Новый подход в интервальной глобальной оптимизации*

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН
630090 г. Новосибирск

Аннотация

В работе предлагается новый класс интервальных методов глобальной оптимизации, основанный на идее совместного адаптивного дробления как области определения функции, так и её области значений.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, интервальный анализ

1 Введение

Предмет нашей работы — задача глобальной оптимизации вещественнозначной функции $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ на прямоугольном брусе $\mathbf{X}$ со сторонами, параллельными координатным осям (т.е. на интервальном векторе):

$$\text{найти} \qquad \min_{x \in \mathbf{X}} f(x). \tag{1}$$

В случае, когда у нас нет априорной информации о характере глобального поведения целевой функции и структуре ее локальных экстремумов, наиболее уместным для решения задачи (1), по-видимому, является применение методов, в том или ином виде осуществляющих перебор и сравнение всех точек области определения. Таковыми являются, например, методы неравномерных покрытий. Широко известны также различные интервальные методики решения этой задачи [1, 2, 4], которые позволяют надёжно находить гарантированные двусторонние границы как для величины оптимума, так и для доставляющих его значений аргумента. Основой этих методов является адаптивное, в соответствии со стратегией "ветвей и границ", дробление области определения минимизируемой функции и интервальное оценивание области значений по получающимся подобластям. Цель настоящей работы — представить новый перспективный интервальный подход к решению задачи (1), основанный на совместном адаптивном дроблении как области определения функции, так и области её значений.

*Опубликовано в виде статьи — Шарый С. П. Новый подход в интервальной глобальной оптимизации // Труды XII Байкальской международной конференции "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 24 июня – 1 июля 2001 года. Том 1 "Математическое программирование". – Иркутск: ИДСиТУ, 2001. – С. 289–295.

2 Идея нового подхода

Заметим, что любая функция $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, будучи, по определению, некоторым специальным подмножеством декартова произведения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, есть $(n+1)$-мерный объект (в связи с которым обычно употребляют понятие *графика* функции f). Но упомянутые во Введении интервальные методы глобальной оптимизации осуществляют активные действия — адаптивное дробление — лишь в отношении первых n координат этого множества. Последняя $(n+1)$-я координата функции, представленной своим графиком, обрабатывается существенно по другому, пассивно, и то же самое верно и для подавляющего большинства классических методов оптимизации.

Как можно исправить эту ситуацию и что при этом получится?

2.1 Одномерная оптимизация

Начнём с простейшего случая и рассмотрим функцию одной переменной $f : \mathbb{R} \supseteq \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, заданную на замкнутом интервале $\mathbf{X}$, для которой требуется решить задачу (1). Пусть в плоскости $0xy$ задана прямая, параллельная первой координатной оси и имеющая уравнение $y = l$, где l — некоторая константа. Мы можем узнать, пересекает ли график функции $y = f(x)$ эту прямую, решив на $\mathbf{X}$ уравнение

$$f(x) - l = 0 \tag{2}$$

или же убедившись в его несовместности. Как нетрудно понять, ответ на этот вопрос доставляет информацию об искомом минимуме (1): если прямая $y = l$ пересекает график функции $y = f(x)$, то $\min_{x\in\mathbf{X}} f(x) \leq l$. Более того, если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{X}$, то

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbf{X}} f(x) &= \min\bigl\{\, l \in \mathbb{R} \mid \text{ прямая } y = l \text{ пересекает график функции } y = f(x) \,\bigr\} \\
&= \min\bigl\{\, l \in \mathbb{R} \mid \text{ уравнение } f(x) - l = 0 \text{ совместно} \,\bigr\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, варьируя величину “уровня” l и повторяя процесс решения уравнения (2), мы можем уточнять оценку для искомого минимума (1).

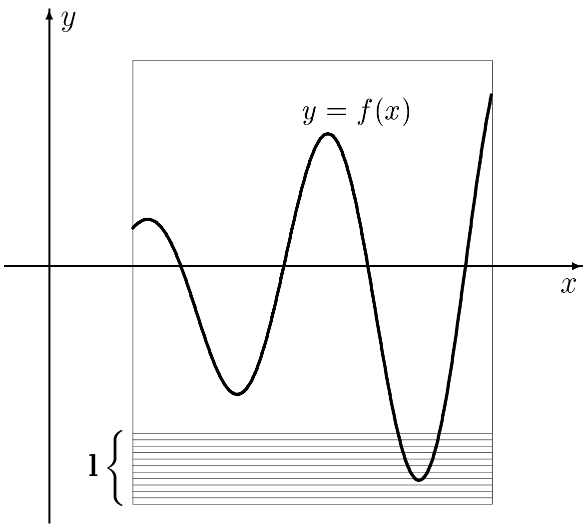

Рис. 1: Пересекает ли пучок прямых график функции?...

Описанная процедура может быть существенно модифицирована путём привлечения идей и методов интервального анализа:

Во-первых, интервальные методы позволяют легко найти для области значений f на $\mathbf{X}$ грубые оценки сверху и снизу, которые нужны для определения границ варьирования величины "уровня" l в процессе уточнения минимума.

Во-вторых, имеет смысл исследовать пересечение графика функции $y = f(x)$ не с одиночными прямыми, а с целыми пучками прямых, параллельных оси $0x$ и задаваемых уравнениями $y = \mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ — интервал в $\mathbb{IR}$. Тем самым мы сможем оценивать искомый глобальный минимум (1) как сверху, так и снизу:

$\min_{x\in\mathbf{X}} f(x)$ не меньше минимума левых концов и не больше минимума правых концов всех таких интервалов $\mathbf{l}$, что пучок $y = \mathbf{l}$ пересекается с графиком функции $y = f(x)$. (3)

В-третьих, интервальные методы решения уравнений (например, интервальный метод Ньютона и его модификации [1, 2, 3]) позволяют при минимальных требованиях на гладкость функции f исследовать вопрос о разрешимости как вещественного уравнения (2), так и интервального уравнения $f(x) - \mathbf{l} = 0$, понимаемую как существование некоторого $l \in \mathbf{l}$, для которого совместно (2).

Ответ, выдаваемый интервальными методами, может иметь одну из следующих форм [1, 2, 3]:

1. Уравнение не имеет решений (т.е. несовместно) на рассматриваемом интервале.

2. Уравнение гарантированно имеет решение (или решения) на рассматриваемом интервале. В этом случае будем просто говорить, что уравнение *совместно*.

3. Применение решающей процедуры не позволяет определённо заявить как о том, что на рассматриваемом интервале у уравнения корней нет, так и о том, что они есть. В этом случае условимся говорить, что уравнение *возможно совместно*.

Третий исход является наиболее неблагоприятным с точки зрения конструируемой нами процедуры уточнения глобального минимума $\min_{x\in\mathbf{X}} f(x)$, но в своих построениях нам все же следует аккуратно принимать во внимание неопределенность подобного сорта в своих построениях: она весьма часто имеет место в случае наличия у уравнения (2) кратных корней. Важно заметить, что интервальные методы никогда не "теряют" корней и в принципе не могут выдавать сообщение о несовместности уравнения, если оно имеет корни.

Наконец, вместо не вполне строгого "варьирования уровня" l мы будем применять дробление интервала области значений. В целом, интервальная версия процедуры уточнения глобального минимума одномерной функции $f(x)$ на интервале $\mathbf{X}$ может выглядеть следующим образом. Сначала мы находим грубую внешнюю интервальную оценку $\mathbf{Y}$ области значений функции $f(x)$ на $\mathbf{X}$ (например, как естественное интервальное расширение f на $\mathbf{X}$). Далее

рассекаем интервал $\mathbf{Y}$ пополам на подинтервалы $\mathbf{Y}' := [\,\underline{\mathbf{Y}}', \operatorname{mid}\mathbf{Y}\,]$ и $\mathbf{Y}'' := [\,\operatorname{mid}\mathbf{Y}, \overline{\mathbf{Y}}\,]$, где $\operatorname{mid}\mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}})$ — середина $\mathbf{Y}$;

проверяем совместность интервальных уравнений $f(x) - \mathbf{Y}' = 0$ и $f(x) - \mathbf{Y}'' = 0$:

- если какое-либо из этих уравнений несовместно, то отбрасываем соответствующий интервал и больше не рассматриваем его;

- совместность или возможная совместность уравнения означает, что нижняя и/или верхняя оценки глобального минимума могут быть скорректированы в соответствии с (3).

Процедуру улучшения оценки для минимума (1) посредством дробления интервала области значений $\mathbf{Y}$ можно повторить по отношению к его потомкам $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{Y}''$, затем снова разбить потомков от $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{Y}''$ и снова повторить уточнение и т.д. до тех пор, пока вычисленные верхняя и нижняя границы минимума не окажутся достаточно близкими друг к другу. Отметим, что в этом процессе мы должны сохранять все подинтервалы области значений $\mathbf{y}$ исходного интервала $\mathbf{Y}$, для которых соответствующие уравнения $f(x) - \mathbf{y} = 0$ совместны или возможно совместны, так как даже в случае возможной совместности они могут соответствовать пучкам прямых, имеющим непустое пересечение с графиком целевой фукнции.

2.2 Многомерный случай

Теоретически вычислительная схема алгоритма одномерной глобальной оптимизации, развитая в предыдущем параграфе, вполне применима и к функции $f(x) := f(\,x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от нескольких переменных. Теперь мы лишь должны уметь устанавливать факт пересечения или непересечения графика функции $y = f(x)$ с пучком гиперплоскостей $y = \mathbf{l}$, ортогональных оси $0y$. Это действительно может быть сделано, например, если мы имеем в свеом распоряжении какой-либо мощный решатель для систем уравнений и способны легко применять его. В частности, А.Л.Семенов в [5] реализовал процедуру похожего типа для уточнения значений оптимума в некоторых оптимизационных задачах.

Но в большинстве случаев практическая реализация этой идеи сталкивается с большими трудностями. Дело в том, что в общем многомерном случае решение системы уравнений — выяснение её совместности — является не более лёгкой задачей, чем глобальная оптимизация. Теперь, в отличие от одномерной ситуации, мы уже не располагаем для ее решения простыми и эффективными подходами вроде интервального метода Ньютона и его модификаций. Выход из создавшегося затруднения может состоять в том, что мы всё-таки будем подвергать дроблению область определения функции — брус $\mathbf{X}$ — по некоторым (но не по всем!) избранным координатным направлениям, количество и конкретный выбор которых зависят от решаемой задачи и её целевой функции.

Координатные направления, по которым область определения не будет дробиться, мы назовём *немыми* и рассмотрим сначала простейшие методы, в которых выделено всего лишь одно немое направление с номером $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ прямую, параллельную μ-ой координатной оси, и имеющую параметрическое уравнение

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& r_1, \\ &\vdots& \\ x_{\mu-1} &=& r_{\mu-1}, \\ x_\mu &=& t, \\ x_{\mu+1} &=& r_{\mu+1}, \\ &\vdots& \\ x_n &=& r_n, \\ y &=& l, \end{array}\right. \tag{4}$$

где t — параметр, пробегающий всю числовую ось, а $r_1, \ldots, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \ldots, r_n, l$ — некоторые

Таблица 1:

Простейший интервальный алгоритм дробления графика

глобальной оптимизации функций (случай одной немой координаты)

Вход

Брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ и функция $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$.   Точность $\epsilon > 0$.

Номер μ немой компоненты, $1 \leq \mu \leq n$.

Метод выяснения совместности одномерного интервального уравнения $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$ для ϕ и $\mathbf{Z}$, определённых в (5)–(6).

Выход

Нижняя $\underline{y}$ и верхняя $\overline{y}$ оценки с точностью ϵ для глобального минимума функции f на брусе $\mathbf{X}$.

Алгоритм

вычисляем внешнюю оценку $\mathbf{Y}$ области значений f на $\mathbf{X}$;

присваиваем $\mathbf{Z} := (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \ldots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y})$;

полагаем $z := \underline{\mathbf{Y}}$ и $\overline{y} := \overline{\mathbf{Y}}$;

инициализируем рабочий список $\mathcal{L} := \{ (\mathbf{Z}, z) \}$;

`DO WHILE` $(\overline{y} - z \geq \epsilon)$

выбираем компоненту k, по которой брус $\mathbf{Z}$ имеет наибольшую ширину, т.е. $\operatorname{wid} \mathbf{Z}_k = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{wid} \mathbf{Z}_i$;

рассекаем брус $\mathbf{Z}$ по k-ой координате пополам на брусы $\mathbf{Z}'$ и $\mathbf{Z}''$, такие что
$$\mathbf{Z}' := (\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Z}}_k, \operatorname{mid} \mathbf{Z}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \ldots, \mathbf{Z}_n),$$
$$\mathbf{Z}'' := (\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\operatorname{mid} \mathbf{Z}_k, \overline{\mathbf{Z}}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \ldots, \mathbf{Z}_n);$$

если уравнение $\phi(\mathbf{Z}', t) = 0$ на $\mathbf{X}_\mu$ совместно или возможно совместно и $\underline{\mathbf{Z}}'_n \leq \overline{y}$, то полагаем $z' := \underline{\mathbf{Z}}'_n$ и помещаем запись $(\mathbf{Z}', z')$ в $\mathcal{L}$ в порядке возрастания значений второго поля ;

если уравнение $\phi(\mathbf{Z}', t) = 0$ на $\mathbf{X}_\mu$ совместно, полагаем $\overline{y} := \min\{\overline{y}, \overline{\mathbf{Z}}'_n\}$;

если уравнение $\phi(\mathbf{Z}'', t) = 0$ на $\mathbf{X}_\mu$ совместно или возможно совместно и $\underline{\mathbf{Z}}''_n \leq \overline{y}$, то полагаем $z'' := \underline{\mathbf{Z}}''_n$ и помещаем запись $(\mathbf{Z}'', z'')$ в $\mathcal{L}$ в порядке возрастания значений второго поля ;

если уравнение $\phi(\mathbf{Z}'', t) = 0$ на $\mathbf{X}_\mu$ совместно, полагаем $\overline{y} := \min\{\overline{y}, \overline{\mathbf{Z}}''_n\}$;

удаляем бывшую ведущую запись $(\mathbf{Z}, z)$ из списка $\mathcal{L}$;

обозначаем новую ведущую запись списка $\mathcal{L}$ через $(\mathbf{Z}, z)$;

`END DO`

$\underline{y} := z$;

константы. Аналогично одномерному случаю, если f непрерывна на $\mathbf{X}$, то

$$\min_{x\in\mathbf{X}} f(x) \;=\; \min\bigl\{\, l \in \mathbb{R} \mid \text{ прямая (4) пересекает график функции } y = f(x) \,\bigr\}.$$

Следовательно, мы можем "нащупывать" график минимизируемой функции одномерными прямыми, вновь используя для проверки совместности элементарных "уравнений уровня"

$$f(x) - \mathbf{l} = 0$$

эффективные одномерные интервальные процедуры (типа знаменитого интервального метода Ньютона и его модификаций). Обращаясь к построению интервальной оптимизационной процедуры, обозначим

$$\mathbf{Z} = (\,\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n) \;:=\; (\,\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \ldots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}\,), \tag{5}$$

$$\phi(\mathbf{Z}, t) \;:=\; f(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{\mu-1}, t, \mathbf{X}_{\mu+1}, \ldots, \mathbf{X}_n) - \mathbf{Y}. \tag{6}$$

n-мерные брусы $\mathbf{Z}$ — это пучки отрезков прямых, параллельных μ-ой координатной оси и "нащупывающих" график функции $y = f(x)$, тогда как результат пересечения или непересечения пучка с графиком будет определяться из решения относительно t одномерного интервального уравнения

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = 0.$$

Хранение всех пересекающих график функции брусов является залогом того, что мы не упустим искомый глобальный минимум.

В целом мы оформим процесс последовательного улучшения оценок глобального минимума (1) аналогично тому, как это делается в широко известном в комбинаторной оптимизации "методе ветвей и границ" и как это было адаптировано для интервальных методов глобальной оптимизации в [1, 2, 4]:

- организуем все брусы, которые возникают в процессе дробления исходного бруса $\mathbf{Z}$, в некоторый *рабочий список* $\mathcal{L}$;
- дроблению каждый раз будем подвергать лишь тот брус из списка $\mathcal{L}$, который имеет наименьший левый конец последней компоненты, т.е. брус, доставляющий рекордную гарантированную оценку снизу для искомого глобального минимума;
- в подвергаемом дроблению брусе будем делить пополам лишь самую широкую компоненту.

Кроме того, брусы вида (5), из которых составлен список $\mathcal{L}$, будут упорядочены по возрастанию левого конца последней n-ой компоненты (представляющей область значений функции), а первую запись списка мы будем называть *ведущей* на данном шаге. Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы назовём *методом дробления графика*, представлен в таблице.

Перейдём теперь к рассмотрению более общей ситуации, когда немыми объявлены s, $1 \leq s \leq n$) координатных направлений. Не умаляя общности наших рассмотрений можно считать, что номера этих координат суть 1, 2, …, s. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ задана плоскость, параллельная этим координатным направлениям, и имеющая, таким образом, параметрическое уравнение

$$
\begin{cases}
x_1 &= t_1, \\
&\vdots \\
x_{s-1} &= t_{s-1}, \\
x_s &= t_s, \\
x_{s+1} &= r_{s+1}, \\
&\vdots \\
x_n &= r_n, \\
y &= l,
\end{cases}
\tag{7}
$$

где $t_1, \dots, t_s$ — параметры, пробегающие всю числовую ось $\mathbb{R}$, а $r_{s+1}, \dots, r_n, l$ — некоторые константы. Аналогично одномерному случаю, если f непрерывна на $\mathbf{X}$, то

$$\min_{x\in\mathbf{X}} f(x) \;=\; \min\bigl\{\, l \in \mathbb{R} \mid \text{ плоскость (7) пересекает график функции } y = f(x) \,\bigr\}.$$

Обозначим

$$\mathbf{Z} = (\,\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1}) \;:=\; (\,\mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}\,), \tag{8}$$

$$\varphi(\mathbf{Z}, t) \;:=\; f(\,t_1, \dots, t_s, \mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n) - \mathbf{Y}. \tag{9}$$

$(n-s+1)$-мерные брусы $\mathbf{Z}$ — это пучки из прямоугольных кусков плоскостей вида (7), тогда как результат пересечения или непересечения таких пучков с графиком целевой функции будет определяться из решения относительно $t = (\,t_1,\, t_2,\, \dots,\, t_s)$ интервальных уравнений вида

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = 0.$$

Следовательно, мы сможем "нащупывать" график минимизируемой функции плоскостями (7), если мы будем уметь эффективно проверять совместность этих уравнений от s неизвестных.

Наконец, мы снова оформим процесс последовательного улучшения оценок глобального минимума в соответствии со стратегией "ветвей и границ", так что полный псевдокод получающегося нового алгоритма, приведенный в Таблице 2, совершенно аналогичный случаю одного немого направления.

Представленные в Таблицах 1 и 2 алгоритмы предназначены, очевидным образом, для вычисления лишь величины глобального минимума (1), но путём несложной модификации можно сделать так, чтобы они находили и значения переменных, доставляющих этот минимум. Именно, для этого нам нужно отслеживать и хранить все корни (как гарантированные, так и возможные) "уравнений уровня" $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$ помимо информации об их разрешимости. Это потребует расширения записей, образующих рабочий список $\mathcal{L}$ с тем, чтобы хранить информацию о двусторонних границах корней "уравнений уровня".

Что можно сказать о сходимости методов дробления графика? Хорошо известно, что в классических интервальных методах глобальной оптимизации из [1, 2, 4], основанных на адаптивном "branch-and-bound" дроблении области определения функции, диаметры ведущих брусов стремятся к нулю (доказательство можно найти, например, в [4, 6]). Этот факт необходимо верен и для методов дробления графика, так как их логическая схема совершенно совпадает с логической схемой классических интервальных методов глобальной оптимизации. Следовательно, "уравнения уровня" $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$, определяемые посредством (6) и (9), стремятся к точечным (неинтервальным) уравнениям в том смысле, что их интервальные коэффициенты неограниченно сужаются по мере работы алгоритма. Если

Таблица 2:

Простейший интервальный алгоритм дробления графика

для глобальной оптимизации функций (случай s немых координат)

Вход

Брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ и функция $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. Точность $\epsilon > 0$.

Номера $1, 2, \ldots, s$ немых компонент, $1 \le s \le n$.

Метод выяснения совместности интервального уравнения $\varphi(\mathbf{Z}, t) = 0$ для $t = (t_1, \ldots, t_s)$ и φ, $\mathbf{Z}$, определённых в (8)–(9).

Выход

Нижняя $\underline{y}$ и верхняя $\overline{y}$ оценки с точностью ϵ для глобального минимума функции f на брусе $\mathbf{X}$.

Алгоритм

вычисляем внешнюю оценку $\mathbf{Y}$ области значений f на $\mathbf{X}$;

присваиваем $\mathbf{Z} := (\, \mathbf{X}_{s+1}, \ldots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y} \,)$;

полагаем $z := \underline{\mathbf{Y}}$ и $\overline{y} := \overline{\mathbf{Y}}$;

инициализируем рабочий список $\mathcal{L} := \big\{ \, (\mathbf{Z}, z) \, \big\}$;

`DO WHILE` $(\, \overline{y} - z \ge \epsilon \,)$

> выбираем компоненту k, по которой брус $\mathbf{Z}$ имеет наибольшую ширину, т.е. $\operatorname{wid} \mathbf{Z}_k = \max_{1 \le i \le (n-s+1)} \operatorname{wid} \mathbf{Z}_i$;
>
> рассекаем брус $\mathbf{Z}$ по k-ой координате пополам на брусы $\mathbf{Z}'$ и $\mathbf{Z}''$, такие что $\mathbf{Z}' := (\, \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\, \underline{\mathbf{Z}}_k, \operatorname{mid} \mathbf{Z}_k \,], \mathbf{Z}_{k+1}, \ldots, \mathbf{Z}_{n-s+1})$,
> $\mathbf{Z}'' := (\, \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\operatorname{mid} \mathbf{Z}_k, \overline{\mathbf{Z}}_k \,], \mathbf{Z}_{k+1}, \ldots, \mathbf{Z}_{n-s+1})$;
>
> если уравнение $\varphi(\mathbf{Z}', t) = 0$ на брусе $(\, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_s)$ совместно или возможно совместно и $\underline{\mathbf{Z}}'_n \le \overline{y}$, то полагаем $z' := \underline{\mathbf{Z}}'_{n-s+1}$ и помещаем запись $(\mathbf{Z}', z')$ в $\mathcal{L}$ в порядке возрастания второго поля ;
>
> если уравнение $\varphi(\mathbf{Z}', t) = 0$ на $(\, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_s)$ совместно, то полагаем $\overline{y} := \min\{\, \overline{y}, \overline{\mathbf{Z}}'_{n-s+1}\}$;
>
> если уравнение $\varphi(\mathbf{Z}'', t) = 0$ на брусе $(\, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_s)$ совместно или возможно совместно и $\underline{\mathbf{Z}}''_n \le \overline{y}$, то полагаем $z'' := \underline{\mathbf{Z}}''_{n-s+1}$ и помещаем запись $(\mathbf{Z}'', z'')$ в $\mathcal{L}$ в порядке возрастания второго поля ;
>
> если уравнение $\varphi(\mathbf{Z}'', t) = 0$ на $(\, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_s)$ совместно, то полагаем $\overline{y} := \min\{\, \overline{y}, \overline{\mathbf{Z}}''_{n-s+1}\}$;
>
> удаляем бывшую ведущую запись $(\mathbf{Z}, z)$ из списка $\mathcal{L}$;
>
> обозначаем новую ведущую запись списка $\mathcal{L}$ через $(\mathbf{Z}, z)$;

`END DO`

$\underline{y} := z$;

целевая функция f такова, что корни уравнения $\phi(Z,t) = 0$ непрерывно зависят от параметра Z, то мы можем ожидать сходимости метода дробления графика к глобальному оптимуму.

Остается лишь упомянуть, что простейший метод дробления графика был реализован на языке Fortran-90 фирмы Sun Microsystems (содержащем встроенные интервальные типы данных, а также операции и отношения между ними), и на несложных задачах продемонстрировал высокую точность оценивания глобального оптимума. Следовательно, многое еще предстоит сделать для модификации красивой идеи "дробления графика" и построении на ее основе действительно эффективных инструментов глобальной оптимизации.

Список литературы

[1] Hansen E. *Global Optimization Using Interval Analysis.* – New York: Marcel Dekker, 1992.

[2] Kearfott R. B. *Rigorous Global Search: Continuous Problems.* – Dordrecht: Kluwer, 1996.

[3] Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[4] Ratschek H., Rokne J. *New Computer Methods for Global Optimization.* – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1988.

[5] Semenov A. L. Solving optimization problems with help of the UniCalc solver // Kearfott, R. B. and Kreinovich, V. (eds.), *Applications of Interval Computations.* – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 211-225.

[6] Shary S. P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* – 1995. – Vol. 32. – P. 610–630.

[7] Shary S. P. A surprising approach in interval global optimization // *Reliable Computing.* – 2001. – Vol. 7, No. 6. – P. 497–505.