Вычислительные технологии **Том 3, №2, 1998**

О МАКСИМАЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

И. А. Шарая
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: `shary@net.ict.nsc.ru`

Complete interval arithmetic may be successfully used for maximal inner estimation of solution sets to linear equations system with interval parameters. It is demonstrated on the interval system of equations $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ as an example. Algebraic criteria were obtained for inner and maximal inner interval estimates for $\forall\exists$-solution sets to interval linear equations. We propose a simple method that checks whether a proper algebraic solution to the dualization equation is a maximal inner interval estimate for the corresponding $\forall\exists$-solution set.

1. Введение

Математическая формулировка практической задачи часто сводится к выписыванию системы уравнений. Известные величины в системе — это параметры задачи. Классические математические методы ориентированы на решение систем уравнений с вещественными параметрами. Круг решаемых практических задач можно расширить, вводя в рассмотрение параметры иного типа.

Объектом нашего изучения являются задачи с интервальными параметрами. Параметр называем интервальным (или интервально неопределенным), если в задаче присутствует требование, чтобы он мог принимать любое значение из некоторого интервала, или требование, чтобы в некотором интервале для него нашлось подходящее значение. (Здесь и во всех рассуждениях вне полной интервальной арифметики под “интервалом” понимаем связный компакт на вещественной прямой.)

Для решения задач с интервальными параметрами удобно пользоваться полной интервальной арифметикой, введенной Каухером [5]. Она позволяет 1) лаконично формулировать задачи с интервальными параметрами, 2) быстро находить оптимальные интервальные оценки множеств решений таких задач. Покажем это на примере задачи внутреннего оценивания $\forall\exists$-множеств решений системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, в которой коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ и компоненты вектора $\mathbf{b}$ — интервальные параметры.

2. Описание практической задачи на языке теории множеств

Определим два типа интервальных параметров. Если в задаче требуется, чтобы параметр мог принимать любое значение из интервала, будем писать, что он имеет $\forall$-неопределенность (“A-неопределенность”). А если требуется, чтобы для параметра только нашлось некоторое подходящее значение из интервала, будем писать, что он имеет $\exists$-неопределенность (“E-неопределенность”).

Рассмотрим задачу, в которой зависимость между интервальными параметрами и неизвестными носит линейный характер, формально описываемый интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — $m \times n$-матрица интервальных параметров, x — n-мерный вещественный вектор неизвестных, $\mathbf{b}$ — m-мерный вектор интервальных параметров.

Тип интервальной неопределенности компонент матрицы $\mathbf{A}$ конкретизируем с помощью интервальных матриц $\mathbf{A}^{\forall}$ и $\mathbf{A}^{\exists}$: если параметр $\mathbf{a}_{ij}$ имеет $\exists$-неопределенность, то $\mathbf{a}^{\exists}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$, $\mathbf{a}^{\forall}_{ij} = 0$, а если параметр $\mathbf{a}_{ij}$ имеет $\forall$-неопределенность, то, наоборот, $\mathbf{a}^{\exists}_{ij} = 0$, $\mathbf{a}^{\forall}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$. Тип интервальной неопределенности компонент вектора $\mathbf{b}$ конкретизируем аналогично с помощью интервальных векторов $\mathbf{b}^{\forall}$ и $\mathbf{b}^{\exists}$. Пусть нас интересует множество вещественных решений Σ системы (1), задаваемое правилом

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \forall A' \in \mathbf{A}^{\forall} \ \ \forall b' \in \mathbf{b}^{\forall} \ \ \exists A'' \in \mathbf{A}^{\exists} \ \ \exists b'' \in \mathbf{b}^{\exists} \quad (A' + A'')x = b' + b''\}. \tag{2}$$

Известно [2], что пересечение множества Σ с каждым ортантом является выпуклым многогранным множеством (возможно пустым или неограниченным). Множество Σ может быть невыпукло и несвязно. Точное геометрическое описание множества Σ в общем случае экспоненциально зависит от размерности задачи, поэтому возникает необходимость в его оценивании, т. е. приближенном описании с помощью простых множеств. Положение оценки по отношению к множеству Σ (лежит внутри, содержит множество Σ или др.) и ее форма (параллелипипед, эллипсоид, шар или др.) выбираются по смыслу задачи. Рассмотрим следующую постановку.

Задача 1. Указать какой-нибудь максимальный по включению n-мерный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям, лежащий в множестве Σ, задаваемом правилом (2).

Мы сформулировали на языке теории множеств некоторую задачу внутреннего оценивания множества вещественных решений линейной системы с интервальной неопределенностью в параметрах. Полная интервальная арифметика дает эффективный метод решения такой задачи оценивания и облегчает описание и выкладки за счет формализации математического языка. Основные определения и свойства полной интервальной арифметики изложены в разделе 3.

3. Полная интервальная арифметика

3.1. Полная интервальная арифметика как алгебраическая система

Жирными латинскими буквами будем обозначать интервальные объекты: малыми — интервалы и интервальные векторы ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$), большими — интервальные матрицы ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$).

Полная интервальная арифметика — это алгебраическая система

$$\langle\, \mathbb{IR}, \subseteq, \leqslant, \vee, \wedge, \mathrm{dual}, \mathrm{pro}, +, -, \cdot, /\, \rangle\,.$$

Основное множество

Множество $\mathbb{IR}$ состоит из всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\mathbb{IR} = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Элементы основного множества принято называть *интервалами*, а $\underline{x}$ и $\overline{x}$ соответственно левым и правым концом интервала $\mathbf{x}$. Два интервала считаются равными, если их одноименные концы совпадают:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\underline{x} = \underline{y},\ \overline{x} = \overline{y}).$$

Если левый конец не больше правого, интервал называют *правильным*, иначе — *неправильным*. Правильный интервал $\mathbf{x}$ можно мыслить как множество вещественных чисел, заключенных между его концами: $\mathbf{x} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}\}$. Множество всех правильных интервалов обозначается через $\mathrm{I}\mathbb{R}$:

$$\mathrm{I}\mathbb{R} = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x} \leqslant \overline{x},\ \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Множество *вырожденных* интервалов $\{\mathbf{x} = [x, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ часто отождествляется с множеством вещественных чисел. Мы будем вырожденные интервалы, в отличие от вещественных чисел, обозначать жирным шрифтом, например, $\mathbf{0} = [0, 0]$, $0 \in \mathbf{0}$.

Решеточная структура

$\subseteq, \leqslant$[1] — отношения частичных порядков на $\mathbb{IR}$, определяемые через отношение порядка $\leqslant$ в $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\underline{x} \geqslant \underline{y},\ \overline{x} \leqslant \overline{y}),$$

$$\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y} \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\underline{x} \leqslant \underline{y},\ \overline{x} \leqslant \overline{y}).$$

$\vee$, $\wedge$ — решеточные операции взятия точной верхней (supremum) и точной нижней (infimum) грани по включению. Они определяются для ограниченных соответственно сверху и снизу по включению семейств интервалов через операции взятия точных граней в $\mathbb{R}$:

$$\bigvee_{i\in I} \mathbf{x}_i = \sup_{i\in I}{}_{\subseteq} \mathbf{x}_i = [\inf_{i\in I} \underline{x}_i, \sup_{i\in I} \overline{x}_i],$$

$$\bigwedge_{i\in I} \mathbf{x}_i = \inf_{i\in I}{}_{\subseteq} \mathbf{x}_i = [\sup_{i\in I} \underline{x}_i, \inf_{i\in I} \overline{x}_i].$$

[1] Использование для отношений частичного порядка в $\mathbb{IR}$ тех же символов, что приняты для теоретико-множественного включения и для порядка в $\mathbb{R}$, не вызывает путаницы и удобно, так как на общей области определения соответствующие отношения совпадают.

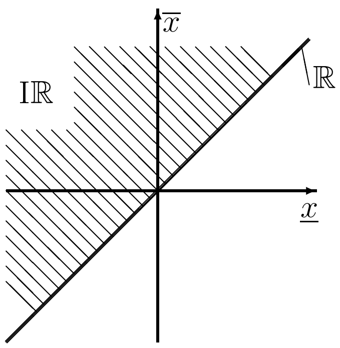

Рис. 1: Множество $\mathbb{IR}$.

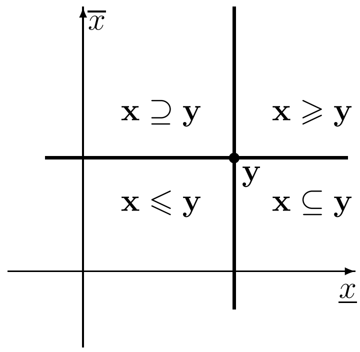

Рис. 2: Отношения частичного порядка в $\mathbb{IR}$.

Унарные операции
dual — операция *дуализации*: $\mathrm{dual}[\underline{x}, \overline{x}] = [\overline{x}, \underline{x}]$.
pro — операция взятия *правильной проекции*:

$$\mathrm{pro}\,\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \mathrm{dual}\,\mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный}. \end{cases}$$

Бинарные операции
Арифметические операции $+, -, \cdot, /$ определяются через соответствующие вещественные операции и решеточные операции $\vee, \wedge$ так, что

$$\forall * \in \{+, -, \cdot, /\} \qquad \mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\mathbf{x}} \mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\mathbf{y}} (x * y), \qquad \mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\mathbf{x}} = \begin{cases} \bigvee\limits_{\mathrm{pro}\,\mathbf{x}}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \bigwedge\limits_{\mathrm{pro}\,\mathbf{x}}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный}. \end{cases}$$

(Символ $\bigvee\!\!\!\bigwedge$ взятия точной грани по включению желательно читать как “supinf”. Краткий русский вариант — “И”.)

3.2. Интервальные векторы и матрицы

Интервальными векторами и матрицами называются соответственно элементы множеств $\mathbb{IR}^n$ и $\mathbb{IR}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Интервальный объект называется правильным, если все его компоненты есть правильные интервалы.

Операции $\mathrm{dual}, \mathrm{pro}, \vee, \wedge, +, -$ и отношения $\subseteq, \leqslant$ на интервальных объектах из одного пространства определяются покомпонентно; например, для дуализации матрицы надо просто дуализовать ее компоненты, а точной верхней гранью по включению для интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$ будет вектор $\mathbf{x} \bigvee \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$, в котором $(\mathbf{x} \bigvee \mathbf{y})_i = \mathbf{x}_i \bigvee \mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Произведение матрицы $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ на вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ определяется правилом

$$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Утверждение 3.2.1. *Пусть* $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\tilde{\mathbf{x}}$ *— интервальный вектор, полученный произвольной перестановкой компонент интервального вектора* $\mathbf{x}$*, тогда*

$$\mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{C}x) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \left(\mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\tilde{\mathbf{x}}_1} \mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\tilde{\mathbf{x}}_2} \ldots \mathop{\bigvee\!\!\!\bigwedge}^{\tilde{\mathbf{x}}_n} \right).$$

Доказательство. При последовательном выполнении операций взятия точной грани по включению надо использовать следующие свойства:

1) операции взятия точной грани для интервальных векторов определяются покомпонентно;

2) сложение в $\mathbb{IR}$ коммутативно; операции взятия точной грани и сдвига на интервал перестановочны, в частности, $\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{IR} \quad \left(\bigwedge^{\mathbf{y}} (y + \mathbf{z}) = \bigwedge^{\mathbf{y}} y + \mathbf{z}\right)$;

3) $\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{IR} \quad \left(\bigwedge^{\mathbf{y}} (\mathbf{z}y) = \mathbf{z}\mathbf{y}\right)$.

3.3. Изотонность по включению

Рассмотрим отображение F с областью определения $D(F) \subseteq \mathbb{IR}^n$ и множеством значений в $\mathbb{IR}^m$.

Определение. Отображение F называется *изотонным*[2] *по включению*, если сохраняет отношение $\subseteq$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D(F) \quad \big(\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \;\Rightarrow\; F(\mathbf{x}) \subseteq F(\mathbf{y})\big).$$

Фундаментальное свойство полной интервальной арифметики. Операции $+, -, \cdot, /$ изотонны по включению.

Следствие. *Умножение на интервальную матрицу изотонно по включению.*

На этом описание полной интервальной арифметики закончим. Более подробное ее изложение можно найти в [4, 5]. В следующем подразделе приведем необходимые в данной работе, но не описанные ранее свойства.

3.4. Изотонность по строгому включению

Отношение строгого включения ($\subset$) в $\mathbb{IR}^n$ задается правилом

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \;\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\; (\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y},\; \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

Определение. Отображение $F : D(F) \to \mathbb{IR}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{IR}^n$ будем называть *изотонным по строгому включению,* если оно сохраняет отношение $\subset$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D(F) \qquad \big(\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \;\Rightarrow\; F(\mathbf{x}) \subset F(\mathbf{y})\big).$$

Утверждение 3.4.1. *В полной интервальной арифметике операции сложения, вычитания и умножения на $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ изотонны по строгому включению.*

Доказательство. Воспользуемся геометрической интерпретацией операции сложения с интервалом как сдвига $\mathbb{IR}$, умножения на $\lambda > 0$ как растяжения, а умножения на (-1) как симметрии $\mathbb{IR}$ относительно биссектрисы 2-го и 4-го квадрантов. Очевидно, что все эти отображения переводят конус включающих интервалов без вершины в аналогичный. Это верно и для их композиций.

Операция умножения интервалов не изотонна по строгому включению.

---

[2]В классической интервальной арифметике рассматриваются только изотонные по включению отображения и их часто называют “монотонными (по включению)”. В полной интервальной арифметике возникает необходимость рассмотрения отображений с разным характером монотонности по включению. Для указания характера монотонности используются термины “изотонное” и “антитонное (по включению) отображение”.

Определение. Отображение $F : D(F) \to \mathbb{IR}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{IR}^n$ назовем *изотонным по строгому включению сверху в* $\mathbf{x}$, если

$$\forall \mathbf{y} \in D(F) \quad \big(\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \;\Rightarrow\; F(\mathbf{x}) \subset F(\mathbf{y})\big).$$

Определение. Отображение $F : D(F) \to \mathbb{IR}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{IR}$ назовем *изотонным по строгому включению сверху в* $\mathbf{x}$ *по левому концу,* если

$$\forall \mathbf{y} \in D(F) \quad \big((\underline{x} > \underline{y},\, \overline{x} \leqslant \overline{y}) \;\Rightarrow\; F(\mathbf{x}) \subset F(\mathbf{y})\big).$$

Определение. Отображение $F : D(F) \to \mathbb{IR}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{IR}$ назовем *изотонным по строгому включению сверху в* $\mathbf{x}$ *по правому концу,* если

$$\forall \mathbf{y} \in D(F) \quad \big((\underline{x} \geqslant \underline{y},\, \overline{x} < \overline{y}) \;\Rightarrow\; F(\mathbf{x}) \subset F(\mathbf{y})\big).$$

Так как для любых интервалов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \iff \big((\underline{x} > \underline{y},\, \overline{x} \leqslant \overline{y}) \text{ или } (\underline{x} \geqslant \underline{y},\, \overline{x} < \overline{y})\big),$$

то отображение изотонно по строгому включению сверху в $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ тогда и только тогда, когда оно изотонно по строгому включению сверху в $\mathbf{x}$ по левому и по правому концам.

Утверждение 3.4.2. *Пусть* $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$. *Умножение на интервальную матрицу* $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ *изотонно по строгому включению сверху в* $\mathbf{x}$ *тогда и только тогда, когда в каждом столбце* k *матрицы* $\mathbf{C}$ *есть хоть один элемент* $\mathbf{c}_{lk}$, *умножение на который изотонно по строгому включению сверху в* $\mathbf{x}_k$ *по левому концу, и хоть один элемент* $\mathbf{c}_{rk}$, *умножение на который изотонно по строгому включению сверху в* $\mathbf{x}_k$ *по правому концу.*

Доказательство. В условии и в доказательстве считаем, что $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, $l, r \in \{1, \ldots, m\}$. Надо доказать, что высказывание

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n \quad \big(\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{C}\mathbf{x} \subset \mathbf{C}\mathbf{y}\big) \tag{3}$$

эквивалентно высказыванию

$$\forall k \left(\left(\exists l \;\forall \mathbf{u} \in \mathbb{IR} \left(\begin{matrix} \underline{x}_k > \underline{u} \\ \overline{x}_k \leqslant \overline{u} \end{matrix} \right) \Rightarrow \mathbf{c}_{lk}\mathbf{x}_k \subset \mathbf{c}_{lk}\mathbf{u} \right) \text{ и } \left(\exists r \;\forall \mathbf{v} \in \mathbb{IR} \left(\begin{matrix} \underline{x}_k \geqslant \underline{v} \\ \overline{x}_k < \overline{v} \end{matrix} \right) \Rightarrow \mathbf{c}_{rk}\mathbf{x}_k \subset \mathbf{c}_{rk}\mathbf{v} \right) \right). \tag{4}$$

Сначала покажем, что (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$. Имеем:

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \iff \big((\forall j \;\mathbf{x}_j \subseteq \mathbf{y}_j) \text{ и } (\exists k \;\mathbf{x}_k \subset \mathbf{y}_k)\big),$$

$$\mathbf{x}_k \subset \mathbf{y}_k \iff \big((\underline{x}_k > \underline{y}_k,\, \overline{x}_k \leqslant \overline{y}_k) \text{ или } (\underline{x}_k \geqslant \underline{y}_k,\, \overline{x}_k < \overline{y}_k)\big).$$

Определим вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{IR}^n$ следующим образом:

$$\mathbf{z}_j = \begin{cases} \mathbf{x}_j, & \text{если } j \neq k, \\ [\underline{y}_k, \overline{x}_k], & \text{если } j = k,\; \underline{x}_k > \underline{y}_k, \\ [\underline{x}_k, \overline{y}_k], & \text{если } j = k,\; \overline{x}_k < \overline{y}_k. \end{cases}$$

Рассмотрим произведения $\mathbf{C}\mathbf{x}$ и $\mathbf{C}\mathbf{z}$. Умножение интервалов изотонно по включению, а сумма интервалов изотонна по строгому включению, поэтому из условия (4) получаем, что $\mathbf{Cx} \subset \mathbf{Cz}$. С другой стороны, $\mathbf{z} \subseteq \mathbf{y}$ и в силу изотонности по включению умножения на интервальную матрицу $\mathbf{Cz} \subseteq \mathbf{Cy}$. Поэтому $\mathbf{Cx} \subset \mathbf{Cy}$.

Теперь докажем, что (не (4)) $\Rightarrow$ (не (3)). Пусть высказывания (4) неверно. Так как умножение на интервал изотонно по включению, то отрицание высказывания (4) можно записать в виде

$$\exists k\Big(\big(\forall l\ \exists \mathbf{u}^l\ (\underline{x}_k > \underline{u}^l,\ \overline{x}_k \leqslant \overline{u}^l,\ \mathbf{c}_{lk}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_{lk}\mathbf{u}^l)\big) \text{ или } \big(\forall r\ \exists \mathbf{v}^r\ (\underline{x}_k \geqslant \underline{v}^r, \overline{x}_k < \overline{v}^r,\ \mathbf{c}_{rk}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_{rk}\mathbf{v}^r)\big)\Big).$$

Рассмотрим такой вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$, что

$$\mathbf{y}_j = \begin{cases} \mathbf{x}_j, \text{ если } j \neq k, \\ [\max\limits_l \underline{u}^l, \overline{x}_k], \text{ если } j = k \text{ и } \forall l\ \exists \mathbf{u}^l\ (\underline{x}_k > \underline{u}^l,\ \overline{x}_k \leqslant \overline{u}^l,\ \mathbf{c}_{lk}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_{lk}\mathbf{u}^l), \\ [\underline{x}_k, \min\limits_r \overline{v}^r], \text{ если } j = k \text{ и } \forall r\ \exists \mathbf{v}^r\ (\underline{x}_k \geqslant \underline{v}^r,\ \overline{x}_k < \overline{v}^r,\ \mathbf{c}_{rk}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_{rk}\mathbf{v}^r). \end{cases}$$

Для вектора $\mathbf{y}$ имеем $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$, но $\mathbf{Cx} = \mathbf{Cy}$. Мы получили отрицание высказывания (3) и завершили доказательство утверждения 3.4.2.

Утверждение 3.4.3. *Пусть отображение $F : D(F) \to \mathbb{IR}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{IR}$ изотонно по включению.*

1) Чтобы отображение F было изотонным по строгому включению сверху в $\mathbf{x}$ по левому концу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta \quad \big(0 < \delta \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow\ F(\mathbf{x}) \neq F([\underline{x} - \delta, \overline{x}])\big). \tag{5}$$

2) Чтобы отображение F было изотонным по строгому включению сверху в $\mathbf{x}$ по правому концу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta \quad \big(0 < \delta \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow\ F(\mathbf{x}) \neq F([\underline{x}, \overline{x} + \delta])\big). \tag{6}$$

Доказательство. 1) Необходимость условия (5) очевидна. Докажем достаточность. Считаем, что имеет место (5). Пусть интервал $\mathbf{y}$ таков, что $\underline{x} > \underline{y}$, $\overline{x} \leqslant \overline{y}$. Рассмотрим интервал $\mathbf{z} = [\underline{x} - \min\{\varepsilon/2, \underline{x} - \underline{y}\}, \overline{x}]$. Так как $\mathbf{x} \subset \mathbf{z} \subseteq \mathbf{y}$, то в силу изотонности отображения F по включению $F(\mathbf{x}) \subseteq F(\mathbf{z}) \subseteq F(\mathbf{y})$. Но $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{z})$ в силу утверждения (5), поэтому $F(\mathbf{x}) \subset F(\mathbf{y})$. 2) Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Определение. *Относительным положением интервала* называется такая функция $\chi : \mathbb{IR} \setminus \{\mathbf{0}\} \to [-1, 1]$, что

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \underline{x}/\overline{x}, & \text{если } |\overline{x}| \geqslant |\underline{x}|, \\ \overline{x}/\underline{x}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждение 3.4.4. *Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$. Умножение на интервальную матрицу $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ изотонно по строгому включению сверху в $\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда для каждого столбца k матрицы $\mathbf{C}$ выполнено хоть одно из условий:*

1) $\exists l \quad 0 \notin \operatorname{pro} \mathbf{c}_{lk}$;

2) $\mathbf{0} \not\subseteq \mathbf{x}_k, \quad \exists l \quad \mathbf{0} \subset \mathbf{c}_{lk}, \quad \exists r \quad \mathbf{c}_{rk} \subset \mathbf{0}$;

3) $\mathbf{0} = \mathbf{x}_k, \quad \exists l \quad \mathbf{0} \subset \mathbf{c}_{lk}$;

4) $\mathbf{0} \subset \mathbf{x}_k, \quad \exists l \quad (\mathbf{0} \subset \mathbf{c}_{lk},\ \chi(\mathbf{c}_{lk}) \geqslant \chi(\mathbf{x}_k))$.

Доказательство. Для доказательства надо последовательно воспользоваться утверждениями 3.4.2 и 3.4.3 и таблицей умножения правильного интервала $\mathbf{u}$ на ненулевой интервал $\mathbf{c}$:

	$\underline{u} > 0$	$\overline{u} < 0$	$\mathbf{0} \subseteq \mathbf{u}$
$\underline{c}, \overline{c} > 0$	$[\,\underline{c}\,\underline{u}, \overline{c}\,\overline{u}\,]$	$[\,\overline{c}\underline{u}, \underline{c}\overline{u}\,]$	$[\,\overline{c}\underline{u}, \overline{c}\,\overline{u}\,]$
$\underline{c}, \overline{c} < 0$	$[\,\underline{c}\overline{u}, \overline{c}\underline{u}\,]$	$[\,\overline{c}\,\overline{u}, \underline{c}\,\underline{u}\,]$	$[\,\underline{c}\overline{u}, \underline{c}\,\underline{u}\,]$
$\mathbf{0} \subset \mathbf{c}$	$[\,\underline{c}\overline{u}, \overline{c}\,\overline{u}\,]$	$[\,\overline{c}\underline{u}, \underline{c}\,\underline{u}\,]$	$[\,\min\{\overline{c}\underline{u}, \underline{c}\overline{u}\}, \max\{\underline{c}\,\underline{u}, \overline{c}\,\overline{u}\}\,]$
$\mathbf{c} \subset \mathbf{0}$	$[\,\underline{c}\,\underline{u}, \overline{c}\underline{u}\,]$	$[\,\overline{c}\,\overline{u}, \underline{c}\overline{u}\,]$	$\mathbf{0}$

4. Описание задачи на языке интервалов

Вернемся к рассмотрению задачи.

Определение. Множество Σ, задаваемое правилом (2), будем называть (обобщенным) $\forall\exists$-*множеством* решений для ИСЛАУ (1).[3]

В полной интервальной арифметике определение множества Σ можно переписать [1] в виде

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\operatorname{dual} \mathbf{A}^{\exists} + \mathbf{A}^{\forall})x \subseteq \mathbf{b}^{\exists} + \operatorname{dual} \mathbf{b}^{\forall}\}$$

или, совсем кратко,

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^c x \subseteq \mathbf{b}^c\}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A}^c = \operatorname{dual} \mathbf{A}^{\exists} + \mathbf{A}^{\forall}$ — матрица, полученная из $\mathbf{A}$ заменой $\exists$-неопределенных компонент на дуальные, а $\mathbf{b}^c = \mathbf{b}^{\exists} + \operatorname{dual} \mathbf{b}^{\forall}$ — интервальный вектор, полученный из $\mathbf{b}$ заменой $\forall$-неопределенных компонент на дуальные.

Определение. *Внутренней интервальной оценкой* множества Σ называется такой правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{x} \subseteq \Sigma$.

Определение. Внутренняя интервальная оценка $\mathbf{x}$ множества Σ называется *максимальной*, если $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n \;\; \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} \not\subseteq \Sigma$.

Теперь задачу 1 из п. 3 можно переформулировать.

Задача 1*. Найти какую-нибудь максимальную внутреннюю интервальную оценку множества $\Sigma(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$, описанного правилом (7).

Эта формулировка задачи отличается от первоначальной лишь языком, но имеет два преимущества. Во-первых, в ней кратко и удобно описано множество Σ (это особенно ощутимо на числовых примерах) и лаконично указаны требования к оценке этого множества. Во-вторых, для решения задачи теперь можно применять методы полной интервальной арифметики. Впрочем, для свободного применения интервальных методов эта формулировка еще плоха, ведь в определениях внутренней и максимальной внутренней оценок присутствует чуждое интервальной арифметике отношение теоретико-множественного включения в множество Σ. Дадим аналоги этих определений в полной интервальной арифметике.

Утверждение 4.2 (критерий внутренней интервальной оценки). *Пусть* $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^m$. *Правильный интервальный вектор* $\mathbf{y}$ *является внутренней оценкой множества* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{C}x \subseteq \mathbf{d}\}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{C}\mathbf{y} \subseteq \mathbf{d}$.

[3] Обобщенные множества решений для систем интервальных уравнений введены С. П. Шарым в [1]. $\forall\exists$-множества решений — это те обобщенные множества решений интервальных уравнений, в описании которых все кванторы всеобщности предшествуют кванторам существования.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$. Надо доказать, что

$$(\forall y \in \mathbf{y} \;\; (\mathbf{C}y \;\subseteq\; \mathbf{d})) \iff (\mathbf{C}\mathbf{y} \subseteq \mathbf{d})\,.$$

Покажем, что $(\mathbf{C}\mathbf{y} \subseteq \mathbf{d}) \Rightarrow (\forall y \in \mathbf{y} \; (\mathbf{C}y \subseteq \mathbf{d}))$. Умножение на интервальную матрицу изотонно по включению, поэтому $\forall y \in \mathbf{y} \; (\mathbf{C}y \subseteq \mathbf{C}\mathbf{y})$. Если $\mathbf{C}\mathbf{y} \subseteq \mathbf{d}$, то в силу транзитивности отношения включения $\forall y \in \mathbf{y} \;\; (\mathbf{C}y \subseteq \mathbf{d})$.

Докажем обратную импликацию. Точная верхняя грань ограниченного сверху семейства удовлетворяет общему ограничению, поэтому $(\forall y \in \mathbf{y} \;\; (\mathbf{C}y \subseteq \mathbf{d})) \;\Rightarrow\; (\bigvee_{y\in\mathbf{y}} \mathbf{C}y \subseteq \mathbf{d})$. По утверждению 3.2.1 $\bigvee_{y\in\mathbf{y}} \mathbf{C}y = \mathbf{C}\mathbf{y}$.

Доказанное утверждение дает возможность, не находя (!) множества Σ, узнавать, является ли какой-нибудь интервальный вектор его внутренней оценкой. Для этого надо всего лишь выполнить некоторые действия в полной интервальной арифметике: умножить на этот вектор интервальную матрицу и проверить включение векторов.

Очевидным следствием утверждения 4.2 и определения максимальной внутренней интервальной оценки является

Утверждение 4.3 (критерий максимальности внутренней интервальной оценки). *Пусть* $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^m$. *Внутренняя интервальная оценка* $\mathbf{x}$ *множества* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{C}x \subseteq \mathbf{d}\}$ *является максимальной тогда и только тогда, когда*

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n \quad \big(\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{C}\mathbf{y} \not\subseteq \mathbf{d}\big).$$

Утверждения 4.2 и 4.3 позволяют сформулировать задачу 1 целиком на языке полной интервальной арифметики.

Задача 1.** Для $\mathbf{A}^c = \operatorname{dual}\mathbf{A}^\exists + \mathbf{A}^\forall$ и $\mathbf{b}^c = \mathbf{b}^\exists + \operatorname{dual}\mathbf{b}^\forall$ найти такой правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$, что

1) $\mathbf{A}^c\mathbf{x} \subseteq \mathbf{b}^c$,

2) $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{IR} \quad \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{A}^c\mathbf{y} \not\subseteq \mathbf{d}$.

В таком виде задача максимального внутреннего интервального оценивания множества Σ для ИСЛАУ (1) удобна для исследования интервальными методами. Способов отыскания всех решений задачи 1** пока не создано, в следующем разделе мы изложим метод нахождения максимальных внутренних оценок специального вида.

5. Алгебраические решения уравнения в дуализациях в роли внутренних оценок

Ограничим себя отысканием только таких внутренних интервальных оценок множества Σ, для которых $\mathbf{A}^c\mathbf{x} = \mathbf{b}^c$.

Задача 2. Для $\mathbf{A}^c = \operatorname{dual}\mathbf{A}^\exists + \mathbf{A}^\forall$ и $\mathbf{b}^c = \mathbf{b}^\exists + \operatorname{dual}\mathbf{b}^\forall$ найти такой правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$, что

1) $\mathbf{A}^c\mathbf{x} = \mathbf{b}^c$,

2) $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n \quad \mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{A}^c\mathbf{y} \not\subseteq \mathbf{b}^c$.

Определение. Уравнение $(\operatorname{dual}\mathbf{A}^\exists + \mathbf{A}^\forall)x = \mathbf{b}^\exists + \operatorname{dual}\mathbf{b}^\forall$ называется *уравнением в дуализациях* для Σ.

Определение. *Алгебраическим решением* ИСЛАУ $\mathbf{C}x = \mathbf{d} \;\; (\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m\times n}, \;\; \mathbf{d} \in \mathbb{IR}^m)$ называется такой интервальный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$, что $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ в полной интервальной арифметике.

Итак, мы ограничили себя отысканием таких максимальных внутренних интервальных оценок, которые являются правильными алгебраическими решениями уравнения в дуализациях. Это дает при решении два преимущества. Во-первых, интервальное включение $\mathbf{A}^c\mathbf{x} \subseteq \mathbf{b}^c$ мы заменили уравнением, а для нахождения алгебраических решений ИСЛАУ разработаны эффективные алгоритмы[4] [3, 7]. Во-вторых, условие максимальности оценки в этом случае можно записать в виде требований только к матрице $\mathbf{A}^c$ и вектору $\mathbf{x}$:

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n \quad \big(\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^c\mathbf{y} \not\subseteq \mathbf{A}^c\mathbf{x}\big).$$

Умножение на произвольную интервальную матрицу $\mathbf{C}$ монотонно по включению, поэтому

$$(\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{y} \not\subseteq \mathbf{C}\mathbf{x}) \Longleftrightarrow (\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{y} \neq \mathbf{C}\mathbf{x}) \Longleftrightarrow (\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{x} \subset \mathbf{C}\mathbf{y}).$$

На основании этой цепочки мы получаем еще две эквивалентных формулировки задачи 2.

Задача 2*. Найти максимальное правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях. (Алгебраическое решение ИСЛАУ называется максимальным, если всякий больший по включению интервальный вектор не является ее решением.)

Задача 2.** Найти такое правильное алгебраическое решение $\mathbf{x}$ уравнения в дуализациях, что умножение на матрицу $\mathbf{A}^c$ изотонно по строгому включению сверху в $\mathbf{x}$.

Итак, задача 2 — частный случай задачи 1, а задачи 2, 2* и 2** эквивалентны, поэтому для решения задачи 1 достаточно решить задачу 2**. Формулировка 2** хороша своей практичностью: для правильного интервального вектора $\mathbf{x}$ свойство строгой изотонности умножения на матрицу сверху в $\mathbf{x}$ легко проверить с помощью утверждения 3.4.4.

6. Метод решения задачи 1

Теперь можно предложить следующий метод отыскания максимальной внутренней интервальной оценки $\forall\exists$-множества решений ИСЛАУ (1).

1) Найдем алгебраическое решение $\mathbf{x}^a$ уравнения в дуализациях.

2) Если $\mathbf{x}^a$ правильный интервальный вектор, то он дает внутреннюю оценку $\forall\exists$-множества решений. Если $\mathbf{x}^a$ не является правильным интервальным вектором или уравнение в дуализациях не имеет решения, то задача требует дополнительных исследований.

3) С помощью утверждения 3.4.4 проверим, является ли умножение на матрицу $(\operatorname{dual} \mathbf{A}^{\exists} + \mathbf{A}^{\forall})$ изотонным по строгому включению сверху в $\mathbf{x}^a$. Если это свойство имеет место, то внутренняя оценка $\mathbf{x}^a$ является максимальной. В противном случае — оценка $\mathbf{x}^a$ не является максимальной и задача требует дополнительных исследований.

Приведем два полезных утверждения.

Утверждение 6.1. *Если интервальная матрица $\mathbf{A}$ имеет в каждом столбце хоть одну компоненту, не содержащую нуль, то любое правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях дает максимальную внутреннюю интервальную оценку соответствующего $\forall\exists$-множества решений.*

Доказательство вытекает из эквивалентности задач 2 и 2**, из утверждения 3.4.4 и из того, что $\operatorname{pro} \mathbf{A}^c = \mathbf{A}$.

[4] Алгоритмы нахождения алгебраических решений ИСЛАУ распространяются бесплатно (ftp://www-sbras.ict.nsc.ru, файл pub/interval/shary.zip).

Утверждение 6.2. *Пусть* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\exists}$. *Правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях дает максимальную внутреннюю интервальную оценку соответствующего* $\forall\exists$*-множества решений тогда и только тогда, когда в каждом столбце матрицы* $\mathbf{A}$ *есть хоть одна компонента, не содержащая нуль.*

Доказательство. Задачи 2 и 2** эквивалентны. Для задачи 2** воспользуемся утверждением 3.4.4. Так как $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\exists}$, то матрица $\mathbf{A}^c = \mathrm{dual}\,\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ — правильная матрица, значит все компоненты матрицы $\mathbf{A}^c$ — неправильные или вырожденные интервалы и поэтому не могут строго содержать нуль.

Утверждение 6.2 полезно для объединенного множества решений ($\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists A \in \mathbf{A}\ \exists b \in \mathbf{b}\ \ Ax = b\}$), наиболее давно и интенсивно изучаемого среди $\forall\exists$-множеств решений ИСЛАУ, и для управляемого множества решений ($\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall b \in \mathbf{b}\ \exists A \in \mathbf{A}\ \ Ax = b\}$).

Несколько слов об истории метода. То, что правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях часто дает максимальную внутреннюю интервальную оценку объединенных множеств решений ИСЛАУ (1), было замечено в численных экспериментах. Л. Куприянова обосновала этот факт для объединенного множества с квадратной матрицей $\mathbf{A}$, имеющей в каждом столбце нульнесодержащую компоненту [6]. С. П. Шарый ввел понятие обобщенного решения системы интервальных уравнений и доказал, что для решения задачи 1 достаточно найти максимальное правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях [2]. Мы доказали эквивалентность задач 2, 2* и 2** и предложили простой способ проверки является ли правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях максимальной внутренней интервальной оценкой (см. утверждения 3.4.4, 6.1 и 6.2).

Достоинства предложенного метода:

1) Применим для многих задач, записываемых в достаточно общей формулировке вида **Задача 1** и имеет возможности расширения области применения;

2) Прост и эффективен, что во многом объясняется использованием полной интервальной арифметики, например, алгебраический критерий максимальной внутренней интервальной оценки позволил отказаться от нахождения самого $\forall\exists$-множества решений;

3) для задачи 1 с произвольным $\forall\exists$-множеством решений других методов решения пока нет (имеющим противоположное мнение автор будет признателен за информацию).

7. Заключение

Полная интервальная арифметика позволяет эффективно решать новый класс задач — задач оптимального интервального оценивания множеств решений систем линейных уравнений с интервальной неопределенностью в параметрах. Возможность лаконичной формулировки таких задач и их быстрого решения в полной интервальной арифметике продемонстрирована на примере задачи максимального внутреннего оценивания $\forall\exists$-множеств решений ИСЛАУ (1).

Список литературы

[1] Шарый С. П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных. *Вычислит. технологии*, **2**, №1, 1997, 84–102.

[2] Шарый С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью. *Изв. АН. Теория и системы управления,* №3, 1997, 51–61.

[3] Шарый С. П. Алгебраический подход во внешней задаче для интервальных линейных систем. *Вычислит. технологии*, **3**, №2, 1998, 67–114.

[4] Gardeñes E., Trepat A. The Interval Computing System SIGLA-PL/1(0). *Freiburger Intervall-Berichte*, 8, 1979.

[5] Kaucher E. Über Eigenschaften und Anwendungsmöglischkeiten der erweiterten Intervallrechnung und des Hyperbolischen Fastkörpers über $\mathbb{R}$. *Comp. Sup.*, **1**, 1977.

[6] Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system. *Reliable Comput.*, **1**, No. 1, 1995, 15–31.

[7] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic. *Reliable Comput.*, **2**, No. 1, 1996, 3–33.

Поступила в редакцию 6 января 1998 г.