Автоматика и телемеханика, № 10, 2004

© 2004 г. **С. П. ШАРЫЙ, д-р физ.-мат. наук**
(Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск)

РЕШЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДОПУСКАХ[1]

Предметом работы является *задача о допусках* для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, требующая внутреннего оценивания *допустимого множества решений* $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b})\}$, которое образовано всеми такими векторами x, что произведение Ax остается в пределах $\boldsymbol{b}$ для любых возможных $A \in \boldsymbol{A}$. Развивается ряд методик для исследования пустоты и непустоты допустимого множества решений, а также выводится формула для вычисления размеров интервального решения задачи о допусках вокруг известного центра.

1. Введение

Рассматриваются интервальные системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1.1}$$

с интервальной $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\, \boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ в правой части. Для интервальных уравнений обычное понятие решения утрачивает смысл и чаще приходится иметь дело с теми или иными *множествами решений*. Например, известно так называемое *объединенное множество решений* для (1.1):

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\} \tag{1.2}$$

– множество всевозможных решений вещественных систем $Ax = b$ той же структуры, что и (1.1), с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Ниже будем интересоваться другим, *допустимым множеством решений* системы (1.1)

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) &= \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\} = \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})(\, Ax \in \boldsymbol{b}\,)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

образованным всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что произведение Ax попадает в $\boldsymbol{b}$ для любого $A \in \boldsymbol{A}$. История возникновения множества решений (1.3) и связанных с ним постановок задач приведена А.Ноймайером в [1].

Используемые в работе обозначения соответствуют недавно принятому проекту международного стандарта [2], в частности, интервалы и интервальные величины обозначаются буквами жирного шрифта – $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, – тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами – это операции классической интервальной

[1] Работа поддержана грантом Президента России № НШ-2314.2003.1.

арифметики (см., например, [3–6]). Подчеркивание и надчеркивание – $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}$ – обозначают нижний и верхний концы интервала $\boldsymbol{a}$, и, кроме того,

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}) \quad \text{– середина (центр) интервала,}$$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}) \quad \text{– радиус интервала,}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \max\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|, |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\} \quad \text{– абсолютное значение (модуль) интервала,}$$

$$\operatorname{vert} \boldsymbol{A} = \left\{\, A = (\, a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid a_{ij} \in \{\, \underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}\},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n \,\right\}$$

$$\text{– множество вершин интервальной матрицы } \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}).$$

К интервальным векторам (называемым также далее брусами) и матрицам эти операции будут применяться покомпонентно. Посредством “int” будет обозначаться топологическая внутренность множества.

Доказательства всех утверждений работы за исключением цитированной теоремы 2 приведены в Приложении.

2. Обсуждение постановки задачи

Для уяснения содержательного смысла допустимого множества решений рассмотрим “черный ящик” (рис. 1) с вектором входных воздействий $x \in \mathbb{R}^n$ и вектором выходных откликов $y \in \mathbb{R}^m$, причем зависимость вход-выход предположим линейной, $y = Ax$, с некоторой вещественной $m \times n$-матрицей $A = (a_{ij})$. Пусть параметры

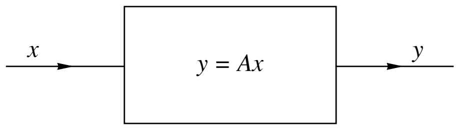

Рис. 1. Модель для интерпретации допустимого множества решений.

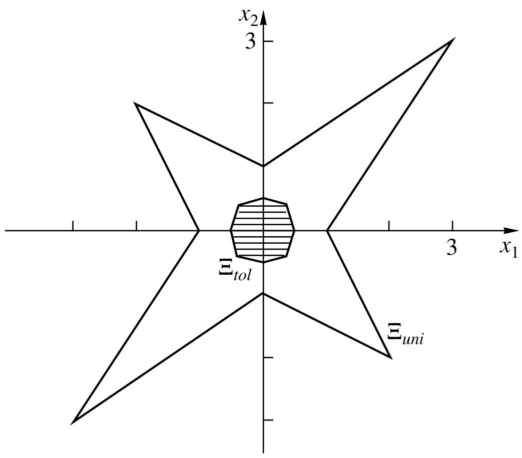

Рис. 2. Множества решений интервальной сисьтемы (2.4).

“черного ящика” не являются заданными точно, но нам известны лишь интервалы их возможных значений $\boldsymbol{a}_{ij}$, $a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$, из которых образована интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$. Эти параметры, к примеру, могут изменяться непредсказуемым образом (дрейфовать) в пределах $\boldsymbol{a}_{ij}$, либо интервальная неопределенность может быть следствием нашего незнания точной модели и т.п.

Предположим также, что для множества выходных состояний “черного ящика” задан интервальный вектор $\boldsymbol{y}$, в который надо обеспечить попадание y вне зависимости от конкретных значений a_{ij} из $\boldsymbol{a}_{ij}$. А именно, существуют ли такие входные сигналы $\widetilde{x}$, что при любых возможных реализациях параметров системы a_{ij} из $\boldsymbol{a}_{ij}$ на выходе все равно получится отклик y в пределах требуемых допусков $\boldsymbol{y}$? Допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{y})$ является в точности множеством всех таких $\widetilde{x}$. Эта общая схема успешно адаптировалась к конкретным задачам математической экономики (И. Рон [7]), автоматического управления (Н.А. Хлебалин [8], И.В. Дугарова и Е.М. Смагина [9]) и многим другим прикладным задачам.

Нетрудно показать (см. [10] или раздел 3 данной работы), что допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ есть выпуклое полиэдральное множество в $\mathbb{R}^n$. Рисунок 2 изображает допустимое множество решений (в сравнении с объединенным множеством решений) для системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] \\ \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Тем не менее, если размерность интервальной линейной системы уравнений велика, прямое описание ее допустимого множества решений, при котором выписываются все ограничивающие гиперплоскости, становится трудоемким и практически бесполезным: его сложность растет пропорционально $m\,2^n$. По этой причине имеет смысл ограничить себя нахождением некоторых просто устроенных *оценок* для допустимого множества решений, причем особенно интересны его подмножества, так как для каждого их элемента x остается выполненным характеристическое условие

$$(\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}),$$

определяющее исходное множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Иными словами, заменяем $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ на его внутреннюю оценку, формулируя подлежащую решению задачу в следующем виде:

(2.5) *Найти брус, содержащийся в допустимом множестве решений рассматриваемой интервальной линейной системы уравнений.*

За задачей (2.5) закрепилось наименование *линейной задачи о допусках* [1, 6, 11], и именно она является предметом рассмотрения настоящей работы. В ранних публикациях по отношению к (2.5) иногда встречался термин *внутренняя задача* для интервальных линейных систем [4], а точки из $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ назывались *внутренними решениями* [10].

Заметим, что допустимое множество решений может оказаться пустым даже для “хороших” интервальных данных, как, например, это имеет место у одномерного уравнения с $\boldsymbol{A} = [1,2]$, $\boldsymbol{b} = [2,3]$. Двумерная система

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [-1,1] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1,3] \\ [1,3] \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

дает более сложный пример пустого допустимого множества решений. В подобных случаях будем говорить, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*, так как тогда исходная постановка задачи (2.5) теряет смысл.

Ясно, что

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b}), \tag{2.7}$$

и хотя определение допустимого множества решений требует, чтобы произведение Ax попадало в вектор правой части $\boldsymbol{b}$ для *каждого* $A \in \boldsymbol{A}$, достаточным оказывается выполнение включения $Ax \in \boldsymbol{b}$ лишь для матриц A из некоторого *конечного* подмножества в $\boldsymbol{A}$. Именно, имеет место

Лемма 1. $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\}$.

В частности,

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b}), \tag{2.8}$$

т.е. представление (2.7) существенно усилено.

3. Грубое исследование разрешимости

Результатам, касающимся разрешимости линейной задачи о допусках, посвящено несколько публикаций с 70-х годов ушедшего века. Одним из первых И. Рон в [7] обратился к исследованию линейной задачи о допусках при изучении линейных экономических моделей межотраслевого баланса (называемых также моделями “затраты-выпуск” в английской экономической литературе), имеющих интервально неопределенные параметры. В этой его работе были выписаны явные формулы, позволяющие выявлять разрешимость линейной задачи о допусках, но только для интервальных матриц $\boldsymbol{A}$ специального вида и неотрицательных правых частей $\boldsymbol{b}$.

Принимая во внимание свойства интервальных матрично-векторных операций [3, 6], можно определить допустимое множество решений следующим образом:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b} \,\},$$

где “ $\cdot$ ” – интервальное матричное произведение. На основе этого представления Н.А. Хлебалиным в [8] предложено в качестве наиболее вероятного представителя допустимого множества решений брать решение $\widetilde{x}$ “средней” точечной системы

$$(\operatorname{mid} \boldsymbol{A}) \cdot x = \operatorname{mid} \boldsymbol{b},$$

которое затем тестируется на включение $\boldsymbol{A}\widetilde{x} \subseteq \boldsymbol{b}$. Если же это условие не выполнено, то делается заключение о “практической неразрешимости” линейной задачи о допусках, т.е. что $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$, хотя, строго говоря, в этом случае никакого определенного суждения выносить нельзя. Критерий Н.А. Хлебалина, как легко убедиться, работает лишь когда матрица $\boldsymbol{A}$ “достаточно узка” в сравнении с вектором правой части $\boldsymbol{b}$ и не способен исследовать тонких пограничных ситуаций.

Пусть $\boldsymbol{A} = [-1, 2]$, $\boldsymbol{b} = [-2, 6]$. Тогда $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = [-1, 2]$, но решение “средней системы” есть 3, и оно не принадлежит допустимому множеству решений. Более интересен двумерный контрпример с данными

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1,2] \\ [1,2] & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [5,7] \\ [7,9] \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ состоит из единственной точки $(1,2)^\top$, тогда как решение "средней системы" есть $\left(\dfrac{8}{9},\dfrac{20}{9}\right)^\top$. Особенность этого примера состоит в том, что матрица задачи строго положительна и невырожденна.

Цель настоящего параграфа – дать простое достаточное условие неразрешимости линейной задачи о допусках, базирующееся на сравнении "относительных узостей" элементов интервальной матрицы и вектора правой части. Оно предназначено для предварительного быстрого исследования задачи.

Заметим, что если i-я строка $\boldsymbol{A}$ содержит только нулевые элементы, то для непустоты допустимого множества решений необходимо $\boldsymbol{b}_i \ni 0$. Если же это условие выполнено, то свойство $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ быть пустым или непустым зависит уже только от других, не i-х, строк матрицы $\boldsymbol{A}$ и компонент $\boldsymbol{b}$. Таким образом, без потери общности можно предполагать далее, что $\boldsymbol{A}$ не имеет нулевых строк.

Для характеризации "относительной узости" ненулевых интервалов Х. Рачеком в [12] введен функционал

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{x}}/\overline{\boldsymbol{x}}, & \text{если} \quad |\underline{\boldsymbol{x}}| \leqslant |\overline{\boldsymbol{x}}|, \\ \overline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{x}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для нулевых интервалов функционал χ не определен. Ясно, что $-1 \leqslant \chi(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$, и $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$, если и только если $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Более того, как доказано в [12],

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{y}), \quad \text{если и только если} \quad \boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{y},\ \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0, \tag{3.9}$$

$$\text{если} \quad \boldsymbol{x}\neq 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{y}\neq 0, \quad \text{то} \quad \chi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \leqslant \max\{\,\chi(\boldsymbol{x}),\ \chi(\boldsymbol{y})\,\}, \tag{3.10}$$

$$\text{если} \quad \boldsymbol{x}\supseteq\boldsymbol{y} \quad \text{и} \quad \chi(\boldsymbol{y})\geqslant 0, \quad \text{то} \quad \chi(\boldsymbol{x})\leqslant\chi(\boldsymbol{y}). \tag{3.11}$$

Основным результатом этого параграфа является

Т е о р е м а 1. *Пусть интервальная $m\times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный m-вектор $\boldsymbol{b}$ системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ таковы, что для некоторого $k\in\{1,2,\dots,m\}$ выполнены следующие условия:*

(i) $0\notin\boldsymbol{b}_k$,

(ii) $\max\{\chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1\leqslant j\leqslant n, \boldsymbol{a}_{kj}\neq 0\,\} < \chi(\boldsymbol{b}_k)$.

Тогда допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ пусто.

Например, используя этот критерий, можно легко найти, что одномерная система с $\boldsymbol{A} = [1,2]$, $\boldsymbol{b} = [2,3]$ имеет пустое допустимое множество решений.

Важность всех условий теоремы 1 может быть продемонстрирована на рассмотренном выше одномерном примере с $\boldsymbol{A} = [-1,2]$ и $\boldsymbol{b} = [-2,6]$. Здесь $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = [-1,2]\neq\emptyset$, хотя $\chi(\boldsymbol{A}) = -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{3} = \chi(\boldsymbol{b})$. Более глубокое объяснение состоит в том, что свойство (3.11) функционала χ неверно для интервалов, содержащих нуль во внутренности:

$$[-1,1]\subseteq[-1,2]\subseteq[-2,2], \quad \text{но}$$
$$\chi([-1,1]) = \chi([-2,2]) = -1,\ \chi([-1,2]) = -\frac{1}{2}.$$

В то же время невыполнение условий теоремы 1 не обязательно влечет разрешимость линейной задачи о допусках. Например, (ii) неверно для системы (2.6), но ее допустимое множество решений все-таки пусто.

Если на основании теоремы 1 сделан вывод о несовместности некоторой линейной задачи о допусках, то

$$\Omega = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \chi(\boldsymbol{a}_{ij}) - \chi(\boldsymbol{b}_i) \right\} \leqslant 0,$$

и величина Ω до некоторой степени может характеризовать "степень неразрешимости" рассматриваемой задачи: чем она меньше, тем более далека задача от разрешимости, и наоборот. Кроме того, индексы $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, для которых выполнено условие (ii) теоремы 1, указывают на те строки матрицы $\boldsymbol{A}$ и соответствующие компоненты вектора $\boldsymbol{b}$, которые вносят доминирующий вклад в неразрешимость рассматриваемой задачи о допусках. Для того, чтобы уменьшить отклонение задачи от разрешимости (приблизиться к разрешимости), следует либо сузить наиболее широкие элементы в этих строках матрицы $\boldsymbol{A}$, т.е. увеличить $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \chi(\boldsymbol{a}_{kj})$, либо расширить правую часть, т.е. уменьшить $\chi(\boldsymbol{b}_k)$.

4. Полное исследование разрешимости

Основой развиваемой ниже теории разрешимости интервальной линейной задачи о допусках является новая аналитическая характеризация допустимого множества решений. Ранее один из наиболее важных характеризационных результатов был получен И. Роном в [10], показавшим, что принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ эквивалентна

$$|\ \mathrm{mid}\ \boldsymbol{A} \cdot x - \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}\ | \leqslant \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b} - \mathrm{rad}\ \boldsymbol{A} \cdot |x|.$$

Но отправной точкой рассмотрений этого параграфа является

Лемма 2. *Пусть даны интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный m-вектор правой части $\boldsymbol{b}$, а выражением*

$$\mathit{Tol}(x) \;=\; \mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left|\ \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j\ \right| \right\}$$

определяется функционал $\mathit{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ равносильна $\mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geqslant 0$, т.е. допустимое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geqslant 0 \,\}$ функционала Tol.

Отметим, что функционал $\mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ непрерывен по всем своим аргументам – по x, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$, что следует из непрерывности интервальных арифметических операций и взятия модуля [3, 6]. Будем называть $\mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *распознающим функционалом*, коль скоро знак его значений позволяет "распознать" точки из $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Лемма 3. *Распознающий функционал $\mathit{Tol}(x)$ вогнутый.*

Итак, подграфик

$$\mathrm{hyp}\ \mathit{Tol} = \{\ (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ \mathit{Tol}(x) \leqslant z\ \}$$

отображения $\mathit{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является выпуклым множеством. Можно даже показать, что $\mathrm{hyp}\ \mathit{Tol}$ есть пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. является *выпуклым полиэдральным множеством* (по терминологии Рокафеллара [13]). Действительно, выражая абсолютное значение через максимум, получим для каждого

$i = 1, 2, \ldots, m$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \max_{\widehat{a}_{ij}} \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij} x_j \right| =$$

$$= \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \max_{\widehat{a}_{ij}} \left\{ \max \left\{ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij} x_j ,\ \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij} x_j - \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i \right\} \right\} =$$

$$= \min_{\widehat{a}_{ij}} \left\{ \min \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij} x_j ,\ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i + \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij} x_j \right\} \right\},$$

где n-вектор $(\widehat{a}_{i1}, \widehat{a}_{i2}, \ldots, \widehat{a}_{in})$ пробегает конечное множество $\operatorname{vert}(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in})$, т.е. все вершины i-й строки интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$. По этой причине функционал Tol является нижней огибающей не более чем $m\,2^{n+1}$ аффинных функционалов вида

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i \pm \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij} x_j \right),$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, а множество $\operatorname{hyp} \mathit{Tol}$ есть пересечение подграфиков этих функционалов. В качестве следствия получаем следующий хорошо известный результат (см. [1, 10]): *допустимое множество решений интервальной линейной системы является выпуклым полиэдральным множеством.*

Л е м м а 4. *Распознающий функционал* $\mathit{Tol}(x)$ *достигает конечного максимума на всем* $\mathbb{R}^n$.

Л е м м а 5. *Если интервальная матрица* $\boldsymbol{A}$ *не имеет нулевых строк, то* $t \in \operatorname{int} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *влечет* $\mathit{Tol}(t; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.

Л е м м а 6. *Если* $\mathit{Tol}(t; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, *то* $t \in \operatorname{int} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ *– точка* t *лежит во внутренности допустимого множества решений.*

Подытоживая проведенные рассмотрения, приходим к следующей методике исследования разрешимости линейной задачи о допусках, т.е. к критерию пустоты/непустоты допустимого множества решений интервальных линейных систем.

Решаем задачу безусловной максимизации вогнутого функционала

$$\mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Пусть $T = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mathit{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и это значение достигается функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

• если $T \geqslant 0$, то $\tau \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ совместна и точка τ лежит в допустимом множестве решений;

• если $T > 0$, то $\tau \in \operatorname{int} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность точки τ допустимому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных;

• если $T < 0$, то $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ несовместна.

В настоящее время максимизация негладких вогнутых функционалов является неплохо разработанным вопросом вычислительной оптимизации. В течение последних десятилетий прошедшего века было предложено немало эффективных численных методов решения этой задачи (см., например, [14–17]), дающих основание полагать, что развитый в этом параграфе критерий разрешимости линейной задачи о допусках действительно вполне практичен. В частности, в [17] описаны некоторые методы, находящие точное значение максимума вогнутых функционалов с полиэдральными графиками, склеенными из кусков гиперплоскостей.

Например, для интервальной линейной системы (2.4) распознающий функционал имеет вид

$$\begin{aligned} \mathit{Tol}(x) &= \min\left\{1-\left|[1,2]\,x_1+\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]x_2\right|,1-\left|\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]x_1+[1,2]\,x_2\right|\right\}= \\ &= 1-\max\left\{\,\left|[1,2]\,x_1+\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]x_2\right|,\left|\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]x_1+[1,2]\,x_2\right|\right\}. \end{aligned}$$

Здесь модули обоих выражений под знаками экстремумов всегда неотрицательны. Кроме того, они достигают своих наименьших значений, равных нулю, одновременно, когда $x_1 = x_2 = 0$. При всех остальных x_1 и x_2 выражения под знаками модулей ненулевые, так что значение распознающего функционала в этих точках будет меньшим его значения в нуле. Следовательно,

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n}\ \mathit{Tol}(x) = 0$$

и достигается при $x = 0$. Этот максимум надежно находится и вычислительными оптимизационными процедурами.

Как только установлена разрешимость линейной задачи о допусках и найдена точка в допустимом множестве решений, можно обратиться собственно к построению интервала решения задачи. При этом будем следовать так называемому “центровому подходу”, принятому Н.А. Хлебалиным [8], А. Ноймайером [1], В.В. Шайдуровым [4] и другими авторами: известная точка допустимого множества решений берется в качестве центра бруса внутренней оценки. Ясно, что для получения телесной оценки (с ненулевой шириной всех компонент) необходима принадлежность этого центра внутренности множества решений, и в силу леммы 5 такую точку всегда можно найти путем максимизации по x распознающего функционала $\mathit{Tol}(x;\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, если внутренность множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ непуста.

В заключение полезно сравнить развитый выше подход к исследованию разрешимости задачи о допусках с тем, который был предложен ранее И. Роном [10] и основан на факте полиэдральности допустимого множества решений. Коль скоро уравнения гиперплоскостей, ограничивающих $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, легко могут быть выписаны в явном виде, то можно попытаться представить $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ как множество допустимых решений некоторой задачи линейного программирования, а вопрос о его пустоте или непустоте может быть разрешен, к примеру, посредством применения начального этапа стандартного симплекс-метода (так называемого “введения в базис”). Явная форма соответствующей задачи линейного программирования впервые была представлена И. Роном в [10]:

Т е о р е м а 2. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$, где векторы $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ образуют решение системы линейных неравенств

$$\left\{\begin{array}{rcr} \overline{\boldsymbol{A}}x' - \underline{\boldsymbol{A}}x'' & \leqslant & \overline{\boldsymbol{b}}, \\ -\underline{\boldsymbol{A}}x' + \overline{\boldsymbol{A}}x'' & \leqslant & -\underline{\boldsymbol{b}}, \\ x', x'' & \geqslant & 0. \end{array}\right. \tag{4.12}$$

Нередко решение системы линейных неравенств (4.12) оказывается привычнее или удобнее, чем максимизация негладкого распознающего функционала, но в результате решения (4.12) можно получить точку, которая лежит на границе допустимого множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Это неприемлемо по двум причинам: такая точка, во-первых, может покидать множество решений при сколь угодно малых "шевелениях" данных задачи и, во-вторых, не годится в качестве центра телесного бруса внутренней оценки допустимого множества решений. Кроме того, предложенная методика "распознающего функционала" допускает дальнейшее развитие, позволяющее оценивать степень разрешимости или неразрешимости задачи о допусках и корректировать ее данные в нужном нам смысле, в частности, и для нелинейных задач. Таких возможностей подход И. Рона также не предоставляет.

5. Вычисление размеров интервального решения

В выводимой ниже формуле для размеров внутреннего оценивающего бруса решающую роль играет взятие минимума от рациональной функции с модулями, так что дальнейшее решение линейной задачи о допусках сводится к задаче конечномерной ограниченной оптимизации. Не будем обсуждать при этом вопросы, связанные с оптимальным выбором центра интервального решения, так как они тесно связаны с практическими нуждами конкретных заказчиков.

Заметим, что в приложениях постановка линейной задачи о допусках часто является более детализованной, нежели (2.5). Следуя В.В. Шайдурову [4], дополнительно к формулировке (2.5) примем, что отношение допусков отдельных компонент бруса внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ задается некоторым положительным вектором $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_k > 0$, т.е., фактически, введем весовые коэффициенты для ширины искомого вектора допусков, так что

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{U}_k / \operatorname{rad} \boldsymbol{U}_l = w_k / w_l.$$

Посредством масштабирования диагональной матрицей $\operatorname{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ все подобные случаи легко привести к одному стандартному, когда $w = (1, 1, \dots, 1)$ и необходимо вписать гиперкуб в соответствующим образом модифицированное множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Действительно, введем матрицы $D = \operatorname{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ и $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}D$. Пусть интервальный вектор $\widetilde{\boldsymbol{U}}$, такой что $\operatorname{rad} \widetilde{\boldsymbol{U}}_k = \operatorname{rad} \widetilde{\boldsymbol{U}}_l$, $k, l = 1, 2, \dots, n$, является решением линейной задачи о допусках с матрицей $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и вектором правой части $\boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{U} = D\widetilde{\boldsymbol{U}}$ – решение исходной задачи, поскольку

$$\{\boldsymbol{A}x \mid x \in \boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{A}DD^{-1}x \mid x \in \boldsymbol{U}\} = \{\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{x} \mid \widetilde{x} \in \widetilde{\boldsymbol{U}}\} \subseteq \boldsymbol{b},$$

причем $\operatorname{rad} \boldsymbol{U}_k / \operatorname{rad} \boldsymbol{U}_l = w_k / w_l$, как и требовалось. По этой причине в постановке линейной задачи о допусках будем иметь в виду поиск интервального вектора $\boldsymbol{U} \subseteq \subseteq \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ с компонентами равной ширины.

Т е о р е м а 3. *Если $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, то для*

$$r = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} |} \right\} \tag{5.13}$$

интервальный вектор $\boldsymbol{U} = (t + r\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} = (\,[-1, 1], \dots, [-1, 1]\,)^\top$, также целиком лежит во множестве решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

В выражении (5.13) взятие минимума по $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ не представляет трудностей. Вычисление внутреннего минимума, который берется, фактически, по вершинам отдельных интервальных векторов-строк $(\,\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \dots, \boldsymbol{a}_{in})$ матрицы $\boldsymbol{A}$, также несложно при небольших размерностях пространства переменных n. Но при росте размерности количество вершин 2^n быстро растет и, начиная с некоторого n, их полный перебор становится невозможным. Следовательно, нужно уметь находить $\min\limits_{A\in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}}$ либо его оценку снизу каким-нибудь другим путем.

Простейший способ быстрого оценивания величины внутреннего минимума в (5.13) снизу состоит в том, чтобы взять левый конец *естественного интервального расширения* для выражений в фигурных скобках (5.13) по всей $\boldsymbol{A}$, т.е. заменить переменные интервалами их изменения и выполнить арифметические операции между ними по правилам классической интервальной арифметики. Следующий простой алгоритм, предложенный В.В. Шайдуровым [4], именно это и делает.

Для данного $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ вычисляем интервалы

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |\, \boldsymbol{a}_{ij}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и затем полагаем $\varrho := \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \underline{\boldsymbol{r}}_i$. Интервальный вектор $(t+\varrho \boldsymbol{e})$ есть решение линейной задачи о допусках для системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Поскольку и числитель, и знаменатель минимизируемого выражения содержат лишь по одному вхождению каждой переменной в первой степени, алгоритм Шайдурова, в действительности, эквивалентен оцениванию минимума дроби как частного от минимума числителя на максимум знаменателя. Относительная точность такого оценивания, как нетрудно показать [4], тем выше, чем меньшей является ширина матрицы $\boldsymbol{A}$.

Алгоритм Шайдурова прост и легко реализуем, но это достигается ценой значительного огрубления окончательного результата, особенно для широких интервальных матриц $\boldsymbol{A}$. Желательно иметь в своем распоряжении более развитые методики вычисления (5.13), с точностью, превосходящей алгоритм Шайдурова, но сложностью выполнения меньшей, чем полный перебор всех вершин интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$. Такие вычислительные методы были развиты автором, в частности, в [11] на основе широко известной в комбинаторной оптимизации стратегии "ветвей и границ". Время исполнения этих методов растет в наихудшем случае как экспонента от размерности n, но гибкая вычислительная схема позволяет с успехом применять их к задачам любого размера. При этом точность вычисления величины (5.13) будет лимитироваться лишь наличными вычислительными ресурсами.

В качестве примера построим брус внутренней оценки допустимого множества решений системы (2.4). В предыдущем разделе мы нашли точку $(0,0)^\top$ из внутренности допустимого множества решений, и ее можно взять в качестве центра искомого бруса. В соответствии с алгоритмом Шайдурова

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \frac{1}{\left|[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]\right| + |[1,2]|} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{3}{8},$$

так что получается кубик $\left(\left[-\dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{8}\right], \left[-\dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{8}\right] \right)^\top$. Он даже максимален по включению, так как касается границ допустимого множества решений.

Отметим, что помимо развитого выше "центрового" подхода существует и другой, так называемый "формальный", подход к решению линейной задачи о допусках [19, 20]. Он подробно разработан и обладает рядом замечательных качеств –

высокой вычислительной эффективностью, хорошим качеством оценивания и универсальностью, будучи применимым для оценивания любых множеств решений, а не только допустимого. Но с помощью “формального подхода” невозможно выполнить полное исследование разрешимости линейной задачи о допусках.

6. Заключение

В работе рассмотрена задача о допусках для интервальных линейных систем уравнений, требующая исследования их допустимого множества решений. Оно образовано всеми вещественными векторами, которые устойчиво переводятся задаваемым матрицей системы линейным преобразованием в интервалы правой части при любых вариациях элементов матрицы в пределах соответствующих интервалов. Если же допустимое множество решений непусто, то требуется найти его внутреннюю (с помощью подмножества) оценку.

Таким образом, постановка задачи о допусках идейно близка к тем, что рассматриваются в теории робастного управления. Неудивительно, что именно там задача о допусках и получила наиболее интенсивные применения в последние десятилетия.

В работе предлагается полная “технологическая цепочка” для решения линейной задачи о допусках. В частности, в разделе 3 представлен простой признак пустоты допустимого множества решений, основанный на сравнении “относительной узости” интервалов в матрице и правой части. Далее, в разделе 4 развита более тонкая методика, основанная на использовании “распознающего функционала” и позволяющая исчерпывающим образом исследовать пустоту/непустоту допустимого множества решений. При этом в случае непустоты одновременно получается точка из допустимого множества решений, вокруг которой может быть построен брус внутренней оценки. Формула для вычисления его размеров выводится в разделе 5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Оно сводится к проверке того, что

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b})\},$$

так как обратное включение очевидно.

Предположим, что некоторый x удовлетворяет $Ax \in \boldsymbol{b}$ для всех $A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}$. Пусть E – матрица из $\boldsymbol{A}$. В соответствии с определением $\operatorname{vert} \boldsymbol{A}$ существуют коэффициенты $\lambda_A \geqslant 0$, общим числом 2^{mn}, такие что

$$\sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A = 1 \quad \text{и} \quad E = \sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A A,$$

или, иными словами, E представляется как выпуклая комбинация крайних матриц из $\boldsymbol{A}$. Тогда

$$Ex = \left(\sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A A \right) \cdot x = \sum_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \lambda_A A x. \tag{П.1}$$

Но все $Ax \in \boldsymbol{b}$ по утверждению леммы. Следовательно, их выпуклая комбинация, какой является сумма (П.1), также принадлежит выпуклому множеству $\boldsymbol{b}$.

Доказательство теоремы 1. Оно будет проведено “от противного”. Предположим, что задача о допусках все-таки имеет решение $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, т.е. $\boldsymbol{A}t \subseteq \boldsymbol{b}$, причем условие (i) делает невозможным равенство интервала $(\boldsymbol{A}t)_k$ нулю.

Тогда верны следующие неравенства:

$$\chi((\boldsymbol{A}t)_k) = \chi\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{kj}t_j\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\chi(\boldsymbol{a}_{kj}t_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj}t_j \neq 0\} = \quad \text{в силу (3.10)}$$
$$= \max\{\ \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n\boldsymbol{a}_{kj}t_j \neq 0\ \} \leqslant \quad \text{в силу (3.9)}$$
$$\leqslant \max\{\ \chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0\ \}.$$

Мы нашли, что

(П.2) $$\chi((\boldsymbol{A}t)_k) \leqslant \max\{\chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0\ \}.$$

С другой стороны, в силу нашего предположения $(\boldsymbol{A}t)_k \subseteq \boldsymbol{b}_k$, что вместе с (3.11) влечет

$$\chi(\ (\boldsymbol{A}t)_k\ ) \geqslant \chi(\boldsymbol{b}_k).$$

Комбинируя это соотношение с (П.2), получаем далее

$$\max\{\chi(\boldsymbol{a}_{kj}) \mid 1 \leqslant j \leqslant n, \boldsymbol{a}_{kj} \neq 0\} \geqslant \chi(\boldsymbol{b}_k),$$

что противоречит условию (ii) доказываемой теоремы.

Доказательство леммы 2. Принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$. Перепишем последнее включение в следующем виде

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}x_j \subseteq [-\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i\,], \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

что эквивалентно

$$\left|\ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}x_j\ \right| \leqslant \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, x на самом деле принадлежит $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathit{Tol}\,(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left|\ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}x_j\ \right|\right\} \geqslant 0.$$

Доказательство леммы 3. Функционал $\mathit{Tol}\,(x)$ есть нижняя огибающая функционалов

$$\xi_i(x) = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left|\ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}x_j\ \right|, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и нам нужно лишь установить вогнутость каждого из $\xi_i(x)$.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$. Субдистрибутивность интервальной арифметики влечет тогда

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}(\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \subseteq$$
$$\subseteq\ \lambda\left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}x_j\right) + (1-\lambda)\left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}y_j\right).$$

Кроме того, абсолютная величина интервала монотонна по включению [6], так что

$$\left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}(\lambda x_j + (1-\lambda) y_j) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \lambda \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} y_j \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| + (1-\lambda) \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right|.$$

Доказательство леммы 4. Будучи выпуклым полиэдральным множеством, подграфик hyp Tol является выпуклой оболочкой конечного числа точек (c_k, γ_k), $k = 1, 2, \ldots, p$, и направлений (c_k, γ_k), $k = p+1, \ldots, q$, в $\mathbb{R}^{n+1}$ (исключая направление $(0, \ldots, 0, 1)$, так как $Tol(x)$ всюду определен) [13]. Более точно,

$$\operatorname{hyp} Tol = \left\{ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k (c_k, \gamma_k) \,\middle|\, c_k \in \mathbb{R}^n,\ \gamma_k, \lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Поскольку $Tol(x) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i$, можно заключить, что $\gamma_k \leqslant 0$, $k = p+1, \ldots, q$, так как в противном случае функционал Tol не был бы ограничен сверху. По этой причине

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x) = \max\{\, z \mid (x, z) \in \operatorname{hyp} Tol,\ x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R} \,\} =$$

$$= \max \left\{ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \gamma_k \,\middle|\, \lambda_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\} =$$

$$= \max \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \gamma_k \,\middle|\, \lambda_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\} =$$

$$= \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \gamma_k.$$

Искомый максимум совпадает, таким образом, с максимумом по некоторому конечному множеству значений функционала, а $\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x)$ достигается вместе со всеми γ_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство леммы 5. Пусть $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ и $\max Tol(x)$ достигается в некоторой точке $\tau \in \Xi_{tol}$. Если $t \in \operatorname{int} \Xi_{tol}$, то t – внутренняя точка отрезка $[\tau, y] \subset \Xi_{tol}$, т.е. $t = \lambda\tau + (1-\lambda) y$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$, $y \in \Xi_{tol}$. Следовательно,

$$Tol(t) \geqslant \lambda\, Tol(\tau) + (1-\lambda)\, Tol(y),$$

так как функционал Tol вогнутый.

Предположим, что $Tol(t) = 0$. Тогда выписанное выше неравенство выполняется если и только если $Tol(\tau) = Tol(y) = 0$, а функционал Tol обязан быть нулевым на всем множестве $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Более того, пусть $\mathbb{R}^n = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathcal{O}_i$, где

$$\mathcal{O}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Tol(x) = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Xi_{tol} = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i),$$

причем все множества $\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, замкнуты. Следовательно, $\operatorname{int} (\Xi_{tol} \cap \cap \mathcal{O}_i) \neq \emptyset$ по крайней мере для одного $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, и мы имеем

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_k - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_k - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{kj} x_j \right| = 0 = \mathrm{const}$$

для всех $x \in \operatorname{int} (\Xi_{tol} \cap \mathcal{O}_k)$. Последнее соотношение может иметь место, лишь когда все $\boldsymbol{a}_{k1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{kn}$ нулевые, что противоречит исходному утверждению леммы.

Доказательство леммы 6. Так как отображение $\mathrm{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно, множество $Y = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid Tol(y) > 0 \,\}$ является открытым. Оно также и непусто – $t \in Y \subseteq \Xi_{tol}$, причем $Y \subseteq \operatorname{int} \Xi_{tol}$. Следовательно, $x \in \operatorname{int} \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$.

Доказательство теоремы 3. Предположим сначала, что в рассматриваемой линейной задаче о допусках матрица $\boldsymbol{A}$ имеет нулевую ширину, т.е. вещественная – $\boldsymbol{A} = A$, и потому $\operatorname{vert} \boldsymbol{A} = A$. Представим каждый $x \in \boldsymbol{U}$ в виде $x = t + y$, где $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\, y_j| \leqslant r_A$ и

$$r_A = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}|} \right\}, \qquad (\text{П.3})$$

так что для $i = 1, 2, \ldots, m$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\,(Ay)_i| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}|\, |\, y_j| \leqslant \\ &\leqslant r_A \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}| \leqslant \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right|. \end{aligned}$$

Поскольку $Ax = At + Ay$, то получаем

$$(At)_i - \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i + |\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - (At)_i\,| \leqslant (Ax)_i \leqslant (At)_i + \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - |\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - (At)_i\,|$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} &\underline{\boldsymbol{b}}_i - (\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - (At)_i) + |\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - (At)_i\,| \leqslant \\ &\leqslant (Ax)_i \leqslant \\ &\leqslant \overline{\boldsymbol{b}}_i - (\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - (At)_i) - |\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - (At)_i\,|. \end{aligned} \qquad (\text{П.4})$$

В силу того, что

$$-z + |z| \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -z - |z| \leqslant 0$$

для всякого вещественного z, неравенство (П.4) влечет $\underline{\boldsymbol{b}}_i \leqslant (Ax)_i \leqslant \overline{\boldsymbol{b}}_i$, т.е. $Ax \in \boldsymbol{b}$, как и ожидалось.

Пусть теперь матрица $\boldsymbol{A}$ задачи имеет ненулевую ширину и $t \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$. Рассмотрим совокупность всех линейных задач о допусках для линейных систем

$Ax = \boldsymbol{b}$ с $A \in \boldsymbol{A}$. Согласно представлению (2.8)

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b}),$$

и если для каждого $A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}$ интервальный вектор решения соответствующей задачи о допусках есть $\boldsymbol{U}_A$, $\boldsymbol{U}_A \subseteq \Xi_{tol}(A, \boldsymbol{b})$, то интервальный вектор $\boldsymbol{U}$, такой что

$$\boldsymbol{U} = \bigcap_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \boldsymbol{U}_A,$$

также включен в $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. В частности, если все $\boldsymbol{U}_A$ имеют общий центр и их радиусы определяются формулой (П.3), то имеем

$$\boldsymbol{U} = t + r\boldsymbol{e},$$

где

$$r = \min_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} r_A = \min_{A \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}} \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} |} \right\},$$

а взятие двух последовательных минимумов можно переставить между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neumaier A.* Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Intervall-Berichte. 1986. № 86/9. P. 5–19.
2. *Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.* Standardized notation in interval analysis (`http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int`).
3. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
4. *Добронец Б.С., Шайдуров В.В.* Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука, 1990.
5. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
6. *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
7. *Rohn J.* Input-output model with interval data // Econometrica. 1980. V. 48. P. 767–769.
8. *Хлебалин Н.А.* Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта // Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов: Саратов. политехнический ин-т, 1981. С. 107–123.
9. *Дугарова И.В., Смагина Е.М.* Обеспечение устойчивости системы с неопределенными параметрами // АиТ. 1990. № 11. С. 176–181.
10. *Rohn J.* Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985; ed. Nickel K. N.Y.: Springer Verlag, 1986. P. 157–158. (Lecture Notes on Computer Science; vol. 212).
11. *Shary S.P.* Solving the linear interval tolerance problem // Math. Comput. Simulation. 1995. V. 39. P. 53–85.
12. *Ratschek H.* Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik // J. Reine und Angewandte Math. 1972. B. 252. P. 128–138.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979.

15. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
16. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.
17. *Kiwiel K.C.* Methods of descent for nondifferentiable optimization. Berlin: Springer Verlag, 1985.
18. *Рыков А.С.* Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций. М.: Физматлит, 1993.
19. *Шарый С.П.* Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61.
20. *Shary S.P.* A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. V. 8. № 5. P. 321–418.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 25.11.2003