О сравнении теорем Апостолатоса–Кулиша и Майера–Варнке в интервальном анализе*

С.П. Шарый

УДК 519.61

Шарый С.П. О сравнении теорем Апостолатоса–Кулиша и Майера–Варнке в интервальном анализе // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 3. — С. 351–359.

Работа посвящена сравнению теорем Апостолатоса–Кулиша и Майера–Варнке, лежащих в основе так называемого формального (алгебраического) подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Показано, что, несмотря на несколько бóльшую общность теоремы Майера–Варнке, она расширяет сферу применимости формального подхода весьма несущественно, и практическое значение этого расширения невелико.

Ключевые слова: *интервальные линейные уравнения, множество решений, внешнее оценивание, формальный подход, теорема Апостолатоса–Кулиша, теорема Майера–Варнке.*

Shary S.P. On comparison between Apostolatos–Kulisch and Mayer–Warnke theorems in interval analysis // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2009. — Vol. 12, № 3. — P. 351–359.

This paper deals with comparing Apostolatos–Kulisch theorem and Mayer–Warnke theorem that form a basis of the so-called formal (aka algebraic) approach to the outer interval estimation of the solution sets for interval linear systems of equations. We show that despite a greater generality of Mayer–Warnke theorem, it extends the applicability scope of the formal approach to a very small extent, and a practical significance of such an extension is inessential.

Key words: *interval linear equations, solution set, outer estimation, formal approach, Apostolatos–Kulisch theorem, Mayer–Warnke theorem.*

1. Введение и постановка задачи

Предметом рассмотрения являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{n2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{nn}x_n & = & \boldsymbol{b}_n \end{array}\right. \qquad (1)$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и интервальными правыми частями $\boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, или, кратко,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-931.2008.9).

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A} = (\,\mathbf{a}_{ij})$ — интервальная $n \times n$-матрица и $\mathbf{b} = (\,\mathbf{b}_i)$ — n-вектор. Системы (1), (2) мы мыслим как семейства обычных точечных (неинтервальных) линейных систем $Ax = b$ той же структуры с матрицами $A \in \mathbf{A}$ и векторами $b \in \mathbf{b}$.

Множеством решений интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigl\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \mathbf{A})(\exists\, b \in \mathbf{b})(\, Ax = b\,) \bigr\}, \tag{3}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ (см., к примеру, [1, 2]). Часто его называют также *объединенным множеством решений*, поскольку для интервальных уравнений и систем уравнений существуют другие множества решений (см., к примеру, [3–5]), более адекватные тем или иным практическим ситуациям. Мы не рассматриваем их в нашей работе и потому без ущерба для понимания называем (3) сокращенным термином “множество решений”.

Всюду далее интервальная матрица $\mathbf{A}$ предполагается неособенной, т. е. содержащей только неособенные (невырожденные) точечные матрицы. Тогда множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ системы (1), (2) ограничено. Нас будет интересовать задача внешнего интервального оценивания этого множества решений:

> Найти (по-возможности, меньший) брус $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Пусть $F_i(a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, — рациональные функции своих аргументов, т. е. такие, что задающие их выражения являются композициями символов переменных, констант и четырех арифметических операций. Напомним следующее

Определение. Формальное решение интервальной системы уравнений:

$$\begin{cases} F_1(\,\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_1, \\ F_2(\,\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(\,\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_m \end{cases}$$

с интервалами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ — это интервальный вектор $\mathbf{x} = (\,\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\,)^\top$, обращающий ее в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики.

Таким образом, формальное решение интервальных систем — это объект, соответствующий обычному математическому понятию решения уравнения, но рассматриваемому в экзотической алгебраической системе — интервальной арифметике. Отметим, что в качестве этой интервальной арифметики могут выступать, в зависимости от рассматриваемой задачи, либо классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$, либо полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, либо какая-то другая интервальная алгебраическая система.

Необходимость в отдельном введении понятия формального решения вызвана, главным образом, историческими причинами. В первые десятилетия развития интервального анализа (60–80-е годы прошлого века) подобные решения рассматривались мало и вплоть до 1990-х годов считалось, что они не имеют большой практической ценности. Впервые формальные решения рассмотрел румынский математик С. Берти в 1969 году [6], когда интервальный анализ уже оформился как самостоятельная математическая дисциплина со своим кругом задач и своими специфичными методами. С. Берти никак специально не называл рассмотренные им решения интервальных (квадратных) уравнений, а лишь отметил факт существования такого понимания решения.

Следующее обращение к формальным решениям произошло лишь в 1982 году в работе немецких математиков Х. Рачека и В. Зауэра [7], где исчерпывающим образом было рассмотрено одно интервальное линейное уравнение со многими неизвестными. При этом Х. Рачек и В. Зауэр для обозначения нового понятия решения использовали термин *алгебраическое решение*, не слишком удачный, поскольку он подчеркивает алгебраический характер рассматриваемых уравнений. Говорить, к примеру, об алгебраических решениях интервальных дифференциальных или интегральных уравнений, по меньшей мере, двусмысленно, хотя подобные объекты также имеют право на существование и исследование. Дальнейшее развитие интервальные методы, основанные на использовании формальных (алгебраических) решений, получили в конце 80-х – начале 90-х годов прошлого века, когда трудами отечественных исследователей [8–11] были разработаны методы оценивания различных множеств решений интервальных систем уравнений, опирающиеся на вычисление формальных решений.

Соответствующий общий подход к задачам оценивания множеств решений, сводящий исходную постановку к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений, мы называем *формальным подходом*. Это, по существу, весьма общая методика, которая может реализовываться различными конкретными способами в зависимости от выбора вспомогательной системы уравнений и численного метода поиска ее формального решения. Отличительной особенностью формального подхода является его универсальность: как общая теоретическая схема подхода, так и соответствующие численные методы с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания даже более общих, чем объединенное множеств решений (см. [3–5]).

Основой формального подхода к задаче внешнего оценивания множества решений (3) служит следующий результат, который мы приводим в современной и несколько расширенной формулировке.

Теорема 1 (Апостолатоса–Кулиша) [12]. *Если матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что $\rho(|\boldsymbol{C}|) < 1$, т. е. спектральный радиус матрицы, составленной из модулей ее элементов, меньше единицы, то интервальная линейная система уравнений:*

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d} \tag{4}$$

имеет единственное формальное решение в $\mathbb{IR}^n$. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{d}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном векторе $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и является внешней интервальной оценкой множества решений $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \boldsymbol{C})(\exists d \in \boldsymbol{d})(\, x = Cx+d\,)\}$ рассматриваемой интервальной системы.

Системы уравнений вида $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, в которых неизвестная переменная выделена "в чистом виде" в одной из частей уравнения и выражается как функция от самой себя, мы будем называть системами уравнений в *рекуррентном виде*.[1] Отметим, что некоторым аналогом им по внешнему виду являются операторные уравнения второго рода.

Итак, нахождение внешней оценки множества решений исходной ИСЛАУ свелось к нахождению формального решения некоторой специальной интервальной системы в рекуррентном виде. Заметим, что задача нахождения формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а традиционная математическая задача решения некоторого уравнения, хотя и рассматриваемая в непривычной алгебраической системе — интервальной арифметике $\mathbb{IR}$. Искомое формальное решение может быть вычислено весьма разнообразными способами, рассмотрению которых посвящены многие работы.

Доказательство теоремы Апостолатоса–Кулиша, основанное на теореме Шредера о сжимающих отображениях (см. ее формулировку и доказательство в [13]), породило в свое время целый поток работ, посвященных построению различных итерационных алгоритмов для нахождения формальных решений уравнений (4). Но, вообще говоря, при построении конкретных вычислительных процедур разработчик алгоритмов свободен в выборе и использовании любых других возможных приемов и методик (например, символьных преобразований). Единственным руководящим принципом должно при этом оставаться удовлетворение искомым решением уравнений (4) в смысле данного выше определения. Для интервальных линейных систем вида (4) наиболее эффективным средством нахождения формальных решений показал себя субдифференциальный метод Ньютона, описываемый, в частности, в работе [14] (с его помощью и были найдены формальные решения во всех примерах этой статьи).

Сведение задачи оценивания множества решений исходной интервальной линейной системы (1), (2) к задаче оценивания множества решений системы (4) в рекуррентном виде может быть выполнено, к примеру, следующим простым способом.

Предложение. *Пусть Λ — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ совпадает с множеством решений интервальной системы $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, где $\boldsymbol{C} = I - \Lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{d} = \Lambda\boldsymbol{b}$.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) &= \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(\,\Lambda Ax = \Lambda b\,)\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(\, x = (I - \Lambda A)\, x + \Lambda b\,)\}.\end{aligned}$$

Но $A \in \boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда $(I - \Lambda A) \in (I - \Lambda\boldsymbol{A})$ и $\Lambda b \in \Lambda\boldsymbol{b}$, и потому мы можем продолжить выкладки следующим образом:

$$\begin{aligned}\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) &= \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \bigl(\exists (I - \Lambda A) \in (I - \Lambda\boldsymbol{A})\bigr)\bigl(\exists (\Lambda b) \in \Lambda\boldsymbol{b}\bigr)\bigl(\, x = (I - \Lambda A)\, x + \Lambda b\,\bigr)\bigr\} \\ &= \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \bigl(\exists C \in (I - \Lambda\boldsymbol{A})\bigr)(\exists d \in \Lambda\boldsymbol{b})(\, x = Cx + d\,)\bigr\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \boldsymbol{C})(\exists d \in \boldsymbol{d})(\, x = Cx + d\,)\}\end{aligned}$$

для $\boldsymbol{C} = I - \Lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{d} = \Lambda\boldsymbol{b}$, что и требовалось. □

[1] Соответствующий англоязычный термин — fixed-point form equations — подчеркивает другую возможную интерпретацию уравнений этого типа.

Описанный в предложении способ приведения ИСЛАУ к рекуррентному виду не является единственно возможным (и, кроме того, не самым лучшим), но для нашей работы это несущественно, а потому мы не будем обсуждать здесь соответствующие вопросы в деталях.

В 2003 году Г. Майером и И. Варнке была установлена следующая

Теорема 2 (Майера–Варнке) [15]. *Пусть* $\boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{IR}^n$ *и*

$$\Xi = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \boldsymbol{C})(\exists d \in \boldsymbol{d})(\, x = Cx + d\,)\,\}$$

есть множество решений интервальной линейной системы уравнений $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, *а вектор* $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ *является формальным решением этой системы. Тогда*

(i) *для любой линейной системы* $x = Cx + d$ *с* $C \in \boldsymbol{C}$ *и* $d \in \boldsymbol{d}$ *по крайней мере одно ее решение содержится в брусе* $\boldsymbol{x}^*$;

(ii) *включение* $\Xi \subseteq \boldsymbol{x}^*$ *имеет место тогда и только тогда, когда интервальная матрица* $(I - \boldsymbol{C})$ *неособенна.*

Вопрос, ответу на который посвящена настоящая работа, состоит в том, поглощает ли теорема Майера–Варнке, более общая по формулировке, теорему Апостолатоса–Кулиша?

2. Сравнение теорем Майера–Варнке и Апостолатоса–Кулиша

Прежде всего отметим, что воспользоваться теоремой Майера–Варнке мы можем не всегда, так как формальное решение системы в рекуррентном виде (4), получающейся из исходной ИСЛАУ (1), (2), не всегда существует в $\mathbb{IR}^n$. Это демонстрирует

Пример 1. Для интервального уравнения $[3,4]\,x = [0,3]$ множеством решений является интервал $[0,1]$, и его отыскание трудностей не представляет. В то же время переход к уравнению в рекуррентном виде (4) для $\Lambda = 1$ дает

$$x = [-3,-2]\,x + [0,3], \tag{5}$$

и это уравнение не имеет правильных формальных решений.

В самом деле, предположим, что для (5) все-таки существует формальное решение $\boldsymbol{s} \in \mathbb{IR}$. Ясно, что $\boldsymbol{s}$ не может быть неположительным интервалом ненулевой длины, так как тогда $[-3,-2]\,\boldsymbol{s} + [0,3] \geq 0$ в противоречие со знаком левой части в (5). Поэтому $\overline{\boldsymbol{s}} \geq 0$ и $\inf\bigl([-3,-2]\cdot \boldsymbol{s}\bigr) = -3\,\overline{\boldsymbol{s}}$. Подставляя это значение в уравнение

$$\underline{\boldsymbol{s}} = \underline{[-3,-2]\,\boldsymbol{s} + [0,3]}$$

для нижних концов, получаем $\underline{\boldsymbol{s}} = -3\,\overline{\boldsymbol{s}}$, т.е. $\boldsymbol{s} = [-3t, t]$ для некоторого $t \geq 0$. Но подстановка полученного представления для $\boldsymbol{s}$ в уравнение (5) приводит к уравнению $t = 9t + 3$ для верхних концов, и его решение $t = -3/8$ противоречит условию $t \geq 0$.

Отметим, что в полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$ формальное решение уравнения (5) существует и равно $[2,-1]$, но вот как-либо проинтерпретировать его с помощью теоремы Майера–Варнке невозможно.

На этом же примере можно понять роль масштабирующей диагональной матрицы Λ из формулировки предложения. Если бы мы взяли ее равной, скажем, $\Lambda = \frac{1}{4}$, то вместо (5) уравнением в рекуррентном виде являлось бы

$$x = \left[0, \frac{1}{4}\right] x + \left[0, \frac{3}{4}\right].$$

Теперь у него существует правильное формальное решение $[0,1]$, дающее оптимальную оценку множества решений исходного интервального уравнения. Таким образом, с помощью подходящего выбора Λ мы иногда можем добиться того, чтобы вспомогательная интервальная система в рекуррентном виде (4) имела решение в $\mathbb{IR}^n$.

Для уяснения сферы применимости теоремы Майера–Варнке полезно следующее простое рассуждение. Пусть $\boldsymbol{x}$ — формальное решение интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (4). Беря радиус от обеих частей равенства

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d},$$

получим

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{x} = \operatorname{rad}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) + \operatorname{rad} \boldsymbol{d}.$$

Но $\operatorname{rad}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) \geq |\boldsymbol{C}| \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{x}$, где через $|\boldsymbol{C}|$ обозначена матрица, образованная модулями элементов $\boldsymbol{C}$ (см. [1, 16]). Поэтому в случае, когда все компоненты свободного члена $\boldsymbol{d} = \Lambda \boldsymbol{b}$ имеют ненулевую ширину, т.е. $\operatorname{rad} \boldsymbol{d}_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, справедливо покомпонентное неравенство

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{x} > |\boldsymbol{C}| \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{x}.$$

Оно означает, в частности, $\operatorname{rad} \boldsymbol{x} > 0$, так что если система уравнений в рекуррентном виде (4) имеет решение, то оно обязательно правильное, т.е. принадлежит $\mathbb{IR}^n$. Кроме того, мы можем отметить, что для положительного вектора $y = \operatorname{rad} \boldsymbol{x}$ и для неотрицательной матрицы $|\boldsymbol{C}|$ имеет место $|\boldsymbol{C}|\, y < y$.

Напомним теперь следующий факт из теории неотрицательных матриц. Если A — неотрицательная $n \times n$-матрица, $\rho(A)$ — ее спектральный радиус и α — положительное вещественное число, то

$$\rho(A) < \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists v \in \mathbb{R}^n\big) \; \big(\, v > 0 \quad \& \quad Av < \alpha v \,\big),$$

$$\rho(A) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists v \in \mathbb{R}^n\big) \; \big(\, v > 0 \quad \& \quad Av \geq \alpha v \,\big).$$

Доказательство может быть найдено, например, в книге Р. Хорна и Ч. Джонсона [17], либо в англоязычных источниках [16, 18]. С другой стороны, неявным образом это предложение обосновывается в доказательстве Х. Виландта теоремы Перрона–Фробениуса о неотрицательных матрицах, которое воспроизводится во многих пособиях по теории матриц, например, в классической книге Ф. Гантмахера [19].

Таким образом, из полученного нами неравенства $|\boldsymbol{C}|\, y < y$ следует, что спектральный радиус матрицы $|\boldsymbol{C}|$ должен быть меньше 1. Это необходимое условие существования правильного формального решения системы (4) при $\operatorname{rad} \boldsymbol{d}_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Хотя может показаться, что теорема Апостолатоса–Кулиша имеет меньшую общность, чем теорема Майера–Варнке, приведенные выше рассуждения показывают, что это относится лишь к случаю, когда $\operatorname{rad} \boldsymbol{d}_i = 0$ для некоторых $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Его иллюстрируют следующие примеры.

Пример 2. Для интервальной линейной системы:

$$\begin{pmatrix} [5,6] & [-2,-1] \\ [-2,1] & [4,6] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{6}$$

оптимальная внешняя оценка множества решений является брусом

$$\begin{pmatrix} [0.2162, 1] \\ [1.25, 2.5] \end{pmatrix}.$$

В этом несложно убедиться прямым построением множества решений по частям, расположенным в каждом отдельном ортанте (см. рис. 1), либо воспользовавшись процедурой `plotlinsol` из пакета INTLAB, популярного свободно распространяемого интервального расширения MATLAB'а [20].

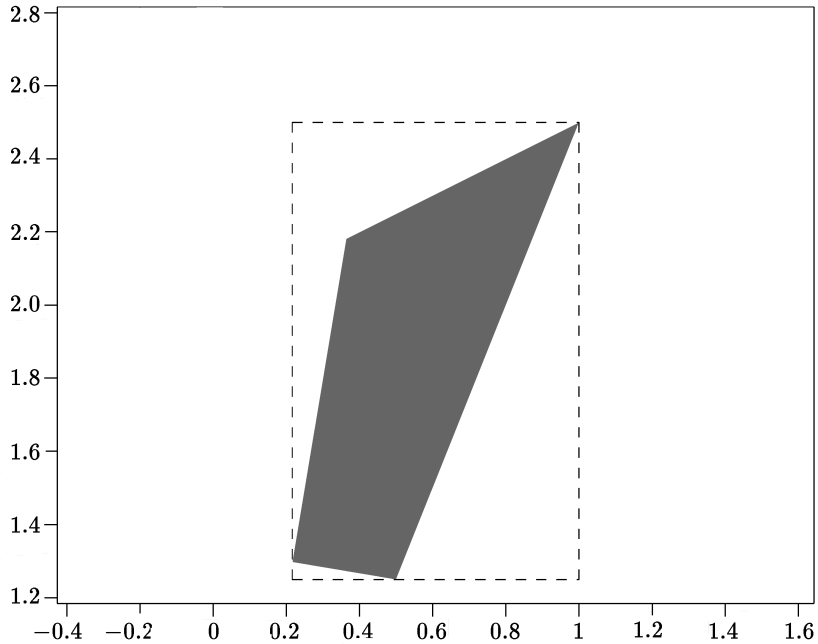

Рис. Множество решений системы уравнений (6) и его наилучшая внешняя интервальная оценка

Чтобы воспользоваться для внешнего оценивания множества решений формальным подходом, возьмем в качестве масштабирующей матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (4) получит вид

$$x = \begin{pmatrix} \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right] & \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] & \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

и его формальным решением является вектор

$$\begin{pmatrix} [-1,2] \\ [0,3] \end{pmatrix},$$

который действительно дает внешнюю оценку множества решений. Заметим, что при этом спектральный радиус матрицы модулей для $(I - \Lambda \boldsymbol{A})$ равен в точности 1.

Если же диагональной масштабирующей матрицей Λ взять

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

то формальным решением соответствующего уравнения в рекуррентном виде (4) будет

$$\begin{pmatrix} [0.1944, 1] \\ [1.1667, 2.5] \end{pmatrix},$$

что гораздо лучше приближает множество решений.

Пример 3. Для интервальной линейной системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1,4] & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

объединенное множество решений — это единственная точка $(0,1)^\top$. Желая воспользоваться для его оценки формальным подходом, возьмем масштабирующую матрицу Λ единичной и организуем систему уравнений в рекуррентном виде:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ [-4,-1] & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ [-4,-1] & 1 \end{pmatrix}$$

спектральный радиус матрицы модулей равен 3, но система уравнений (7) имеет правильное формальное решение $(0,1)^\top$, дающее внешнюю оценку множества решений (и даже совпадающую с ним).

Как видим, в примерах 2, 3 условия теоремы Апостолатоса–Кулиша не выполняются, но специальный подбор данных (неинтервальные правые части систем и нетелесное множество решений в примере 3) приводят к тому, что основывающийся на теореме Майера–Варнке формальный подход к внешнему оцениванию их множеств решений все-таки работает. Ясно, что практическое значение подобных экзотических примеров не следует переоценивать.

3. Итоги

Существуют примеры интервальных линейных систем уравнений в рекуррентном виде, для которых условия теоремы Апостолатоса–Кулиша не применимы, но специальный подбор их матриц и свободных членов приводят к тому, что теорема Майера–Варнке (а с ней и формальный подход к внешнему оцениванию их множеств решений) остается работоспособной.

Таким образом, “зазор” между теоремами Апостолатоса–Кулиша и Майера–Варнке действительно существует, но он весьма узок, и его практическое значение невелико.

Список литературы

[1] **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления.—М.: Мир, 1987.

[2] **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа.—Новосибирск: Наука, 1986.

[3] **Шарый С.П.** Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Известия РАН. Теория и системы управления.— 1997.— № 3.— С. 51–61.

[4] **Шарый С.П.** Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии.— 1999.— Т. 4, № 4.— С. 82–110.

[5] **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing.— 2002.— Vol. 8, № 5.— P. 321–418. — http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf/.

[6] **Berti S.** The solution of an interval equation // Mathematica.— 1969.— Vol. 11 (34), № 2.— P. 189–194.

[7] **Ratschek H., Sauer W.** Linear interval equations // Computing.— 1982.— Vol. 28, № 2.— P. 105–115.

[8] **Зюзин В.С.** Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // Дифференциальные уравнения и теория функций.— Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987.— С. 28–32.

[9] **Шарый С.П.** Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные технологии.— Новосибирск, 1995.— Т. 4, № 13.— С. 64–80.— (Сб. научн. тр. ИВТ СО РАН.)

[10] **Kupriyanova L.** Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // Reliable Computing.— 1995. — Vol. 1, № 1. — P. 15–31.

[11] **Shary S.P.** Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // J. of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations.— Texas: El Paso, 1995.— P. 181–184.

[12] **Apostolatos N., Kulisch U.** Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // Electron. Rechenanl.— 1968.— Bd. 10.— P. 73–83.

[13] **Коллатц Л.** Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.

[14] **Шарый С.П.** Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. — 1998.— Т. 3, № 2.— С. 67–114.

[15] **Mayer G., Warnke I.** On the fixed points of the interval function $f([x]) = [A][x] + [b]$ // Linear Algebra and its Applications.— 2003.— Vol. 363.— P. 201–216.

[16] **Neumaier A.** Interval Methods for Systems of Equations.— Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[17] **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ.—М.: Мир, 1989.

[18] **Berman A., Plemmons R.J.** Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.—New York: Academic Press, 1979.

[19] **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.—М.: Наука, 1966.

[20] **INTLAB — INTerval LABoratory.**— http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/.

Институт вычислительных технологий СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6,
Новосибирск, 630090,
E-mail: shary@ict.nsc.ru

Статья поступила
5 ноября 2008 г.