Вычислительные технологии **Том 12, № 6, 2007**

ДОПУСКОВОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ КАК ПРОЕКЦИЯ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННОГО МНОЖЕСТВА*

И. А. Шарая
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: sharaya@ict.nsc.ru
http://www.nsc.ru/interval/sharaya

The representation of B. Kelling for the tolerable solution set of an interval linear system is improved. It is shown that one can use the improved representation to find vertices of the tolerable solution set.

Введение

Будем использовать обозначения, рекомендованные в [1].

Предметом обсуждения станет допусковое множество решений интервальной линейной системы уравнений. Напомним определение этого множества.

Определение. *Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ — *интервальная матрица размера* $m \times n$,
$\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m}$ — *интервальный вектор длины* m,
$x \in \mathbb{R}^{n}$ — *вещественный вектор длины* n,
допусковым множеством решений называется множество Ξ_{tol}, *которое задается одной из следующих эквивалентных формул*:

$$\Xi_{\text{tol}} := \left\{ x \;\middle|\; (\forall A \in \boldsymbol{A})\, (\exists\, b \in \boldsymbol{b})\ (Ax = b) \right\}, \tag{2}$$

$$\Xi_{\text{tol}} := \left\{ x \;\middle|\; (\forall A \in \boldsymbol{A})\ (Ax \in \boldsymbol{b}) \right\}, \tag{3}$$

$$\Xi_{\text{tol}} := \left\{ x \;\middle|\; (A \in \boldsymbol{A}) \Rightarrow (Ax \in \boldsymbol{b}) \right\}, \tag{4}$$

$$\Xi_{\text{tol}} := \left\{ x \;\middle|\; \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b} \right\}. \tag{5}$$

Из определения допускового множества решений не ясно, как находить это множество. Для нахождения и исследования Ξ_{tol} обычно ищут другие формы представления этого множества. Одному из таких представлений посвящена данная работа.

*Публикуется при финансовой поддержке Президентской программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-9886.2006.9).

1. Представления И. Рона и Б. Келлинг

В настоящее время известно несколько представлений допускового множества решений, благодаря которым можно решать различные задачи, связанные с этим множеством. В их числе два представления Иржи Рона [2]:

$$\Xi_{\mathrm{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; |\check{A}x - \check{b}| \leq \hat{b} - \hat{A}|x| \right\}, \tag{6}$$

$$\Xi_{\mathrm{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; (x = x' - x'')\,\&\, \left(\left\{ \begin{array}{rcr} \overline{A}x' - \underline{A}x'' & \leq & \overline{b}, \\ -\underline{A}x' + \overline{A}x'' & \leq & -\underline{b}, \\ x', x'' & \geq & 0 \end{array} \right. \right) \right\}, \tag{7}$$

и представление Биргит Келлинг [3]

$$\Xi_{\mathrm{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; (\exists y \in \mathbb{R}^n) \left(\left\{ \begin{array}{rcl} |\check{A}x - \check{b}| & \leq & \hat{b} - \hat{A}y, \\ |x| & \leq & y \end{array} \right. \right) \right\} = \tag{8}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; (\exists y \in \mathbb{R}^n) \left(\left\{ \begin{array}{rcl} \check{A}x - \check{b} & \leq & \hat{b} - \hat{A}y, \\ -\check{A}x + \check{b} & \leq & \hat{b} - \hat{A}y, \\ x & \leq & y, \\ -x & \leq & y \end{array} \right. \right) \right\}. \tag{9}$$

Поясним обозначения, использованные в формулах (6)–(9):

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — нижняя грань интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $(\underline{A})_{ij} = \min\limits_{a\in \boldsymbol{A}_{ij}} a$;

$\overline{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — верхняя грань интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $(\overline{A})_{ij} = \max\limits_{a\in \boldsymbol{A}_{ij}} a$;

$\check{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — середина интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $\check{A} = (\underline{A} + \overline{A})/2$;

$\hat{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — радиус интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $\hat{A} = (\overline{A} - \underline{A})/2$.

Аналогичные обозначения — $\underline{b}, \overline{b}, \check{b}, \hat{b}$ — использованы для интервального вектора $\boldsymbol{b}$. Операция взятия модуля вектора понимается покомпонентно, например, $|x|_j = |x_j|$.

С геометрической точки зрения представления (7) и (9) очень близки: оба они описывают допусковое множество решений как образ выпуклого многогранного множества, задаваемого системой из $2(m+n)$ неравенств в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, при линейном отображении в пространство $\mathbb{R}^n$. В представлении (7) это линейное отображение имеет вид $x = x' - x''$, а в представлении (9) линейное отображение представляет собой просто ортогональную проекцию на пространство значений переменной x.

Из сходства геометрии представлений (7) и (9) вытекают сходство методов исследования по этим представлениям и приложимость их к одинаковым задачам. Оба представления можно использовать для покоординатного оценивания допускового множества решений и для получения внешней интервальной оценки этого множества методами линейного программирования.

Мы предлагаем модифицировать представление (8)–(9), предложенное Б. Келлинг. Модифицированное представление по сравнению с исходным дает выгоду при наличии в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов.

Кроме того, мы покажем, что исходное и модифицированное представления можно использовать для нахождения вершин допускового множества решений.

2. Модификация представления Б. Келлинг

Теорема. *Для* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *и* Ξ_{tol} *из* (2)–(5)

$$\Xi_{\mathrm{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; (\exists y \in \mathbb{R}^{|I|}) \left(\left\{ \begin{array}{rcl} |\check{A}x - \check{b}| & \le & \hat{b} - \hat{A}_{:I}y, \\ |x_I| & \le & y \end{array} \right. \right) \right\}, \tag{10}$$

где I — *упорядоченное по возрастанию множество номеров невырожденных столбцов матрицы* $\boldsymbol{A}$, *т. е.* $I = \big\{ j \mid (\exists i)(\hat{A}_{ij} > 0) \big\}$;

$\mathbb{R}^{|I|}$ — *пространство, размерность которого равна числу элементов множества* I;

$\hat{A}_{:I}$ — *подматрица матрицы* $\hat{A}$, *в которую последовательно включены столбцы с номерами из множества* I;

x_I — *подвектор вектора* x, *составленный последовательно из компонент с номерами из множества* I.

Доказательство. Сначала заметим, что матрица $\hat{A}_{:I}$ получается из матрицы $\hat{A}$ удалением нулевых столбцов, и потому

$$\hat{A}|x| = \hat{A}_{:I}|x_I|. \tag{11}$$

Это свойство позволяет получить представление (10) как очевидное следствие из (8). Но в целом такой вывод нелогичен: сначала обосновывается более сложное и менее полезное представление (8), а потом оно упрощается до (10). Поэтому проведем доказательство теоремы на основании представления (6), слегка подправив доказательство из [3].

Покажем, что формулы (6) и (10) эквивалентны.

1. Пусть для $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $|\check{A}x - \check{b}| \le \hat{b} - \hat{A}|x|$. В силу (11) для x выполнено неравенство

$$|\check{A}x - \check{b}| \le \hat{b} - \hat{A}_{:I}|x_I|.$$

Взяв $y := |x_I|$, видим, что пара (x, y) удовлетворяет системе неравенств из (10).

2. Обратно, пусть для пары (x, y) выполнена система неравенств из (10). Поскольку матрица $\hat{A}_{:I}$ неотрицательна и $|x_I| \le y$, замена y на $|x_I|$ в первом из неравенств только усилит его и даст

$$|\check{A}x - \check{b}| \le \hat{b} - \hat{A}_{:I}|x_I|.$$

Воспользовавшись равенством (11), получим

$$|\check{A}x - \check{b}| \le \hat{b} - \hat{A}|x|. \qquad \square$$

Теорема доказана. Теперь сравним представления (10) и (8).

Для удобства обсуждения введем обозначения

$$\Xi_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+|I|} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} |\check{A}x - \check{b}| & \le & \hat{b} - \hat{A}_{:I}y, \\ |x_I| & \le & y \end{array} \right. \right\} = \tag{12}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+|I|} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} \check{A}x - \check{b} & \le & \hat{b} - \hat{A}_{:I}y, \\ -\check{A}x + \check{b} & \le & \hat{b} - \hat{A}_{:I}y, \\ x_I & \le & y, \\ -x_I & \le & y \end{array} \right. \right\}, \tag{13}$$

$$\Xi_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} |\check{A}x - \check{b}| & \leq & \hat{b} - \hat{A}y, \\ |x| & \leq & y \end{array} \right. \right\} = \tag{14}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} \check{A}x - \check{b} & \leq & \hat{b} - \hat{A}y, \\ -\check{A}x + \check{b} & \leq & \hat{b} - \hat{A}y, \\ x & \leq & y, \\ -x & \leq & y \end{array} \right. \right\}. \tag{15}$$

В новых обозначениях представление (8) означает, что допусковое множество решений Ξ_{tol} является ортогональной проекцией множества Ξ_2 на пространство значений переменной x:

$$\Xi_{\text{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; (x,y) \in \Xi_2 \right\}.$$

Аналогично, формула (10) означает, что допусковое множество решений Ξ_{tol} представляет собой проекцию множества Ξ_1:

$$\Xi_{\text{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; (x,y) \in \Xi_1 \right\}. \tag{16}$$

Отсюда легко получить следующее утверждение.

Утверждение 1. *Множества Ξ_1, Ξ_2 и Ξ_{tol} являются выпуклыми многогранными.*

Доказательство. Из (13) и (15) видно, что множества Ξ_1 и Ξ_2 описываются системами нестрогих линейных неравенств. Такие множества называются выпуклыми многогранными по определению. Множество Ξ_{tol} является выпуклым многогранным как проекция выпуклого многогранного множества Ξ_1 (или Ξ_2). $\square$

Утверждение 1 отражает сходство представлений (8) и (10), а в чем же их различие?

Первое различие, которое сразу бросается в глаза, в том, что при наличии в матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов множество Ξ_1 лежит в пространстве меньшей размерности (так как $n + |I| < 2n$) и описывается меньшим числом неравенств, чем множество Ξ_2 ($2(m + |I|) < 2(m + n)$). То есть при переходе от Ξ_2 к Ξ_1 размерность переменных уменьшается на $n - |I|$, а число неравенств, описывающих множество, уменьшается на $2(n - |I|)$.

Но есть и другие различия. Перечислим их в виде утверждений 2 и 3, которые справедливы для множества Ξ_1, но не верны для множества Ξ_2.

Утверждение 2. *Множество Ξ_1 ограничено по переменной y.*

Доказательство. Рассмотрим множество Ξ_1 в виде (12).

Из неравенства $|x_I| \leq y$ следует, что при всех x компоненты вектора y неотрицательны. Значит, множество Ξ_1 ограничено по y снизу.

Из неравенства $|\check{A}x - \check{b}| \leq \hat{b} - \hat{A}_{:I}y$ следует, что при всех x имеет место неравенство

$$\hat{A}_{:I}y \leq \hat{b}. \tag{17}$$

Матрица радиусов $\hat{A}_{:I}$ всегда неотрицательна. По выбору множества I она имеет в каждом столбце положительный элемент. Вектор y, как мы уже заметили, тоже неотрицателен. Поэтому из (17) следует, что ни одна компонента вектора y не может расти неограниченно:

$$(\forall j \in \{1, \dots, |I|\}) \;\left(y_j \leq \min_{i,\, \hat{A}_{ij'} > 0} (\hat{b}_i / \hat{A}_{ij'}) \right), \quad \text{где } \hat{A}_{:j'} \text{ — } j\text{-й столбец матрицы } \hat{A}_{:I}.$$

Значит, множество Ξ_1 ограничено по y сверху. □

Для сравнения приведем аналогичное утверждение для множества Ξ_2.

Утверждение 2′. *Множество Ξ_2 ограничено по переменной y тогда и только тогда, когда верно хоть одно из высказываний:*

1) Ξ_2 пустое множество;

2) матрица $\boldsymbol{A}$ не имеет вырожденных столбцов.

Доказательство. Пустое множество ограничено по определению. Поэтому нам надо доказать только, что для непустого множества Ξ_2 ограниченность по y эквивалентна отсутствию в матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов.

Утверждение о том, что отсутствие в матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов влечет ограниченность множества Ξ_2 по переменной y, доказывается так же, как утверждение 2.

Остается показать, что из ограниченности непустого множества Ξ_2 по переменной y следует отсутствие в матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов. Обозначим через $(\tilde{x}, \tilde{y})$ какую-нибудь точку множества Ξ_2. По определению (14) все точки $(\tilde{x}, y)$, для которых

$$\begin{cases} \hat{A}y & \leq & \hat{b} - |\check{A}\tilde{x} - \check{b}|, \\ y & \geq & |\tilde{x}|, \end{cases}$$

лежат в множестве Ξ_2. При $\hat{A}_{:j} = 0$ этой системе удовлетворяют точки с $y_k = \tilde{y}_k$, $k \in I \setminus \{j\}$, у которых компонента y_j может быть сколь угодно велика. Но множество Ξ_2 ограничено по y, значит, нулевых столбцов в матрице $\hat{A}$ быть не может. Отсутствие нулевых столбцов в матрице радиусов означает, что сама интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ не имеет вырожденных столбцов. □

Из утверждения 2 вытекает следующая связь между множествами Ξ_{tol} и Ξ_1.

Утверждение 3. *Множества Ξ_{tol} и Ξ_1 либо оба ограничены, либо оба неограничены.*

Доказательство. По (16) множество Ξ_{tol} является ортогональной проекцией множества Ξ_1 на пространство значений переменной x параллельно пространству значений переменной y. Поэтому из ограниченности множества Ξ_1 сразу вытекает ограниченность множества Ξ_{tol}. И обратно, если множество Ξ_{tol} ограничено, то, в силу утверждения 2, множество Ξ_1 тоже ограничено. □

А теперь вернемся к сходствам множеств Ξ_1 и Ξ_2 и докажем утверждения 4 и 5, общие для этих множеств.

Утверждение 4. *Всякая вершина множества Ξ_{tol} является ортогональной проекцией на пространство значений неизвестного x некоторой вершины множества Ξ_1 (множества Ξ_2), т. е.*

$$(\forall \tilde{x} \in \operatorname{vert} \Xi_{\text{tol}})(\exists \tilde{y} \in \mathbb{R}^{|I|})\big((\tilde{x}, \tilde{y}) \in \operatorname{vert} \Xi_1\big),$$

$$(\forall \tilde{x} \in \operatorname{vert} \Xi_{\text{tol}})(\exists \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n})\big((\tilde{x}, \tilde{y}) \in \operatorname{vert} \Xi_2\big).$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение 4 для множества Ξ_1.

Пусть $\tilde{x} \in \operatorname{vert} \Xi_{\text{tol}}$. Пересечем выпуклое многогранное множество Ξ_1 аффинным подпространством, проходящим через точку $(\tilde{x}, 0)$ и параллельным пространству значений переменной y. Получим выпуклое многогранное множество

$$\Xi_3 := \big\{ (\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+|I|} \,\big|\, (\tilde{x}, y) \in \Xi_1 \big\}.$$

По (16) множество Ξ_{tol} является проекцией множества Ξ_1 параллельно пространству значений переменной y, а точка $\tilde{x}$ по выбору лежит в множестве Ξ_{tol}, значит, Ξ_3 непусто.

Из утверждения 2 следует, что множество Ξ_3 ограничено.

Итак, Ξ_3 является непустым ограниченным выпуклым многогранным множеством. Значит, у него есть хоть одна вершина:

$$(\exists \tilde{y} \in \mathbb{R}^{|I|}) \ \big((\tilde{x}, \tilde{y}) \in \operatorname{vert} \Xi_3\big).$$

Покажем, что $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — также вершина множества Ξ_1. Для этого предположим противное: $\exists (x^1, y^1), (x^2, y^2) \in \Xi_1$ такие, что $(x^1, y^1) \neq (x^2, y^2)$ и

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2}\big[(x^1, y^1) + (x^2, y^2)\big]. \tag{18}$$

Возможны два случая.

I. $x^1 \neq x^2$. По (11) точки $x^1, x^2 \in \Xi_{\text{tol}}$. Из (18) $\tilde{x} = \dfrac{1}{2}(x^1 + x^2)$. Значит, $\tilde{x} \notin \operatorname{vert} \Xi_{\text{tol}}$. Это противоречит выбору точки $\tilde{x}$.

II. $x^1 = x^2$. Тогда $\tilde{x} = x^1 = x^2$ и обе точки $(\tilde{x}, y^1)$, $(\tilde{x}, y^2)$ лежат в Ξ_3. Они различны и в силу (18) $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \dfrac{1}{2}\big[(\tilde{x}, y^1) + (\tilde{x}, y^2)\big]$. Значит, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ не является вершиной множества Ξ_3, что противоречит выбору точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Для множества Ξ_1 утверждение 4 доказано.

Для множества Ξ_2 доказательство отличается лишь обоснованием возможности выбора вершины $(\tilde{x}, \tilde{y})$ из выпуклого многогранного множества

$$\Xi_3 := \big\{\, (\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^{2n} \,\big|\, (\tilde{x}, y) \in \Xi_2 \,\big\}.$$

Чтобы обосновать наличие вершин у множества Ξ_3, обратим внимание на то, что оно является подмножеством множества $\big\{(\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^{2n} \,\big|\, |\tilde{x}| \leq y\big\}$, которое представляет собой сдвиг заостренного конуса $(0, \mathbb{R}^n_+)$ на вектор $(\tilde{x}, |\tilde{x}|)$. Отсюда следует, что множество Ξ_3 не содержит прямых. А всякое непустое выпуклое многогранное множество, не содержащее прямых, имеет хоть одну вершину. □

Утверждение 4 можно использовать для поиска множества, содержащего все вершины Ξ_{tol}. Для этого надо найти все вершины множества Ξ_1 (множества Ξ_2) и взять их x-е координаты. Поскольку множества Ξ_1 и Ξ_2 описываются системами линейных неравенств, их вершины можно искать методами выпуклого анализа. Методы эти трудоемки, но, во-первых, для нас сейчас важна сама возможность отыскания вершин допускового множества решений Ξ_{tol}, а во-вторых, для решения этой задачи быстрых методов не существует в принципе. Для ускорения поиска вершин множества Ξ_1 (множества Ξ_2) можно использовать особенности системы неравенств, как показано в примере из раздела 4.

Кроме того, из утверждения 4 и из того, что допусковое множество решений является ортогональной проекцией множества Ξ_1 (множества Ξ_2), вытекает, что:

— отыскав одну из вершин множества Ξ_1 (множества Ξ_2) и взяв ее x-ю координату, мы получим точку из множества Ξ_{tol};

— отыскав несколько вершин множества Ξ_1 (множества Ξ_2) и взяв выпуклую оболочку их x-х координат, мы получим внутреннюю оценку множества Ξ_{tol} выпуклым многогранником;

— если известно, что допусковое множество решений ограничено, то его можно искать как выпуклую оболочку множества x-х координат вершин множества Ξ_1 (множества Ξ_2).

Последнее из этих трех следствий сформулируем более точно и докажем подробно в виде утверждения 5.

Утверждение 5. *Ограниченное допусковое множество решений является выпуклой оболочкой множества проекций вершин множества Ξ_1 (множества Ξ_2) на пространство значений переменной x, т. е.*

$$\Xi_{\text{tol}} = \operatorname{conv}\{\, x \,\big|\, (x, y) \in \operatorname{vert} \Xi_1 \,\}, \tag{19}$$

$$\Xi_{\text{tol}} = \operatorname{conv}\{\, x \,\big|\, (x, y) \in \operatorname{vert} \Xi_2 \,\}. \tag{20}$$

Доказательство проведем для множества Ξ_1. Для множества Ξ_2 оно аналогично.

По утверждению 1 допусковое множество решений Ξ_{tol} является выпуклым многогранным. По условию оно ограничено, значит является выпуклым многогранником и представимо как выпуклая оболочка своих вершин:

$$\Xi_{\text{tol}} = \operatorname{conv}\{\, x \mid x \in \operatorname{vert} \Xi_{\text{tol}} \,\}.$$

По утверждению 4 каждая вершина множества Ξ_{tol} является проекцией некоторой вершины множества Ξ_1. По (16), все остальные вершины множества Ξ_1 проецируются в множество Ξ_{tol}. Значит,

$$\Xi_{\text{tol}} = \operatorname{conv}\{\, x \mid (x, y) \in \operatorname{vert} \Xi_1 \,\}. \qquad \square$$

Утверждение 5, основанное на представлениях (8) и (10), позволяет находить допусковое множество решений, когда заранее известно, что это множество ограничено. А можно ли с помощью утверждения 5 искать допусковое множество решений, если мы не знаем, ограничено это множество или нет?

Можно. Для этого надо воспользоваться тем фактом, что Ξ_{tol} разложимо в сумму линейного подпространства с выпуклым многогранником [4]. При этом линейное подпространство можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x_I = 0, \\ A_{:P} x_P = 0, \end{cases}$$

где P – набор индексов вырожденных столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $P = \{1, \dots, n\} \setminus I$. А выпуклый многогранник, как показано в [5], может быть описан в виде ограниченного допускового множества решений, значит, его можно найти с помощью утверждения 5.

3. Пример

Приведем числовой пример для иллюстрации основных теоретических положений этой работы.

Рассмотрим допусковое множество решений для интервальной линейной системы уравнений (1) с интервальной матрицей $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & [-1, 3] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ и интервальным вектором $\boldsymbol{b} = [-2, 2] \in \mathbb{R}^1$, заданное в виде (5):

$$\Xi_{\text{tol}} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & [-1, 3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \subseteq [-2, 2] \right\}.$$

Первый столбец матрицы $\boldsymbol{A}$ вырожден, но отличен от нуля, поэтому матрица $\boldsymbol{A}$ не имеет линейно зависимых вырожденных столбцов. В [4] доказано, что допусковое множество решений для таких матриц ограничено. По утверждению 5 множество Ξ_{tol} в этом случае можно найти по формулам (19) (или (20)).

В нашем числовом примере

$$\begin{aligned} \check{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{b} = 0, \quad \underline{b} = -2, \\ \hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = 2, \quad \overline{b} = 2. \end{aligned}$$

Описание множества Ξ_2 в матричном виде в общем случае выглядит так:

$$\Xi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \check{A} & \hat{A} \\ -\check{A} & \hat{A} \\ E & -E \\ -E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где E — единичная матрица размерности n. А в нашем примере

$$\Xi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{21}$$

Множество Ξ_1 в общем случае имеет матричное описание

$$\Xi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+|I|} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \check{A}_{:P} & \check{A}_{:I} & \hat{A}_{:I} \\ -\check{A}_{:P} & -\check{A}_{:I} & \hat{A}_{:I} \\ 0 & E_I & -E_I \\ 0 & -E_I & -E_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ x_I \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{22}$$

где E_I — единичная матрица, размер которой равен числу элементов множества I, т. е. числу невырожденных столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$.

В нашем примере $P = \{1\}$, $I = \{2\}$, $\check{A}_{:P} = 1$, $\check{A}_{:I} = 1$, $\hat{A}_{:I} = 2$,

$$\Xi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{23}$$

Описание (23) множества Ξ_1 проще, чем описание (21) множества Ξ_2: из (21) удалена переменная y_1, а также соответствующий ей третий столбец матрицы и две строки неравенств, в которых была задействована эта переменная.

Обозначим через C матрицу, а через d — правую часть матричного неравенства из (22):

$$C := \begin{pmatrix} \check{A}_{:P} & \check{A}_{:I} & \hat{A}_{:I} \\ -\check{A}_{:P} & -\check{A}_{:I} & \hat{A}_{:I} \\ 0 & E_I & -E_I \\ 0 & -E_I & -E_I \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем примере
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из выпуклого анализа известно, что точка является вершиной множества
$$\Xi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+|I|} \;\middle|\; C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le d \right\}$$
тогда и только тогда, когда она описывается системой
$$\begin{cases} C' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d', \\ C'' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le d'', \end{cases} \tag{24}$$
где C' — невырожденная квадратная подматрица матрицы C размерности $n + |I|$; d' — соответствующий подвектор вектора d; $C'' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le d''$ — та часть системы $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le d$, которая не перешла в равенство $C' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d'$.

Взяв объединение решений всех систем вида (24), получим множество всех вершин Ξ_1.

Как решать системы вида (24)? Уравнение $C' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d'$ всегда имеет единственное решение. Для решения системы (24) надо найти это единственное решение уравнения $C' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d'$ и проверить, удовлетворяет ли оно неравенству $C'' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le d''$.

В рассматриваемом нами числовом примере имеется всего четыре системы, которые могут задавать вершины Ξ_1:
$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \\ \le \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ \le \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ \le \\ = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} \le \\ = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Их можно решить вручную. Для облегчения решения заметим, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ y = 1 \end{cases} \tag{25}$$
и
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = 0, \\ y = 0. \end{cases} \tag{26}$$

В общем случае для упрощения решения можно использовать аналогичные свойства:

$$\begin{pmatrix} \check{A}_{i:} & \hat{A}_{iI} \\ -\check{A}_{i:} & \hat{A}_{iI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{b}_i \\ -\underline{b}_i \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \check{A}_{i:} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{iI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{b}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \check{A}_{i:}x = \check{b}_i, \\ \hat{A}_{iI}y = \hat{b}_i \end{cases}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{i:} & -E_{i:} \\ 0 & -E_{i:} & -E_{i:} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ x_I \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & E_{i:} & 0 \\ 0 & 0 & E_{i:} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ x_I \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (x_I)_i = 0, \\ y_i = 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к числовому примеру и опираясь на свойства (25) и (26), можем переписать четыре рассматриваемые системы в виде

$$1)\ \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ y = 1, \\ x_2 = y, \\ -x_2 \le y; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ y = 1, \\ x_2 \le y, \\ x_2 = -y; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x_1 = 2, \\ -x_1 \le 2, \\ x_2 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x_1 \le 2, \\ -x_1 = 2, \\ x_2 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

и указать их решения:

$$1)\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 3)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 4)\ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы нашли все вершины множества Ξ_1. Отбросив у каждой вершины y-ю координату, получим множество, в котором лежат все вершины Ξ_{tol}:

$$\operatorname{vert} \Xi_{\text{tol}} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Уже отмечалось, что в нашем примере Ξ_{tol} ограничено и потому может быть найдено как

$$\Xi_{\text{tol}} = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

В силу утверждения 3, множество Ξ_1 тоже ограничено и потому является выпуклой оболочкой своих вершин. Теперь можно показать множества Ξ_{tol} и Ξ_1 графически (рис. 1). Чтобы избежать наложений, мы изобразили каждое множество в отдельной системе координат. А чтобы показать Ξ_{tol} как ортогональную проекцию множества Ξ_1 на пространство значений переменной x, мы сдвинули эти системы координат относительно друг друга только по переменной y.

Заметим, что в рассмотренном нами числовом примере каждая вершина выпуклого многогранника Ξ_1 проецируется в отдельную вершину выпуклого многогранника Ξ_{tol}. В общем случае это не так: с одной стороны, несколько вершин множества Ξ_1 может проецироваться в одну вершину множества Ξ_{tol}, а с другой стороны, проекции некоторых вершин множества Ξ_1 могут не являться вершинами множества Ξ_{tol}. Проиллюстрируем эти ситуации на основе уже рассмотренного нами числового примера, дополнив его ограничениями по переменной x. На рис. 2 изображены множества Ξ_1 и Ξ_{tol} при

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & [-1, 3] \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}.$$

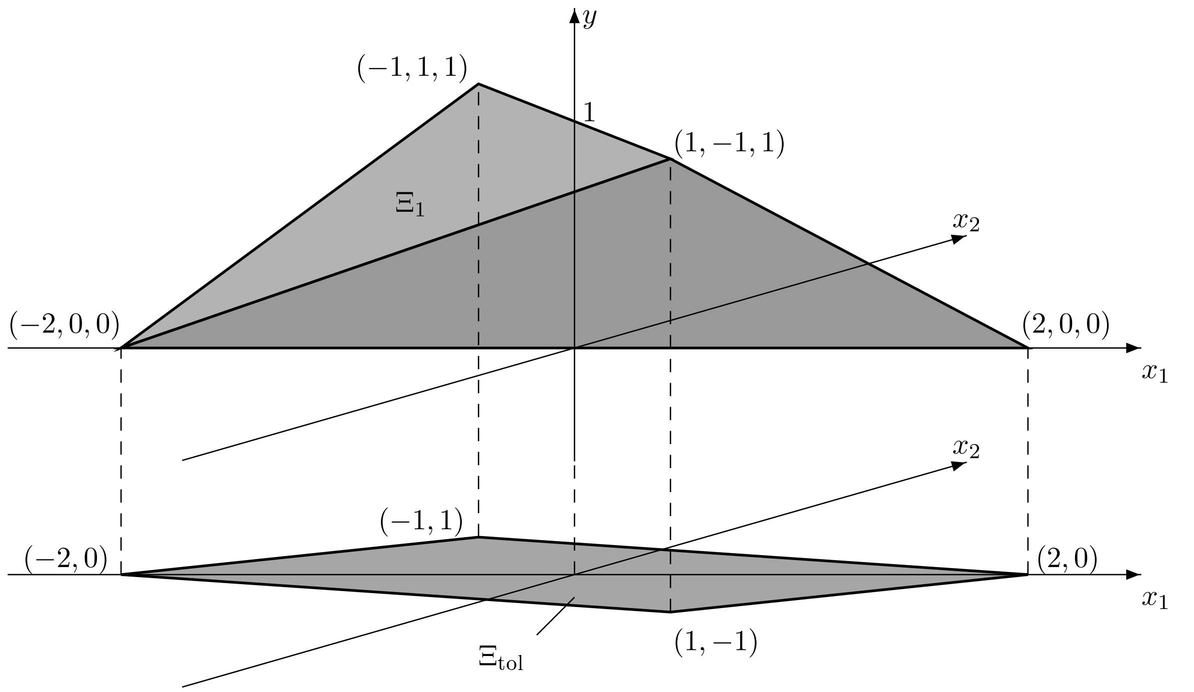

Рис. 1. Ограниченное допусковое множество решений Ξ_{tol} является проекцией выпуклого многогранника Ξ_1

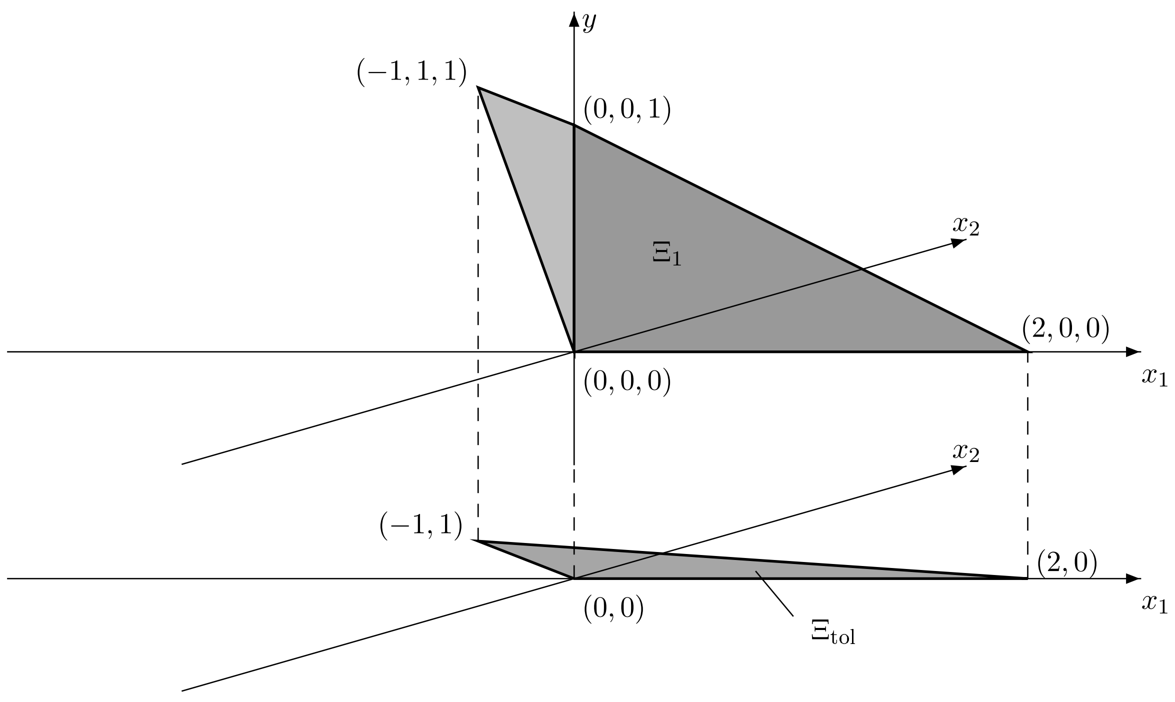

Рис. 2. Две вершины $(0,0,0)$ и $(0,0,1)$ множества Ξ_1 проецируются в одну вершину $(0,0)$ множества Ξ_{tol}

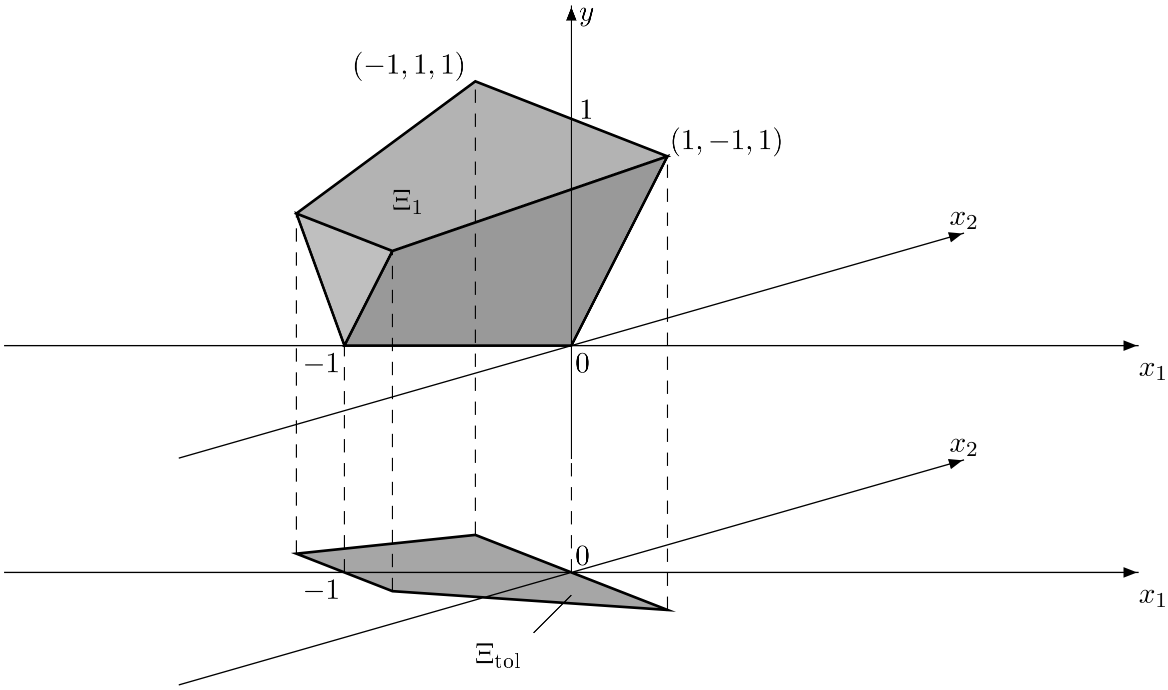

Рис. 3. Вершины $(-1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0)$ множества Ξ_1 проецируются в точки $(-1, 0)$ и $(0, 0)$, которые не являются вершинами множества Ξ_{tol}

Две вершины $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$ множества Ξ_1 проецируются в одну вершину $(0, 0)$ множества Ξ_{tol}. На рис. 3 изображены множества Ξ_1 и Ξ_{tol} при

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & [-1, 3] \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 0] \end{pmatrix}.$$

Вершины $(-1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0)$ множества Ξ_1 проецируются в точки $(-1, 0)$ и $(0, 0)$, которые не являются вершинами множества Ξ_{tol}.

Заключение

В данной работе улучшено представление Б. Келлинг для допускового множества решений. По сравнению с исходным модифицированное представление дает выгоду при наличии в матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов.

Новое представление можно применять при решении следующих задач, связанных с множеством Ξ_{tol}:

1) покоординатное оценивание;
2) внешнее интервальное оценивание;
3) поиск точки из множества;
4) внутреннее оценивание выпуклым многогранником;
5) точное вычисление всего множества.

В задачах 1 и 2 новое представление сравнимо с представлением И. Рона (7) и дает выгоду при наличии в матрице $\boldsymbol{A}$ вырожденных столбцов.

Для решения задач 3–5 существуют другие удобные представления. Так, для поиска точки $\tilde{x}$ из множества Ξ_{tol} хорошо подходит представление С.П. Шарого [6]

$$\Xi_{\text{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; \min_i \min_{a \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:}} \min\{-\underline{b}_i + ax,\ \overline{b}_i - ax\} \geq 0 \right\}$$

с правилом поиска

$$\tilde{x} = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(\min_i \min_{a \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:}} \min\{-\underline{b}_i + ax,\ \overline{b}_i - ax\} \Big).$$

Для отыскания допускового множества до последнего времени использовалось представление, которое независимо получили Х. Бек [7] и К.-У. Ян [8]:

$$\Xi_{\text{tol}} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} A'x \geq \underline{b}, \\ A''x \leq \overline{b}, \end{cases} \text{ где } A'_{:j} = \begin{cases} \underline{A}_{:j}, \text{ при } x_j \geq 0, \\ \overline{A}_{:j}, \text{ при } x_j \leq 0, \end{cases} A''_{:j} = \begin{cases} \overline{A}_{:j}, \text{ при } x_j \geq 0, \\ \underline{A}_{:j}, \text{ при } x_j \leq 0 \end{cases} \right\}. \quad (27)$$

Недавно для решения задач 1–5 появилось еще одно представление [4]:

$$\begin{aligned} \Xi_{\text{tol}} &= \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in \{1,\dots,m\})(\forall a \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:})\ (ax \in \boldsymbol{b}_i) \Big\} = \\ &= \bigcap_{i=1,\dots,m} \ \bigcap_{a \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:}} \big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid ax \in \boldsymbol{b}_i \big\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Представление (28) описывает допусковое множество решений интервальной линейной системы (1) как множество решений системы двойных линейных неравенств в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этой системе не более чем $m \cdot 2^n$ строк.

Вопрос о том, в какой из задач 1–5 какое представление допускового множества решений наиболее удобно, остается открытым. Ответ на него зависит от особенностей задачи, к которым можно отнести конкретные значения m и n и дополнительные условия на $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и x. Например, при требовании к неотрицательности вектора неизвестных x наиболее перспективным во всех задачах будет представление Бека—Яна (27). А для числового примера, рассмотренного в данной работе, наиболее удобно представление (28).

На выбор представления при решении задачи влияет также сложность численных методов для расчетов по этому представлению.

Список литературы

[1] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S., Shary S., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Интервальный анализ: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Иркутск: ИСЭМ СО РАН. 2005. Т. 4. С. 106–113. (`http://www.nsc.ru/interval/INotation.pdf`) (`http://www.nsc.ru/interval/Conferences/Baikal-2005/IntervalAnalysis.pdf`) (А также `http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int`)

[2] Rohn J. Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics, 1985. N.Y.: Springer Verlag, 1986. P. 157–158. (Lecture Notes in Computer Science. Vol. 212.)

[3] Kelling B. Geometrische Untersuchungen zur eingeschränkten Lösungsmenge linearer Intervallgleichungssysteme // ZAMM. 1994. Bd. 74, N 12. S. 625–628.

[4] Шарая И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 103–119. (`http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/ct05.pdf`)

[5] Шарая И.А. Переход к ограниченному допустимому множеству решений // Всероссийское совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия. СПб.: ВВМ, 2006. С. 135–139. (`http://www.nsc.ru/interval/Conferences/Interval-06/Proceedings.pdf`) (`http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/int06.pdf`)

[6] Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 147–162. (`http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/AiT.ps`)

[7] Beeck H. Über intervallanalytische Methoden bei linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten und Zusammenhänge mit der Fehleranalysis // Dissertation. TH München, 1972.

[8] Jahn K.U. Eine Theorie der Gleichungssysteme mit Intervallkoeffizienten // ZAMM. 1974. Bd. 54. S. 405–412.

Поступила в редакцию 6 июня 2007 г.,
в переработанном виде — 28 сентября 2007 г.