Том 20 № 2 2014

УДК 519.6

БЕСКВАНТОРНЫЕ ОПИСАНИЯ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНО-КВАНТОРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ[1]

И. А. Шарая

Рассматривается система отношений вида $Ax\,\sigma\,b$, где σ — вектор отношений с компонентами $=$, $\geq$ и $\leq$, а параметры (элементы матрицы A и правой части b) могут принимать значения из заданных интервалов. Что считать множеством ее решений, зависит от того, какой квантор связан с каждым интервально-значным параметром и каков порядок кванторных приставок по отдельным параметрам. Для множеств решений с кванторной приставкой достаточно общего вида получены эквивалентные бескванторные описания в классической интервальной арифметике, в интервальной арифметике Каухера и в обычной вещественной арифметике.

Ключевые слова: интервальные системы линейных уравнений и неравенств, исключение кванторов, арифметика Каухера.

I. A. Sharaya. Quantifier-free descriptions for interval–quantifier linear systems.

A system of relations of the form $Ax\,\sigma\,b$ is considered, where σ is a relation vector with components $=$, $\geq$, and $\leq$ and the parameters (the elements of the matrix A and of the right-hand side b) take values from given intervals. What is considered to be the set of solutions of this system depends on which quantifier is related to each interval-valued parameter and on the order of quantifier prefixes for individual parameters. For sets of solutions with a quantifier prefix of a rather general form, we obtain equivalent quantifier-free descriptions in the classical interval arithmetic, in the Kaucher interval arithmetic, and in the usual real arithmetic.

Keywords: interval systems of linear equations and inequalities, elimination of quantifiers, Kaucher arithmetic.

1. Введение в задачу

1.1. Интервально-кванторные линейные системы

Интервалом в классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ называют непустое ограниченное связное замкнутое подмножество числовой оси. Согласно стандарту на обозначения [1] интервальные объекты, в отличие от точечных (неинтервальных), будем выделять жирным шрифтом.

Рассмотрим систему линейных уравнений и неравенств вида

$$Ax\,\sigma\,b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ \sigma \in \{=,\geq,\leq\}^m,\quad m,n \in \mathbb{N},$$

где x — вектор неизвестных, σ — вектор отношений с компонентами $=$, $\geq$ и $\leq$, а всякий параметр $u \in \mathbb{R}$ (элемент матрицы A или правой части b) может принимать значение в пределах заданного одноименного интервала $\boldsymbol{u}$ из $\mathbb{IR}$. С каждым параметром u свяжем квантор всеобщности либо существования и соответствующую элементарную кванторную приставку $(\forall u \in \boldsymbol{u})$ либо $(\exists u \in \boldsymbol{u})$. Такую интервальную неопределенность параметров можно задать интервальной матрицей $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, матрицей кванторов $\mathcal{A}$ тех же размеров, что и $\boldsymbol{A}$, интервальным вектором $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ и вектором кванторов β длины m. Запишем все элементарные кванторные приставки в произвольном порядке и обозначим полученную приставку длины $m(n+1)$ как $Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$.

[1]Работа частично финансировалась Программой государственной поддержки ведущих научных школ России (НШ-6293.2012.9).

О п р е д е л е н и е. *Интервально-кванторной системой линейных отношений,* или, в кратком варианте, *интервально-кванторной линейной системой*, будем называть предикат $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax\,\sigma\, b)$, а ее решением — всякий вектор $x \in \mathbb{R}^n$, для которого предикат принимает значение "истина".

Введенные интервально-кванторные линейные системы тесно связаны с интервальными линейными системами. *Интервальная линейная система* вида $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$ — это условная запись, для которой в каждом конкретном случае особо оговаривают, что считают решением. Обычно рассматривают интервальные линейные системы, в которых присутствуют только уравнения или только неравенства одного знака, а в качестве решений — формальные, AE, сильные, слабые, допусковые, управляемые... (см. [2; 3; 4, гл. 2] и библиографию к ним). Чтобы согласовать с существующей в этой области терминологией, решение интервально-кванторной линейной системы $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax\,\sigma\, b)$ будем называть также *кванторным* решением интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$. Отметим, что все перечисленные выше решения системы $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$, кроме формальных, относятся к кванторным.

Запись $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax\,\sigma\, b)$ задает все возможные интервально-кванторные линейные системы в параметрической форме. Параметрами описания служат $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathcal{A}$, β, σ и (поскольку элементарные приставки с разными кванторами не всегда перестановочны) порядок элементарных кванторных приставок в Q. При дополнительных ограничениях на параметры мы получаем различные классы (подмножества) интервально-кванторных линейных систем. Например, если потребовать, чтобы значением всех компонент вектора отношений σ служило равенство, то получим класс интервально-кванторных систем линейных уравнений.

1.2. Переход к бескванторным описаниям

Множество интервально-кванторных линейных систем было введено в предыдущем разделе через предикат первого порядка. Предикативная запись близка к постановкам практических задач, но допускает весьма ограниченные средства теоретического исследования и совсем не годится для вычислений. Так возникает

З а д а ч а. Для возможно более широкого подмножества интервально-кванторных линейных систем найти удобное бескванторное описание в арифметике с достаточно развитым аппаратом исследований и вычислений.

Обычно стараются перейти к описанию в вещественной арифметике [4, гл. 2; 5, с. 93–95; 6–11], поскольку она привычна, обладает хорошими свойствами и развитыми численными методами. Ряд бескванторных описаний получен в интервальных арифметиках для различных подклассов интервально-кванторных систем линейных уравнений [2; 3; 12; 13], и несмотря на плохие свойства этих арифметик (отсутствие дистрибутивности и т.п.), найденные описания оказались полезны. Так, описание множеств AE-решений интервальных систем линейных уравнений позволило построить теорию этих множеств и интервальные методы их оценивания (например, интервальный метод Гаусса — Зейделя и формальный алгебраический подход) [2;3].

Особенность бескванторных описаний, предлагаемых в данной работе, в том, что:

1. Они расширяют класс описанных интервально-кванторных линейных систем по сравнению с теми известными описаниями, где не требуется неотрицательность x. (Требование неотрицательности вектора неизвестных можно сформулировать как дополнительное ограничение на параметры $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и σ. За счет такого требования в [8] получены бескванторные описания для интервально-кванторных линейных систем без ограничений на порядок элементарных кванторных приставок. Класс Q^σ, о котором пойдет речь в данной работе, не имеет ограничений на $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и σ, но имеет ограничение на порядок элементарных кванторных приставок.)

2. Бескванторные описания получены в обычной вещественной арифметике $\mathbb{R}$, классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ и в интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$, что дает возможность проводить исследования и вычисления как вещественными, так и интервальными методами.

2. Необходимые сведения

Приведем необходимые сведения из интервальных арифметик. Желание улучшить свойства классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ привело к появлению различных ее расширений. Одно из них — интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$. К ее созданию причастны Э. Каухер [14], Е. Гарденес и А. Трепат [15], а также С. Марков [16]. Они строили расширения классической интервальной арифметики на основе разных принципов, которые нашли отражение в названиях соответствующих конструкций: расширенная интервальная арифметика, модальный интервальный анализ, арифметика направленных интервалов. Но, несмотря на различие в построении, все три алгебраические системы совпадают с точностью до обозначений.

Интервал в $\mathbb{KR}$ — это запись вида $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$. В $\mathbb{IR}$ значения a и b должны дополнительно удовлетворять условию $a \leq b$. Интервалы записывают также малыми буквами жирного шрифта, например $\boldsymbol{u} \in \mathbb{KR}$. Если $\boldsymbol{u}$ и $[a, b]$ обозначают один интервал, a называют левым концом интервала и, для указания связи, записывают как $\underline{u}$, а b — правым концом и записывают как $\overline{u}$. Таким образом, $\boldsymbol{u} \equiv [\underline{u}, \overline{u}]$. Интервалы из $\mathbb{IR}$, как уже отмечалось во введении, можно рассматривать как подмножества числовой оси: $[\underline{u}, \overline{u}] = \{u \in \mathbb{R} \mid \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$.

В данной работе мы будем использовать в основном термины и свойства из арифметики Каухера, их и приведем ниже. Из классической интервальной арифметики нам понадобятся только те термины и свойства, которые не отличаются от приводимых.

Два интервала считаются равными, если их одноименные концы совпадают:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \underline{u} = \underline{v}, \\ \overline{u} = \overline{v}. \end{cases}$$

Отношение включения $\subseteq$ в $\mathbb{KR}$ продолжает отношение включения в $\mathbb{IR}$ интервалов как множеств:

$$\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{v} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \underline{u} \geq \underline{v}, \\ \overline{u} \leq \overline{v}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Операции взятия точной верхней и точной нижней грани по включению вводятся для ограниченных соответственно сверху и снизу по включению семейств интервалов через операции взятия точных граней в $\mathbb{R}$:

$$\bigvee_{i \in I} \boldsymbol{u}_i := \sup_{i \in I}{}_{\subseteq} \boldsymbol{u}_i := [\,\inf_{i \in I} \underline{u}_i,\ \sup_{i \in I} \overline{u}_i\,],$$

$$\bigwedge_{i \in I} \boldsymbol{u}_i := \inf_{i \in I}{}_{\subseteq} \boldsymbol{u}_i := [\,\sup_{i \in I} \underline{u}_i,\ \inf_{i \in I} \overline{u}_i\,].$$

Нам понадобятся следующие одноместные операции над интервалами:

$$\begin{aligned} \operatorname{mid} \boldsymbol{u} &:= \check{u} := (\underline{u} + \overline{u})/2 \ \text{ — середина}, \\ \operatorname{rad} \boldsymbol{u} &:= \hat{u} := (\overline{u} - \underline{u})/2 \ \text{ — радиус}, \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{u} &:= [\overline{u}, \underline{u}] \ \text{ — дуализация}, \\ \operatorname{pro} \boldsymbol{u} &:= \begin{cases} \boldsymbol{u}, & \text{если } \underline{u} \leq \overline{u}, \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{u}, & \text{если } \underline{u} > \overline{u}, \end{cases} \ \text{ — правильная проекция}. \end{aligned}$$

(Дуализация имеет смысл только в $\mathbb{KR}$.)

Арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления определяются через соответствующие вещественные операции и операции взятия точных граней по включению так, что

$$\forall * \in \{+, -, \cdot, /\} \qquad \boldsymbol{u} * \boldsymbol{v} = \bigwedge\!\!\!\bigvee^{\boldsymbol{u}} \bigwedge\!\!\!\bigvee^{\boldsymbol{v}} (u * v), \quad \text{где } \bigwedge\!\!\!\bigvee^{\boldsymbol{u}} := \begin{cases} \bigvee\limits_{u \in \boldsymbol{u}}, & \text{если } \underline{u} \leq \overline{u}, \\ \bigwedge\limits_{u \in \operatorname{pro} \boldsymbol{u}}, & \text{если } \underline{u} \geq \overline{u}. \end{cases}$$

(Деление определено только для таких интервалов $\boldsymbol{v}$, что $0 \notin \operatorname{pro} \boldsymbol{v}$.) Сложение и умножение интервалов коммутативны. Сложение осуществляется по концам:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = [\underline{u} + \underline{v}, \overline{u} + \overline{v}]. \tag{2.2}$$

Вещественные числа $\lambda \in \mathbb{R}$ отождествляются с интервалами нулевого радиуса $[\lambda, \lambda]$. Умножение интервала на число $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет свойства:

$$\lambda \boldsymbol{u} = \begin{cases} [\lambda \underline{u}, \lambda \overline{u}], & \text{при } \lambda \geq 0, \\ [\lambda \overline{u}, \lambda \underline{u}], & \text{при } \lambda \leq 0; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(\operatorname{dual} \boldsymbol{u})\lambda \overset{(2.3)}{=} \operatorname{dual}(\boldsymbol{u}\lambda) = [\overline{\boldsymbol{u}\lambda}, \underline{\boldsymbol{u}\lambda}]. \tag{2.4}$$

Запись $-\boldsymbol{u}$ означает результат умножения $(-1) \cdot \boldsymbol{u}$ (а не взятие интервала, противоположного по сложению к $\boldsymbol{u}$).

Матрицы и векторы, элементами которых служат интервалы, называются интервальными. Через $\boldsymbol{A}_{i:}$ будем обозначать i-ю строку матрицы $\boldsymbol{A}$. Для интервальных векторов и матриц концы, отношения $=$, $\subseteq$, операции mid, rad, dual, pro, а также сложение, вычитание и умножение на число вводятся покомпонентно, например $(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})_{ij} := \operatorname{dual}(\boldsymbol{A}_{ij})$, $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})_{ij} := \boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{B}_{ij}$, $(-\boldsymbol{A})_{ij} = -\boldsymbol{A}_{ij}$. Правила умножения интервальных векторов и матриц такие же, как и неинтервальных: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ij} := \sum_k \boldsymbol{A}_{ik} \boldsymbol{B}_{kj}$.

Нам понадобится свойство

$$(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x = \operatorname{dual}(\boldsymbol{A}x) \quad \text{для } \boldsymbol{A} \in \mathbb{KR}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

которое легко получить из правила умножения интервальных векторов и матриц с привлечением (2.2) и (2.4).

3. Результаты

3.1. Бескванторные описания в интервальных арифметиках

Сначала обратимся к бескванторным описаниям для интервально-кванторных линейных систем в интервальных арифметиках. Нам понадобятся следующие обозначения:

$Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторная приставка, полученная из $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ удалением всех тех элементарных приставок, которые не имеют отношения к i-й строке системы;

$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторная приставка вида $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ с дополнительным условием: для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ в $Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ кванторы всеобщности (если они есть) предшествуют кванторам существования (если такие есть);

$Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторная приставка вида $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ с дополнительным условием: все кванторы всеобщности (если есть) предшествуют всем кванторам существования (если такие есть);

$\boldsymbol{A}^{\forall}, \boldsymbol{A}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b}^{\forall}, \boldsymbol{b}^{\exists} \in \mathbb{IR}^m$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{KR}^{m \times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{KR}^m$ — интервальные матрицы и векторы, задаваемые правилами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\forall}_{ij} &:= \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} & \quad \boldsymbol{A}^{\exists}_{ij} &:= \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} \\ \boldsymbol{b}^{\forall}_{i} &:= \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \forall, \\ 0, & \text{если } \beta_{i} = \exists, \end{cases} & \quad \boldsymbol{b}^{\exists}_{i} &:= \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \exists, \\ 0, & \text{если } \beta_{i} = \forall, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{C}_{ij} := \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} \qquad \boldsymbol{d}_{i} := \begin{cases} \operatorname{dual} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \forall, \\ \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \exists. \end{cases} \tag{3.2}$$

Прежде всего приведем свойство интервально-кванторных линейных систем, к которому будем неоднократно обращаться: каждую элементарную кванторную приставку из $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ можно пронести к той строке системы, в которой присутствует параметр этой приставки, т. е.

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b) \iff \mathop{\&}_{i\in\{1,\dots,m\}} Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (A_{i:}x\,\sigma_i\,b_i). \tag{3.3}$$

Обоснование этого свойства заключается в том, что система отношений $Ax\,\sigma\,b$ есть, с позиций логики, конъюнкция этих отношений $\mathop{\&}_i A_{i:}x\,\sigma_i\,b_i$, а для конъюнкции справедливы эквивалентности:

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathcal{S}\ \big(P_1(t)\ \&\ P_2\big) &\iff \big(\forall t\in\mathcal{S}\ P_1(t)\big)\ \&\ P_2,\\ \exists t\in\mathcal{S}\ \big(P_1(t)\ \&\ P_2\big) &\iff \big(\exists t\in\mathcal{S}\ P_1(t)\big)\ \&\ P_2,\end{aligned}$$

где $\mathcal{S}$ — множество значений переменной t, P_1, P_2 — формулы, причем P_2 не зависит от t.

Из (3.3) очевидно, что

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b) \iff Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b), \tag{3.4}$$

т. е. вектор x служит решением системы $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$ тогда и только тогда, когда он является решением системы $Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$. Таким образом, хотя класс систем вида $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$ шире, чем класс систем вида $Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$, но утверждения, доказанные для решений системы $Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$, тривиально обобщаются в утверждения для решений системы $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$.

Теперь обратимся к интервально-кванторным системам линейных уравнений. Бескванторные описания для наиболее широкого подмножества таких систем получены С. П. Шарым. В [17; 18] он впервые доказал, что

$$Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax=b) \iff \boldsymbol{A}^{\forall}x-\boldsymbol{b}^{\forall}\subseteq\boldsymbol{b}^{\exists}-\boldsymbol{A}^{\exists}x \iff \boldsymbol{C}x\subseteq\boldsymbol{d}. \tag{3.5}$$

Эквивалентность (3.4) позволяет сделать следующее обобщение.

Теорема 1.

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax=b) \iff \boldsymbol{A}^{\forall}x-\boldsymbol{b}^{\forall}\subseteq\boldsymbol{b}^{\exists}-\boldsymbol{A}^{\exists}x \iff \boldsymbol{C}x\subseteq\boldsymbol{d}. \tag{3.6}$$

Теорема 1 для интервально-кванторной системы уравнений $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax=b)$ дает эквивалентные бескванторные системы включений в $\mathbb{IR}$ ($\boldsymbol{A}^{\forall}x-\boldsymbol{b}^{\forall}\subseteq\boldsymbol{b}^{\exists}-\boldsymbol{A}^{\exists}x$) и в $\mathbb{KR}$ ($\boldsymbol{C}x\subseteq\boldsymbol{d}$).

Далее договоримся системы, в которых вектор отношений σ состоит из одинаковых компонент, называть *σ-однородными*. Результаты теоремы 1 предназначены для систем уравнений, получим аналогичные результаты для σ-однородных систем неравенств.

Теорема 2.

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\geq b) \iff \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\geq\overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists} \iff \underline{\boldsymbol{C}x}\geq\underline{d}, \tag{3.7}$$

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\leq b) \iff \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\leq\underline{b}^{\forall}+\overline{b}^{\exists} \iff \overline{\boldsymbol{C}x}\leq\overline{d}. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем только для цепочки эквивалентностей (3.7). Для (3.8) оно аналогично.

1) Из (3.3) очевидно

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\geq b) \iff \mathop{\&}_{i\in\{1,\dots,m\}} Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (A_{i:}x\geq b_i). \tag{3.9}$$

2) Использование того, что

$$A_{i:}x\geq b_i \iff \sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j+(-b_i)\geq 0$$

и что для всяких непрерывных функций $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и интервала $\boldsymbol{u}\in\mathbb{IR}$

$$(\forall u\in\boldsymbol{u})\ (h(u,x)+g(x)\geq 0)\iff \min_{u\in\boldsymbol{u}} h(u,x)+g(x)\geq 0,$$
$$(\exists u\in\boldsymbol{u})\ (h(u,x)+g(x)\geq 0)\iff \max_{u\in\boldsymbol{u}} h(u,x)+g(x)\geq 0,$$

позволяет получить бескванторную запись для $Q_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\geq b_i)$:

$$Q_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\geq b_i)\iff \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{ext}^{\mathcal{A}_{ij}}_{A_{ij}\in\boldsymbol{A}_{ij}}(A_{ij}x_j)+\operatorname*{ext}^{\beta_i}_{b_i\in\boldsymbol{b}_i}(-b_i)\geq 0, \tag{3.10}$$

где $\mathrm{ext}^{\forall}=\min$, $\mathrm{ext}^{\exists}=\max$.

3) Благодаря соотношениям

$$\min_{u\in\boldsymbol{u}}(ux)=\underline{\boldsymbol{u}x},\qquad \max_{u\in\boldsymbol{u}}(ux)=\overline{\boldsymbol{u}x},\qquad \min_{u\in\boldsymbol{u}}(u)=\underline{u},\qquad \max_{u\in\boldsymbol{u}}(u)=\overline{u},$$

которые справедливы для всякого интервала $\boldsymbol{u}\in\mathbb{IR}$, и с учетом (2.2), сумму экстремумов в (3.10) можно выразить через матрицы $\boldsymbol{A}^{\forall}$, $\boldsymbol{A}^{\exists}$ и векторы $\boldsymbol{b}^{\forall}$, $\boldsymbol{b}^{\exists}$ из (3.1):

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{ext}^{\mathcal{A}_{ij}}_{A_{ij}\in\boldsymbol{A}_{ij}}(A_{ij}x_j)+\operatorname*{ext}^{\beta_i}_{b_i\in\boldsymbol{b}_i}(-b_i)\geq 0\iff \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}_{i:}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}_{i:}x}\geq \overline{b}^{\forall}_i+\underline{b}^{\exists}_i. \tag{3.11}$$

4) Из (3.9)–(3.11) следует, что

$$Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\geq b)\iff \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\geq \overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists}.$$

5) Докажем вторую эквивалентность в цепочке (3.7). Для матрицы $\boldsymbol{C}$ имеем

$$[\underline{\boldsymbol{C}x},\overline{\boldsymbol{C}x}]=\boldsymbol{C}x\ \overset{\substack{\text{определения}\\ \boldsymbol{C},\boldsymbol{A}^{\forall},\boldsymbol{A}^{\exists}}}{=}\ \boldsymbol{A}^{\forall}x+(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A}^{\exists})x\ \overset{\substack{\text{свойства}\\ (2.5)\text{ и }(2.2)}}{=}\ [\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x},\ \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}], \tag{3.12}$$

и потому $\underline{\boldsymbol{C}x}=\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}$. Определения векторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}^{\forall}$ и $\boldsymbol{b}^{\exists}$ дают

$$[\underline{d},\overline{d}]=\boldsymbol{d}=\mathrm{dual}(\boldsymbol{b}^{\forall})+\boldsymbol{b}^{\exists}=[\overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists},\underline{b}^{\forall}+\overline{b}^{\exists}], \tag{3.13}$$

откуда $\underline{d}=\overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists}$. В целом, получаем

$$\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\geq \overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists}\iff \underline{\boldsymbol{C}x}\geq \underline{d}.$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

В интервальных арифметиках $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ отношения $\geq$ и $\leq$ имеют место и являются продолжением одноименных отношений из $\mathbb{R}$, а для векторов вводятся покомпонентно. Это позволяет формально называть записи с $\boldsymbol{A}^{\forall},\boldsymbol{A}^{\exists},\boldsymbol{b}^{\forall},\boldsymbol{b}^{\exists}$ в (3.7) и (3.8) неравенствами в классической интервальной арифметике, а записи с $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$ — неравенствами в арифметике Каухера. Хотя на практике удобнее понимать все неравенства из (3.7) и (3.8) как покомпонентные неравенства в $\mathbb{R}^m$.

Из (3.3) и теоремы 2 очевидно, что множество решений интервально-кванторных систем линейных неравенств с произвольным $\sigma\in\{\geq,\leq\}^m$ не зависит от порядка элементарных кванторных приставок, т. е. все интервально-кванторные системы линейных неравенств с одинаковыми $\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta$ и σ имеют одно и то же множество решений. Этим системы неравенств существенно отличаются от систем уравнений.

Приведем следствие теорем 1 и 2, которое устанавливает соотношение между множествами AE-решений интервальных систем линейных уравнений и множествами кванторных решений интервальных σ-однородных систем линейных неравенств.

Следствие 1.

$$Q^{AE}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\,(Ax=b) \iff Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\,(Ax=b) \iff \begin{cases} Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)(Ax\ge b),\\ Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)(Ax\le b).\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о дается следующей цепочкой эквивалентностей:

$$\begin{cases} Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\ge b)\\ Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\le b)\end{cases} \overset{\text{Теорема 2}}{\iff} \begin{cases} \underline{\boldsymbol{C}x}\ge \underline{d}\\ \overline{\boldsymbol{C}x}\le \overline{d}\end{cases} \overset{\text{определение }\subseteq}{\iff} \boldsymbol{C}x\subseteq \boldsymbol{d}$$
$$\overset{\text{Теорема 1}}{\iff} Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax=b) \overset{(3.4)}{\iff} Q^{AE}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax=b).$$

В теоремах 1, 2 приведены бескванторные описания для σ-однородных систем. Перейдем к рассмотрению систем с произвольным вектором отношений σ.

Через $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$ будем обозначать кванторную приставку вида $Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$, удовлетворяющую условию: если σ_i есть $=$, то в $Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$ кванторы всеобщности (если они имеются) предшествуют кванторам существования (если такие есть). Классом Q^{σ} в множестве всех интервально-кванторных систем линейных отношений будем называть подмножество, состоящее из всех систем вида $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$. Следующая теорема дает бескванторное описание класса Q^{σ} в интервальных арифметиках $\mathbb{KR}$ и $\mathbb{IR}$, с привлечением покомпонентных неравенств из $\overline{\mathbb{R}}^m$, где $\overline{\mathbb{R}}$ обозначает расширенную числовую ось ($\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$).

Теорема 3.

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \begin{cases} \underline{\boldsymbol{C}x}\ge \underline{d}+u,\\ \overline{\boldsymbol{C}x}\le \overline{d}+v,\end{cases} \iff \begin{cases} \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\ge \overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists}+u,\\ \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\le \underline{b}^{\forall}+\overline{b}^{\exists}+v,\end{cases} \tag{3.14}$$

где $\boldsymbol{C}$ *и* $\boldsymbol{d}$ *из* (3.2), $\boldsymbol{A}^{\forall},\boldsymbol{A}^{\exists},\boldsymbol{b}^{\forall},\boldsymbol{b}^{\exists}$ *из* (3.1), *а векторы* $u,v\in\overline{\mathbb{R}}^m$ *определяются правилом*

$$u_i:=\begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } = \text{ или } \ge,\\ -\infty, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \le,\end{cases} \qquad v_i:=\begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } = \text{ или } \le,\\ \infty, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \ge.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) За счет того, что каждый интервально-значный параметр (элемент матрицы A или вектора b) входит только в одну строку системы $Ax\,\sigma\, b$, имеем (3.3) и, в частности,

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \mathop{\&}_{i\in\{1,\dots,m\}} Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\,\sigma_i\, b_i). \tag{3.15}$$

2) Исключим кванторные приставки в предикате $Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\,\sigma_i\, b_i)$ в зависимости от значений σ_i по теоремам 1 и 2:

$$\begin{aligned} Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x=b_i) &\overset{(3.6)}{\iff} (\boldsymbol{C}x)_i\subseteq \boldsymbol{d}_i \iff \big(\underline{\boldsymbol{C}x}_i\ge \underline{d}_i\big)\ \&\ \big(\overline{\boldsymbol{C}x}_i\le \overline{d}_i\big),\\ Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\ge b_i) &\overset{(3.7)}{\iff} \underline{\boldsymbol{C}x}_i\ge \underline{d}_i \iff \big(\underline{\boldsymbol{C}x}_i\ge \underline{d}_i\big)\ \&\ \big(\overline{\boldsymbol{C}x}_i\le \infty\big),\\ Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\le b_i) &\overset{(3.8)}{\iff} \overline{\boldsymbol{C}x}_i\le \overline{d}_i \iff \big(\underline{\boldsymbol{C}x}_i\ge -\infty\big)\ \&\ \big(\overline{\boldsymbol{C}x}_i\le \overline{d}_i\big).\end{aligned}$$

3) Вводя векторы u и v, перейдем к матрично-векторной записи

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \begin{cases} \underline{\boldsymbol{C}x}\ge \underline{d}+u,\\ \overline{\boldsymbol{C}x}\le \overline{d}+v.\end{cases}$$

4) Эквивалентность

$$\begin{cases}\underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d} + u,\\ \overline{\boldsymbol{C}x} \leq \overline{d} + v,\end{cases} \iff \begin{cases}\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \geq \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists} + u,\\ \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \leq \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} + v,\end{cases}$$

очевидна в силу (3.12) и (3.13). Доказательство теоремы 3 завершено.

Удобные бескванторные записи для класса Q^{σ} получаются из теоремы 3, если ввести множества интервалов $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \overline{\mathbb{R}}\}$ и $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \overline{\mathbb{R}},\ \underline{z} \leq \overline{z}\}$ и продолжить на них отношение $\subseteq$ по правилу (2.1). Тогда

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w} \iff \boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x + \boldsymbol{w}, \tag{3.16}$$

где $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$ из (3.2), $\boldsymbol{A}^{\forall}, \boldsymbol{A}^{\exists}, \boldsymbol{b}^{\forall}, \boldsymbol{b}^{\exists}$ из (3.1), а интервальный вектор $\boldsymbol{w} \in \mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}^m$ таков, что

$$\boldsymbol{w}_i := \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } =,\\ [0, \infty], & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \geq,\\ [-\infty, 0], & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \leq . \end{cases}$$

Запись $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w}$ будет бескванторным описанием интервально-кванторной линейной системы $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$ во всякой интервальной арифметике, продолжающей арифметику Каухера на множество $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$. Пример такого продолжения есть в [19]. Договоримся обозначать арифметику-продолжение, как и ее основное множество, через $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$. Аналогично запись $\boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x + \boldsymbol{w}$ — это бескванторное описание системы $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$ в интервальной арифметике, продолжающей $\mathbb{IR}$ на множество $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$. Примеры продолжений классической интервальной арифметики на множество интервалов с бесконечными концами описаны в [20]. Договоримся арифметикой $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ называть какое-нибудь из таких продолжений. Итак, соотношение (3.16) дает бескванторные описания интервально-кванторных линейных систем класса Q^{σ} в интервальных арифметиках $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$.

Сравнивая бескванторные записи, полученные для интервально-кванторных линейных систем, видим, что бескванторная запись в $\mathbb{KR}$ ($\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$), с одной стороны, за счет многоуровневых обозначений более удалена от начальных данных $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}$ и β, а с другой стороны, более лаконична и удобна для анализа, чем аналогичная запись в $\mathbb{IR}$ ($\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$).

3.2. Бескванторные описания в вещественной арифметике

Получим бескванторные описания интервально-кванторных линейных систем в вещественной арифметике $\mathbb{R}$. Для этого нам понадобится символ $\circ$, который означает поэлементное произведение матриц (произведение Адамара): $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$. Отметим также, что операцию взятия модуля вектора мы понимаем покомпонентно, например, $|x|$ для $x \in \mathbb{R}^n$ — это неотрицательный вектор с компонентами $|x|_i = |x_i|$.

Теорема 4.

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax = b) \iff |\check{A}x - \check{b}| \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.17}$$

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff \check{b} - \check{A}x \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.18}$$

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \leq b) \iff \check{A}x - \check{b} \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.19}$$

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \operatorname{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.20}$$

где

$$\mathcal{A}^s_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists,\\ -1, & \textit{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} \qquad \beta^s_i = \begin{cases} 1, & \textit{если } \beta_i = \exists,\\ -1, & \textit{если } \beta_i = \forall, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\mathrm{abs}_i{}^{\sigma}(y) = \begin{cases} |y_i|, & \textit{если } \sigma_i \textit{ есть } =, \\ -y_i, & \textit{если } \sigma_i \textit{ есть } \geq, \\ y_i, & \textit{если } \sigma_i \textit{ есть } \leq. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Эквивалентность (3.17) была доказана И. Роном в 1996 г. в личной беседе с С. П. Шарым и А. В. Лакеевым в Вюцбурге на конференции INTERVAL'96. Ее запись с помощью произведения Адамара предложил А. В. Лакеев в [11]. Приведем свое доказательство.

По теореме 1

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax = b) \iff \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}.$$

Используя свойства арифметики Каухера:

$$(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{KR}^m) \ \big(\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{v} \iff |\check{u} - \check{v}| \leq \hat{v} - \hat{u}\big),$$

$$\mathrm{mid}(\boldsymbol{C}x) = \check{C}x, \qquad \mathrm{rad}(\boldsymbol{C}x) = \hat{C}|x|, \tag{3.22}$$

получаем

$$\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} \iff |\check{C}x - \check{d}| \leq \hat{d} - \hat{C}|x|.$$

Из определений (3.2) и (3.21) для $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{d}$, $\mathcal{A}^s$ и β^s имеем

$$\check{C} = \check{A}, \qquad \hat{C} = -\mathcal{A}^s \circ \hat{A}, \qquad \check{d} = \check{b}, \qquad \hat{d} = \beta^s \circ \hat{b}. \tag{3.23}$$

2) Докажем эквивалентность (3.18). По теореме 2

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax \geq b) \iff \underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d}.$$

Привлекая очевидное свойство арифметики Каухера

$$(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{KR}^m) \ \big(\underline{u} \geq \underline{v} \iff \check{v} - \check{u} \leq \hat{v} - \hat{u}\big),$$

которое позволяет заменить неравенство концов неравенством центров и радиусов, и (3.22), получаем $\underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d} \iff \check{d} - \check{C}x \leq \hat{d} - \hat{C}|x|$. Далее используем (3.23).

3) Эквивалентность (3.19) доказывается аналогично (3.18).

4) Осталось обосновать эквивалентность (3.20). Также, как в п. 1 доказательства теоремы 3, имеем (3.15), т. е. задача распадается по строкам. Применим к каждой строке соответствующую эквивалентность (3.17), (3.18) или (3.19) и свернем полученную систему неравенств с помощью операции abs^{σ}.

Доказательство теоремы 4 завершено.

Из эквивалентностей (3.17)–(3.19) очевидно еще одно доказательство следствия 1. Кроме того, нетрудно установить следующую связь между σ-однородными системами неравенств противоположного знака.

Следствие 2.

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff Q(-\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \leq b), \tag{3.24}$$

$$Q(-\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \leq b). \tag{3.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опираясь на свойства интервалов

$$\mathrm{mid}(-\boldsymbol{u}) = -\check{u} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{rad}(-\boldsymbol{u}) = \hat{u}, \tag{3.26}$$

покажем справедливость соотношения (3.25):

$$
\begin{aligned}
Q(-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax \geq b) &\overset{(3.18)}{\iff} \operatorname{mid}(-\boldsymbol{b}) - \operatorname{mid}(-\boldsymbol{A})x \leq \big(\mathcal{A}^s \circ \operatorname{rad}(-\boldsymbol{A})\big)|x| + \beta^s \circ \operatorname{rad}(-\boldsymbol{b}),\\
&\overset{(3.26)}{\iff} -\check{b} + \check{A}x \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b},\\
&\overset{(3.19)}{\iff} Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax \leq b).
\end{aligned}
$$

Соотношение (3.24) доказывается аналогично.

Следствие 2 означает, что при одновременном изменении знака неравенства и знаков всех интервалов значений параметров на противоположные множество кванторных решений интервальной системы линейных неравенств не изменится. Например, множества решений систем $(\forall A \in \boldsymbol{A})\,(\exists b \in \boldsymbol{b})\,(Ax \geq b)$ и $(\forall A \in -\boldsymbol{A})\,(\exists b \in -\boldsymbol{b})\,(Ax \leq b)$ совпадают.

3.3. Бескванторные описания в $\mathbb{KR}$, $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{R}$ для решений основных типов

До сих пор, рассматривая интервально-кванторные линейные системы $Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$, мы старались получать такие утверждения, в которых нет ограничений на параметры $\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta$ и σ, а ограничения на порядок элементарных кванторных приставок в Q минимальны. В этом смысле самые общие утверждения были найдены для класса Q^σ. В данном разделе мы рассмотрим подмножества интервально-кванторных линейных систем класса Q^σ, выделяемые в нем требованием однородности $\mathcal{A}$ и однородности β. Элементы всех этих подмножеств будем называть системами *основных типов*, а про их решения (для согласования с терминологией из [2;4]) говорить как про решения основных типов для интервальных линейных систем. В зависимости от того, какие кванторы заполняют матрицу $\mathcal{A}$ и вектор β, все интервально-кванторные линейные системы основных типов делятся на 4 подмножества. Это разделение представлено в табл. 1. Для решений систем каждого подмножества дадим название, продолжающее на все подмножество то название, которое используется в [2; 4] для решений σ-однородных систем этого подмножества. В первом столбце табл. 1 перечислены названия решений, во втором и третьем указаны значения компонент матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β, а в четвертом — общий вид элементов для соответствующего подмножества систем основных типов.

Бескванторные описания в $\mathbb{KR}$, $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{R}$ для основных типов решений интервальных линейных систем можно получить как следствия соответствующих описаний кванторных решений класса Q^σ. Поясним это с помощью табл. 2 для σ-однородных интервально-кванторных линейных систем. В ней столбцы 4–7 для основных типов решений получаются построчно из столбца 3 для кванторных решений. При этом надо в строках, соответствующих арифметике Каухера, воспользоваться определением (3.2) матрицы $\boldsymbol{C}$ и вектора $\boldsymbol{d}$; в строках, соответствующих классической интервальной арифметике, — определением (3.1) матриц $\boldsymbol{A}^\forall$, $\boldsymbol{A}^\exists$ и векторов $\boldsymbol{b}^\forall$, $\boldsymbol{b}^\exists$, а в строках, соответствующих вещественной арифметике, — определением (3.21) матрицы $\mathcal{A}^s$, вектора β^s и определением произведения $\circ$.

Т а б л и ц а 1

Основные типы решений интервальных линейных систем в классе Q^σ

Название решения	Значения компонент: матрицы $\mathcal{A}$	Значения компонент: вектора β	Интервально-кванторная линейная система
Слабое	$\exists$	$\exists$	$(\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b)$
Допуско́вое	$\forall$	$\exists$	$(\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b)$
Управляемое	$\exists$	$\forall$	$(\forall b \in \boldsymbol{b})(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (Ax\,\sigma\, b)$
Сильное	$\forall$	$\forall$	$(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b)$

Т а б л и ц а 2

Характеризация σ-однородных интервально-кванторных линейных систем и основных типов их решений

$Ax\,\sigma\,b$	Пространство описания	Тип решения и соответствующая ему кванторная приставка $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$				
			Основные типы решений			
		Кванторное $Q^\sigma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$	Слабое $(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})$	Допусковое $(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})$	Управляемое $(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (\exists A \in \boldsymbol{A})$	Сильное $(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\forall b \in \boldsymbol{b})$
$Ax = b$	$\mathbb{KR}$	$\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$	$(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x \subseteq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$	$(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x \subseteq \operatorname{dual} \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}x \subseteq \operatorname{dual} \boldsymbol{b}$
	$\mathbb{IR}$	$\boldsymbol{A}^\forall x - \boldsymbol{b}^\forall \subseteq \boldsymbol{b}^\exists - \boldsymbol{A}^\exists x$	$0 \in \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}x$	$\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{A}x$	$\boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b} \subseteq 0$
	$\mathbb{R}$	$\lvert \check{A}x - \check{b} \rvert \leq (\boldsymbol{\mathcal{A}}^s \circ \hat{A}) \lvert x \rvert + \beta^s \circ \hat{b}$	$\lvert \check{A}x - \check{b} \rvert \leq \hat{A} \lvert x \rvert + \hat{b}$	$\lvert \check{A}x - \check{b} \rvert \leq -\hat{A} \lvert x \rvert + \hat{b}$	$\lvert \check{A}x - \check{b} \rvert \leq \hat{A} \lvert x \rvert - \hat{b}$	$\lvert \check{A}x - \check{b} \rvert \leq -\hat{A} \lvert x \rvert - \hat{b}$
$Ax \geq b$	$\mathbb{KR}$	$\underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d}$	$\underline{(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x} \geq \underline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \geq \underline{b}$	$\underline{(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x} \geq \overline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \geq \overline{b}$
	$\mathbb{IR}$	$\overline{\boldsymbol{A}^\exists x} + \underline{\boldsymbol{A}^\forall x} \geq \underline{b}^\exists + \overline{b}^\forall$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \geq \underline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \geq \underline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \geq \overline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \geq \overline{b}$
	$\mathbb{R}$	$\check{b} - \check{A}x \leq (\boldsymbol{\mathcal{A}}^s \circ \hat{A}) \lvert x \rvert + \beta^s \circ \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \leq \hat{A} \lvert x \rvert + \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \leq -\hat{A} \lvert x \rvert + \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \leq \hat{A} \lvert x \rvert - \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \leq -\hat{A} \lvert x \rvert - \hat{b}$
$Ax \leq b$	$\mathbb{KR}$	$\overline{\boldsymbol{C}x} \leq \overline{d}$	$\overline{(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x} \leq \overline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \leq \overline{b}$	$\overline{(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x} \leq \underline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \leq \underline{b}$
	$\mathbb{IR}$	$\underline{\boldsymbol{A}^\exists x} + \overline{\boldsymbol{A}^\forall x} \leq \overline{b}^\exists + \underline{b}^\forall$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \leq \overline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \leq \overline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \leq \underline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \leq \underline{b}$
	$\mathbb{R}$	$\check{A}x - \check{b} \leq (\boldsymbol{\mathcal{A}}^s \circ \hat{A}) \lvert x \rvert + \beta^s \circ \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \leq \hat{A} \lvert x \rvert + \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \leq -\hat{A} \lvert x \rvert + \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \leq \hat{A} \lvert x \rvert - \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \leq -\hat{A} \lvert x \rvert - \hat{b}$

Примерно половина описаний основных типов решений, которые приведены в 4–7 столбцах табл. 2, получена ранее. Те, что были найдены первыми, стали именными: описание Оеттли — Прагера [6] в $\mathbb{R}$ и Бека [12] в $\mathbb{IR}$ для слабых решений уравнений, а также описание Герлаха [7] в $\mathbb{R}$ для слабых решений неравенств знака $\leq$. Бескванторные описания допускового множества решений уравнений получены в $\mathbb{R}$ И. Роном [9], а в $\mathbb{IR}$ — А.Ноймайером [13]. У А. В. Лакеева и С. И. Носкова в [10] обосновано описание в $\mathbb{R}$ и имеется, уже как очевидное, описание в $\mathbb{IR}$ для управляемого множества решений уравнений. Оставшиеся описания в интервальных арифметиках $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ для основных типов решений систем уравнений тоже известны, например, как очевидные следствия утверждения (3.5), доказанного С. П. Шарым в [17;18]. В [4, теорема 2.25] получено бескванторное описание в $\mathbb{R}$ для сильных решений интервальной системы неравенств знака $\leq$.

Для интервально-кванторных систем основных типов, в которых вектор отношений σ не однороден, бескванторные описания в $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ получаются из (3.16) и (3.2), в $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ — из (3.16) и (3.1), в $\mathbb{R}$ — из (3.20) и (3.21). Приведем эти записи только в $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{R}$ (в $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ они менее выразительны и отличаются от записей в $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ лишь очевидными арифметическими преобразованиями, подобно тому как отличаются записи в $\mathbb{KR}$ и $\mathbb{IR}$ из табл. 2):

$$
\begin{array}{lclcl}
(\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b) & \Longleftrightarrow & 0 \in \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{w} & \Longleftrightarrow & \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \leq \hat{A}|x| + \hat{b};\\
(\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b) & \Longleftrightarrow & \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{w} & \Longleftrightarrow & \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \leq -\hat{A}|x| + \hat{b};\\
(\forall b \in \boldsymbol{b})(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (Ax\,\sigma\, b) & \Longleftrightarrow & \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{w} & \Longleftrightarrow & \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \leq \hat{A}|x| - \hat{b};\\
(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b) & \Longleftrightarrow & \boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{w} & \Longleftrightarrow & \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \leq -\hat{A}|x| - \hat{b}.
\end{array}
$$

4. Заключение

Основные результаты работы представлены в теоремах 2–4 (за исключением известной ранее эквивалентности (3.17)) и в следствии 1.

Среди утверждений, не имеющих ограничений на параметры $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta$ и σ, наибольшую общность имеют те, которые дают бескванторные описания интервально-кванторных линейных систем класса Q^{σ}. Это соотношение (3.14), которое обеспечивает переход в $\mathbb{KR}$ и $\mathbb{IR}$, соотношение (3.16) для перехода в $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$, а также эквивалентность (3.20), позволяющая перейти в $\mathbb{R}$. Полезность бескванторных описаний из (3.14), (3.16) и (3.20) заключается в том, что они дают возможность:

• изучать все интервально-кванторные линейные системы класса Q^{σ} совместно, а результаты для подклассов (в частности для интервально-кванторных систем основных типов) получать как следствие общего результата;

• для задач, связанных с интервально-кванторными линейными системами, создавать такие методы решения, которые пригодны для всех систем класса Q^{σ} (пример — программы серии IntLinInc, предназначенные для визуализации множеств кванторных решений интервальных линейных систем, доступные с веб-страницы [21]).

Бескванторные описания различных классов интервально-кванторных линейных систем в интервальных арифметиках, как известные ранее (например, соотношение (3.5)), так и полученные в данной работе в соотношениях (3.6)–(3.8), (3.14), (3.16), позволяют:

• исследовать интервально-кванторные линейные системы интервальными методами — выявлять свойства их множеств решений, соотношения между системами с различными ограничениями на параметры $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta, \sigma$ и порядок кванторных приставок (пример — доказательство следствия 1);

• создавать интервальные (т. е. существенно использующие интервальную арифметику) методы решения для задач, в условии которых задействованы интервально-кванторные линейные системы (примеры методов для систем уравнений можно найти в [2], а для неравенств и систем класса Q^{σ} такие методы — пока дело будущего).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Standardized notation in interval analysis / A. Kearfott [et al.] // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 7–13. (URL: http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345)
2. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ [Электрон. ресурс]. URL: http://interval.ict.nsc.ru/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (дата обращения 18.02.2013).
3. **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. Vol. 8, no. 5. P. 321–418. (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/ANewTech.pdf)
4. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, 2008. 288 с.
5. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
6. **Oettli W., Prager W.** Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numerische Mathematik. 1964. Vol. 6. P. 405–409.
7. **Gerlach W.** Zur Lösung linearer Ungleichungssysteme bei Störung der rechten Seite und der Koeffizientenmatrix // Mathematische Operationsforschung und Statistik. Series Optimization. 1981. Bd. 12. S. 41–43.
8. **Ватолин А.А.** О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1629–1637.
9. **Rohn J.** Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. P. 157–158. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 212.)
10. **Лакеев А.В., Носков С.И.** О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1074–1084.
11. **Lakeyev A.V.** Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 1. С. 12–23.
12. **Beeck H.** Charakterisierung der Lösungsmenge von Intervallgleichungssystemen // ZAMM. 1973. Bd. 53, no. 12. S. T181–T182.
13. **Neumaier A.** Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Intervall-Berichte. 1986. No. 86/9. S. 5–19.
14. **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // Computing. 1980. Suppl. 2. P. 33–49.
15. **Gardenes E., Trepat A.** Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing. 1980. Vol. 24. P. 161–179.
16. **Markov S.M.** On directed interval arithmetic and its applications // J. Universal Computer Science. 1995. Vol. 1, no. 7. P. 514–526.
17. **Shary S.P.** Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // Numerical Methods and Error Bounds. Berlin: Akademie Verlag, 1996. P. 224–233. (Mathematical Research; vol. 89). (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/Herz.pdf)
18. **Shary S.P.** Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing. 1999. Vol. 5, no. 3. P. 323–335. (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/GOuter.pdf)
19. **Kaucher E.** Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume: Dr. Naturwissen Dissertation. Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973. 271 s.
20. **Markov S.M.** Extended interval arithmetic involving infinite intervals // Mathematica Balkanica. New Series. 1992. Vol. 6, no. 3. P. 269–304.
21. Шарая Ирина Александровна [Персональная страница]. URL: http://interval.ict.nsc.ru/sharaya/irash.html (дата обращения: 18.02.2013).

Шарая Ирина Александровна
науч. сотрудник
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: sharaya@ict.nsc.ru

Поступила 18.02.2013