ПЕРЕХОД К ОГРАНИЧЕННОМУ ДОПУСТИМОМУ МНОЖЕСТВУ РЕШЕНИЙ[1]

И.А. Шарая

Институт вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
E-mail: sharia@ict.nsc.ru

Аннотация

Описание алгоритма поиска неограниченной составляющей допустимого множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) и перехода к задаче об отыскании ограниченного допустимого множества решений ИСЛАУ. Реализация этого алгоритма в системе MATLAB.

Ключевые слова: интервальные линейные системы, допустимое множество решений
Keywords: interval linear systems, tolerable solution set

1. Введение

Определение [1]. Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ (где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ обозначает интервальную матрицу размера $m \times n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор длины m, $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор длины n) *допустимым множеством решений* называется множество

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})\,(\exists\, b \in \boldsymbol{b})\ (Ax = b)\,\}. \tag{1}$$

На языке интервальных включений это определение принимает вид (см., например, [2]):

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \ \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}\}. \tag{2}$$

В [2] было доказано, что допустимое множество решений можно записать в виде:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \Xi_{tol}(C, \boldsymbol{d}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \ Cx \subseteq \boldsymbol{d}\}, \tag{3}$$

где C — уже не интервальная, а точечная матрица из $\mathbb{R}^{k\times n}$, $k = \sum_{i=1}^{m} |\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})| \le m \cdot 2^n$ — сумма числа вершин всех строк исходной матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{d}$ — интервальный вектор длины k.

Поясним определение допустимого множества решений ИСЛАУ двумя примерами.

Пример 1. Рассмотрим процесс, в котором вектор входных переменных x преобразуется в вектор выходных переменных b по линейному закону. Компоненты a_{ij} матрицы этого преобразования известны с точностью до интервалов $\boldsymbol{a}_{ij}$. Для компонент вектора выходных переменных заданы интервалы допустимых значений: $b_i \in \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Найти такие векторы входных переменных, при которых, несмотря на неточность знаний о коэффициентах линейного преобразования, можно гарантировать, что выходные переменные будут удовлетворять заданным допускам.

Частные случаи допустимого множества решений отличаются от общего описания (1) дополнительными ограничениями. Обычно это ограничения вида: $\boldsymbol{A} \ge 0$, $x \ge 0$, $\boldsymbol{b} \ge 0$, $\boldsymbol{A}$ — точечная.

Пример 2. (Идентификация параметров линейных объектов.) Дан объект (черный ящик). Предполагается, что в ящике происходит преобразование вектора входных переменных $\tilde{a}$ в выходную переменную $\tilde{b}$ по линейному закону $\tilde{b} = x_1 + x_2\tilde{a}_1 + x_3\tilde{a}_2 + \ldots + x_n\tilde{a}_{n-1}$. Коэффициенты x_i, $i = 1, \ldots, n$, этого преобразования неизвестны.

Проведено m экспериментов. В каждом эксперименте был точно измерен вектор входных переменных и получены границы для значения выходной переменной. Найти значения коэффициентов линейного преобразования, не противоречащие проведенным экспериментам.

В этом примере $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1(n-1)} \\ 1 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2(n-1)} \\ 1 & \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{m(n-1)} \end{pmatrix}$, где $\tilde{a}_{ij}$ — значение измерения j-ой компоненты вектора входных переменных в i-ом эксперименте; $\underline{b}_i, \overline{b}_i$ — границы полученные для выходной переменной $\tilde{b}$ в i-ом эксперименте.

Здесь мы имеем дело с частным случаем допустимого множества решений, в котором матрица $\boldsymbol{A}$ точечная и имеет единичный столбец. Заметим, что в случае точечной матрицы допустимое и

[1] Работа выполнена в рамках Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-9886.2006.9)

объединенное множества решений ИСЛАУ совпадают. Поэтому в таких задачах годятся методы, разработанные для каждого из этих множеств решений.

Построение методов нахождения и оценивания допустимого множества решений упрощается, если известно, что это множество ограничено. Будем в этой работе считать, что мы умеем решать задачу нахождения или оценивания для ограниченного допустимого множества решений. Давайте убедимся, что методы, разработанные для ограниченного, можно применять и для произвольного допустимого множества решений, и разберемся, как это делать.

2. Неограниченная и ограниченная составляющие допустимого множества решений

В [2] было доказано, что допустимое множество решений представимо в виде суммы линейного подпространства с выпуклым многогранником:

$$\Xi_{tol} = L + V = \{l + v \mid l \in L,\ v \in V\}, \tag{4}$$

где L — линейное подпространство, V — выпуклый многогранник.

Если линейное подпространство $L \neq \{0\}$, то оно является неограниченной составляющий допустимого множества решений. Выпуклый многогранник V — это ограниченная составляющая допустимого множества решений.

Чтобы достичь цели, поставленной во введении, мы сейчас последовательно ответим на вопросы: Какими формулами описывается подпространство L и как его найти? Можно ли описать многогранник V как ограниченное допустимое множество решений, и как такие формулы получить? Как использовать эти знания при оценивании Ξ_{tol}?

Но прежде, чем перейти к этим вопросам введем необходимые обозначения:
$N = \{1, \ldots, n\}$;
$P = \{j \in N \mid \underline{A}_{:j} = \overline{A}_{:j}\}$ — множество номеров всех вырожденных столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$;
$Q = N \setminus P$;
$p = |P|$ — число элементов в множестве P;
$\mathbb{R}_P$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, натянутое на оси с индексами из P, $(P = \emptyset) \Leftrightarrow (\mathbb{R}_P = \{0\})$;
A_P — матрица, составленная из столбцов исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ с номерами из P;
x_P — в зависимости от контекста: вектор из $\mathbb{R}_P$ или проекция вектора $x \in \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}_P$.
Там, где не оговорено особо, аналогичные обозначения будем использовать для других наборов индексов, подпространств, векторов и матриц.

3. Как найти подпространство L?

Считаем, что найти подпространство значит указать какой-нибудь его базис.

В [2] было показано, что $L = \{l \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}l = 0\}$ и доказано, что для $l \in \mathbb{R}^n$ имеет место эквивалентность

$$\boldsymbol{A}l = 0 \iff \begin{cases} l_Q = 0, \\ A_P l_P = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Это означает, что $L \subset \mathbb{R}_P$ и базис подпространства L можно найти так:
1) ищем множество P и составляем матрицу A_P,
2) находим какой-нибудь базис подпространства $L_P = \{l_P \in \mathbb{R}_P \mid A_P l_P = 0\}$,
3) записываем векторы этого базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ (т.е. в каждом векторе дописываем нули на месте компонент с номерами из Q).

Заметим, что для непустого допустимого множества решений подпространство L единственно, но существует произвол в выборе его базиса. В описанном выше методе этот произвол связан с произволом выбора базиса в подпространстве L_P.

4. Как найти описание многогранника V?

Найти выпуклый многогранник значит указать множество его вершин. Оценить — указать некоторые характерные точки и векторы оценивающего множества. Но прежде, чем найти или оценить выпуклый многогранник, надо получить формулы, которые его описывают. В нашем распоряжении пока есть только формулы для Ξ_{tol} и L. Попытаемся из них получить формулы для V.

Если $L = \{0\}$, то $V = \Xi_{tol}$ — формулы для V и Ξ_{tol} совпадают. Далее до конца раздела 4 будем считать, что $L \neq \{0\}$. В этом случае для непустого множества Ξ_{tol} существует бесконечно много таких многогранников V, что $\Xi_{tol} = L + V$ (рис. 1). Воспользовавшись свободой выбора, поищем такой многогранник, который удобен для получения описывающих его формул и для вычислений.

1-ый этап выбора: многогранник из подпространства, дополнительного к L в $\mathbb{R}^n$.

Пусть V^0 — произвольный выпуклый многогранник, для которого $\Xi_{tol} = L + V^0$. Обозначим через L^1 какое-нибудь подпространство, дополнительное к L в $\mathbb{R}^n$, а через V^1 — многогранник, полученный проектированием V^0 на L^1 параллельно L. Он тоже выпуклый и тоже годится для разложения: $\Xi_{tol} = L + V^1$. При этом у V^1 вершин не больше, чем у V^0, размерность V^1 не больше размерности V^0 — т.е. многогранник V^1 устроен не сложнее, а может быть только проще, чем V^0. Кроме того, он обладает свойством $V^1 = \Xi_{tol} \cap L^1$. Это свойство можно использовать для получения формул, описывающих V^1. Поясним как это сделать.

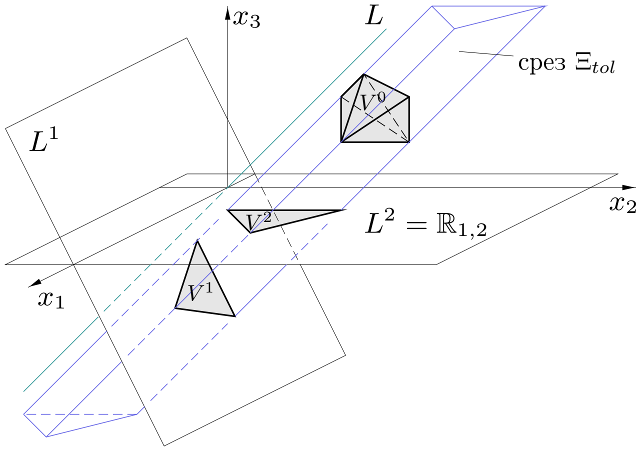

Рис. 1. $\Xi_{tol} = L + V^0 = L + V^1 = L + V^2$.

При $L^1 = \{0\}$ (т.е. при $L = \mathbb{R}^n$) нетрудно понять, что $V^1 = \begin{cases} \{0\} & \text{при } 0 \in \boldsymbol{b}, \\ \emptyset & \text{при } 0 \notin \boldsymbol{b}. \end{cases}$

Пусть теперь $L^1 \neq \{0\}$, размерность L^1 равна r и G — матрица, столбцы которой соответствуют базисным векторам подпространства L^1.

Поскольку базис подпространства L нам известен, матрицу G выбрать несложно. Выбор этот неоднозначен. По ходу этого раздела мы рассмотрим некоторые ограничения к выбору матрицы G (которые будут сформулированы в виде требований к выбору подпространства, дополнительного к L в $\mathbb{R}^n$) и увидим, как эти ограничения упрощают формулы для искомого многогранника (от (7) через (8) к (9)–(10)). А начнем с матрицы G общего вида.

Для произвольного вектора x из L^1 можем записать $x = Gy$, где $y \in \mathbb{R}^r$ — вектор коэффициентов разложения x по базису G. Получим описание многогранника V^1 на основе формулы (3) для Ξ_{tol}:

$$\begin{aligned} V^1(C,\boldsymbol{d},G) = \ \Xi_{tol}(C,\boldsymbol{d}) \cap L^1(G) \ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ Cx \subseteq \boldsymbol{d}\big\} \bigcap \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x = Gy, \ y \in \mathbb{R}^r\big\} = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x = Gy, \ y \in \mathbb{R}^r, Cx \subseteq \boldsymbol{d}\big\} = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x = Gy, \ y \in \mathbb{R}^r, C(Gy) \subseteq \boldsymbol{d}\big\} = \qquad (6) \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x = Gy, \ y \in \mathbb{R}^r, (CG)y \subseteq \boldsymbol{d}\big\}. \qquad (7) \end{aligned}$$

Представление V^1 в виде (7) означает, что

$$V^1(C,\boldsymbol{d},G) = G\big(\{y \in \mathbb{R}^r \mid (CG)y \subseteq \boldsymbol{d}\}\big) = G\big(\Xi_{tol}(CG,\boldsymbol{d})\big),$$

т.е. для нахождения (оценивания) многогранника V^1 в $\mathbb{R}^n$ надо сначала найти (оценить) допустимое множество решений $\Xi_{tol}(CG,\boldsymbol{d})$, а затем перевести результат в $\mathbb{R}^n$ с помощью умножения характерных точек и векторов на матрицу G слева. Очевидно, что $\Xi_{tol}(CG,\boldsymbol{d})$ ограничено, так как V^1 и $\Xi_{tol}(CG,\boldsymbol{d})$ — это описания одного и того же множества в разных базисах.

Аналогичные рассуждения на основе формулы (2) для Ξ_{tol} встречают трудности при переходе (6)→(7), связанные с отсутствием дистрибутивности в интервальной арифметике. Эти трудности можно обойти, выбрав L^1 так, чтобы L^1_Q совпало с $\mathbb{R}_Q$. Возможность такого выбора следует из (5). В этом случае

$$L^1 = L^1_Q + L^1_P = R_Q \oplus L^1_P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, \ y \in \mathbb{R}^s\},$$

где s — размерность подпространства L^1_P, $G_P \in \mathbb{R}^{p\times s}$ — матрица базисных векторов пространства L^1_P в $\mathbb{R}_P$. Формулы, описывающие многогранник V^1, получаются так:

$$\begin{aligned} V^1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},G_P) \ &= \ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \cap L^1(G_P) = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}\big\} \bigcap \ \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_P = G_P y, \ y \in \mathbb{R}^s\} = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_P = G_P y, \ y \in \mathbb{R}^s, \ \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}\big\} = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_P = G_P y, \ y \in \mathbb{R}^s, \ \boldsymbol{A}_Q x_Q + A_P x_P \subseteq \boldsymbol{b}\big\} = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_P = G_P y, \ y \in \mathbb{R}^s, \ \boldsymbol{A}_Q x_Q + A_P(G_P y) \subseteq \boldsymbol{b}\big\} = \\ &= \ \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_P = G_P y, \ y \in \mathbb{R}^s, \ \boldsymbol{A}_Q x_Q + (A_P G_P)y \subseteq \boldsymbol{b}\big\}. \qquad (8) \end{aligned}$$

Описание V^1 в виде (8) означает, что для того, чтобы найти (оценить) выпуклый многогранник V^1 в $\mathbb{R}^n$ надо сначала найти (оценить) его в L^1, где он совпадает с ограниченным допустимым множеством решений $\Xi_{tol}(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{b}) = \{z = \begin{pmatrix} x_Q \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q+s} \mid \widetilde{\boldsymbol{A}} z \subseteq \boldsymbol{b}\}$, для которого $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}_Q, A_P G_P)$, а затем перевести характерные точки и векторы результата из L^1 в $\mathbb{R}^n$ по правилу $x_Q = x_Q$, $x_P = G_P y$.

2-й этап выбора: многогранник из базисного подпространства, дополнительного к L в $\mathbb{R}^n$.

Наиболее простые формулы для V и для перехода от одного базиса к другому получаются, если в качестве подпространства, дополнительного к L, выбрать базисное подпространство. Давайте в этом убедимся.

Пусть L^2 — какое-нибудь базисное подпространство, дополнительное к L, R — множество индексов базисных векторов, на которые оно натянуто (т.е. $L^2 = \mathbb{R}_R$). Обозначим $T = N \setminus R$. Поищем формулы для $V^2 = \Xi_{tol} \cap L^2$.

$$\begin{array}{rcl} V^2(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, R) & = & \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathbb{R}_R = \\ & = & \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}\big\} \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_T = 0\} = \\ & = & \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_T = 0, \ \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}\big\} = \\ & = & \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_T = 0, \ \boldsymbol{A}_R x_R \subseteq \boldsymbol{b}\big\} = \\ & = & \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_T = 0, \ x_R \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}_R, \boldsymbol{b})\big\}. \end{array} \tag{9}$$

Аналогично (или как частный случай полученной формулы) имеем

$$V^2(C, \boldsymbol{d}, R) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_T = 0, \ C_R x_R \subseteq \boldsymbol{d}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x_T = 0, \ x_R \in \Xi_{tol}(C_R, \boldsymbol{d})\big\}. \tag{10}$$

Таким образом, для того чтобы найти (оценить) выпуклый многогранник V^2 из базисного подпространства $\mathbb{R}_R$, дополнительного к L, надо:

1) удалить из матрицы задачи столбцы с номерами из T,
2) найти (оценить) допустимое множество решений с сокращенной матрицей
 ($\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}_R, \boldsymbol{b}) = \Xi_{tol}(C_R, \boldsymbol{d})$),
3) затем перевести результат в $\mathbb{R}^n$, дописав нулевые компоненты с номерами из T.

Остается только уточнить, как найти множество T: из (5) ясно, что $T \subseteq P$ и может быть найдено через базисное подпространство в $\mathbb{R}_P$, дополнительное к ядру вещественной матрицы A_P. Поэтому выбор множества T осуществим традиционными методами линейной алгебры. В общем случае этот выбор неоднозначен.

Итак, в этом разделе мы получили ряд формул выпуклого многогранника V для разложения (4), показывающих, что при выборе V из подпространства дополнительного к L он описывается как ограниченное допустимое множество решений. Формулы (9)–(10) и соответствующий им процесс вычислений проще, чем формулы (7),(8) и сопутствующие им вычисления. Формула (9) предпочтительнее, чем (10): она ближе к исходной постановке и ее данные имеют более компактный вид.

5. Вычисление и оценивание допустимого множества решений

На основании результатов разделов 2–4 можно предложить такую схему вычисления (оценивания) допустимого множества решений Ξ_{tol}:

I. Найти L (раздел 3).
II. Выбрать дополнительное к L подпространство L'
 и получить в нем описание многогранника V (раздел 4).
III. Найти (оценить) ограниченное допустимое множество решений,
 представляющее V в L' (считаем методы известными).
IV. Перевести результат этапа III в $\mathbb{R}^n$ (раздел 4).
V. Дать ответ на основе I и IV (раздел 2).

Эта схема показывает, каким образом нахождение (оценивание) произвольного допустимого множества решений сводится к нахождению более простого ограниченного допустимого множества решений.

6. Программа поиска неограниченной составляющей и перехода к задаче об отыскании ограниченного допустимого множества решений

В заключение приведем программу, выполняющую шаги I и II для случая, когда дополнительное к L подпространство является базисным ($L' = L^2$). Она написана в виде функции `lta` в системе MATLAB. Функция `lta` по заданной интервальной матрице находит базис подпространства L, множество индексов T и матрицу A_R для (9). При наличии таких данных шаги IV и V выполняются элементарно.

Большинство обозначений с точностью до шрифта совпадает с теми, которые использовались выше. Отметим лишь те, которые отличаются, и новые:

`size, zeros, rref, length, eye, isempty` — стандартные функции MATLAB;

`L` — матрица, столбцы которой дают базис подпространства L;

`A` — на входе это матрица $\boldsymbol{A}$, на выходе остается $\boldsymbol{A}_R$, при этом интервальная матрица записывается в виде трехмерной вещественной, для которой `A(:,:,1)`$=\underline{A}$, `A(:,:,2)`$=\overline{A}$;

`AP` — A_P;

`p, s, t` — количество элементов в соответствующем множестве `P, S, T`;

`F, pivcol, nopiv` – вспомогательные переменные.

```
function [L,T,A]=lta(A)                  %     Пример использования функции lta:
[m,n,q]=size(A);                         %
AP=zeros(m,0);                           %   A(:,:,1) =
P=[];                                    %        1     2     0     0     1     0
for j=1:n                                %        2     4     1     0     2     0
    if A(:,j,1)==A(:,j,2)                %        3     6     0     0     3     0
        AP=[AP A(:,j,1)];                %   A(:,:,2) =
        P=[P;j];                         %        1     2     1     0     1     1
    end                                  %        2     4     1     0     2     1
end                                      %        3     6     0     0     3     1
T=[];                                    %   >> [L,T,AR]=lta(A)
p=length(P);                             %   L =
if p>0                                   %       -2     0    -1
    [F,pivcol]=rref(AP);                 %        1     0     0
    s=length(pivcol);                    %        0     0     0
    nopiv=1:p;                           %        0     1     0
    nopiv(pivcol)=[];                    %        0     0     1
    S=P(pivcol);                         %        0     0     0
    T=P(nopiv);                          %   T =
    t=p-s;                               %        2
    L=zeros(n,t);                        %        4
    if t>0                               %        5
        L(T,:)=eye(t,t);                 %   AR(:,:,1) =
        if s>0                           %        1     0     0
            L(S,:)=-F(1:s,nopiv);        %        2     1     0
        end                              %        3     0     0
        A(:,T,:)=[];                     %   AR(:,:,2) =
    end                                  %        1     1     1
else L=zeros(n,0);                       %        2     1     1
end                                      %        3     0     1
```

7. Литература

1. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 51–61. (`http://www.ict.nsc.ru/shary/Papers/IzvAN.ps`)
2. Шарая И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 10, № 5. – С. 103–119.