Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений со связанными коэффициентами*

И. А. Шарая, С. П. Шарый
Учреждение Российской академии наук
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `sharaya@ict.nsc.ru, shary@ict.nsc.ru`

Предложен метод отыскания допускового множества решений для интервальной системы линейных уравнений с выпуклой многогранной связью на коэффициенты. Доказано, что в этой задаче допусковое множество решений является пересечением конечного числа гиперполос, т. е. множеством решений конечной системы двусторонних нестрогих линейных неравенств. Предложены упрощенные варианты метода для некоторых частных случаев связи.

Ключевые слова: интервальная линейная система, допусковое множество решений, связанные параметры.

Введение

Интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с интервальной матрицей коэффициентов $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ и интервальной правой частью $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m}$ называется семейство вещественных систем линейных уравнений вида $Ax = b$, в котором матрица коэффициентов пробегает интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$, а правая часть — интервальный вектор $\boldsymbol{b}$.

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ можно определить различные множества решений [1 – 3]. Наиболее популярны объединенное, допусковое и управляемое множества решений.

В этой работе рассмотрим *допусковое множество решений* (ДМР). Оно обозначается через $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и состоит из всех возможных векторов x, таких что для всякой матрицы коэффициентов A из интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ значение произведения Ax не выходит за границы интервального вектора $\boldsymbol{b}$:

$$\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \Big\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\Big\}. \tag{1}$$

Связью на коэффициенты ИСЛАУ будем называть произвольное множество вещественных матриц размера m на n, рассматривая принадлежность этому множеству как дополнительное ограничение на возможные значения матрицы A. Связь на коэффициенты ИСЛАУ обозначим через $\mathcal{G}$. В этой работе ограничимся рассмотрением только таких связей $\mathcal{G}$, которые являются выпуклыми многогранными множествами. Договоримся называть их *выпуклыми многогранными связями*.

*Публикуется при финансовой поддержке Президентской программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-931.2008.9).

© ИВТ СО РАН, 2009.

Интервальной системой линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *со связью* $\mathcal{G}$ *на коэффициенты системы* назовем семейство уравнений $Ax = b$, в котором матрица коэффициентов пробегает множество $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$, а правая часть — интервал $\boldsymbol{b}$.

Допусковым множеством решений для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *со связью* $\mathcal{G}$ *на коэффициенты* назовем множество

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) := \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} = \varnothing, \\ \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \big(\forall S \in (\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})\big)\, (Sx \in \boldsymbol{b}) \Big\}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Из определений (1) и (2) очевидно, что при $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ наложение связи на коэффициенты способствует расширению допускового множества решений:

$$\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}).$$

Исследованиям интервальных линейных систем уравнений со связанными параметрами посвящено много публикаций. Среди их авторов — И. Рон, Х. Янссон, З.М. Румп, А.Ноймайер, Л.В. Колев, Е.Д. Попова, Б.С. Добронец, С.П. Шарый. Целая серия работ опубликована в соавторстве Г. Алефельдом, В. Крейновичем и Г. Майером. Но до сих пор в работах, посвященных интервальным линейным системам со связанными параметрами, рассматривалось только объединенное множество решений. Данная статья посвящена не объединенному, а допусковому множеству решений для ИСЛАУ со связанными параметрами.

Структура статьи такова: в разделе 1 приведены обозначения, необходимые понятия и факты, в разделе 2 изложен и обоснован метод отыскания ДМР для ИСЛАУ с выпуклой многогранной связью на коэффициенты, в разделах 3 и 4 предложены упрощенные варианты этого метода для частных случаев связи, в разделе 5 рассмотрен числовой пример на применение упрощенных вариантов метода и для демонстрации влияния связи коэффициентов ИСЛАУ на допусковое множество решений.

1. Обозначения, необходимые понятия и факты

В этой работе, начиная с введения, мы следуем обозначениям, принятым в [4]. В частности, $\mathbb{IR} := \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y\}$ — это множество интервалов на вещественной оси, $^*\mathbb{IR} := \{[x, y] \mid x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ x \leq y\}$ — множество расширенных интервалов.

Особенности использования шрифтов в статье следующие. Вещественные числа, векторы и матрицы набраны обычным математическим курсивом. Например, $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор длины n. Каллиграфический шрифт применяется для множеств, например, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ — подмножество в множестве всех прямоугольных вещественных матриц размера m на n. Жирный курсив, в соответствии с [4], используется для интервалов, интервальных векторов и интервальных матриц. Например, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ — интервальная матрица, имеющая m строк и n столбцов. Такая интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ представляет собой в $\mathbb{R}^{m \times n}$ множество специального типа — прямоугольный параллелепипед, размерность которого не выше mn, а ребра параллельны координатным осям.

Нижний индекс для вектора обозначает его компоненту или, с геометрической точки зрения, проекцию этого вектора на соответствующую координатную ось, например, для интервального вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ имеем $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)^\top$. Для матрицы пара нижних индексов указывает на ее элемент, например, для $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ через S_{ij} выражен элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, т. е. проекция S на ij-ю координатную ось. Двоеточие в качестве нижнего индекса обозначает весь диапазон значений этого индекса, например, для $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ через $S_{i:}$ обозначается i-я строка матрицы S, т. е. проекция матрицы S на координатное подпространство i-й строки:

$$S_{i:} = (S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{in}).$$

Аналогично нижний индекс для множества будем использовать для проекции множества на координатное подпространство, например, для $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ через $\mathcal{S}_{i:}$ будем выражать ортогональную проекцию множества $\mathcal{S}$ на координатное подпространство i-й строки, т. е. множество всех возможных значений i-й строки для матриц из множества $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_{i:} = \{S_{i:} \mid S \in \mathcal{S}\} = \{(S_{i1}, \ldots, S_{in}) \mid S \in \mathcal{S}\}.$$

Символ “$\odot$” будем применять для поэлементного умножения множеств, например, $\mathcal{S} \odot x = \{Sx \mid S \in \mathcal{S}\}$ для $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ — это множество всех произведений Sx, в которых вещественная матрица S является элементом множества $\mathcal{S}$. Символ “$\bigotimes$” будет, как обычно, обозначать прямое произведение, например, для множества $\mathcal{S} \subset \mathbb{IR}^n$ запись $\mathcal{S} = \bigotimes_j \mathcal{S}_j$ означает, что $\mathcal{S}$ совпадает с прямым произведением своих проекций на координатные оси.

Нам понадобятся некоторые определения и факты из выпуклого анализа, приведенные ниже.

Множество в конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ называется *выпуклым многогранным множеством*, если оно может быть получено как пересечение конечного числа замкнутых полупространств или совпадает со всем пространством. То есть выпуклое многогранное множество в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^{m\times n}$) — это такое множество, которое может быть описано конечной системой нестрогих линейных неравенств. Пересечение конечного числа выпуклых многогранных множеств является выпуклым многогранным множеством. Ограниченное выпуклое многогранное множество называется *выпуклым многогранником.*

Точка выпуклого многогранного множества называется его *вершиной*, если в этом множестве нет отрезка, для которого она служит внутренней точкой. Множество вершин выпуклого многогранного множества конечно. Множество всех вершин выпуклого многогранника $\mathcal{V}$ обозначим $\operatorname{vert}\mathcal{V}$. Всякий выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой множества своих вершин:

$$\mathcal{V} = \operatorname{conv}(\operatorname{vert}\mathcal{V}).$$

Пусть $c, x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{d} = [\underline{d}, \overline{d}] \in \mathbb{IR}$. Включение-принадлежность

$$c^\top x \in \boldsymbol{d}, \tag{3}$$

или, что то же самое, двустороннее нестрогое линейное неравенство вида

$$\underline{d} \le c^\top x \le \overline{d},$$

будем называть *элементарным линейным включением. Гиперполосой* назовем множество решений элементарного линейного включения относительно x. Гиперполоса представляет собой:

при $c \neq 0$, $\underline{d} \neq \overline{d}$ — множество, ограниченное двумя параллельными гиперплоскостями;

при $c \neq 0$, $\underline{d} = \overline{d}$ — гиперплоскость;

при $c = 0$, $0 \in \boldsymbol{d}$ — все пространство;

при $c = 0$, $0 \notin \boldsymbol{d}$ — пустое множество.

Множество решений конечной системы элементарных линейных включений является пересечением конечного числа гиперполос. Элементарное линейное включение вида (3), в котором интервал $\boldsymbol{d}$ вырожден (т. е. $\underline{d} = \overline{d}$), является линейным уравнением.

Наряду с элементарными нам понадобятся и матричные линейные включения, т. е. включения вида

$$Cx \in \boldsymbol{d}, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^n,\ C \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{d} \in \mathbb{IR}^m.$$

Там, где не возникает путаницы, слова «элементарное» и «матричное» для линейных включений будем для краткости опускать.

Для векторов $x \in \mathbb{R}^n$ соотношение вида

$$c^\top x \in \boldsymbol{d}, \qquad \text{где } c \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{d} \in {}^*\mathbb{IR},$$

будем называть *линейным ограничением*. При $\boldsymbol{d} \in \mathbb{IR}$ — это элементарное линейное включение, при $\boldsymbol{d} = [d, \infty]$ или $\boldsymbol{d} = [-\infty, d]$, где $d \in \mathbb{R}$, — это нестрогое линейное неравенство $c^\top x \geq d$ или $c^\top x \leq d$ соответственно.

2. Метод отыскания ДМР для ИСЛАУ с выпуклой многогранной связью на коэффициенты

2.1. Переход к решению включения $\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$, где $\mathcal{V}$ — выпуклый многогранник

Обратимся к отысканию допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связью $\mathcal{G}$ на коэффициенты системы. Прежде всего преобразуем определение этого множества, избавившись в (2) от кванторной приставки. Получим

$$\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} = \varnothing, \\ \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; (\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \Big\}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Теперь рассмотрим пересечение множеств $\boldsymbol{A}$ и $\mathcal{G}$. В качестве связи $\mathcal{G}$ мы договорились брать только выпуклые многогранные множества. Интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ представляет собой выпуклый многогранник (ограниченное выпуклое многогранное множество) в $\mathbb{R}^{m\times n}$. Поэтому пересечение $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ является выпуклым многогранным множеством (как пересечение двух выпуклых многогранных множеств) и ограничено (так как $\boldsymbol{A}$ ограниченное множество). Значит, $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ представляет собой выпуклый многогранник. Обозначим его через $\mathcal{V}$.

Таким образом, для отыскания ДМР системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с выпуклой многогранной связью $\mathcal{G}$ на коэффициенты нам надо научиться решать относительно x включение

$$\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}, \quad \text{где } \mathcal{V} \text{ — выпуклый многогранник в } \mathbb{R}^{m\times n}.$$

2.2. Свойства включения $\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$

В этом подразделе рассмотрим несколько свойств включения $\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$, которые помогут нам построить метод его решения. Первое из свойств имеет место для произвольного множества $\mathcal{S}$ матриц в $\mathbb{R}^{m\times n}$, а не только для выпуклого многогранника $\mathcal{V}$.

Свойство 1. *Пусть* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$. *Включение*

$$\mathcal{S} \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \tag{5}$$

и система из m включений

$$\mathop{\&}_{i} \ (\mathcal{S}_{i:} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i) \tag{6}$$

обозначают системы из одних и тех же элементарных линейных включений. Но число вхождений каждого элементарного линейного включения в систему, соответствующую (6), *не больше, чем в систему, соответствующую* (5).

Доказательство. По определению операции "$\odot$" имеем $\mathcal{S} \odot x = \{Sx \mid S \in \mathcal{S}\}$. Поэтому включение $\mathcal{S} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$ можно переписать в виде $\mathop{\&}_{S\in\mathcal{S}} (Sx \in \boldsymbol{b})$.

Для интервального вектора $\boldsymbol{b}$ всякое матричное линейное включение $Sx \in \boldsymbol{b}$ представляет собой систему элементарных линейных включений $\mathop{\&}_{i} (S_{i:}x \in \boldsymbol{b}_i)$. Значит, $\mathcal{S} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$ — это сжатая запись для

$$\mathop{\&}_{S\in\mathcal{S}} \mathop{\&}_{i} \ (S_{i:}x \in \boldsymbol{b}_i). \tag{7}$$

Перегруппируем элементарные линейные включения в (7):

$$\mathop{\&}_{i} \mathop{\&}_{S\in\mathcal{S}} \ (S_{i:}x \in \boldsymbol{b}_i).$$

Каждый блок вида $\mathop{\&}_{S\in\mathcal{S}} (S_{i:}x \in \boldsymbol{b}_i)$ заменим на $\mathop{\&}_{S_{i:}\in\mathcal{S}_{i:}} (S_{i:}x \in \boldsymbol{b}_i)$. При этом мы просто избавимся от тех заведомых повторов элементарных линейных включений, которые возникают из-за того, что разные матрицы S из множества $\mathcal{S}$ могут иметь одинаковую строку. Получим

$$\mathop{\&}_{i} \mathop{\&}_{S_{i:}\in\mathcal{S}_{i:}} \ (S_{i:}x \in \boldsymbol{b}_i). \tag{8}$$

Теперь представим выражение (8) в сжатом виде, воспользовавшись для этого еще раз определением операции "$\odot$":

$$\mathop{\&}_{i} \ (\mathcal{S}_{i:} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i).$$

□

Смысл свойства 1 в том, что переход от (5) к (6) состоит в исключении заведомых повторов элементарных линейных включений.

Свойство 2. *Пусть* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ *— выпуклый многогранник,* $x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$. *Тогда*

$$\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \iff (\operatorname{vert} \mathcal{V}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}. \tag{9}$$

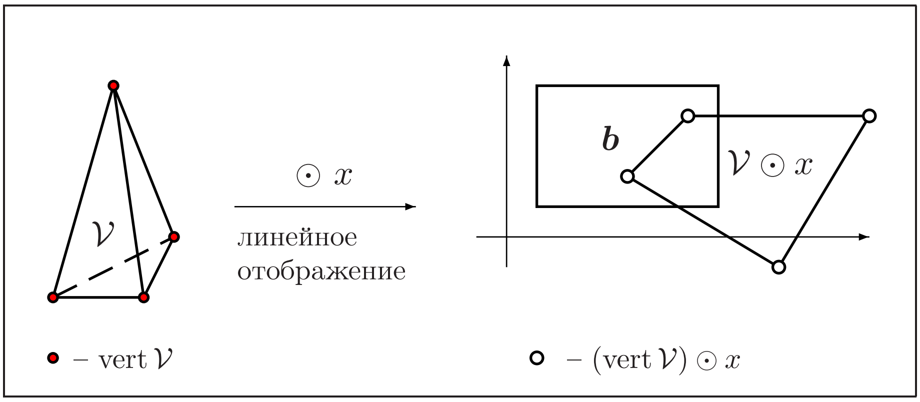

Рис. 1. К доказательству свойства 2

Доказательство (рис. 1).

$\Longrightarrow$) Очевидно, поскольку $\operatorname{vert}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$.

$\Longleftarrow$) Множество $\boldsymbol{b}$ выпукло, поэтому для всякого его подмножества взятие выпуклой оболочки не выводит из множества $\boldsymbol{b}$:

$$(\operatorname{vert}\mathcal{V}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{conv}\big((\operatorname{vert}\mathcal{V}) \odot x\big) \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Умножение на вектор x — линейное отображение. Оно переводит всякую выпуклую комбинацию конечного числа точек в комбинацию образов этих точек с теми же коэффициентами. Поэтому

$$\big(\operatorname{conv}(\operatorname{vert}\mathcal{V})\big) \odot x \subseteq \operatorname{conv}\big((\operatorname{vert}\mathcal{V}) \odot x\big).$$

Остается использовать тот факт, что многогранник $\mathcal{V}$ представляет собой выпуклую оболочку множества своих вершин: $\operatorname{conv}(\operatorname{vert}\mathcal{V}) = \mathcal{V}$. $\square$

Свойство 2 позволяет перейти от включения $\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$, обозначающего обычно бесконечную систему элементарных линейных включений, к включению $(\operatorname{vert}\mathcal{V}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$, всегда обозначающему *конечную* систему элементарных линейных включений. Суть этого перехода — удаление тех элементарных линейных включений, которые заведомо являются следствиями оставшихся.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ — выпуклый многогранник, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор, $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор. Тогда*

$$\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathop{\&}_{i} \Big(\big(\operatorname{vert}(\mathcal{V}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i\Big). \tag{10}$$

Доказательство. Воспользовавшись свойством 1, перепишем включение $\mathcal{V}\odot x \subseteq \boldsymbol{b}$ в виде

$$\mathop{\&}_{i} \; (\mathcal{V}_{i:} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i).$$

Проекции $\mathcal{V}_{i:}$, $i = 1, \ldots, m$, выпуклого многогранника $\mathcal{V}$ сами являются выпуклыми многогранниками. Поэтому для них имеет место свойство 2:

$$\mathcal{V}_{i:} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i \iff \big(\operatorname{vert}(\mathcal{V}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i.$$

$\square$

В утверждении 1, как и в свойстве 2, мы получили конечную систему элементарных линейных включений, эквивалентную включению $\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$. Давайте сравним эти системы. Для удобства сравнения запишем их в сходном виде, выделяя в каждой системе в i-й блок строки с правой частью $\boldsymbol{b}_i$:

Система	Из формулы	Исходный вид	Блочный вид
1	(9)	$(\operatorname{vert}\mathcal{V}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$	$\underset{i}{\&}\Big(\underset{V\in\operatorname{vert}\mathcal{V}}{\&} V_{i:}x \subseteq \boldsymbol{b}_i\Big)$
2	(10)	$\underset{i}{\&}\Big(\big(\operatorname{vert}(\mathcal{V}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i\Big)$	$\underset{i}{\&}\Big(\underset{v\in\operatorname{vert}(\mathcal{V}_{i:})}{\&} vx \subseteq \boldsymbol{b}_i\Big)$

При таком блочном представлении, где к тому же выписаны явно все элементарные линейные включения, становится очевидным, что система 2 является подсистемой системы 1. Поясним это с помощью рис. 2. Строки коэффициентов i-го блока системы 1 соответствуют проекциям $V_{i:}$ всех вершин V многогранника $\mathcal{V}$. А строки коэффициентов i-го блока системы 2 соответствуют только вершинам проекции $\mathcal{V}_{i:}$ многогранника $\mathcal{V}$. Для каждой вершины многогранника $\mathcal{V}_{i:}$ можно указать проецируемую в нее вершину многогранника $\mathcal{V}$. При этом часть вершин многогранника $\mathcal{V}$ может проецироваться в точки, которые не являются вершинами многогранника $\mathcal{V}_{i:}$. Может получиться и так, что несколько вершин многогранника $\mathcal{V}$ проецируются в одну вершину многогранника $\mathcal{V}_{i:}$. Итак, из двух сравниваемых эквивалентных конечных систем элементарных включений система 2 предпочтительнее, поскольку она является подсистемой системы 1.

Заметим, что утверждение 1 удобно использовать при нахождении ДМР для ИСЛАУ без связей. Действительно, исключив в определении (1) кванторную приставку, получим, что $\Xi_{\rm tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ совпадает с множеством решений включения $\boldsymbol{A} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$. Интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ — это выпуклый многогранник, и из утверждения 1 следует, что $\Xi_{\rm tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ описывается системой

$$\underset{i}{\&}\Big(\big(\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i\Big). \tag{11}$$

Множество $\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})$ содержит не более 2^n элементов, поэтому запись (11) обозначает систему элементарных линейных включений, в которой не более $m{\cdot}2^n$ строк. Например,

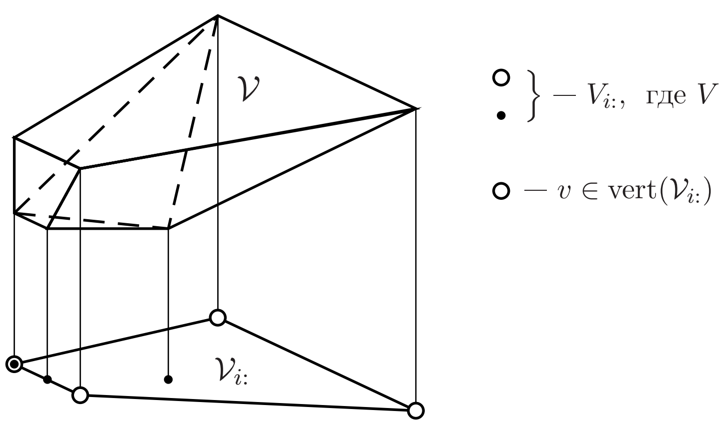

Рис. 2. Проекции вершин многогранника $\mathcal{V}$ и вершины его проекции

допусковое множество решений для системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [3,4] \\ 5 & [6,7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,6] \\ [-1,0] \end{pmatrix}$$

описывается конечной системой элементарных линейных включений:

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \in [0,6], \\ 2x_1 + 3x_2 \in [0,6], \\ 1x_1 + 4x_2 \in [0,6], \\ 2x_1 + 4x_2 \in [0,6], \\ 5x_1 + 6x_2 \in [-1,0], \\ 5x_1 + 7x_2 \in [-1,0]. \end{cases}$$

2.3. Метод отыскания ДМР

Вернемся от рассмотрения свойств включения $\mathcal{V} \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$ к поиску допускового множества решений $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$ для ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с выпуклой многогранной связью $\mathcal{G}$ на коэффициенты системы. Утверждение 1, доказанное в подразделе 2.2, завершает следующую цепочку рассуждений.

1. Сначала в подразделе 2.1, преобразовав определение (2), мы получили равенство (4). Оно означает, что если $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ пусто, то $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$ тоже пусто, а если $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ непусто, то $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$ совпадает с множеством решений включения $(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}$ относительно неизвестного x.

2. Далее в подразделе 2.1 мы отметили, что для выпуклого многогранного множества $\mathcal{G}$ пересечение $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ является выпуклым многогранником.

3. И наконец, на основании утверждения 1 стало возможным заменить включение

$$(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}, \quad \text{где } \boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} \text{ — выпуклый многогранник},$$

конечной системой элементарных линейных включений, сжатая форма которой

$$\mathop{\&}_{i} \Big(\big(\operatorname{vert}((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i \Big).$$

Эта цепочка рассуждений

1) доказывает, что допусковое множество решений для ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с выпуклой многогранной связью $\mathcal{G}$ на коэффициенты системы с геометрической точки зрения представляет собой пересечение конечного числа гиперполос, потому что оно либо пусто, либо описывается конечной системой элементарных линейных включений;

2) позволяет предложить следующий метод отыскания множества $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$:

Метод отыскания допускового множества решений для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *с выпуклой многогранной связью* $\mathcal{G}$ *на коэффициенты системы*		(12)
Этап I.	Найти множества $\operatorname{vert}\big((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:}\big)$, $i = 1, \ldots, m$. Если хотя бы одно из них пустое, то $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$. Если все множества непусты, перейти к этапу II.	
Этап II.	Дать описание множества решений конечной системы элементарных линейных включений $\mathop{\&}\limits_{i} \Big(\big(\operatorname{vert}((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{b}_i\Big)$ в нужном для использования виде.	

Мы не будем конкретизировать этап II метода (12) из-за обилия соответствующих ему постановок задач (среди которых — получение оптимальных двойственных описаний и отыскание оценок множествами различной формы и с разными требованиями к расположению по отношению к оцениваемому множеству), а также из-за того, что эти задачи уже достаточно известны. Договоримся считать, что мы нашли множество $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$, если нам удалось выполнить этап I.

Для выполнения этапа I метода (12) можно предложить следующий порядок действий:

Этап I метода (12) — *универсальный вариант*

1. Найти описание выпуклого многогранного множества $\mathcal{G}$ в виде конечной системы линейных неравенств.
2. Включить в эту систему неравенства, выражающие принадлежность интервальной матрице $\boldsymbol{A}$.
3. Найти из полученной системы множество вершин многогранника $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$.
4. Если полученное множество пусто, то $\Xi_{\text{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$.
   Если множество вершин многогранника $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ непусто, спроецировать это множество на координатные подпространства отдельных строк и удалить из проекций лишние точки.

Этот путь достаточно универсальный, но трудоемкий.

Учитывая конкретный вид начальных данных, этот путь можно сократить. В разделах 3 и 4 мы рассмотрим два специальных случая связи $\mathcal{G}$ и предложим для этих случаев более простые, по сравнению с универсальным, способы выполнения этапа I метода (12).

3. Случай 1

3.1. Особенности выпуклой многогранной связи $\mathcal{G}$

Рассмотрим случай, когда выпуклая многогранная связь $\mathcal{G}$ удовлетворяет следующим трем условиям.

1. Множество $\mathcal{G}$ задано в виде конечной системы линейных ограничений:

$$G \in \mathcal{G} \iff \mathop{\&}_{k=1,\ldots,q} \left(\sum_{i,j} C_{kij} G_{ij} \in \boldsymbol{d}_k \right), \tag{13}$$

где $q \in \mathbb{N}$, $C_{kij} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{d}_k \in {}^*\mathbb{IR}$.

2. Каждый элемент матрицы G может входить с ненулевым коэффициентом только в одно из линейных ограничений системы (13), т. е.

$$C_{lij} \neq 0 \implies \big(\forall k \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{l\}\big) \, \big(C_{kij} = 0\big).$$

3. Никакие два элемента из одной строки матрицы G не могут входить с ненулевыми коэффициентами в одно и то же линейное ограничение системы (13), т. е.

$$C_{kir} \neq 0 \implies \big(\forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{r\}\big) \, \big(C_{kij} = 0\big).$$

В виде, соответствующем случаю 1, можно, в частности, представить множество симметричных матриц и множество кососимметричных матриц. Например, для квадратных матриц размера n описание множества кососимметричных матриц, соответствующее случаю 1, имеет вид

$$G_{ij} + G_{ji} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

3.2. Влияние особенностей связи на этап I метода (12)

Обозначим как Inx множество всевозможных пар индексов (ij) для элементов матрицы G:

$$\mathrm{Inx} = \{(ij) \mid i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Через Inx_k обозначим множество тех пар индексов (ij), для которых G_{ij} входит в k-е ограничение с ненулевым коэффициентом:

$$\mathrm{Inx}_k = \{(ij) \in \mathrm{Inx} \mid C_{ijk} \neq 0\}.$$

Пересечение множеств $\boldsymbol{A}$ и $\mathcal{G}$ обозначим буквой $\mathcal{S}$.

В силу первого условия на множество $\mathcal{G}$ матрицы S из множества $\mathcal{S}$ описываются системой линейных ограничений

$$\begin{cases} \mathop{\&}\limits_{k=1,\ldots,q} \left(\sum\limits_{(ij)\in \mathrm{Inx}_k} C_{kij} S_{ij} \in \boldsymbol{d}_k \right), \\ \mathop{\&}\limits_{(ij)\in \mathrm{Inx}} \ (S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}). \end{cases}$$

Пользуясь вторым условием на множество $\mathcal{G}$, разобьем эту систему на блоки так, чтобы разные блоки не имели общих переменных:

$$\begin{cases} \mathop{\&}\limits_{k=1,\ldots,q} \begin{cases} \sum\limits_{(ij)\in \mathrm{Inx}_k} C_{kij} S_{ij} \in \boldsymbol{d}_k, \\ S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}, \quad (ij) \in \mathrm{Inx}_k; \end{cases} \\ \mathop{\&}\limits_{(ij)\,\in\, \mathrm{Inx} \setminus \bigcup_k \mathrm{Inx}_k} (S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь отдельный блок соответствует каждому индексу k. Кроме того, отдельный блок, состоящий из одного ограничения $S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}$, соответствует каждой паре индексов (ij), для которой $(\forall k)(C_{kij} = 0)$. При таком разбиении очевидно, что значения переменных S_{ij}, входящих в один блок, не зависят от значений переменных из других блоков.

Привлекая третье условие на множество $\mathcal{G}$, получаем, что элементы одной строки матрицы S не могут входить в один блок. Поэтому для каждого i переменные S_{ij}, $j = 1, \dots, n$, будут независимы между собой. Отсюда

$$(\forall i) \quad \left(\mathcal{S}_{i:} = \bigotimes_j \mathcal{S}_{ij} \right).$$

Определим множество $\mathcal{S}_{ij}$ из единственного блока системы (14), содержащего переменную S_{ij}.

Если $(ij) \in \mathrm{Inx}_k$, то единственный блок, содержащий переменную S_{ij}, имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{(lr)\in \mathrm{Inx}_k} C_{klr} S_{lr} \in \boldsymbol{d}_k, \\ &S_{lr} \in \boldsymbol{A}_{lr}, \quad (lr) \in \mathrm{Inx}_k\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Перепишем (15), выделяя переменную S_{ij}:

$$S_{ij} \in \left(\boldsymbol{d}_k - \sum_{(lr)\,\in\,\mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}} C_{klr} S_{lr} \right) \Big/ \, C_{kij}, \tag{16a}$$

$$S_{lr} \in \boldsymbol{A}_{lr}, \quad (lr) \in \mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}, \tag{16b}$$

$$S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}. \tag{16c}$$

Учитывая специальный вид ограничения (16c), имеем

$$\mathcal{S}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{ij}, \tag{17}$$

где $\widetilde{\mathcal{S}}_{ij}$ — ij-я проекция множества решений системы включений (16a) и (16b).

Ограничения (16a) и (16b) позволяют мыслить множество $\widetilde{\mathcal{S}}_{ij}$ как множество значений многозначной функции

$$\left(\boldsymbol{d}_k - \sum_{(lr)\,\in\,\mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}} C_{klr} S_{lr} \right) \Big/ \, C_{kij}$$

на интервале $\bigotimes_{(lr)\in \mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}} \boldsymbol{A}_{lr}$. При таком взгляде на $\widetilde{\mathcal{S}}_{ij}$ становится очевидно, что

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{ij} = \bigcup_{\substack{S_{lr}\in \boldsymbol{A}_{lr},\\ (lr)\,\in\,\mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}}} \left(\boldsymbol{d}_k - \sum_{(lr)\,\in\,\mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}} C_{klr} S_{lr} \right) \Big/ \, C_{kij}.$$

Взятие объединения не представляет сложности, так как рассматриваемая функция задана рациональным выражением с единственным вхождением каждой переменной. Получаем

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{ij} = \left(\boldsymbol{d}_k - \sum_{(lr)\,\in\,\mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}} C_{klr} \boldsymbol{A}_{lr} \right) \Big/ \, C_{kij}. \tag{18}$$

(Этот же результат для множества $\widetilde{\mathcal{S}}_{ij}$ можно получить более длинным путем, выполнив добросовестно все преобразования метода Фурье для исключения переменных S_{lr}, $(lr) \in \mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}$, из системы включений (16a) и (16b).)

Таким образом, для $(ij) \in \mathrm{Inx}_k$ множество $\mathcal{S}_{ij}$ определяется из (17) и (18). Если же $(ij) \in \mathrm{Inx} \setminus \bigcup\limits_k \mathrm{Inx}_k$, то единственный блок, содержащий переменную S_{ij}, имеет вид $S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}$, и потому $\mathcal{S}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij}$. В целом,

$$\mathcal{S}_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij} \bigcap \left(\left(\boldsymbol{d}_k - \sum\limits_{(lr)\,\in\,\mathrm{Inx}_k \setminus \{(ij)\}} C_{klr} \boldsymbol{A}_{lr} \right) \Big/ \, C_{kij} \right), & \text{если } (ij) \in \mathrm{Inx}_k, \\ \boldsymbol{A}_{ij}, \quad \text{если } (ij) \in \mathrm{Inx} \setminus \bigcup\limits_k \mathrm{Inx}_k \,. \end{cases} \tag{19}$$

Множество $\mathcal{S}_{ij}$ пусто или является интервалом.

Итак, мы показали, что для выпуклой многогранной связи $\mathcal{G}$, соответствующей случаю 1, множество $(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:}$ является прямым произведением множеств $\mathcal{S}_{ij}$, вычисляемых по правилу (19). Поэтому этап I метода (12) для случая 1 можно выполнить следующим образом:

Этап I метода (12) *для случая 1*

1. Найти множества $\mathcal{S}_{ij}$, $(ij) \in \mathrm{Inx}$, по правилу (19).
2. Если хотя бы одно из этих множеств пусто, то $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$. Если все множества $\mathcal{S}_{ij}$, $(ij) \in \mathrm{Inx}$, отличны от пустого, определить $\mathrm{vert}\left((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:}\right)$ для каждого индекса i как множество вершин интервального вектора $\bigotimes\limits_j \mathcal{S}_{ij}$ и перейти к этапу II метода (12).

(20)

3.3. Пример постановки задачи

В качестве примера постановки задачи, соответствующей случаю 1, рассмотрим задачу об отыскании допускового множества решений для интервальной модели межотраслевого баланса с условием рентабельности отраслей. Аналогичный пример, но только для объединенного множества решений, был решен И. Роном в [5].

Возьмем уравнение Леонтьева межотраслевого баланса в виде

$$(I - Q)x = y, \tag{21}$$

в котором n — число секторов (отраслей) модели, I — единичная матрица размера n, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица коэффициентов прямых затрат, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор объемов производства, $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор объемов конечного продукта. Заметим, что число $1 - \sum_i Q_{ij}$, равное сумме элементов j-го столбца матрицы $I - Q$, представляет собой добавленную стоимость на единицу производства в j-м секторе экономики. Относительно уравнения (21) рассмотрим следующую задачу.

Задача

Дано:

1) для значений коэффициентов прямых затрат Q_{ij} известны только границы, т. е. дана такая интервальная матрица $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, что $Q \in \boldsymbol{Q}$;
2) для компонент y_i вектора объемов конечного продукта тоже указаны только границы, т. е. задан интервальный вектор $\boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}^n$;
3) заданы границы добавленной стоимости на единицу производства в каждом секторе экономики в виде интервального вектора $\boldsymbol{d} \in \mathbb{IR}^n$. (22)

Найти

все такие векторы объемов производства x, при которых для всех матриц коэффициентов прямых затрат Q из $\boldsymbol{Q}$, удовлетворяющих условиям $1 - \sum_i Q_{ij} \in \boldsymbol{d}_j$, $j = 1, \dots, n$, вектор объемов конечного продукта y не выйдет за границы интервального вектора $\boldsymbol{y}$.

С точки зрения принятых нами обозначений и терминов, это задача об отыскании множества допусковых решений для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A} = I - \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}$, со связью $\mathcal{G}$, ограничивающей сумму элементов каждого столбца матрицы коэффициентов.

Покажем, что связь $\mathcal{G}$ соответствует условиям случая 1.

1. Связь $\mathcal{G}$ описывается конечной системой линейных ограничений:

$$G \in \mathcal{G} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathop{\&}_{j=1,\dots,n} \left(\sum_i G_{ij} \in \boldsymbol{d}_j \right).$$

(При согласовании с (13) надо считать, что $C_{kij} = 1$ при $k = j$ и 0 — во всех остальных случаях. Затем надо заменить k на j и исключить ненужные индексы.)

2. Каждый элемент G_{ij} матрицы G входит только в одно ограничение, а именно в ограничение с номером j.

3. Ни в каком из ограничений не встречаются элементы из одной строки, поскольку в каждое ограничение входят только элементы одного столбца.

Итак, все требования к связи выполнены, и для решения задачи можно воспользоваться методом (12) в упрощенном варианте, соответствующем случаю 1.

Этап I метода (12)

1. С учетом конкретной связи правило (19) для определения множеств $\mathcal{S}_{ij}$, где $\mathcal{S} = \boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$, примет вид

$$\mathcal{S}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} \cap \left(\boldsymbol{d}_j - \sum_{p\neq i} \boldsymbol{A}_{pj} \right).$$

Поскольку $\boldsymbol{A} = I - \boldsymbol{Q}$, это правило можно переписать в терминах начальных данных:

$$\mathcal{S}_{ij} = \begin{cases} (1 - \boldsymbol{Q}_{ii}) \cap \left(\boldsymbol{d}_j + \sum\limits_{p\neq i} \boldsymbol{Q}_{pj} \right), & \text{если } i = j, \\ (-\boldsymbol{Q}_{ij}) \cap \left(\boldsymbol{d}_j - 1 + \sum\limits_{p\neq i} \boldsymbol{Q}_{pj} \right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Если какое-то из множеств $\mathcal{S}_{ij}$, $(ij) \in \mathrm{Inx}$, пусто, то множество решений задачи (22) тоже пусто.

Если все множества S_{ij}, $(ij) \in \mathrm{Inx}$, непустые, то множество решений задачи (22) описывается системой

$$\mathop{\&}_{i} \Big(\big(\mathrm{vert}(\mathcal{S}_{i:})\big) \odot x \subseteq \boldsymbol{y}_i\Big), \quad \text{где } \mathcal{S}_{i:} = \bigotimes_{j} \mathcal{S}_{ij}, \ i = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Этап II метода (12)
Дать описание множества решений конечной системы элементарных линейных включений (23) в нужном для использования виде. На этом этапе можно учесть типичное для задачи (22) требование неотрицательности вектора объемов производства, добавив к системе (23) неравенство $x \geq 0$.

4. Случай 2

4.1. Особенности выпуклой многогранной связи $\mathcal{G}$

Перейдем к случаю, когда выпуклая многогранная связь $\mathcal{G}$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Множество $\mathcal{G}$ задано в параметрической форме

$$\mathcal{G} = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^q} G(p), \quad \text{где } p \text{ — вектор параметров,}$$

причем каждый элемент $G_{ij}(p)$ матрицы $G(p)$ пропорционален одной из компонент вектора параметров:

$$G_{ij}(p) = c_{ij} p_{k(i,j)}, \quad c_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad p_{k(i,j)} \in \{p_1, \ldots, p_q\}.$$

2. Никакие два элемента матрицы $G(p)$, пропорциональные одной компоненте вектора параметров, не лежат в одной строке, т. е. для всех $k = 1, \ldots, q$ имеет место следование

$$(il) \in \mathrm{Inx}_k \implies \big(\forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{l\}\big) \ \big((ij) \notin \mathrm{Inx}_k\big),$$

где $\mathrm{Inx}_k := \big\{(ij) \mid G_{ij}(p) = c_{ij} p_k\big\}$ — множество пар индексов всех тех элементов матрицы $G(p)$, которые пропорциональны параметру p_k.

Очевидно, что в рассматриваемом случае множество $\mathcal{G}$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^{m \times n}$.

В виде, соответствующем случаю 2, можно представить, в частности, следующие множества матриц: симметричные матрицы, кососимметричные матрицы, циклические матрицы, матрицы Ганкеля, матрицы Гурвица, матрицы Тёплица. Например, для множества кососимметричных матриц одна из возможных параметризаций, соответствующих случаю 2, имеет вид

$$G(p) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ -p_2 & p_{n+1} & p_{n+2} & \cdots & p_{2n-1} \\ -p_3 & -p_{n+2} & p_{2n} & \cdots & p_{3n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_n & -p_{2n-1} & -p_{3n-3} & \cdots & p_{n(n+1)/2} \end{pmatrix}, \quad p_1, \ldots, p_{n(n+1)/2} \in \mathbb{R}.$$

4.2. Влияние особенностей связи на этап I метода (12)

Если связь $\mathcal{G}$ удовлетворяет первому условию случая 2, то множество $\mathcal{S} := \boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}$ состоит из всех таких матриц S, что

$$\begin{cases} \mathop{\&}\limits_{k=1,\dots,q} \bigl(S_{ij} = c_{ij} p_k, \quad (ij) \in \mathrm{Inx}_k\bigr), \\ S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{24}$$

Заметим, что в (24) не известны не только значения переменных S_{ij} при $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$, но и значения параметров p_k при $k = 1, \dots, q$.

Перепишем (24) в виде системы из q блоков:

$$\mathop{\&}\limits_{k=1,\dots,q} \begin{cases} S_{ij} = c_{ij} p_k, & (ij) \in \mathrm{Inx}_k, \\ S_{ij} \in \boldsymbol{A}_{ij}, & (ij) \in \mathrm{Inx}_k\,. \end{cases} \tag{25}$$

В (25) никакие два блока не имеют общих переменных, поэтому значения переменных S_{ij}, $(ij) \in \mathrm{Inx}_k$, из k-го блока не зависят от значений переменных из других блоков.

В силу второго требования к множеству $\mathcal{G}$ элементы одной строки матрицы S не могут входить в один блок. Поэтому для каждого i переменные S_{ij}, $j = 1, \dots, n$, будут независимы между собой, т. е. $(\forall i)\ \bigl(\mathcal{S}_{i:} = \bigotimes_j \mathcal{S}_{ij}\bigr)$.

Найдем множество $\mathcal{S}_{ij}$ из единственного блока системы (25), содержащего переменную S_{ij}. Если $(ij) \in \mathrm{Inx}_k$, это будет блок

$$\begin{cases} S_{lr} = c_{lr} p_k, & (lr) \in \mathrm{Inx}_k, \\ S_{lr} \in \boldsymbol{A}_{lr}, & (lr) \in \mathrm{Inx}_k\,. \end{cases}$$

После очевидных эквивалентных преобразований он примет вид

$$\begin{cases} S_{lr} = c_{lr} p_k, & (lr) \in \mathrm{Inx}_k, \\ c_{lr} p_k \in \boldsymbol{A}_{lr}, & (lr) \in \mathrm{Inx}_k\,. \end{cases}$$

Равенства $S_{lr} = c_{lr} p_k$, $(lr) \in \mathrm{Inx}_k$, при $p_k \in \mathbb{R}$ описывают в пространстве переменных S_{lr}, $(lr) \in \mathrm{Inx}_k$, прямую, проходящую через начало координат. Так как все константы c_{lr}, $(lr) \in \mathrm{Inx}_k$, отличны от нуля, эта прямая не перпендикулярна никакой из координатных осей. Каждое включение $c_{lr} p_k \in \boldsymbol{A}_{lr}$ при $c_{lr} \neq 0$ ограничивает множество значений параметра p_k отрезком $\boldsymbol{A}_{lr}/c_{lr}$. Учитывая действие всех таких ограничений, получим, что множество значений параметра p_k равно $\bigcap_{(lr) \in \mathrm{Inx}_k} \boldsymbol{A}_{lr}/c_{lr}$. Это множество либо пусто, либо является интервалом.

Итак,

$$\begin{cases} S_{lr} = c_{lr} p_k, \quad (lr) \in \mathrm{Inx}_k, \\ p_k \in \bigcap\limits_{(lr) \in \mathrm{Inx}_k} \boldsymbol{A}_{lr}/c_{lr}. \end{cases}$$

Поэтому множество значений переменной S_{ij}, удовлетворяющих этой системе, можно найти по правилу

$$\mathcal{S}_{ij} = c_{ij} \odot \left(\bigcap_{(lr) \in \mathrm{Inx}_k} \boldsymbol{A}_{lr}/c_{lr} \right) \quad \text{для } (ij) \in \mathrm{Inx}_k\,. \tag{26}$$

Заметим, что если группа элементов матрицы G, пропорциональных параметру p_k, состоит только из одного элемента (ij), то множество S_{ij} совпадает с $\boldsymbol{A}_{ij}$:

$$\mathrm{Inx}_k = \{(ij)\} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij}. \tag{27}$$

Мы показали, что этап I метода (12) можно выполнить следующим образом:

Этап I метода (12) *для случая 2*

1. Найти множества $\mathcal{S}_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, по правилу (26).
2. Если хотя бы одно из них пустое, то $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$.
   Если все множества $\mathcal{S}_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, отличны от пустого, определить $\mathrm{vert}\,((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{i:})$ для каждого индекса i как множество вершин интервального вектора $\bigotimes_j \mathcal{S}_{ij}$ и перейти к этапу II метода (12).

(28)

5. Числовой пример

Рассмотрим числовой пример, чтобы пояснить, как пользоваться методом (12) в упрощенных вариантах.

Пусть интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный вектор $\boldsymbol{b}$ имеют вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-5,-1] \\ [0,2] & [1,2] \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-2,2] \end{pmatrix}.$$

Требуется представить графически множество таких вещественных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при всех кососимметричных матрицах A из $\boldsymbol{A}$ значение Ax лежит в интервале $\boldsymbol{b}$.

5.1. Первый способ решения

5.1.1. Выбор описания связи

Множество $\mathcal{G}$ кососимметричных матриц размером 2×2 представим в виде

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \quad\Longleftrightarrow\quad G_{12} + G_{21} = 0.$$

Такое описание связи $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям случая 1, при этом $q = 1$, $\boldsymbol{d}_1 = 0$, $C_{112} = C_{121} = 1$, $C_{111} = C_{122} = 0$, $\mathrm{Inx}_1 = \{(1\,2), (2\,1)\}$. Для связи такого типа этап I метода решения (12) можно выполнить в упрощенном варианте (20).

5.1.2. Этап I в виде (20)

1. Найдем множества $\mathcal{S}_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, по правилу (19). Получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{11} &= \boldsymbol{A}_{11} = [0,1],\\
\mathcal{S}_{12} &= \boldsymbol{A}_{12} \cap (0 - \boldsymbol{A}_{21}) = [-5,-1] \cap (-[0,2]) = [-5,-1] \cap [-2,0] = [-2,-1],\\
\mathcal{S}_{21} &= \boldsymbol{A}_{21} \cap (0 - \boldsymbol{A}_{12}) = [0,2] \cap (-[-5,-1]) = [0,2] \cap [1,5] = [1,2],\\
\mathcal{S}_{22} &= \boldsymbol{A}_{22} = [1,2].
\end{aligned}$$

2. Все множества $\mathcal{S}_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, непустые, поэтому

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{1:} &= \begin{pmatrix}\mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[0,1] & [-2,-1]\end{pmatrix},\\ (\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{2:} &= \begin{pmatrix}\mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[1,2] & [1,2]\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\mathrm{vert}\big((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{1:}\big) &= \big\{(0,-2),\ (1,-2),\ (0,-1),\ (1,-1)\big\},\\ \mathrm{vert}\big((\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G})_{2:}\big) &= \big\{(1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (2,2)\big\}.\end{aligned}$$

5.1.3. Этап II

На этом этапе нам надо представить графически множество решений конечной системы элементарных линейных включений

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x_2 &\in& [-1,1],\\ x_1 - 2x_2 &\in& [-1,1],\\ -x_2 &\in& [-1,1],\\ x_1 - x_2 &\in& [-1,1],\\ x_1 + x_2 &\in& [-2,2],\\ 2x_1 + x_2 &\in& [-2,2],\\ x_1 + 2x_2 &\in& [-2,2],\\ 2x_1 + 2x_2 &\in& [-2,2]. \end{array}\right.$$

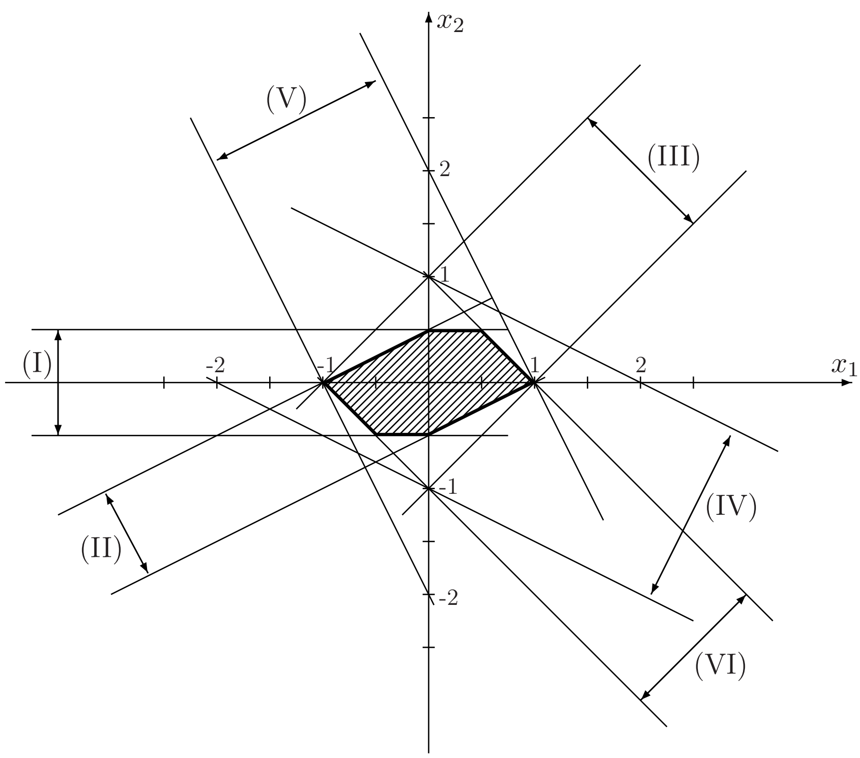

Рис. 3. Множество решений числового примера (заштриховано)

Первую строку системы разделим на -2, последнюю строку — на 2, третью строку (как следствие первой строки системы) и пятую строку (как следствие последней строки) удалим. Получим систему элементарных линейных включений:

$$\begin{cases} x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & \text{(I)} \\ x_1 - 2x_2 \in [-1, 1], & \text{(II)} \\ x_1 - x_2 \in [-1, 1], & \text{(III)} \\ 2x_1 + x_2 \in [-2, 2], & \text{(IV)} \\ x_1 + 2x_2 \in [-2, 2], & \text{(V)} \\ x_1 + x_2 \in [-1, 1], & \text{(VI)} \end{cases}$$

множество решений которой представлено на рис. 3. В рассмотренном нами числовом примере множество решений — это выпуклый шестиугольник с вершинами $(0, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 0)$, $(0, -0.5)$, $(-0.5, -0.5)$, $(-1, 0)$.

5.2. Второй способ решения

5.2.1. Выбор описания связи

Множество $\mathcal{G}$ кососимметричных матриц размером 2×2 представим в виде

$$\mathcal{G} = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^3} G(p), \qquad G(p) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Такое описание связи $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям случая 2, поэтому можно применить упрощенный вариант (28) этапа I метода (12).

5.2.2. Этап I в виде (28)

1. Поиск множеств $\mathcal{S}_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Множества $\mathrm{Inx}_1 = \{(1\,1)\}$ и $\mathrm{Inx}_3 = \{(2\,2)\}$ содержат по одному элементу. Поэтому на основании (27) получаем $\mathcal{S}_{11} = \boldsymbol{A}_{11} = [0, 1]$, $\mathcal{S}_{22} = \boldsymbol{A}_{22} = [1, 2]$.

Множества $\mathcal{S}_{12}$ и $\mathcal{S}_{21}$ определим по правилу (26), опираясь на то, что $\mathrm{Inx}_2 = \{(1\,2), (2\,1)\}$, $c_{12} = 1$, $c_{21} = -1$:

$$\mathcal{S}_{12} = c_{12} \odot \Big((\boldsymbol{A}_{12}/c_{12}) \cap (\boldsymbol{A}_{21}/c_{21}) \Big) = 1 \odot ([-5, -1] \cap [-2, 0]) = [-2, -1],$$

$$\mathcal{S}_{21} = c_{21} \odot \Big((\boldsymbol{A}_{12}/c_{12}) \cap (\boldsymbol{A}_{21}/c_{21}) \Big) = -1 \odot ([-5, -1] \cap [-2, 0]) = [1, 2].$$

2. Как в первом способе решения.

5.2.3. Этап II

Как в первом способе решения.

5.3. Влияние связи

Во введении было замечено, что при $\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ наложение связи на коэффициенты способствует расширению допускового множества решений:

$$\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b}).$$

Воспользуемся данными рассмотренной числовой задачи, чтобы наглядно представить влияние связи коэффициентов на допусковое множество решений интервальной системы линейных уравнений.

На рис. 4 представлены множества $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$ для случая, когда

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & [-5,-1] \\ [0,2] & [1,2] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-2,2] \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} \text{ — множество кососимметричных матриц.}$$

Множество $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$ взято из рассмотренной числовой задачи.

Множество $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ можно определить, в соответствии с (11), из системы элементарных линейных включений:

$$\begin{cases} -5x_2 \in [-1,1], \\ x_1 - 5x_2 \in [-1,1], \\ -x_2 \in [-1,1], \\ x_1 - x_2 \in [-1,1], \\ x_2 \in [-2,2], \\ 2x_1 + x_2 \in [-2,2], \\ 2x_2 \in [-2,2], \\ 2x_1 + 2x_2 \in [-2,2]. \end{cases}$$

Причем в этой системе третья, пятая и седьмая строки очевидно являются следствиями первой строки, поэтому их можно удалить.

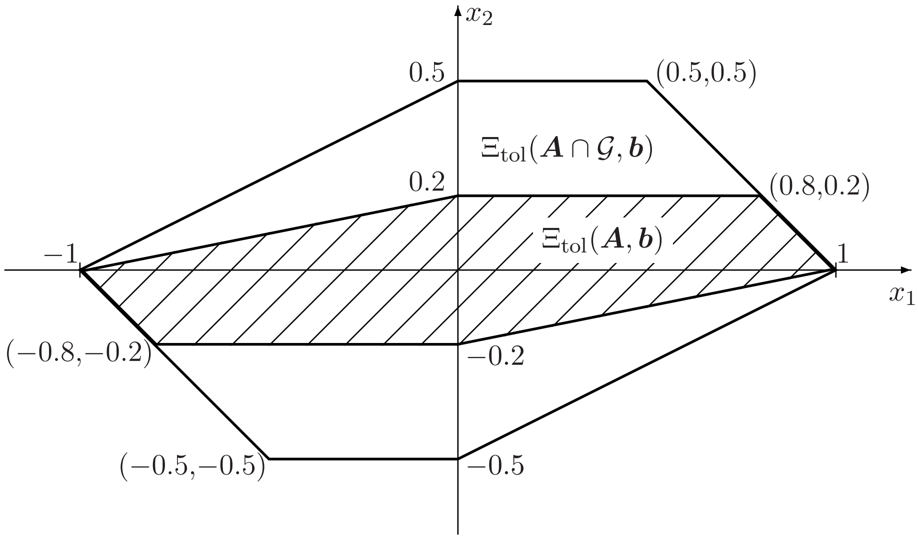

Рис. 4. Влияние связи на допусковое множество решений в числовом примере

Другой способ построения множества $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ — воспользоваться программой, расположенной по адресу `http://www.nsc.ru/interval/Programming/AEsolset.ps` и предназначенной для визуализации множеств решений интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с матрицей $\boldsymbol{A}$ размером 2×2.

Множество $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ представляет собой выпуклый шестиугольник с вершинами $(0, 0.2)$, $(0.8, 0.2)$, $(1, 0)$, $(0, -0.2)$, $(-0.8, -0.2)$, $(-1, 0)$. На рис. 4 он заштрихован для сопоставления с содержащим его шестиугольником, соответствующим множеству $\Xi_{\mathrm{tol}}(\boldsymbol{A} \cap \mathcal{G}, \boldsymbol{b})$.

Список литературы

[1] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61. `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/IzvAN.pdf`

[2] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ: электронная книга. `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`

[3] Shary S.P. A new technique in the systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. Vol. 8, N 5. P. 321–419. `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf`

[4] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S., Shary S., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Интервальный анализ: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 4. Иркутск: ИСЭМ СО РАН. 2005. С. 106–113. `http://www.nsc.ru/interval/INotation.pdf`, `http://www.nsc.ru/interval/Conferences/Baikal-2005/IntervalAnalysis.pdf`, а также `http://www.mat.univie.ac.at/~neum/interval.html`

[5] Rohn J. Interval linear systems with prescribed column sums // Linear algebra and its applications. 1981. Vol. 39. P. 143–148.

Поступила в редакцию 9 февраля 2009 г.