s}}(a_{ij}(s)x_j) = \left(\bigcup_{s\in\boldsymbol{s}} a_{ij}(s)\right) x_j$$

воспользуемся видом (2) коэффициентов $a_{ij}(s)$, из которого следует, что

$$\bigcup_{s\in\boldsymbol{s}} a_{ij}(s) = c_{ij}\boldsymbol{s}_{l(i,j)}. \tag{7}$$

Резюмируя выкладки, получаем

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, S, \boldsymbol{b}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \widetilde{\boldsymbol{A}}x \subseteq \boldsymbol{b} \right\}, \tag{8}$$

где компоненты интервальной матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ имеют вид

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}_{ij} = c_{ij}\boldsymbol{s}_{l(i,j)}. \tag{9}$$

Поскольку $\widetilde{\boldsymbol{A}}x = \bigcup\limits_{A\in\widetilde{\boldsymbol{A}}} Ax$, привлекая определение (1), можем записать

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, S, \boldsymbol{b}) = \Xi_{\mathrm{tol}}(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{b}).$$

Другими словами, допусковое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ <u>со связью (2)–(4)</u> совпадает с допусковым множеством решений интервальной линейной системы $\widetilde{\boldsymbol{A}}x = \boldsymbol{b}$ <u>без связей</u> на матрицу коэффициентов.

Из определения (9) матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, равенства (7) и свойства (6) следует, что

- с одной стороны, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ является интервальной оболочкой множества $\boldsymbol{A} \cap S$, т.е. минимальной интервальной матрицей содержащей все вещественные матрицы, удовлетворяющие связи на коэффициенты и лежащие в $\boldsymbol{A}$,
- а с другой стороны, это максимальная интервальная подматрица в $\boldsymbol{A}$, компоненты которой подчинены тем же связям (2)–(4), которые наложены в условии задачи на вещественные матрицы. (Действительно, всякая бóльшая по включению интервальная матрица с теми же пропорциями содержит такие вещественные матрицы, которые лежат в S, но не лежат в множестве $\boldsymbol{A}$.)

Это наблюдение позволяет иногда находить матрицу $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, не прибегая к явной параметризации связи. Например, если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ требуется рассматривать только симметричные вещественные матрицы, тогда компоненты матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{sym}$ можно найти по правилу

$$\boldsymbol{a}_{ij}^{sym} = \boldsymbol{a}_{ij} \cap \boldsymbol{a}_{ji}.$$

На основании проведенных рассуждений можно предложить следующий метод нахождения допускового множества решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связью (2)–(4) на матрицу коэффициентов.

Метод решения:

Шаг 1. Для интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ найти максимальную интервальную подматрицу $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, компоненты которой находятся в тех же соотношениях пропорциональности, что требуются по условию задачи для вещественных матриц. Если такой подматрицы нет — искомое множество $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, S, \boldsymbol{b})$ пусто, иначе — перейти к шагу 2.

Шаг 2. Найти (оценить) допусковое множество решений интервальной линейной системы уравнений $\widetilde{\boldsymbol{A}}x = \boldsymbol{b}$.

Суть предлагаемого метода в том, чтобы свести задачу со связанными параметрами к задаче без связей и воспользоваться известными методами решения задачи без связей.

4. Пример

В заключение для наглядности рассмотрим простой пример.

Задача. Пусть интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный вектор $\boldsymbol{b}$ имеют вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-3,-1] \\ [0,2] & [1,2] \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-2,2] \end{pmatrix}.$$

Найти множество таких вещественных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, что при всех кососимметричных матрицах A из $\boldsymbol{A}$ значение Ax лежит в интервале $\boldsymbol{b}$.

Решение.

Шаг 1. Для матрицы $\boldsymbol{A}$ максимальная интервальная кососимметричная подматрица $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ имеет вид

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-3,-1] \cap (-[0,2]) \\ -\widetilde{\boldsymbol{a}}_{12} & [1,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-2,-1] \\ [1,2] & [1,2] \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Допусковое множество решений интервальной линейной системы уравнений $\widetilde{\boldsymbol{A}}x = \boldsymbol{b}$ можно (как показано в [2]) найти из системы, включающей восемь двойных линейных неравенств:

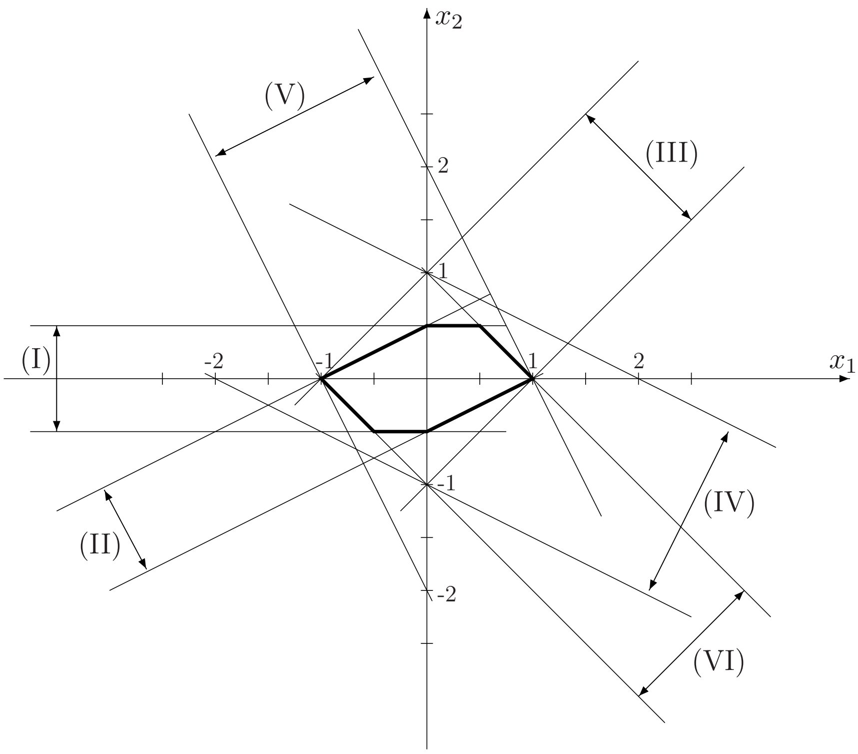
$$\begin{cases} -2x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(I)} \\ x_1 - 2x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(II)} \\ -x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(III)} \\ x_1 - x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(IV)} \\ x_1 + x_2 \subseteq [-2,2], & \text{(V)} \\ 2x_1 + x_2 \subseteq [-2,2], & \text{(VI)} \\ x_1 + 2x_2 \subseteq [-2,2], & \text{(VII)} \\ 2x_1 + 2x_2 \subseteq [-2,2]. & \text{(VIII)} \end{cases}$$

Неравенство (I) разделим на -2, неравенство (VIII) разделим на два, неравенства (III) (следствие неравенства (I)) и (V) (следствие неравенства (VIII)) удалим.

Получим эквивалентную систему неравенств

$$\begin{cases} x_2 \subseteq [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], & \text{(I)} \\ x_1 - 2x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(II)} \\ x_1 - x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(III)} \\ 2x_1 + x_2 \subseteq [-2,2], & \text{(IV)} \\ x_1 + 2x_2 \subseteq [-2,2], & \text{(V)} \\ x_1 + x_2 \subseteq [-1,1], & \text{(VI)} \end{cases}$$

которую можно решить графически:



Ответ: искомое множество (показанное на рисунке) является выпуклым шестиугольником с вершинами $(0, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 0)$, $(0, -0.5)$, $(-0.5, -0.5)$, $(-1, 0)$.

Список литературы

[1] С.П. Шарый *Конечномерный интервальный анализ.*
`http://www.nsc.ru/interval/InteBooks/Shary/TheBook.pdf`

[2] И.А. Шарая *Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы* Вычислительные технологии, 2005, т. 10, № 5, с. 103–119.
(`http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/ct05.pdf`)

[3] И.А. Шарая *Переход к ограниченному допустимому множеству решений* Всероссийское совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия. СПб: ВВМ, 2006, с. 135–139.
(`http://www.nsc.ru/interval/Conferences/Interval-06/Proceedings.pdf`)
(`http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/int06.pdf`)

THE TOLERABLE SOLUTION SET OF INTERVAL LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS WITH DEPENDENT COEFFICIENTS

I.A. Sharaya

Institute of Computational Technologies, Novosibirsk
e-mail: sharaya@ict.nsc.ru

Abstract. We propose and substantiate a method for finding the tolerable solution set of interval linear systems of equations with groups of proportional coefficients. The essence of the method is to reduce the initial problem to a similar problem without dependent coefficients.

Key words: tolerable solution set, dependent (tied) parameters, interval linear system of equations