Вычислительные технологии **Том 9, № 3, 2004**

ОГРАНИЧЕНО ЛИ ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ?

И. А. Шарая
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `shary@ict.nsc.ru`
`http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/irash`

A criterion is proved for the tolerable solution set to be unbounded.

Введение

В работе используются обозначения интервального анализа, предложенные в [1], и классическая интервальная арифметика (см., например, [2, 3]).

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ — интервальная матрица размерности $m\times n$; $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор длины m; $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор длины n, допустимое множество решений Ξ описывается так [4]:

$$\Xi = \{x \mid (\forall A \in \mathbf{A})\ (\exists\, b \in \mathbf{b})\ (Ax = b)\}.$$

Критерий принадлежности вектора x допустимому множеству решений на языке интервальной арифметики имеет вид (см., например, [5])

$$x \in \Xi \iff \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}. \tag{1}$$

Легко показать [6], что Ξ — выпуклое многогранное множество в $\mathbb{R}^n$. Можно ли по виду матрицы $\mathbf{A}$ судить об ограниченности множества Ξ? Этот вопрос поставил в переписке профессор Зенон Кульпа (`http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/`) — автор диаграмматического метода исследования множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений [7, 8]. Поблагодарим его за интересную постановку и попробуем ответить.

1. Критерий неограниченности

Докажем сначала два вспомогательных утверждения. Первое позволяет по специальному виду матрицы сказать, что допустимое множество решений неограничено, а второе, наоборот, показывает, что если допустимое множество решений неограничено, то матрица имеет этот специальный вид.

В соответствии с [9] будем называть конечное множество $\{a_j\}$ вещественных векторов линейно зависимым, если существует соответствующее множество $\{c_j\}$ вещественных чисел, не все из которых равны нулю, такое, что $\sum_j a_j c_j = 0$. Заметим, что множество из одного вектора линейно зависимо тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Утверждение 1. *Пусть допустимое множество решений Ξ непусто. Если в матрице $\mathbf{A}$ есть линейно зависимые вещественные столбцы, то Ξ неограничено.*

Доказательство. В силу (1) непустота Ξ означает, что существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\mathbf{A}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$. Расписав произведение $\mathbf{A}\tilde{x}$ по столбцам $\mathbf{A}_{:j}$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{:j}\tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}. \tag{2}$$

Пусть J — множество номеров линейно зависимых вещественных столбцов $A_{:j}$. Тогда (2) можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J} A_{:j}\tilde{x}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^{n} \mathbf{A}_{:j}\tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}, \tag{3}$$

а линейную зависимость вещественных столбцов выразить формулой

$$\sum_{j \in J} A_{:j} c_j = 0, \tag{4}$$

где $c_j \in \mathbb{R}$ и $\sum_{j \in J} |c_j| > 0$.

Домножая (4) на произвольное вещественное t, добавляя к (3) и пользуясь законом дистрибутивности для вещественных чисел, получим

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \sum_{j \in J} A_{:j}(\tilde{x}_j + t c_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^{n} \mathbf{A}_{:j}\tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}. \tag{5}$$

Введем вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)$, дополнив множество коэффициентов линейной зависимости нулевыми для $j \notin J$. Тогда (5) можно переписать в виде

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{:j}(\tilde{x}_j + t c_j) \subseteq \mathbf{b},$$

что в матричной форме выглядит так:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{A}(\tilde{x} + tc) \subseteq \mathbf{b}.$$

По критерию принадлежности (1) это означает, что вместе с решением $\tilde{x}$ в множество Ξ попадает прямая, проходящая через $\tilde{x}$ и параллельная вектору c. Значит, Ξ неограничено. □

Утверждение 2. *Пусть допустимое множество решений Ξ непусто. Если оно неограничено, то в матрице $\mathbf{A}$ есть линейно зависимые вещественные столбцы.*

Доказательство. Как упоминалось во введении, Ξ — это выпуклое многогранное множество. Если Ξ неограничено, значит, неограничено его пересечение с каким-нибудь ортантом. Тогда в этом ортанте лежит выпуклое многогранное неограниченное подмножество Ξ, из которого можно выбрать какой-нибудь луч $(\tilde{x}+tc)$, где $\tilde{x}$ — начало луча, c — вектор направления, $t \in \mathbb{R}^+$ — параметр, задающий точки луча.

Так как луч $(\tilde{x}+tc)$ целиком лежит в Ξ, по критерию принадлежности (1)

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}(\tilde{x}+tc) \subseteq \mathbf{b}. \tag{6}$$

С другой стороны, луч $(\tilde{x}+tc)$ целиком лежит в одном ортанте, поэтому

$$\forall j \in \{1,\dots,n\} \quad \tilde{x}_j c_j \geq 0$$

и в (6) можно раскрыть скобки по правилу дистрибутивности [2, 3]:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{A}(tc) \subseteq \mathbf{b}. \tag{7}$$

Для произвольных интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ имеет место очевидное свойство

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \\ \mathbf{x}+\mathbf{z} \subseteq \mathbf{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow \ |\mathbf{z}| \leq \operatorname{wid} \mathbf{y},$$

где $|\ |$ — модуль, wid — ширина интервальных векторов. Используя это свойство в (7) для $\mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{A}(tc)$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, получим, что должно выполняться неравенство

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad |\mathbf{A}(tc)| \leq \operatorname{wid} \mathbf{b}. \tag{8}$$

Для вещественного t применимо правило дистрибутивности [2, 3]. Это позволяет переписать (8) в виде

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad |t(\mathbf{A}c)| \leq \operatorname{wid} \mathbf{b}.$$

Положительное t можно вынести за знак модуля и разделить на него обе части неравенства. Тогда

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad |\mathbf{A}c| \leq \frac{\operatorname{wid} \mathbf{b}}{t}.$$

Это возможно только при $|\mathbf{A}c| = 0$, что эквивалентно

$$\mathbf{A}c = 0. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{:j} c_j = 0,$$

т. е. линейная комбинация столбцов интервальной матрицы $\mathbf{A}$ с коэффициентами, соответствующими компонентам вектора c, равна нулю. Остается заметить, что ненулевые коэффициенты в этой сумме могут стоять только при вещественных столбцах матрицы. В противном случае радиус линейной комбинации

$$\operatorname{rad}(\mathbf{A}c) = \sum_{j=1}^{n} |c_j| \operatorname{rad} \mathbf{A}_{:j} \tag{10}$$

будет отличен от нуля, что противоречит (9). □

Следствием утверждений 1 и 2 является

Критерий неограниченности. *Пусть допустимое множество решений Ξ непусто. Оно неограничено тогда и только тогда, когда в матрице* $\mathbf{A}$ *есть линейно зависимые вещественные столбцы.*

Можно ли представить, как выглядит непустое неограниченное Ξ? Давайте попробуем. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор коэффициентов, для которого линейная комбинация столбцов интервальной матрицы $\mathbf{A}$ равна нулю, т. е. $\mathbf{A}c = 0$. Обозначим через L пространство всех таких векторов.

В силу (10) у вектора c могут отличаться от нуля только компоненты, соответствующие вещественным столбцам матрицы $\mathbf{A}$. Это значит, что размерность пространства L равна $(k' - k'')$, где k' — число всех вещественных столбцов, k'' — максимальное число линейно независимых вещественных столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Например, если в матрице $\mathbf{A}$ все вещественные столбцы нулевые, то $k'' = 0$ и размерность пространства L равна числу нулевых столбцов k'.

Опираясь на доказательство утверждения 1, можно сказать, что Ξ представляет собой объединение прямых, параллельных произвольному вектору c из L. Следовательно, допустимое множество состоит из пространств, полученных параллельными сдвигами L. Для выпуклого многогранного множества это означает, что все его грани лежат в гиперплоскостях, параллельных L.

2. Выводы

На основании критерия неограниченности можно по виду матрицы $\mathbf{A}$ судить об ограниченности допускового множества решений, если оно непусто. Делается это так.

Если в матрице $\mathbf{A}$ нет линейно зависимых вещественных столбцов, то Ξ ограничено; если есть такие столбцы, то неограничено. В простейших случаях можно обойтись без вычислений, например:

— если в матрице $\mathbf{A}$ нет вещественных компонент, то Ξ ограничено;

— если в матрице $\mathbf{A}$ каждый столбец имеет невещественную компоненту, то Ξ ограничено;

— если в матрице $\mathbf{A}$ есть нулевые столбцы, то Ξ неограничено;

— если в матрице $\mathbf{A}$ есть пропорциональные вещественные столбцы, то Ξ неограничено;

— если в матрице $\mathbf{A}$ число вещественных столбцов больше числа строк этой матрицы, то Ξ неограничено.

Неограниченное допустимое множество решений представляет собой выпуклое многогранное множество, все грани которого параллельны пространству таких векторов $c \in \mathbb{R}^n$, для которых $\mathbf{A}c = 0$. Размерность этого пространства равна $(k' - k'')$, где k' — число всех вещественных столбцов, k'' — максимальное число линейно независимых вещественных столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Список литературы

[1] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A. et al. Standardized notation in interval analysis // Reliable Computing (в печати).
(`http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int`)

[2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[3] Шарая И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 71–83. (http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Irene/ct97.ps)

[4] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61. (http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Shary/IzvAN.ps)

[5] Shary S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. 1995. Vol. 39. P. 53–85. (http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Shary/LinTol.pdf)

[6] Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках // Красноярск, 1988 (Препр. АН. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр. № 5).

[7] Kulpa Z. Diagrammatic analysis of interval linear equations. Pt I // Reliable Computing. 2003. Vol. 9, N 1. P. 1–20.

[8] Kulpa Z. Diagrammatic analysis of interval linear equations. Pt II // Reliable Computing. 2003. Vol. 9, N 3. P. 205–228.

[9] Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 6 февраля 2004 г.,
в переработанном виде — 9 марта 2004 г.