

# Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем

С. П. ШАРЫЙ

Институт вычислительных технологий СО РАН

УДК 519.61

**Ключевые слова:** интервальная линейная система, внешняя задача, алгебраический подход, субдифференциальный метод Ньютона.

## Аннотация

Предметом нашей работы является классическая «внешняя» задача для интервальной линейной системы  $Ax = b$  с интервальной матрицей  $A$  и вектором правых частей  $b$ : найти «внешние» покоординатные оценки множества решений, образованного всеми решениями точечных систем  $Ax = b$  с  $A \in A$  и  $b \in b$ . Цель настоящей работы — предложить новый *алгебраический подход* к этой задаче, при котором исходная постановка заменяется на задачу решения одной *точечной* (неинтервальной) системы уравнений в евклидовом пространстве двойной размерности. Мы конструируем специализированный алгоритм — субдифференциальный метод Ньютона, — реализующий новый подход, приводим результаты численных экспериментов с ним. Они свидетельствуют о том, что предлагаемый алгебраический подход совмещает исключительную вычислительную эффективность с высоким качеством оценивания множества решений.

## Abstract

*S. P. Shary, Algebraic approach in the «outer problem» for interval linear systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 8 (2002), no. 2, pp. 567–610.*

The subject of our work is the classical «outer» problem for the interval linear algebraic system  $Ax = b$  with the interval matrix  $A$  and right-hand side vector  $b$ : find «outer» coordinate-wise estimates of the solution set formed by all solutions to the point systems  $Ax = b$  with  $A \in A$  and  $b \in b$ . The purpose of this work is to propose a new *algebraic approach* to the above problem, in which it reduces to solving one *point* (noninterval) equation in the Euclidean space of the double dimension. We construct a specialized algorithm (subdifferential Newton method) that implements the new approach, present results of its numerical tests. They demonstrate that the algebraic approach combines exclusive computational efficacy with high quality enclosures of the solution set.

## § 1. Введение

Основным объектом изучения в нашей работе является интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{1}$$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2002, том 8, № 2, с. 567–610.

© 2002 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

с интервальной  $n \times n$ -матрицей  $\mathbf{A}$  и интервальным  $n$ -вектором правой части  $\mathbf{b}$ . Интервальную систему (1) мы мыслим как совокупность всех точечных  $n \times n$ -систем

$$Ax = b \quad (2)$$

с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ , или, что равносильно, как результат независимого варьирования элементов матрицы и правой части точечной системы (2) в пределах некоторых заданных интервалов.

Одной из классических постановок для интервальной линейной системы уравнений вида (1) является задача об оценивании разброса решений содержащихся в ней точечных систем. Именно:

*найти (быстро и, по возможности, более точно) «внешние» покоординатные оценки множества решений*

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \quad (3)$$

*образованного всеми решениями точечных систем  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ , или, иначе, оценить  $\min\{x_k \mid x \in \Sigma\}$  снизу и  $\max\{x_k \mid x \in \Sigma\}$  сверху для  $k = 1, 2, \dots, n$ .*

Часто её формулируют также в следующем виде:

*найти (быстро и, по возможности, более точно) объемлющий (внешний) интервал для множества решений интервальной линейной системы.* (4)

Задача (4) — это, по существу, интервальная форма хорошо известной задачи о чувствительности для линейной системы, когда и вариации параметров и оценки вариаций решения рассматриваются в интервальном виде. Она является одной из старейших и практически наиболее важных задач интервального анализа, а различным аспектам её решения посвящены сотни статей с начала 60-х годов и по настоящее время. Обширную, но далеко не исчерпывающую, информацию о ней вместе с библиографией работ читатель может найти в [1–6]. Мы будем называть задачу (4) *внешней задачей* для интервальной линейной системы (1), чтобы отличать её от других возможных постановок задач для интервальных систем уравнений (рассмотренных, к примеру, в [7–9]).

Среди наиболее важных теоретических результатов по этой задаче следует упомянуть недавние открытия, касающиеся вычислительной сложности решения (4) и некоторых родственных ей задач (см. [10, 11] и обширную библиографию ко второй работе). Было показано, что даже задача распознавания того, пусто или непусто множество решений  $\Sigma$ , в общем случае NP-трудна (труднорешаема). Далее, вычисление внешних покоординатных оценок для множества решений  $\Sigma$  с любой заданной абсолютной или относительной точностью также NP-трудная задача, как в общем случае, так и в некоторых практически важных частных ситуациях.

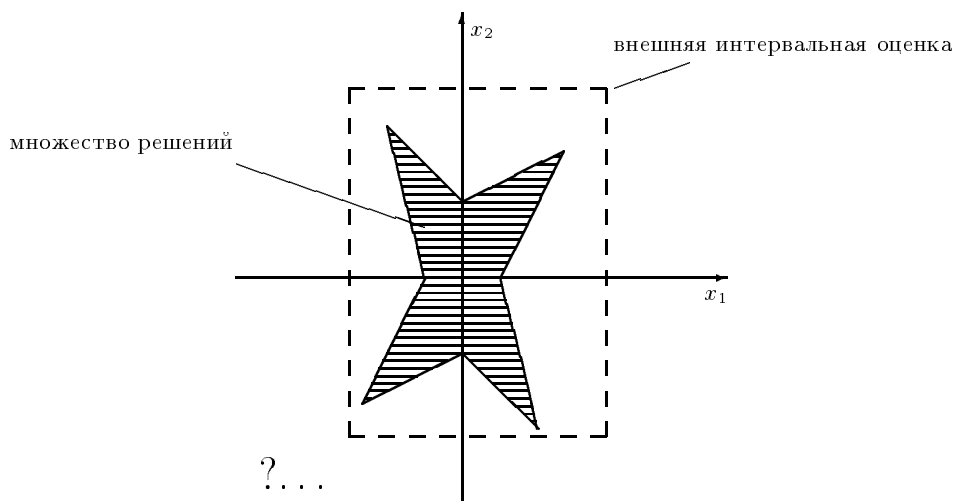


Рис. 1. «Внешняя задача» — это задача *внешнего* интервального оценивания множества решений, т. е. задача чувствительности системы в интервальной постановке

Множество решений  $\Sigma$  иногда называют также *объединённым множеством решений* интервальной линейной системы (1) [4, 5, 7–10] и обозначают  $\Sigma_{\exists\exists}$ . Расширенный термин не является излишеством, поскольку для интервальных систем  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  могут быть определены и другие множества решений ( $\Sigma_{\forall\exists}$ ,  $\Sigma_{\exists\forall}$ ,  $\Sigma_{\alpha\beta}$  и ещё большое количество других). Эти *обобщённые множества решений* для (1) возникают вполне естественно и имеют интересные и важные приложения в исследовании операций и теории принятия решений [8, 13, 14]. В этой работе мы не будем рассматривать их, и потому всюду ниже, имея в виду множество (3), мы для краткости говорим просто о *множестве решений* вместо более корректного полного термина «объединённое множество решений».

За прошедшие три с лишним десятилетия предложено немало хороших алгоритмов для решения задачи (4), так что естественно было бы ожидать угасания теоретического интереса к ней и поворота исследователей к тщательной практической реализации и доводке уже предложенных вычислительных схем. Тем не менее, в нашей работе мы собираемся представить некоторый свежий взгляд на предмет: для решения «внешней задачи» мы развиваем новый подход вместе с реализующим его численным алгоритмом, отличительными особенностями которых являются

- высокая вычислительная эффективность,
- хорошая адаптируемость к различным конкретным интервальным линейным системам,
- универсальность — основной численный алгоритм с равным успехом применим к задачам внутреннего интервального оценивания как множества

решений (3), так и других, обобщённых множеств решений для интервальной системы (1).

Предлагаемый нами новый подход к задаче (4) является дальнейшим развитием так называемого *алгебраического подхода*, в котором исходная постановка сводится к решению одного *точечного* (неинтервального) уравнения в евклидовом пространстве двойной размерности  $\mathbb{R}^{2n}$ . Алгебраический подход зарекомендовал себя как эффективный инструмент для решения задач внутреннего интервального оценивания различных множеств решений интервальных алгебраических уравнений [7, 8, 13–15]. Настало время распространить его и на «внешние задачи».

Мы конструируем специализированный алгоритм (субдифференциальный метод Ньютона), реализующий новый подход, представляем результаты численных экспериментов с ним. Они показывают, что полученная вычислительная методика совмещает исключительную вычислительную эффективность с высоким качеством оценивания множества решений, оказываясь конкурентом таким широко распространённым подходам, как интервальный метод Гаусса и процедура Хансена–Рона.

Всюду в этой работе мы предполагаем знакомство читателя с основными фактами интервального анализа; для введения в предмет мы рекомендуем, например, книги [1–4, 16]. Наша система обозначений следует, главным образом, тем неофициальным международным рекомендациям, которые были недавно выработаны в результате дискуссии среди специалистов по интервальному анализу и резюмированы в книге [16]. Именно, интервалы и интервальные объекты (векторы, матрицы) мы обозначаем жирным шрифтом (например,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , ...,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ), тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Подчёркивание и надчёркивание интервальных объектов означает взятие нижнего и верхнего концов интервала соответственно. Наконец, арифметические операции с интервальными величинами — это операции классической интервальной арифметики (см., например, [1–4, 16]).

## § 2. Основы алгебраического подхода

**Предложение 1.** Множество решений интервальной системы (1)

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

совпадает с множеством решений интервальной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{b}, \quad (5)$$

если квадратная интервальная матрица  $\mathbf{C}$  такова, что  $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная  $n \times n$ -матрица.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
& \text{Множество решений системы (5)} = \\
& = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \mathbf{C})(\exists b \in \mathbf{b})(x = Cx + b)\} = \\
& = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists(I - C) \in (I - \mathbf{C}))(\exists b \in \mathbf{b})((I - C)x = b)\} = \\
& = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in (I - (I - \mathbf{A}))) (\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} \quad (\text{где } A := I - C) = \\
& = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} = \\
& = \text{множество решений системы } \mathbf{Ax} = \mathbf{b},
\end{aligned}$$

поскольку если  $C \in \mathbf{C}$ , то  $(I - C) \in (I - \mathbf{C})$ . ■

**Замечание.** Равносильное сведение интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  к виду (5), описанное в предложении 1, не является единственно возможным. Ниже мы фиксируем его лишь для определённости; более подробно этот вопрос будет обсуждаться в § 7.

**Теорема 1 ([1, 17, 18]).** *Итерационный процесс*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k \geq 0,$$

сходится к единственной неподвижной точке  $\mathbf{x}^*$  уравнения (5) для любого начального вектора  $\mathbf{x}^{(0)}$  тогда и только тогда, когда спектральный радиус  $\rho(|\mathbf{C}|)$  матрицы  $|\mathbf{C}|$ , составленной из модулей элементов  $\mathbf{C}$ , меньше чем 1.

**Теорема 2 ([1, 17]).** Пусть  $\mathbf{C}$  — интервальная квадратная матрица, для которой  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$ . Тогда для неподвижной точки  $\mathbf{x}^*$  (которая существует и единственна в силу теоремы 1) уравнения  $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$  выполнено соотношение

$$\{(I - C)^{-1}b \mid C \in \mathbf{C}, b \in \mathbf{b}\} \subseteq \mathbf{x}^*,$$

т. е. неподвижная точка  $\mathbf{x}^*$  является внешней интервальной оценкой множества решений интервального уравнения  $x = Cx + b$ .

**Определение 1 ([19–21]).** Интервальный вектор называется *алгебраическим решением* интервального уравнения, если подстановка его в это уравнение и выполнение всех интервальных операций в соответствии с правилами интервальной арифметики приводят к равенству.

Понятие алгебраического решения соответствует обычному общематематическому пониманию решения уравнения, и выделение для него отдельного термина имеет скорее исторические причины. Дело в том, что для интервальных уравнений подобные решения долгое время считались малосодержательными и почти не изучались, а фраза «решение интервальной задачи» стала обозначать, главным образом, некоторую *оценку* того или иного *множества решений* задачи. В этом смысле рассматриваемая нами внешняя задача (4) является типичной интервальной постановкой.

Заметим, что фигурирующая в теоремах 1 и 2 неподвижная точка  $\mathbf{x}^*$  отображения  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b}$  является ничем иным, как *алгебраическим решением* интервального уравнения (5). Поэтому мы можем переформулировать

приведённые выше классические результаты в следующем модифицированном виде, который будет существенно использоваться в дальнейшем изложении.

**Теорема 3.** *Если интервальная квадратная матрица  $\mathbf{C}$  такова, что  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$ , то для любого  $\mathbf{b}$  алгебраическое решение интервального уравнения*

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (6)$$

*существует, единственно и является внешней интервальной оценкой множества решений этого интервального уравнения.*

В (6) и всюду далее мы намеренно обозначаем неизвестную переменную  $\mathbf{x}$  буквой жирного шрифта, чтобы подчеркнуть, что требуемое алгебраическое решение само является *интервалом* и должно удовлетворять уравнению (6) в смысле *интервальных арифметических операций*.

В чём смысл переформулировки хорошо известных результатов в виде теоремы 3? Дело в том, что утверждение теоремы 3, организованное как «чистая» теорема существования, помогает лучше осознать следующий принципиальный факт: *способ доказательства теоремы не обязательно должен совпадать с практическим способом нахождения решения основного уравнения (6)*.

Традиционные конструктивные доказательства теорем 1, 2, основанные на известной теореме Шрёдера о сжимающих отображениях, породили целый поток работ, посвящённых построению различных стационарных итерационных алгоритмов для (6). Но, вообще говоря, никто не обязывает нас ограничиваться при конструировании вычислительных подходов к решению (6) лишь стационарными сжатиями, тем более, что получающиеся при этом методы имеют довольно медленную сходимость. При построении конкретных процедур для нахождения алгебраического решения для (6) разработчик алгоритмов должен быть свободен в выборе и использовании любых других возможных приёмов и концепций (например, символьных преобразований). Единственным руководящим принципом должно при этом оставаться удовлетворение искомым решением уравнению (6) в смысле определения 1.

Одним из основных результатов нашей работы является развитие именно такого эффективного нестационарного итерационного алгоритма.

### § 3. Полная интервальная арифметика

К сожалению, свойства классической интервальной арифметики — основного инструмента интервального анализа — не благоприятствуют претворению в жизнь очерченной в конце предыдущего параграфа программы по нахождению алгебраических решений для уравнения (6).

*Интервальная арифметика* — это алгебраическая система  $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$ , носитель которой  $\mathbb{IR}$  — множество всех вещественных интервалов  $[x; \bar{x}]$ ,  $x \leq \bar{x}$ ,

а бинарные операции — сложение, вычитание, умножение и деление — определены «по представителям», т. е. в соответствии со следующим фундаментальным принципом:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{x \star y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \quad (7)$$

для всех интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , таких что  $(x \star y)$ ,  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ , имеет смысл для любого  $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$  [1–4]. Развёрнутое определение интервальных арифметических операций таково:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}], \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}], \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= [\min\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}\}; \max\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}\}], \\ \mathbf{x}/\mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot [1/\overline{\mathbf{y}}; 1/\underline{\mathbf{y}}] \text{ для } \mathbf{y} \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Алгебраические свойства интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  в целом плохи: большинство её элементов — все интервалы с ненулевой шириной — не имеют обратных по отношению к вышеопределённым операциям. Как следствие, во-первых, элементарные уравнения

$$\mathbf{a} + x = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$$

и им подобные не всегда разрешимы. Во-вторых, техника преобразований в  $\mathbb{IR}$  довольно бедна. Мы не имеем возможности даже переносить члены из одной части уравнения в другую и, из-за отсутствия полноценной дистрибутивности, приводить подобные члены.

Кроме того, порядковые свойства  $\mathbb{IR}$  также неудовлетворительны: она не является решёткой [22] относительно естественного упорядочения по включению  $\subseteq$ . Первая из операций

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &:= \inf_{\subseteq} \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = [\max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}; \min\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}] \\ &\quad (\text{взятие точной нижней грани относительно } \subseteq) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \vee \mathbf{y} &:= \sup_{\subseteq} \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = [\min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}; \max\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}] \\ &\quad (\text{взятие точной верхней грани относительно } \subseteq) \end{aligned} \quad (9)$$

не всегда выполнима в классической интервальной арифметике<sup>1</sup>.

В этих условиях естественно принять следующий план действий, предложенный С. П. Шарым [23]: нам следует расширить  $\mathbb{IR}$  до более широкой алгебраической системы (или, иначе, вложить  $\mathbb{IR}$  в более широкую алгебраическую систему), которая имела бы более хорошие алгебраические свойства, в которой была бы более богатой техника эквивалентных преобразований и более мощными аналитические средства. Затем мы ищем алгебраическое решение данного уравнения в этой более широкой алгебраической системе, а не

<sup>1</sup>Если  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  — обычные одномерные интервалы с непустым пересечением, то  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  и  $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$  являются просто  $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$  и  $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$  соответственно.

в обычной интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$ , так как можно надеяться, что эта модифицированная задача, в силу более благоприятных свойств объемлющей алгебраической системы, является более лёгкой. Но если полученный в результате этой процедуры интервальный вектор окажется лежащим в  $\mathbb{IR}$ , то он и будет искомым решением исходной задачи.

Как можно осуществить требуемое расширение классической интервальной арифметики? Здесь нам на выручку приходит абстрактная алгебра. С более общей точки зрения арифметика  $\mathbb{IR}$  является коммутативной полугруппой как относительно сложения, так и относительно умножения<sup>1</sup>. Известно (см., например, [24]), что всякая коммутативная полугруппа, удовлетворяющая так называемому «условию сокращения», может быть вложена в группу (или, что эквивалентно, расширена до группы), т. е. в действительно более богатую алгебраическую систему, в которой каждый элемент имеет обратный. В нашем случае интервальная арифметика как раз и является коммутативной полугруппой с условием сокращения относительно сложения, а относительно умножения полугруппу, удовлетворяющую условию сокращения, образуют интервалы, не содержащие нуля.

По счастью, все технические конструкции, необходимые для расширения интервальной арифметики в соответствии с вышеописанной программой были реализованы немецким исследователем Э. Каухером ещё в конце 70-х годов. В работах [25, 26] Каухер построил алгебраическую систему, названную им «интервальной арифметикой  $\mathbb{IR}$ », которая включает в себя классическую интервальную арифметику  $\mathbb{IR}$  как собственное подмножество и удовлетворяет всем нашим требованиям. Мы будем называть алгебраическую систему  $\mathbb{IR}$  *полной интервальной арифметикой* или, по имени её создателя, *интервальной арифметикой Каухера*. Подробное описание  $\mathbb{IR}$  можно найти, например, в [26, 27].

Элементами арифметики  $\mathbb{IR}$  являются пары вещественных чисел  $[\underline{x}; \bar{x}]$ , не обязательно связанных соотношением  $\underline{x} \leq \bar{x}$ . Следовательно,  $\mathbb{IR}$  получается присоединением *неправильных* интервалов  $[\underline{x}; \bar{x}]$ ,  $\underline{x} > \bar{x}$ , ко множеству  $\mathbb{IR} = \{[\underline{x}; \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$  *правильных* интервалов и вещественных чисел (отождествляемых с интервалами нулевой длины). Элементы арифметики Каухера и прочие объекты, образуемые из них, будут далее обозначаться буквами жирного шрифта, как и обычные интервалы.

Правильные и неправильные интервалы, две половинки  $\mathbb{IR}$ , меняются местами в результате отображения *дуализации*  $\text{dual}: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ , переворачивающего концы интервала, т. е. такого что

$$\text{dual } \mathbf{x} = [\bar{\mathbf{x}}; \underline{\mathbf{x}}].$$

Совершенно аналогично классической интервальной арифметике отношение «включения» определяется на полной интервальной арифметике так:

<sup>1</sup>Строго говоря, арифметика  $\mathbb{IR}$  является даже коммутативным *моноидом* относительно сложения и умножения, т. е. полугруппой с нейтральным элементом, но этот факт уже не столь важен для последующих рассмотрений.



$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \iff \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{y}} \ \& \ \bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{y}}. \quad (10)$$

Это определение делает арифметику Каухера  $\mathbb{IR}$  не просто решёткой, но даже условно полной решёткой [22] относительно порядка по включению, в отличие от  $\mathbb{R}$ .

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на  $\mathbb{IR}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &:= [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}; \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}], \\ \mu \cdot \mathbf{x} &:= \begin{cases} [\mu \underline{\mathbf{x}}; \mu \bar{\mathbf{x}}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \bar{\mathbf{x}}; \mu \underline{\mathbf{x}}] & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, каждый элемент  $\mathbf{x}$  из  $\mathbb{IR}$  имеет единственный обратный по сложению, обозначаемый через  $\text{орр } \mathbf{x}$ , и

$$\mathbf{x} + \text{орр } \mathbf{x} = 0 \implies \text{орр}[\underline{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}] = [-\underline{\mathbf{x}}; -\bar{\mathbf{x}}].$$

Непосредственно из этого факта следует, что относительно сложения  $\mathbb{IR}$  является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства  $\mathbb{R}^2$ . Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную сложению, т. е. внутреннее (алгебраическое) вычитание в  $\mathbb{IR}$ , через  $\ominus$ , так что

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} := \mathbf{x} + \text{орр } \mathbf{y}.$$

Ниже нам также будут полезны следующие дистрибутивные свойства сложения по отношению к решёточным операциям:

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{z}), \quad (11)$$

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} \vee \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \vee (\mathbf{x} + \mathbf{z}). \quad (12)$$

Заметим, что с помощью операции взятия максимума (9) определение (7) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigvee_{y \in \mathbf{y}} (x \star y), \quad \star \in \{+, -, \cdot, /\}. \quad (13)$$

Наиболее удивительным фактом, касающимся арифметики Каухера, является то, что в ней имеет место представление, обобщающее формулы (7) и (13). Именно,

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathbf{I}^{\mathbf{x}} \mathbf{I}^{\mathbf{y}} (x \star y), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{I}^{\mathbf{x}} := \begin{cases} \bigvee, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный,} \\ \bigwedge & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{— условная операция взятия экстремума по включению,}$$

$$\text{рго } \mathbf{x} := \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{x} & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{— правильная проекция интервала.}$$

Это представление выражает связь между результатом интервальной операции  $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$  и результатами точечных операций  $x \star y$  для  $x \in \text{рго } \mathbf{x}$  и  $y \in \text{рго } \mathbf{y}$ . Представление (14) можно даже взять за основу для определения арифметических операций в полной интервальной арифметике (см. [27]).

Для того чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в  $\mathbb{IR}$  следующие подмножества:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid (\underline{\mathbf{x}} > 0) \ \& \ (\overline{\mathbf{x}} > 0)\} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ \mathcal{Z} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{x}} \leq 0 \leq \overline{\mathbf{x}}\} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -\mathcal{P} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{x} \in \mathcal{P}\}, && \text{— неположительные интервалы,} \\ \text{dual } \mathcal{Z} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \text{dual } \mathbf{x} \in \mathcal{Z}\}, && \text{— интервалы, содержащиеся в нуле.} \end{aligned}$$

В целом  $\mathbb{IR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup -\mathcal{P} \cup \text{dual } \mathcal{Z}$ . Тогда умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано следующей таблицей Кэли [26]:

$\cdot$	$\mathbf{y} \in \mathcal{P}$	$\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$	$\mathbf{y} \in -\mathcal{P}$	$\mathbf{y} \in \text{dual } \mathcal{Z}$
$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$	$[\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}; \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}; \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$
$\mathbf{x} \in \mathcal{Z}$	$[\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\min\{\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}\}; \max\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}\}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}; \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	0
$\mathbf{x} \in -\mathcal{P}$	$[\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	$[\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}; \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}; \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$
$\mathbf{x} \in \text{dual } \mathcal{Z}$	$[\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}; \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	0	$[\overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}; \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\max\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}\}; \min\{\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}\}]$

Как видим, умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Например,  $[-1; 2] \cdot [5; -3] = 0$ . Интервальное умножение в арифметике Каухера оказывается коммутативным и ассоциативным [25–27], но группу по умножению в  $\mathbb{IR}$  образуют лишь интервалы  $[\underline{x}; \overline{x}]$  с  $\underline{x}\overline{x} > 0$ , поскольку «условие сокращения» не выполнено ни на каком более широком подмножестве  $\mathbb{IR}$ .

Выписанные выше явные формулы для умножения в полной интервальной арифметике являются довольно громоздкими и малообозримыми. В ряде случаев оказывается полезным прибегнуть к другим формулам для интервального умножения, которые были предложены А. В. Лакеевым в [28]. Напомним

**Определение 2 ([22]).** Для вещественного числа  $x$  величины

$$\begin{aligned} x^+ &:= \max\{x, 0\}, \\ x^- &:= \max\{-x, 0\} \end{aligned}$$

называются *положительной частью* и *отрицательной частью*  $x$  соответственно.

**Предложение 2 ([28]).** Для любых интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}$  справедливо

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\max\{\underline{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^+, \bar{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^-\} - \max\{\bar{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^-, \underline{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^+\}; \\ \max\{\bar{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^+, \underline{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^-\} - \max\{\underline{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^-, \bar{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^+\}].$$

Если один из интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  правильный, то

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^+ + \bar{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^- - \max\{\bar{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^-, \underline{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^+\}; \\ \max\{\bar{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^+, \underline{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^-\} - \underline{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^- - \bar{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^+]. \quad (15)$$

Эта формула не упрощается в случае, когда нам дополнительно известно, что оба интервала  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  правильные.

Если же один из интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  является правильным, а другой неправильным, то

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^+ + \bar{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^- - \bar{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^- - \underline{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^+; \bar{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^+ + \underline{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^- - \underline{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^- - \bar{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^+]. \quad (16)$$

Достоинство формул Лакеева — их глобальный характер. Они дают единое выражение для интервального произведения  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  на всей области определения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , тогда как представление через таблицу Кэли имеет кусочный характер. Это неудобно, к примеру, при исследовании дифференцируемости, вычислении производных и т. п.

Вычитание и деление в арифметике  $\mathbb{IR}$  определяются так же, как и в классической интервальной арифметике:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{y}, \\ \mathbf{x} / \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot [1/\bar{\mathbf{y}}; 1/\underline{\mathbf{y}}] \quad \text{для } 0 \notin \text{prg } \mathbf{y}.$$

Наконец, аналогично своим классическим предшественникам все операции полной интервальной арифметики являются *монотонными по включению*, т. е. относительно порядка (10):

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}', \mathbf{y} \subseteq \mathbf{y}' \implies \mathbf{x} * \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}' * \mathbf{y}' \quad \text{для любых } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR} \text{ и } * \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Взаимосвязь сложения и умножения в арифметике Каухера выражается следующими соотношениями:

$$\text{если } \mathbf{x} \text{ правильный, то } \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \text{ (субдистрибутивность),} \quad (17)$$

$$\text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный, то } \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \supseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \text{ (супердистрибутивность).} \quad (18)$$

Эти включения обращаются в точные равенства, в частности, если  $\mathbf{x}$  стягивается в точку, т. е.  $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$ .

Операции над векторами и матрицами в полной интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$  определяются так же, как и на  $\mathbb{IR}$ . Сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов. Если  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times l}$  и  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$ , то произведение матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$

есть матрица  $\mathbf{Z} = (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , такая что

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^l \mathbf{x}_{ik} \mathbf{y}_{kj}.$$

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц есть прямое произведение [22] порядков по включению на отдельных компонентах  $\mathbb{IR}$ . Следовательно, мы считаем, что

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \vee \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \wedge \mathbf{y}_n \end{pmatrix}.$$

Топология на интервальном пространстве  $\mathbb{IR}^n$  определяется стандартным способом, т. е. метрикой

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|, \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\|\}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n, \quad (19)$$

где  $\|\cdot\|$  — монотонная векторная норма на  $\mathbb{R}^n$  (для пространства  $\mathbb{IR}^n$  эта метрика совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как прямоугольными параллелепипедами в  $\mathbb{R}^n$ ). Все интервальные арифметические операции, матрично-векторные операции на  $\mathbb{IR}^n$ , а также операции  $\vee$ ,  $\wedge$ , dual и orr являются непрерывными в метрике (19) (см. [26]).

Нам понадобятся, кроме того, операции взятия середины интервала и его радиуса

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{x} &= \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}), \\ \text{rad } \mathbf{x} &= \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Как обычно, к интервальным векторам и матрицам эти операции будут применяться поэлементно.

## § 4. Погружение в линейное пространство

Результат предыдущих параграфов — сведение исходной «внешней задачи» (4) к задаче нахождения алгебраического решения интервального уравнения

$$\mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{b} = 0.$$

По существу, это традиционная математическая задача решения некоторого уравнения, и большая часть классического численного анализа посвящена решению подобных постановок. Но особенность нашей ситуации состоит в том, что основное множество  $\mathbb{IR}^n$ , на котором рассматривается решаемое уравнение, совсем не является линейным пространством: отсутствие дистрибутивности в интервальной арифметике ведёт к нарушению той аксиомы линейного

пространства, которая требует выполнения

$$(\mu + \nu) \mathbf{x} = \mu \mathbf{x} + \nu \mathbf{x}$$

для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$  и любых скаляров  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Таким образом, большинство из существующих подходов к исследованию операторных уравнений и к вычислению их решений не применимы напрямую к нашей задаче.

Более того, оставаясь в интервальном пространстве  $\mathbb{IR}^n$ , мы не сможем выполнить теоретический анализ ситуации и понять некоторые явления. Например, точечная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

является невырожденной (неособенной) в смысле классической линейной алгебры, но умножение на эту матрицу в  $\mathbb{IR}^2$  может занулить даже ненулевой вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-1; 1] \\ [1; -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В чём причина? Едва ли возможно обнаружить её внутри интервального пространства, которое является существенно нелинейным. Итак, имеется настоятельная потребность перенести наши рассуждения в некоторое *линейное пространство*, которое мы обозначим для общности через  $U$ . Предполагаем также, что на  $U$  задана некоторая топология, согласованная с линейной структурой.

С абстрактной математической точки зрения мы имеем два различных пространства — интервальное пространство  $\mathbb{IR}^n$  и линейное пространство  $U$  — на которых заданы совершенно разные структуры; каким образом возможно «перепрыгнуть» из первого во второе? Мы собираемся сделать это следующим способом, родственным обычной замене переменных.

Прежде всего нам следует построить некоторое отображение  $\iota: \mathbb{IR}^n \rightarrow U$  — вложение интервального пространства  $\mathbb{IR}^n$  в линейное пространство  $U$  — которое должно быть биективным (взаимно однозначным) для того, чтобы корректно восстанавливать интервальный прообраз по его образу в  $U$  и наоборот. Далее, нетрудно понять, что всякая биекция  $\iota: \mathbb{IR}^n \rightarrow U$  порождает также биекцию из множества всех отображений на  $\mathbb{IR}^n$  во множество всех отображений на  $U$ . Более точно, каждому  $\phi: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$  сопоставляется единственное отображение

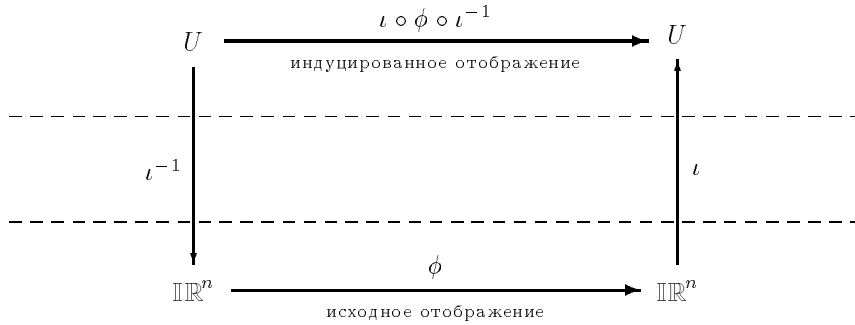
$$\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}: U \rightarrow U, \quad (21)$$

где  $\circ$  обозначает композицию отображений. Мы будем называть (21) *индуцированным отображением* для  $\phi$ . Наглядно ситуация может быть описана коммутативной диаграммой, изображённой на рис. 2.

Свойства отображений  $\phi$  и  $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$  оказываются тесно связанными, так что вместо исследования  $\phi$  можно исследовать индуцированное им отображение  $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ . Более того, если  $\iota$  выбрано таким, что  $\iota(0) = 0$ , то мы можем заменить задачу решения уравнения  $\mathbb{IR}^n$  на решение уравнения в линейном

пространстве  $U$ , придя к ситуации, более привычной для современного численного анализа. Основной вопрос, касающийся построения этого вложения интервального пространства, заключается в выборе разумного компромисса между его простотой и удобной формой индуцированных отображений (21).

линейные пространства



интервальные пространства

Рис. 2. Как погружение  $\iota$  порождает индуцированное отображение

Мы принимаем следующее

**Определение 3 ([7]).** Пусть  $U$  — линейное пространство. Взаимно однозначное отображение  $\iota: \mathbb{IR}^n \rightarrow U$  будем называть *погружением*  $\mathbb{IR}^n$  в  $U$ , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

$\iota$  является изоморфизмом аддитивных групп  $\mathbb{IR}^n$  и  $U$ ,

$\iota$  является гомеоморфизмом топологических пространств  $\mathbb{IR}^n$  и  $U$ .

Иными словами, мы требуем, чтобы погружение сохраняло аддитивную алгебраическую структуру и топологическую структуру интервального пространства  $\mathbb{IR}^n$ . Привлекая далее соображения размерности, нетрудно показать, что определением 3 линейное пространство  $U$  определяется однозначно:  $U$  должно быть евклидовым пространством  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Из определения 3 немедленно следует, что для любого погружения  $\iota: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  мы имеем

$$\begin{aligned}
 \iota(0_{\mathbb{IR}^n}) &= 0_{\mathbb{R}^{2n}}, \\
 \iota(\text{opp } \mathbf{x}) &= -\iota(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n,
 \end{aligned}$$

тогда как

$$\iota(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \iff \mathbf{x} \neq 0 \text{ в } \mathbb{IR}^n.$$

Кроме того, обратное погружению отображение  $\iota^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  также удовлетворяет обоим условиям из определения 3 и

$$\begin{aligned}\iota^{-1}(0_{\mathbb{R}^{2n}}) &= 0_{\mathbb{I}\mathbb{R}^n}, \\ \iota^{-1}(-x) &= \text{opp } \iota^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем заменить исходную задачу — задачу нахождения нулей отображения

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{b} —$$

на задачу решения уравнения

$$\Psi(x) = 0$$

в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  с индуцированным отображением

$$\Psi = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

определяемым как

$$\Psi(x) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(x) \ominus \iota^{-1}(x) + \mathbf{b}) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(x)) - x + \iota(\mathbf{b}).$$

**Определение 4.** Для интервального уравнения  $\psi(\mathbf{x}) = 0$  на  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  и фиксированного погружения  $\iota: \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  назовём  $\iota$ -индуцированным уравнением (или просто индуцированным уравнением) такое уравнение  $\Psi(x) = 0$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ , что  $\Psi = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}$ .

Таким образом, исходное интервальное уравнение

$$\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{22}$$

имеет алгебраическое решение  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда индуцированное уравнение

$$\Psi(x) = 0$$

имеет решение  $x^* \in \mathbb{R}^{2n}$ . При этом искомое алгебраическое интервальное решение  $\mathbf{x}^*$  для (22) однозначно восстанавливается из соотношения

$$\mathbf{x}^* = \iota^{-1}(x^*).$$

Цель настоящего подготовительного параграфа — исследование простейших свойств погружений, которые понадобятся нам в дальнейшем при изучении индуцированного уравнения, решение которого является нашим основным интересом.

**Предложение 3.** Если  $\iota: \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — погружение, а  $T$  — невырожденное линейное преобразование пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , то  $(T \circ \iota)$  также является погружением. Обратное, любое погружение  $\kappa: \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  может быть представлено в виде  $(T \circ \iota)$  для некоторого невырожденного линейного преобразования  $T: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

**Доказательство.** Первая часть предложения обосновывается тривиально. Чтобы доказать вторую часть, рассмотрим отображение  $\kappa^{-1} \circ \iota$ . Очевидно, что, будучи композицией двух изоморфизмов, оно является автоморфизмом

аддитивной группы  $\mathbb{R}^{2n}$ , т. е. невырожденным линейным преобразованием пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ . Мы можем взять  $T = \kappa^{-1} \circ \iota$ . ■

Значение предложения 3 — утверждение эквивалентности всех погружений  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ , удовлетворяющих определению 3. Любые два из них оказываются одинаковыми с точностью до невырожденного линейного преобразования  $\mathbb{R}^{2n}$ , и потому мы имеем возможность выбирать то или иное конкретное погружение из соображений удобства. Как и в нашей предыдущей работе [7], всюду в теоретических рассуждениях мы используем некоторое специальное погружение, которое вполне законно названо *стандартным погружением*.

**Определение 5.** Погружение  $\sigma: \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \dots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n), \quad (23)$$

т. е. идентифицирует взятые с противоположным знаком левые концы интервалов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  с первой, второй, ...,  $n$ -й компонентами вещественного  $2n$ -вектора, а правые концы интервалов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  идентифицирует с  $(n+1)$ -й, ...,  $2n$ -й компонентами вещественного  $2n$ -вектора соответственно, будем называть *стандартным погружением* интервального пространства  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Каждое погружение  $\iota: \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  естественно порождает на линейном пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  некоторый частичный порядок  $\sqsubseteq$  — образ порядка  $\subseteq$  на  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  при погружении  $\iota$ . Именно, для  $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$  станем считать, что

$$x \sqsubseteq y \text{ («} x \text{ не превосходит } y \text{») } \iff \iota^{-1}(x) \subseteq \iota^{-1}(y) \text{ в } \mathbb{I}\mathbb{R}^n. \quad (24)$$

Частичный порядок  $\sqsubseteq$  мы назовём *индуцированным частичным порядком* на  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Поскольку для любых  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^{2n}$  имеет место

$$\begin{aligned} x \sqsubseteq y, \alpha \geq 0 &\implies \alpha x \sqsubseteq \alpha y, \\ x \sqsubseteq y, u \sqsubseteq v &\implies x + u \sqsubseteq y + v, \end{aligned}$$

то частичный порядок  $\sqsubseteq$  согласован с линейной структурой на  $\mathbb{R}^{2n}$  [29]. Следовательно, он может быть задан эквивалентным образом путём указания *конуса положительных элементов*, т. е. множества  $K_{\sqsubseteq} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid 0 \sqsubseteq x\}$  [29–31]. Напомним, что *конусом* в линейном топологическом пространстве называется замкнутое выпуклое положительно инвариантное множество, не содержащее никакого одномерного подпространства<sup>1</sup>. Как известно, в частично упорядоченном линейном пространстве, где порядок согласован с линейной структурой, множество положительных элементов является конусом. И наоборот,

<sup>1</sup>При определении конуса некоторые авторы (например, [33]) опускают требования выпуклости, замкнутости и т. п. В нашей работе для удобства изложения мы придерживаемся того определения конуса, которое традиционно для школы М. А. Красносельского [30, 31].



задание конуса  $K_{\sqsubseteq}$  однозначно определяет частичное упорядочение пространства, при котором

$$x \sqsubseteq y \iff y - x \in K_{\sqsubseteq}.$$

Ясно, что конкретные формулы, определяющие порядок  $\sqsubseteq$ , зависят от вида погружения, но для стандартного погружения (23) они выглядят особенно просто. Нетрудно видеть, что при этом

$$x \sqsubseteq y \iff x \leq y \text{ в покомпонентном смысле,} \quad (25)$$

т. е. если  $x_i \leq y_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ . Соответственно конусом положительных элементов при стандартном погружении является множество

$$K_{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 2n\} \text{ —} \quad (26)$$

положительный ортант пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Итак, для стандартного погружения индуцированный частичный порядок на линейном пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  совпадает с обычным покомпонентным упорядочением! Этот факт является главным оправданием выбранного нами вида (23) для погружения, названного стандартным. Более того, вышеизложенное достаточно веско свидетельствует в пользу того, чтобы далее в теоретической части нашей работы рассматривать лишь стандартное погружение вида (23) и соответствующий покомпонентный порядок (25) на  $\mathbb{R}^{2n}$ . Но иногда на практике могут оказаться полезными и другие погружения.

**Следствие.** По самому определению (24) индуцированного порядка на  $\mathbb{R}^{2n}$  и принимая во внимание (25), легко вывести, что

$$\sigma\left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{x}_{\gamma}\right) = \sigma\left(\sup_{\gamma \in \Gamma} \sqsubseteq \mathbf{x}_{\gamma}\right) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \leq \sigma(\mathbf{x}_{\gamma}) \quad (27)$$

для любого ограниченного семейства интервальных векторов  $\{\mathbf{x}_{\gamma} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n \mid \gamma \in \Gamma\}$ ,  $\Gamma$  — некоторое индексное множество. Таким образом, стандартное погружение переводит супремумы по включению на интервальном пространстве  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  в супремумы относительно покомпонентного порядка на  $\mathbb{R}^{2n}$  (и инфимумы в инфимумы).

**Предложение 4.** Если  $\phi: \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  является оператором умножения на точечную матрицу, т. е. если

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$$

для некоторой  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q = (q_{ij})$ , то индуцированное отображение  $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$  является линейным преобразованием пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Для стандартного погружения  $\sigma$  матрица этого индуцированного линейного преобразования  $\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$  является блочной  $2n \times 2n$ -матрицей следующего вида:

$$\left( \begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right), \quad (28)$$

где  $n \times n$ -подматрицы  $Q^+ = (q_{ij}^+)$  и  $Q^- = (q_{ij}^-)$  — это положительная и отрицательная части  $Q$ , т. е. матрицы, образованные положительными и отрицательными частями элементов  $Q$  соответственно.

**Доказательство.** Первое утверждение немедленно вытекает из соотношения дистрибутивности

$$q \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q \cdot \mathbf{x} + q \cdot \mathbf{y},$$

которое справедливо для точечных  $q$ . Второе утверждение — это следствие правила умножения

$$q \cdot [\underline{x}; \bar{x}] = \begin{cases} [q\underline{x}; q\bar{x}], & \text{если } q \geq 0, \\ [q\bar{x}; q\underline{x}] & \text{иначе} \end{cases}$$

и определения (23). ■

Блочная  $2n \times 2n$ -матрица из предложения 4 настолько важна в развиваемой нами теории, что мы примем для неё специальные термин и обозначение.

**Определение 6.** Для точечной  $n \times n$ -матрицы  $Q$  мы полагаем

$$Q^\sigma := \left( \begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right) \quad (28)$$

и будем называть точечную  $2n \times 2n$ -матрицу  $Q^\sigma$  *сопутствующей матрицей* для  $Q$ .

Важная особенность сопутствующей матрицы  $Q^\sigma \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  состоит в том, что она всегда *неотрицательна*: такая матрица должна соответствовать  $\leq$ -изотонному оператору на  $\mathbb{R}^{2n}$ , индуцированному для изотонного по включению умножения на  $Q$  в интервальном пространстве  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ .

**Следствие (из предложения 4).** Привлекая определение индуцированного отображения, нетрудно заключить, что для любого  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  справедливо

$$\sigma(Q\sigma^{-1}(x)) = Q^\sigma x, \quad (29)$$

а для любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  имеет место

$$Q\mathbf{x} = \sigma^{-1}(Q^\sigma \sigma(\mathbf{x})). \quad (30)$$

Наглядно эти соотношения иллюстрируются рисунком 2.

Мы уже отмечали, что невырожденность (неособенность) точечной матрицы  $Q$  в смысле классической линейной алгебры не обязательно влечёт то, что соответствующий оператор умножения на  $Q$  в  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  даёт ненулевой результат. Иными словами, умножение на такую матрицу может и не быть обратимым оператором на  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ . Контрпримером является матрица (20). Чтобы различать подобные случаи, мы вводим следующее

**Определение 7 ([7]).** Будем говорить, что матрица  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является  *$i$ -невырожденной* ( *$i$ -неособенной*), если

$$Q\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = 0 \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n.$$

Иначе матрицу  $Q$  назовём  $\iota$ -вырожденной ( $\iota$ -особенной).

К примеру, единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

является  $\iota$ -невырожденной, тогда как матрица (20)  $\iota$ -вырожденная. Очевидно также, что если матрица вырождена в обычном смысле, то она тем более является  $\iota$ -вырожденной.

Как следствие соотношения (30) мы получаем

**Предложение 5.** *Точечная матрица  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является  $\iota$ -невырожденной тогда и только тогда, когда её сопутствующая матрица  $Q^\sigma \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  невырождена в обычном смысле, т. е. определитель  $Q^\sigma$  не равен нулю.*

В частности, все неотрицательные невырожденные матрицы  $\iota$ -невырождены.

Заметим, что теперь феномен матрицы (20) и ей подобных получает полное объяснение: хотя сама матрица (20) и невырождена, но умножение на неё в  $\mathbb{IR}^2$  после погружения соответствует умножению в линейном пространстве  $\mathbb{R}^4$  на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая имеет нулевой определитель!

**Следствие (из предложений 4 и 5).** Оператор умножения на точечную матрицу в  $\mathbb{IR}^n$

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} \quad \text{для } Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

обратим тогда и только тогда, когда матрица  $Q$  является  $\iota$ -невырожденной. При этом обратный оператор  $\phi^{-1}: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$  действует следующим образом:

$$\phi^{-1}(\mathbf{x}) = \sigma^{-1}((Q^\sigma)^{-1} \cdot \sigma(\mathbf{x})) \tag{31}$$

(сравните с (30)).

**Замечание.** Несмотря на то, что существует явная формула (31), оператор, который обратен оператору умножения на точечную  $n \times n$ -матрицу  $Q$  в  $\mathbb{IR}^n$ , в общем случае не может быть выражен через умножение на какую-нибудь матрицу в  $\mathbb{IR}^n$  (в частности, на матрицу  $Q^{-1}$ ). Последнее утверждение верно лишь тогда, когда матрица  $Q$  диагональна.

## § 5. Исследование индуцированного уравнения

Итак, в результате погружения исследование отображений  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  сведено нами к исследованию отображений  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  на обычном евклидовом пространстве, а решение интервальных уравнений заменено на решение индуцированных уравнений в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Учитывая особую роль стандартного погружения  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , мы всюду ниже под индуцированными отображениями и уравнениями будем иметь в виду именно  $\sigma$ -индуцированные отображения и уравнения на  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Следовательно, вместо исходной задачи — нахождения интервальных корней интервального уравнения

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 \quad (32)$$

мы будем заниматься решением индуцированного уравнения

$$\Psi(x) = 0 \quad (33)$$

в  $\mathbb{R}^{2n}$ , такого что

$$\Psi(x) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(x) + \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)) - x + \sigma(\mathbf{b}). \quad (34)$$

Отметим также, что нам не нужно доказывать отдельных результатов о существовании и единственности решений индуцированного уравнения (33)–(34). Фактически, ими уже являются теоремы 1–3 для исходного уравнения (6), равносильного (32).

**Предложение 6.** *Индуцированное отображение  $\Psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , определённое посредством (34), непрерывно.*

**Доказательство.** Отображение  $\psi: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{b}$ , нули которого мы ищем, непрерывно в силу непрерывности интервальных арифметических операций в  $\mathbb{R}$ . Погружение  $\sigma$ , как и обратное ему отображение  $\sigma^{-1}$ , непрерывны. ■

Обладает ли отображение  $\Psi$  дифференцируемостью, гладкостью и т. п.? К сожалению, глобально, т. е. на всей области определения, мы не можем похвастаться ни одним из этих свойств. Но взамен мы имеем нечто даже более привлекательное.

Для того чтобы двигаться дальше, необходимо напомнить следующее

**Определение 8** ([29, 32–34]). Пусть пространство  $\mathbb{R}^q$  упорядочено частичным порядком  $\preceq$ . Отображение  $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  называется *порядково выпуклым* относительно  $\preceq$ , если

$$F(\lambda y + (1 - \lambda)z) \preceq \lambda F(y) + (1 - \lambda)F(z)$$

для любых  $y, z \in \mathbb{R}^p$  и  $\lambda \in (0, 1)$ .

Будучи одними из ближайших родственников линейным и аффинным отображениям, выпуклые функции и операторы обладают, как известно, многими замечательными свойствами.

**Предложение 7.** *Индукцированное отображение  $\Psi(x)$ , определённое посредством (34), является порядково выпуклым относительно покомпонентного порядка  $\leq$  на  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

**Доказательство.** Для любых  $\lambda \in (0, 1)$  и  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , принимая во внимание субдистрибутивность (17), мы имеем

$$\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}) \subseteq \lambda \mathbf{C}\mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{C}\mathbf{v}.$$

Следовательно, в  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\sigma(\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v})) \leq \lambda \sigma(\mathbf{C}\mathbf{u}) + (1 - \lambda) \sigma(\mathbf{C}\mathbf{v}). \quad (35)$$

Отсюда можно заключить, что для таких  $y, z \in \mathbb{R}^{2n}$ , что  $y = \sigma(\mathbf{u})$ ,  $z = \sigma(\mathbf{v})$ , справедлива следующая цепочка преобразований:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda y + (1 - \lambda)z) &= \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(\lambda y + (1 - \lambda)z)) - (\lambda y + (1 - \lambda)z) + \sigma(\mathbf{b}) = \\ &= \sigma(\mathbf{C}(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v})) - (\lambda y + (1 - \lambda)z) + \sigma(\mathbf{b}) \leq \\ &\leq \lambda \sigma(\mathbf{C}\mathbf{u}) + (1 - \lambda) \sigma(\mathbf{C}\mathbf{v}) - (\lambda y + (1 - \lambda)z) + \sigma(\mathbf{b}) \stackrel{\text{в силу (35)}}{=} \\ &= \lambda(\sigma(\mathbf{C}\mathbf{u}) - y + \sigma(\mathbf{b})) + (1 - \lambda)(\sigma(\mathbf{C}\mathbf{v}) - z + \sigma(\mathbf{b})) = \\ &= \lambda \Psi(y) + (1 - \lambda) \Psi(z), \end{aligned}$$

которая и доказывает предложение. ■

**Определение 9 ([29, 33, 34]).** Пусть  $\mathbb{R}^q$  — частично упорядоченное пространство с порядком  $\preceq$ . *Субдифференциалом* отображения  $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  в точке  $x \in \mathbb{R}^p$  является множество  $\partial_{\preceq} F(x)$  всех линейных операторов  $D: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , таких что

$$D(y - x) \preceq F(y - x) \quad (36)$$

для любого  $y \in \mathbb{R}^p$ . Элементы множества  $\partial_{\preceq} F(x)$  — линейные операторы, удовлетворяющие (36), — называются *субградиентами* отображения  $F$  в точке  $x$ , а про само отображение  $F$  говорят, что оно *субдифференцируемо* в  $x$ , если его субдифференциал  $\partial_{\preceq} F(x)$  в этой точке непуст.

В общем случае понятие субдифференциала может быть определено и для отображений со значениями в общих линейных упорядоченных пространствах. Но проверка существования субдифференциала и его вычисление представляют собой при этом непростую задачу [29]. По счастью, в рассматриваемой нами конечномерной ситуации всё существенно упрощается. Как известно, имеет место следующий факт.

**Теорема 4 ([33, 34]).** *Выпуклая функция  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  всегда субдифференцируема во внутренних точках своей эффективной области определения (множества, на котором  $f$  определена и конечна).*

Выпуклость исследуемого отображения  $\Psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  относительно покомпонентного  $\leq$ -порядка равносильна тому, что все координатные компоненты — функционалы  $\Psi_i: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , — сами также выпуклы в обычном смысле. Вдобавок все  $\Psi_i(x)$  непрерывны и, значит, субдифференцируемы всюду на  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Следовательно, для любой точки  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  и каждого  $i = 1, 2, \dots, 2n$  существуют  $2n$ -векторы  $d_{(i)}$ , такие что

$$\Psi_i(x+v) - \Psi_i(x) \geq d_{(i)}^\top v \text{ для любых } v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Сконструируем из векторов  $d_{(i)}$  как из строк  $2n \times 2n$ -матрицу  $D = (d_{(1)}, d_{(2)}, \dots, d_{(2n)})^\top$ . Легко заключить, что, каков бы ни был  $v \in \mathbb{R}^{2n}$ , удовлетворяется неравенство

$$\Psi(x+v) - \Psi(x) \geq Dv,$$

и потому задаваемый матрицей  $D$  линейный оператор является субградиентом  $\Psi$  в  $x$ . Соответственно, субдифференциал  $\partial_{\leq} \Psi(x)$  непуст. Поскольку наши рассуждения никак не зависят от точки  $x$ , мы обосновали

**Предложение 8.** *Для индуцированного отображения  $\Psi$ , задаваемого посредством (34) и которое порядково выпукло в силу предложения 7,  $\leq$ -субдифференциал  $\partial_{\leq} \Psi(x)$  является непустым в любой точке  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ , т. е. отображение  $\Psi$  всюду субдифференцируемо.*

Для краткости мы будем обозначать этот субдифференциал просто  $\partial \Psi(x)$ , поскольку, кроме  $\leq$ , никакого другого порядка на  $\mathbb{R}^{2n}$  рассматривать не будем.

Если  $\Psi$  дифференцируема в точке  $x$ , то субдифференциал  $\partial \Psi(x)$  состоит из единственного элемента, именно из матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_{2n}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{2n}(x)}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}.$$

Но, как мы уже отмечали, отображение  $\Psi(x)$  не является всюду дифференцируемым. Чтобы указать явный вид субдифференциала  $\partial \Psi(x)$  в общем случае и вывести для него некоторые оценки, существенно используемые в дальнейшем, нам необходимо знать больше об исследуемом отображении  $\Psi$ .

**Определение 10 ([33, 34]).** *Надграфиком функции  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество*

$$\text{epi } f := \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \leq t\}.$$

*Полиэдральным выпуклым множеством в  $\mathbb{R}^p$  называется множество, которое можно представить как пересечение конечного числа замкнутых полупространств  $\mathbb{R}^p$ , т. е. как множество решений конечной системы линейных неравенств вида*

$$h_{(i)}^\top x \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $h_{(i)} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\xi_i \in \mathbb{R}$  и  $m$  — некоторый натуральный номер.

*Полиэдральная выпуклая функция* — это (выпуклая) функция, надграфик которой является полиэдральным множеством.

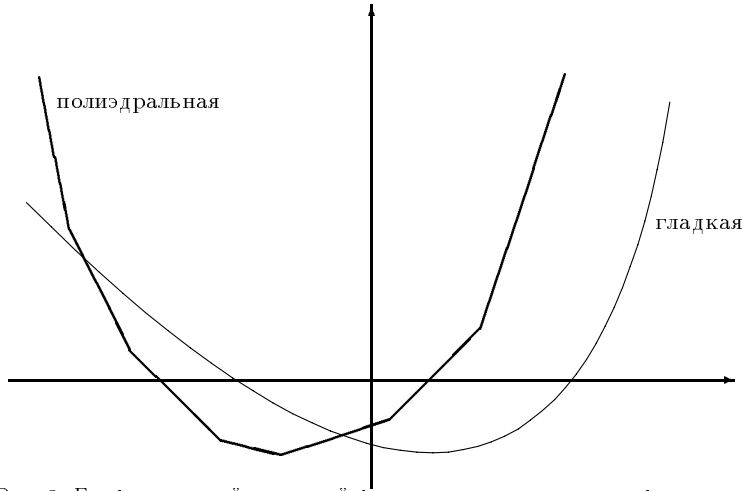


Рис. 3. График гладкой выпуклой функции в сравнении с графиком полиэдральной выпуклой функции: у полиэдральной он склеен из кусков гиперплоскостей

Подчеркнём, что полиэдральные функции являются простейшими среди выпуклых функций: по существу, полиэдральные функции можно характеризовать как почти всюду *локально аффинные* выпуклые функции, поскольку их графики составлены из кусков *гиперплоскостей*.

**Предложение 9.** Все компоненты  $\Psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , отображения  $\Psi$ , определённого посредством (34), — выпуклые полиэдральные функции.

**Доказательство.** Факт полиэдральности функций  $\Psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , мы получим как следствие некоторого специального представления для  $\Psi(x)$ . Его выводом мы сейчас и займёмся.

Прежде всего отметим, что для любой правильной  $n \times n$ -матрицы  $C$  и произвольного интервального  $n$ -вектора  $\mathbf{v}$  имеет место

$$C\mathbf{v} = \bigvee_{C \in C} C\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \bigvee_{C \in C} (C\mathbf{v})_1 \\ \vdots \\ \bigvee_{C \in C} (C\mathbf{v})_n \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Действительно, для правильных интервалов  $c_{ij}$  согласно представлению (14) можно написать

$$c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigvee_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j.$$

Используя свойство дистрибутивности операции  $\bigvee$  относительно сложения (12), мы получим для  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C}\mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}} c_{ij} \mathbf{v}_j = \bigvee_{c_{i1} \in \mathbf{c}_{i1}} \bigvee_{c_{i2} \in \mathbf{c}_{i2}} \dots \bigvee_{c_{in} \in \mathbf{c}_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{v}_j = \\
&= \bigvee_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{v}_j = \bigvee_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} (\mathbf{C}\mathbf{v})_i,
\end{aligned}$$

что и доказывает равенство (37).

Далее, принимая во внимание соотношения (27) и (29), заключаем

$$\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)) = \sigma\left(\bigvee_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \mathbf{C}\sigma^{-1}(x)\right) = \sup_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \leq \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)) = \sup_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \leq \mathbf{C}^\sigma x.$$

В целом для отображения  $\Psi$ , определённого посредством (34), справедливо следующее представление:

$$\Psi(x) = \sup_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \mathbf{C}^\sigma x - x + \sigma(\mathbf{b}). \quad (38)$$

В частности,

$$\Psi_i(x) = \left(\sup_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \mathbf{C}^\sigma x\right)_i - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i = \sup_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} (\mathbf{C}^\sigma x)_i - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i \quad (39)$$

для любого  $i = 1, 2, \dots, 2n$ .

Тот факт, что в представлениях (38) и (39) матрица  $\mathbf{C}^\sigma$  — это неотрицательная матрица специального блочного вида (28), имеет важное следствие. Именно,  $\sup(\mathbf{C}^\sigma x)_i$  может достигаться только в *концах* интервальных элементов  $c_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , или же дополнительно ещё в *нулях*, если соответствующие элементы  $c_{ij} \ni 0$ . В любом случае мы можем эквивалентным образом заменить интервал  $\mathbf{c}_{ij}$  на конечное число точек (две или три), по которым только и надлежит брать супремумы в (39). В целом получаем

$$\Psi_i(x) = \max_{\mathbf{C} \in \text{Vert } \mathbf{C}} (\mathbf{C}^\sigma x)_i - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i, \quad (40)$$

где  $\text{Vert } \mathbf{C}$  — это расширенная матрица вершин для  $\mathbf{C}$ , т. е. множество всех точечных  $n \times n$ -матриц, определяемое как

$$(\text{Vert } \mathbf{C})_{ij} := \begin{cases} \{\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}\}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{c}_{ij}, \\ \{\underline{c}_{ij}, 0, \bar{c}_{ij}\}, & \text{если } 0 \in \mathbf{c}_{ij}. \end{cases}$$

Поскольку  $\text{Vert } \mathbf{C}$  конечно, то из (40) следует, что каждая  $\Psi_i(x)$  есть максимум конечного числа линейных форм. Это и доказывает предложение. ■

**Определение 11 ([33, 34]).** *Односторонней производной* функции  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x$  по направлению  $y \in \mathbb{R}^p$  (или, коротко, *производной по направлению*) называется предел

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha}$$

в случае, если он существует.



**Определение 12** ([33, 34]). *Опорной функцией* выпуклого множества  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  называется функция  $\delta_W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что

$$\delta_W(x) := \sup\{x^\top w \mid w \in W\}.$$

**Теорема 5** ([33, § 23]). *Пусть  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая полиэдральная функция, конечная в точке  $x$ . Тогда  $f$  субдифференцируема в  $x$  и субдифференциал  $\partial f(x)$  есть выпуклое полиэдральное множество, причём его опорной функцией является производная  $f$  в  $x$  как функция направления.*

Наша ближайшая цель — воспользоваться приведёнными выше известными результатами для получения оценки субдифференциала исследуемого отображения  $\Psi$ , которая будет играть важную роль в доказательстве сходимости численного алгоритма § 6. Но предварительно нам необходимо ввести

**Определение 13.** *Положительной частью  $\mathbf{x}^+$  и отрицательной частью  $\mathbf{x}^-$  правильного интервала  $\mathbf{x}$  назовём следующие интервалы:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}, \\ \mathbf{x}^- &:= \{x^- \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{-x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}. \end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned} [-1; 2]^+ &= [0; 2], & [-1; 2]^- &= [0; 1], \\ [1; 2]^+ &= [1; 2], & [1; 2]^- &= [0; 0]. \end{aligned}$$

Можно рассматривать операции взятия положительной и отрицательной частей интервала как интервальные расширения функций  $(\cdot)^+$  и  $(\cdot)^-$ , введённых в определении 2. Как обычно, к интервальным векторам и матрицам эти операции будут применяться покомпонентным образом.

**Предложение 10.** *Для субдифференциала  $\partial\Psi(x)$  отображения  $\Psi$ , определённого в (34), справедлива следующая оценка:*

$$\partial\Psi(x) \subseteq \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^- & \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} - I. \tag{41}$$

**Доказательство.** Покажем сначала, что субдифференциал  $\partial\Psi(x)$  имеет внешнюю интервальную оценку в виде правильной  $2n \times 2n$ -матрицы, составленной из интервалов односторонних частных производных  $\Psi$ . Более точно

$$\partial\Psi(x) \subseteq \begin{pmatrix} \left[ \frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x_1^-}; \frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[ \frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x_{2n}^-}; \frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[ \frac{\partial\Psi_{2n}(x)}{\partial x_1^-}; \frac{\partial\Psi_{2n}(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[ \frac{\partial\Psi_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^-}; \frac{\partial\Psi_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \end{pmatrix}, \tag{42}$$

где

$$\frac{\partial\Psi_i(x)}{\partial x_j^-} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\Psi_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \Psi_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha}$$

и

$$\frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_j^\pm} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\Psi_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \Psi_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha}$$

односторонние частные производные компонент  $\Psi_i$  в точке  $x$  слева и справа по  $j$ -му координатному направлению.

Поскольку естественный покомпонентный порядок на  $\mathbb{R}^{2n}$  является прямым произведением порядков  $\leq$  на  $\mathbb{R}$ , то порядковый  $\leq$ -субдифференциал  $\partial \Psi(x)$  является прямым произведением субдифференциалов  $\partial \Psi_i(x)$  отдельных компонент  $\Psi_i: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , для каждой из которых мы можем воспользоваться теоремой 5.

Далее, из определения опорной функции следует неравенство

$$\frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial y} \geq \{y^\top d \mid d \in \partial \Psi_i(x)\}. \quad (43)$$

Последовательно полагая  $y$  равным вектору, имеющему  $j$ -ю компоненту  $-1$  или  $1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , а остальные нули, получим из (43) включение

$$\partial \Psi_i(x) \subseteq \left( \left[ \frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_1^-}; \frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_1^+} \right], \dots, \left[ \frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_{2n}^-}; \frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \right),$$

равносильное (42).

Теперь можно перейти собственно к выводу оценки (41). Для удобства условимся писать  $\pm$  вместо каждого отдельного из знаков  $+$  и  $-$ . В силу представления (40)

$$\frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_j^\pm} = \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} (C \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sigma x)_i - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i) = \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} (C \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sigma x)_i) - \delta_{ij}, \quad (44)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Воспользуемся теперь известным правилом дифференцирования функции максимума (см., например, [35, § III.2]):

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} (C \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sigma x)_i) = \text{ij-й элемент той матрицы } C^\sigma, \text{ на которой достигается рассматриваемый } \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C^\sigma x)_i. \quad (45)$$

В целом, объединяя (28), (44) и (45), мы придём к следующему общему виду матрицы производных по направлению:

$$\left( \frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial x_j^\pm} \right)_{i,j=1}^{2n} = \begin{pmatrix} (C')^+ & (C')^- \\ (C'')^- & (C'')^+ \end{pmatrix} - I,$$

где  $C', C'' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C', C'' \in \text{Vert } \mathbf{C}$ . Следовательно, с учётом включения (42) действительно приходим к доказываемой оценке (41).  $\blacksquare$

Наконец, в заключение этого параграфа мы опишем методику вычисления субдифференциала  $\partial\Psi(x)$ , необходимую при практической реализации развиваемого ниже субдифференциального метода Ньютона. Как и следовало ожидать, субдифференциал  $\partial\Psi(x)$ , вообще говоря, не совпадает с интервальной матрицей из правой части (42), образованной интервалами односторонних частных производных. Для некоторых интервальных матриц  $\mathbf{C}$  равенство на месте включения (42) может не выполняться даже на множестве аргументов  $x$  ненулевой меры. Тем не менее нам удаётся в общем случае выписать явный вид субдифференциала  $\partial\Psi(x)$ .

Вспомним определение стандартного погружения: для интервального вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$

$$\begin{aligned} (\sigma(\mathbf{x}))_i &= -\underline{x}_i, & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ (\sigma(\mathbf{x}))_i &= \overline{x}_i, & \text{если } i \in \{n+1, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Обозначая через  $e_i$  вектор, имеющий  $i$ -ю компоненту 1, а остальные нули, получим, следовательно,

$$\begin{aligned} \partial\Psi_i(x) &= \partial((\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)))_i - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i) = \\ &= \partial\left(-\sum_{j=1}^n \underline{c_{ij}}[-x_j; x_{j+n}] - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i\right) = -\partial\sum_{j=1}^n \underline{c_{ij}}[-x_j; x_{j+n}] - e_i = \\ &= -\sum_{j=1}^n \partial(\underline{c_{ij}}[-x_j; x_{j+n}]) - e_i \quad \text{для } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \partial\Psi_i(x) &= \partial((\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)))_i - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i) = \\ &= \partial\left(\sum_{j=1}^n \overline{c_{ij}}[-x_j; x_{j+n}] - x_i + (\sigma(\mathbf{b}))_i\right) = \partial\sum_{j=1}^n \overline{c_{ij}}[-x_j; x_{j+n}] - e_i = \\ &= \sum_{j=1}^n \partial(\overline{c_{ij}}[-x_j; x_{j+n}]) - e_i \quad \text{для } i \in \{n+1, \dots, 2n\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, вычисление субдифференциала  $\partial\Psi_i(x)$  сводится к вычислению субдифференциалов простейших отображений  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  следующих двух видов:

$$\begin{aligned} (x_j, x_{i+n}) &\mapsto \underline{c_{ij}} \cdot [-x_j; x_{j+n}], \\ (x_j, x_{j+n}) &\mapsto \overline{c_{ij}} \cdot [-x_j; x_{j+n}], \end{aligned}$$

где  $c_{ij}$  — некоторые правильные интервалы (здесь и ниже, чтобы не загромождать изложение, мы не выписываем «немые» компоненты аргумента  $x$ , никак не влияющие на значения этих отображений).

Воспользовавшись формулой Лакеева (15) и тем обстоятельством, что  $(-x)^- = x^+$  и  $(-x)^+ = x^-$ , получим в свою очередь

$$\partial(\underline{c}_{ij}[-x_j; x_{j+n}]) = \underline{c}_{ij}^+ \partial(x_j^-) + \overline{c}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^-) - \partial(\max\{\overline{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\}), \quad (48)$$

$$\partial(\overline{c}_{ij}[-x_j; x_{j+n}]) = \partial(\max\{\overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\}) - \underline{c}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^-) - \overline{c}_{ij}^- \partial(x_j^-). \quad (49)$$

Известно, что субдифференциал функции максимума в некоторой точке есть замыкание выпуклой оболочки объединения субдифференциалов тех функций, на которых рассматриваемый максимум достигается в данной точке (см., например, [33, 34]). Из определений положительной и отрицательной частей числа непосредственно следует, что

$$\partial(x_j^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([0; 1], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (1, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases} \quad \partial(x_j^-) = \begin{cases} (-1, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([-1; 0], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_j > 0 \end{cases} \quad (50)$$

и

$$\partial(x_{j+n}^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [0; 1]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 1), & \text{если } x_{j+n} > 0, \end{cases} \quad \partial(x_{j+n}^-) = \begin{cases} (0, -1), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [-1; 0]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_{j+n} > 0. \end{cases} \quad (51)$$

Таким образом, вычисление первых двух слагаемых в выражении (48) и последних двух слагаемых в (49) не представляет трудностей.

Вычисление оставшихся членов сумм (48) и (49) требует предварительного нахождения и сравнения значений  $\overline{c}_{ij}^+ x_j^+$  и  $\underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$ ,  $\overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+$  и  $\underline{c}_{ij}^- x_j^+$  соответственно. Но величины  $\underline{c}_{ij}^-$ ,  $\overline{c}_{ij}^+$ ,  $x_j^+$ ,  $x_{j+n}^+$  все неотрицательны, и потому, например, из неравенства  $\overline{c}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$  следует  $x_j^+ > 0$ , так что  $\partial(x_j^+) = 1$ . Аналогично,

$$\begin{aligned} \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+ &\implies \partial(x_{j+n}^+) = 1, \\ \overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{c}_{ij}^- x_j^+ &\implies \partial(x_{j+n}^+) = 1, \\ \overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{c}_{ij}^- x_j^+ &\implies \partial(x_j^+) = 1. \end{aligned}$$

С учётом выписанных равенств мы можем заключить, что

$$\partial(\max\{\overline{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\}) = \begin{cases} (\overline{c}_{ij}^+, 0), & \text{если } \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ \text{выпуклая оболочка} & \text{если } \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ \overline{c}_{ij}^+ \partial(x_j^+) \text{ и } \underline{c}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+), & \\ (0, \underline{c}_{ij}^-), & \text{если } \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+ \end{cases} \quad (52)$$

и

$$\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\}) = \begin{cases} (0, \bar{c}_{ij}^+), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{c}_{ij}^- x_j^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \bar{c}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+) \text{ и } \underline{c}_{ij}^- \partial(x_j^+), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{c}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{c}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (53)$$

Остаётся лишь уточнить вид искомым субдифференциалов (52) и (53) в точках, где достигаются равенства  $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$  и  $\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+$ . Разбор всех возможных ситуаций является в этих случае несложным, хотя и довольно хлопотным делом. Например, различные конфигурации субдифференциала  $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$  изображены на рис. 4. Похоже выглядит и  $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\})$ .

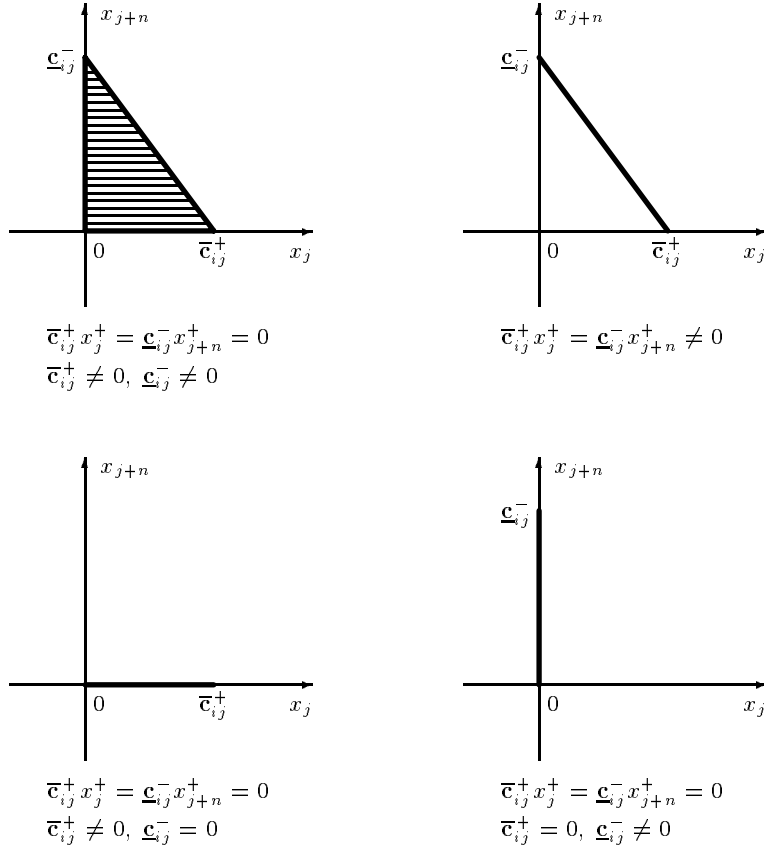


Рис. 4. Различные конфигурации субдифференциала  $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$  в точках, где  $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$

В действительности нам нужно немного: вычислительная схема субдифференциального метода Ньютона, развиваемого в следующем параграфе, требует нахождения какого-нибудь одного (безразлично, какого именно) субградиента отображения  $\Psi(x)$ , а для этого нам вполне достаточно предъявить по единственному субградиенту для функций

$$\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\}, \quad \max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\}.$$

Соответственно, нам нужна только одна какая-нибудь точка выпуклой оболочки  $\bar{c}_{ij}^+ \partial(x_j^+)$  и  $\underline{c}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+)$  при  $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$  и одна какая-нибудь точка выпуклой оболочки  $\bar{c}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+)$  и  $\underline{c}_{ij}^- \partial(x_j^+)$  при  $\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+$ . Нетрудно понять, что в первом случае такой точкой может служить, например,  $(\frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^+, \frac{1}{2}\underline{c}_{ij}^-)$ , а во втором —  $(\frac{1}{2}\underline{c}_{ij}^-, \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^+)$  (см. рис. 4).

В целом,

$$\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\}) \ni \begin{cases} (\bar{c}_{ij}^+, 0), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (\frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^+, \frac{1}{2}\underline{c}_{ij}^-), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{c}_{ij}^-), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (54)$$

$$\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\}) \ni \begin{cases} (0, \bar{c}_{ij}^+), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{c}_{ij}^- x_j^+, \\ (\frac{1}{2}\underline{c}_{ij}^-, \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^+), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{c}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{c}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (55)$$

Практически вычисление искомого субградиента отображения  $\Psi(x)$  может быть выполнено одновременно с вычислением его значений с опорой на формулы (46)–(51), (54) и (55).

## § 6. Алгоритм

Для решения уравнений (33)–(34) в объемлющем линейном пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  мы предлагаем следующий итерационный

### Алгоритм

(субдифференциальный метод Ньютона  
с особым начальным приближением)

В качестве начального вектора  $x^{(0)}$  берём решение «средней» системы

$$(I - (\text{mid } \mathbf{C})^\sigma)x = \sigma(\mathbf{b}).$$

Если  $k$ -е приближение  $x^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент  $D^{(k)} \in \partial\Psi(x^{(k)})$  и полагаем

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - (D^{(k)})^{-1}(\Psi(x^{(k)})).$$

Наш вычислительный опыт свидетельствует о том, что при сходимости этот алгоритм даёт *точное* решение уравнения за небольшое конечное число итераций, которое, как правило, не превосходит размерности  $n$  системы. Уместно также отметить, что этот алгоритм в точности совпадает с тем, что использовался в работе [7] для нахождения *внутренних* интервальных оценок множества решений интервальных линейных систем. Единственное отличие состоит в том, что в [7] мы применяли субдифференциальный метод Ньютона для вычисления алгебраического решения уравнения  $\mathbf{Ax} = \text{dual } \mathbf{b}$  (которое, по существу, эквивалентно  $\text{dual } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ).

Полное и всеобъемлющее исследование субдифференциального метода Ньютона выходит за рамки настоящей работы, и ниже мы дадим, основываясь на стандартной технике (см., например, [32]), доказательство локальной теоремы сходимости. Её утверждение сводится к следующему.

**Теорема 6.** *Если правильная интервальная матрица  $\mathbf{C}$  является достаточно узкой и все точечные  $2n \times 2n$ -матрицы  $S$ , удовлетворяющие*

$$S \in \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^- & \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} - I,$$

*являются невырожденными, то алгоритм сходится к  $\sigma(\mathbf{x}^*)$ , где  $\mathbf{x}^*$  — алгебраическое решение основной системы (6).*

**Доказательство.** Уточним, что имеется в виду под «достаточной узостью» интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ . Мы потребуем, чтобы

замыкание выпуклой оболочки множества

$$\bigcup \left\{ S^{-1}K_{\leq} \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^- & \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} - I \right\}, \quad (56)$$

где  $S^{-1}K_{\leq}$  обозначает прообраз конуса положительных элементов (26) при линейном преобразовании  $S$ , само является некоторым конусом в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Это осмысленное условие. Если матрица  $\mathbf{C}$  имеет нулевую ширину, т. е.  $\mathbf{C} = C$ , то  $(C^\sigma)^{-1}K_{\leq}$ , как прообраз конуса при невырожденном линейном преобразовании, в самом деле является конусом. Если же невырожденные  $2n \times 2n$ -матрицы  $S'$ ,  $S''$  «достаточно близки» друг к другу, то близки также и конусы  $(S')^{-1}K_{\leq}$  и  $(S'')^{-1}K_{\leq}$ , и их выпуклая оболочка всё ещё является конусом. Следовательно, условие (56) в некотором смысле действительно отражает «узость» интервальной матрицы  $\mathbf{C}$ .

Итак, пусть множество (56) — некоторый конус, который мы будем обозначать  $K_{\triangleleft}$ . Тогда он определяет некоторый частичный порядок  $\triangleleft$  на  $\mathbb{R}^{2n}$ . Мы полагаем

$$x \triangleleft y \iff x - y \in K_{\triangleleft}.$$

Основная идея нашего доказательства — продемонстрировать то, что последовательность приближений, порождённая алгоритмом является *монотон-*

но невозрастающей и ограниченной снизу относительно этого специальным образом сконструированного порядка  $\leq$ .

Начнём с того, что специальный выбор начального приближения  $x^{(0)}$  в алгоритме влечёт следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \Psi(x^{(0)}) &= \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \sigma(\mathbf{b}) \geq \\ &\geq \sigma(\text{mid } \mathbf{C})\sigma^{-1}(x^{(0)}) - x^{(0)} + \sigma(\mathbf{b}) \stackrel{\text{в силу монотонности по включению}}{=} \\ &= (\text{mid } \mathbf{C})^\sigma x^{(0)} - x^{(0)} + \sigma(\mathbf{b}) \stackrel{\text{в силу свойства (29)}}{=} \\ &= ((\text{mid } \mathbf{C})^\sigma - I)x^{(0)} + \sigma(\mathbf{b}) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Psi(x^{(0)}) \geq 0.$$

Далее, по самому определению субдифференциала

$$\Psi(x^{(k+1)}) \geq \Psi(x^{(k)}) + D^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

для  $D^{(k)} \in \partial\Psi(x^{(k)})$  и любых  $k = 0, 1, 2, \dots$ , тогда как по построению алгоритма

$$D^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\Psi(x^{(k)}). \quad (57)$$

Следовательно, по индукции мы можем заключить

$$\Psi(x^{(k)}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (58)$$

Что стоит за неравенством (58)? Вспомним представление (40): для каждого  $k$  имеет место

$$\Psi(x^{(k)}) = \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} C^\sigma x^{(k)} - x^{(k)} + \sigma(\mathbf{b}) \geq 0,$$

откуда

$$S^{(k)}x^{(k)} + \sigma(\mathbf{b}) \in K_{\leq}$$

для некоторой матрицы

$$S^{(k)} \in \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^- & \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} - I,$$

на которой достигается  $(\max C^\sigma x^{(k)} - x^{(k)})$ .

Так как матрица  $S^{(k)}$  по условию теоремы невырождена, последнее равносильно

$$x^{(k)} + (S^{(k)})^{-1}\sigma(\mathbf{b}) \in (S^{(k)})^{-1}K_{\leq} \subseteq K_{\leq},$$

в то время как это включение означает не что иное как

$$x^{(k)} \supseteq -(S^{(k)})^{-1}\sigma(\mathbf{b}).$$

Если мы положим

$$\beta = \inf_{\leq} \left\{ -S^{-1}\sigma(\mathbf{b}) \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^- & \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} - I \right\},$$



то тогда всегда  $x^{(k)} \succeq \beta$ , т. е. последовательность  $\{x^{(k)}\}$  оказывается и в самом деле  $\preceq$ -ограниченной снизу.

Другой важный момент доказательства: последовательность  $\{x^{(k)}\}$ , порождённая рассматриваемым алгоритмом, монотонно невозрастающая относительно порядка  $\preceq$ , т. е.

$$x^{(k)} \succeq x^{(k+1)} \quad (59)$$

для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$

Действительно, комбинируя (57) и (58), нетрудно получить

$$D^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \preceq 0.$$

Как мы могли видеть, для всех  $D^{(k)}$  имеют место включения (41):

$$D^{(k)} \in \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}^- \\ \mathbf{C}^- & \mathbf{C}^+ \end{pmatrix} - I.$$

Отсюда, с учётом (56), следует (59).

Мы доказали, таким образом, что

$$x^{(k)} \succeq x^{(k+1)} \succeq \beta. \quad (60)$$

В общем случае связь между порядком и топологией в частично упорядоченном линейном топологическом пространстве может быть весьма сложной, но, к счастью, в конечномерном пространстве ситуация решительно упрощается: любая последовательность, монотонная и ограниченная относительно частичного порядка, согласованного с линейной структурой пространства, всегда имеет и топологический предел<sup>1</sup>. Следовательно, из (60) мы можем заключить о существовании некоторого предела  $x^*$  последовательности  $\{x^{(k)}\}$ , порождаемой алгоритмом. Значение этого предела найдём, решая уравнение для неподвижной точки

$$x^* = x^* - (D^*)^{-1}(\Psi(x^*)),$$

где матрица  $D^* \in \partial\Psi(x^*)$  должна быть невырожденна. Итак,  $\Psi(x^*) = 0$ . ■

## § 7. Модификации алгебраического подхода

Каково положение развиваемого нами алгебраического подхода среди других методов решения «внешней задачи» (4)? Алгебраический подход наследует хорошее качество внешнего оценивания от интервальных итерационных схем, в то время как его вычислительная сложность почти такая же, как и конечных прямых алгоритмов. В целом, как нам представляется, алгебраический подход, соответствующим образом развитый и модифицированный, может служить эффективным средством для вычисления хороших внешних оценок для достаточно общих интервальных линейных систем. Цель настоящего

<sup>1</sup>Это факт часто формулируют в следующем эквивалентном виде: в конечномерном пространстве всякий конус является *правильным* [30, 31].

параграфа — набросать краткую схему дальнейшего возможного развития алгебраического подхода.

**Предложение 11.** *Множество решений интервальной системы*

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

*совпадает со множеством решений интервальной системы*

$$\mathbf{G}x = (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})x + \mathbf{b} \quad (61)$$

*для любой правильной интервальной матрицы  $\mathbf{G}$  тех же размеров, что и  $\mathbf{A}$ , и такой, что  $\text{rad } \mathbf{G} \leq \text{rad } \mathbf{A}$ .*

**Доказательство.** В качестве дополнения к формулировке предложения 11 отметим, что интервальная матрица  $(\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})$  является правильной тогда и только тогда, когда  $\text{rad } \mathbf{G} \leq \text{rad } \mathbf{A}$ .

Мы имеем

$$\begin{aligned} & \text{множество решений системы (61)} = \\ & = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists G \in \mathbf{G})(\exists H \in (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A}))(\exists b \in \mathbf{b})(Gx = Hx + b)\} = \\ & = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists G \in \mathbf{G})(\exists H \in (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A}))(\exists b \in \mathbf{b})((G - H)x = b)\} = \\ & = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{G} - (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A}))(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} = \\ & = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} = \\ & = \text{множество решений системы } \mathbf{A}x = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

поскольку если  $G \in \mathbf{G}$  и  $H \in (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})$ , то  $(G - H) \in \mathbf{G} - (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}$ . ■

Теперь основная идея алгебраического подхода может быть применена к уравнению (61), а не к (6). Пусть отображение  $\Gamma: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$  действует следующим образом:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad (62)$$

т. е. является умножением на матрицу  $\mathbf{G}$ , и существует обратное отображение  $\Gamma^{-1}: \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ . Тогда, если отображение

$$\mathbf{x} \mapsto \Gamma^{-1}((\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b})$$

липшицево непрерывное, оператор Липшица для которого есть сжатие пространства  $\mathbb{IR}^n$ , то алгебраическое решение уравнения

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (63)$$

является также решением «внешней задачи» (4). Соответствующий общий результат был доказан в несколько других терминах ещё Г. Алефельдом и Ю. Херцбергером [1, глава 11, следствие 6]. Далее, для вычисления искомого алгебраического решения мы можем воспользоваться эквивалентными преобразованиями (в арифметике Каухера), погружением уравнения в  $\mathbb{R}^{2n}$ , а также различными численными алгоритмами, отличными от традиционных

стационарных сжатий, т. е. всей той техникой, основы которой мы заложили в § 3–6.

Постараемся пояснить, в чём же преимущества модифицированного уравнения (63) в сравнении с исходным уравнением (6). В простейшем уравнении (6), на примере которого мы развивали алгебраический подход, оба оператора  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  являлись тождественными. Но теперь посредством подходящего выбора  $\mathbf{G}$  мы можем сделать так, чтобы оператор Липшица композиции  $\Gamma^{-1}$  и умножения на  $(\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})$  имел меньший спектральный радиус, чем у  $|I - \mathbf{A}|$ , как это было для простейшего уравнения (6). Тогда, во-первых, если алгебраический подход не мог быть применён к уравнению

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (6)$$

то мы можем надеяться, что после удачного преобразования результирующее уравнение (63) будет иметь сжимающий оператор Липшица. И, во-вторых, даже если  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$  и алгебраический подход был применим к простейшему уравнению (6), то ширина его неподвижной точки, как показано различными исследователями (например, в [17]), решающим образом зависит от  $\|\mathbf{C}\|$ . Чем меньше  $\|\mathbf{C}\|$ , тем лучшую, при прочих равных условиях, внешнюю интервальную оценку множества решений мы получаем.

Отметим теперь, что в (63) нам имеет смысл ограничиться отщеплением лишь *точных* (неинтервальных) матриц  $\mathbf{G}$  от  $\mathbf{A}$ , т. е. когда  $\mathbf{G} = G$ . Причины этого шага довольно весомы:

- для решения основного уравнения (63) мы намереваемся воспользоваться субдифференциальным методом Ньютона, который требует выпуклости индуцированного отображения  $\Psi = \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1}$ , соответствующего

$$\psi(\mathbf{x}) = (\text{dual } \mathbf{G} - \mathbf{A})\mathbf{x} \ominus \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Но проследивая цепочку преобразований из доказательства предложения 7, нетрудно убедиться в том, что желаемая выпуклость сохранится лишь тогда, когда матрица  $\mathbf{G}$  является точечной;

- для точечной матрицы  $\mathbf{G}$  вопрос обратимости отображения (62), который является центральным для разрешимости неявного соотношения (63), может быть исследован просто и до конца, а обратное отображение легко реализуется численно. Как было обнаружено в § 4, отображение (62) с  $\mathbf{G} = G$  обратимо тогда и только тогда, когда матрица  $G$  является  $\iota$ -невырожденной, а обратное отображение  $\Gamma^{-1}$  определяется при этом формулой (31).

Итак, будем считать, что  $\mathbf{G} = G$  —  $\iota$ -невырожденная точечная матрица, чтобы наверняка обеспечить существование обратной к (62) функции. «Внешняя задача» для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  сводится при этом к нахождению алгебраического решения уравнения

$$G\mathbf{x} = (G - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (64)$$

В рассматриваемой ситуации оператор  $\Gamma^{-1}$ , будучи обратным к линейному отображению, сам также линейный, так что уравнение (64) равносильно

$$\mathbf{x} = \Gamma^{-1}((G - \mathbf{A})\mathbf{x}) + \Gamma^{-1}(\mathbf{b}).$$

Каким образом можно оптимизировать выбор отщепляемой матрицы  $G$ ? Это явится предметом нашей последующей работы.

## § 8. Вычислительные эксперименты

В этом параграфе мы приводим результаты численных экспериментов на РС/АТ 486, выполненных с субдифференциальным методом Ньютона, реализующим алгебраический подход к внешней задаче для интервальных линейных систем. Термин «алгебраический подход» мы используем для обозначения его простейшей модифицированной версии, описанной в § 7, когда решение исходной задачи (4) сводится к отысканию алгебраического решения уравнения (64). Отщепляемую матрицу  $G$  в (64) мы выбираем следующим образом.

**Определение 14.** *Отклонением* правильного интервала  $\mathbf{x}$  назовём величину

$$\text{dev } \mathbf{x} := \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{x}}| \geq |\bar{\mathbf{x}}|, \\ \bar{\mathbf{x}} & \text{иначе,} \end{cases}$$

т. е. наиболее удалённую от нуля точку интервала  $\mathbf{x}$ .

Мы полагаем

$$G := \text{dev diag } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \text{dev } \mathbf{a}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{dev } \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

т. е.  $G$  является диагональной матрицей, составленной из отклонений диагональных элементов  $\mathbf{A}$ . Тогда отображение, обратное умножению на матрицу  $G$  в  $\mathbb{IR}^n$ , есть просто умножение на матрицу  $G^{-1}$ , и уравнение (63) эквивалентно

$$\mathbf{x} = G^{-1}(G - \mathbf{A})\mathbf{x} + G^{-1}\mathbf{b}.$$

Ниже мы экспериментально демонстрируем, что даже такой простейший выбор  $G$  ведёт к неплохим результатам. При этом область применимости нашего подхода действительно расширяется и улучшается качество внешнего оценивания в сравнении с немодифицированной версией (6).

Проверка условия  $\rho(|G^{-1}(G - \mathbf{A})|) < 1$ , которое столь существенно для применимости алгебраического подхода, было заменено нами на проверку более сильного неравенства  $\| |G^{-1}(G - \mathbf{A})| \| < 1$ , что возможно в силу известного соотношения между спектральным радиусом и матричными нормами. Алгоритм был реализован на Turbo C в стандартной машинной арифметике

двойной разрядности с плавающей точкой<sup>1</sup>. Приводимые ниже результаты округлены до трёх десятичных знаков после запятой.

Естественными конкурентами алгебраического подхода являются знаменитый интервальный метод Гаусса [1–3] и недавно предложенная процедура Хансена–Рона [36, 37]. Каждая из этих методик имеет свою собственную область применимости, и для каждой существует некоторый специальный класс (или даже классы) интервальных линейных систем, на которых она даёт лучшие результаты — внешние оценки множеств решений с меньшей избыточной шириной. Чтобы сделать то или иное определённое заключение о сравнительных качествах метода, требуется проведение большого количества рутинной работы. Несколько случайных примеров едва ли смогут убедить в том, что некоторый подход действительно лучше остальных. Тем не менее, в настоящей работе мы постараемся рассмотреть работу вышеупомянутых подходов к решению интервальных линейных систем на ряде тестовых задач, включая следующий искусственный

**Пример 0 ([36]).**

$$\begin{pmatrix} [0,7; 1,3] & [-0,3; 0,3] & [-0,3; 0,3] \\ [-0,3; 0,3] & [0,7; 1,3] & [-0,3; 0,3] \\ [-0,3; 0,3] & [-0,3; 0,3] & [0,7; 1,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-14; -7] \\ [9; 12] \\ [-3; 3] \end{pmatrix}.$$

В применении к этой системе интервальный метод Гаусса даёт

$$\begin{pmatrix} [-101; 71] \\ [-62,25; 99] \\ [-90; 90] \end{pmatrix},$$

а результатом применения подхода Хансена является

$$\begin{pmatrix} [-101; 17] \\ [-15; 99] \\ [-90; 90] \end{pmatrix},$$

тогда как при реализации алгебраического подхода субдифференциальный метод Ньютона сходится за две итерации к

$$\begin{pmatrix} [-101; 71] \\ [-69; 99] \\ [-90; 90] \end{pmatrix}.$$

Поскольку средняя матрица системы является единичной, то неудивительно, что подход Хансена оказывается в этом примере лучшим по качеству оценивания.

<sup>1</sup>Всё программное обеспечение имеет статус public domain и находится на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу <ftp://www-sbras.ict.nsc.ru> в файле `pub/interval/shary.zip`.

**Пример 1.** Обратимся к более реалистичной интервальной линейной системе из работы [6]

$$\begin{pmatrix} [15; 17] & [-3; 3,01] & [-3; 3,01] & [-3; 3,01] \\ [-3; 3,01] & [15; 17] & [-3; 2,99] & [-3; 2,99] \\ [-3; 2,99] & [-3; 2,99] & [15; 17] & [-3; 3,01] \\ [-3; 3,01] & [-3; 3,01] & [-3; 2,99] & [15; 17] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-6; -2] \\ [4; 5] \\ [-2; 4] \\ [8; 10] \end{pmatrix}.$$

Интервальным методом Гаусса мы получаем внешнюю оценку множества решений системы в виде

$$\begin{pmatrix} [-1,03; 0,495] \\ [-0,347; 0,974] \\ [-0,770; 0,917] \\ [0,150; 1,25] \end{pmatrix},$$

а с помощью методике Хансена [36]

$$\begin{pmatrix} [-1,03; 0,363] \\ [-0,223; 0,975] \\ [-0,752; 0,919] \\ [0,149; 1,25] \end{pmatrix}.$$

Алгебраический подход сходится за 4 итерации к внешней оценке

$$\begin{pmatrix} [-1,03; 0,495] \\ [-0,372; 0,974] \\ [-0,785; 0,917] \\ [-0,05; 1,25] \end{pmatrix},$$

что совсем неплохо: средняя матрица интервальной системы опять близка к диагональной и это благоприятствует хорошему качеству результатов, получаемых по методике Хансена–Рона.

**Пример 2 (неизменный пример Хансена (см. [2, 36]).**

$$\begin{pmatrix} [2; 3] & [0; 1] \\ [1; 2] & [2; 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0; 120] \\ [60; 240] \end{pmatrix}. \quad (65)$$

В данном случае алгебраический подход (с отщеплением матрицы диагонального отклонения) сходится за 2 итерации к точному алгебраическому решению

$$\begin{pmatrix} [-120; 90] \\ [-60; 240] \end{pmatrix}, \quad (66)$$

являющемуся внешней интервальной оценкой множества решений. Этот же ответ даёт и интервальный метод Гаусса.

Заметим, что интервал (66) — это даже оптимальная (наиболее узкая) интервальная оценка множества решений системы (65). Но применение к ней подхода Хансена [36] приводит к худшему результату:

$$\begin{pmatrix} [-120; \frac{1845}{11}] \\ [-60; \frac{2940}{11}] \end{pmatrix},$$

что является следствием огрубляющего предобусловливания, встроенного в процедуру Хансена–Рона.

Следующий интересный ряд примеров 3–7 с фиксированной интервальной матрицей заимствован нами из работы Нинга и Кирфотта [6], в которой делается попытка дальнейшего развития подхода Хансена–Рона.

**Пример 3 ([6]).** Пусть дана интервальная линейная система  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3,7; 4,3] & [-1,5; -0,5] & [0; 0] \\ [-1,5; -0,5] & [3,7; 4,3] & [-1,5; -0,5] \\ [0; 0] & [-1,5; -0,5] & [3,7; 4,3] \end{pmatrix} \quad (67)$$

и  $\mathbf{b} = ([-14; 14], [-9; 9], [-3; 3])^T$ .

Тогда, применяя интервальный метод Гаусса, мы получим следующую оценку множества решений:

$$\begin{pmatrix} [-6,38; 6,38] \\ [-6,40; 6,40] \\ [-3,40; 3,40] \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Тот же самый результат даёт использование методики Хансена [36], а также её усовершенствованные варианты, предложенные Роном [37] и Нингом и Кирфоттом [6]. Интервал (68) является интервальной оболочкой множества решений рассматриваемой системы, и к нему же всего за одну итерацию приводит алгебраический подход.

**Пример 4 ([6]).** Пусть дана интервальная линейная система  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с той же матрицей  $\mathbf{A}$ , что и в примере 3, и правой частью  $\mathbf{b} = ([-14; 0], [-9; 0], [-3; 0])^T$ .

Применяя интервальный метод Гаусса, мы получим оценку множества решений

$$\begin{pmatrix} [-6,38; 0] \\ [-6,40; 0] \\ [-3,40; 0] \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Поскольку матрица (67) — это интервальная  $M$ -матрица и все компоненты вектора правых частей имеют одинаковый знак, этот интервал является оптимальной (наименьшей) оценкой множества решений. Но использование методики Хансена [36] или модификации Рона [37] приводит к более широкому гипербрусу

$$\begin{pmatrix} [-6,38; 1,12] \\ [-6,40; 1,54] \\ [-3,40; 1,40] \end{pmatrix},$$

а модификация Нинга–Кирфотта даёт ещё более грубый результат

$$\begin{pmatrix} [-6,38; 1,67] \\ [-6,40; 2,77] \\ [-3,40; 2,40] \end{pmatrix}.$$

Напротив, алгебраический подход позволяет найти точную (с точностью до ошибок округления) интервальную оболочку (69) множества решений рассматриваемой системы всего за одну итерацию.

**Пример 5 ([6]).** Пусть дана интервальная линейная система  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с той же матрицей  $\mathbf{A}$ , что и в примере 3, и правой частью  $\mathbf{b} = ([0; 14], [0; 9], [0; 3])^T$ .

Интервальный метод Гаусса даёт интервал

$$\begin{pmatrix} [0; 6,38] \\ [0; 6,40] \\ [0; 3,40] \end{pmatrix}, \quad (70)$$

который служит оболочкой множества решений рассматриваемой системы. Применяя методику Хансена [36], мы получим более широкий оценивающий гипербрус

$$\begin{pmatrix} [-1,12; 6,38] \\ [-1,54; 6,40] \\ [-1,40; 3,40] \end{pmatrix},$$

а модификация Нинга–Кирфотта приводит к ещё более грубому результату

$$\begin{pmatrix} [-1,67; 6,38] \\ [-2,77; 6,40] \\ [-2,40; 3,40] \end{pmatrix}.$$

И снова интервальный вектор, полученный за одну итерацию с помощью алгебраического подхода, даёт оптимальное интервальное решение (70) внешней задачи.

**Пример 6 ([6]).** Пусть дана интервальная линейная система  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с той же матрицей  $\mathbf{A}$ , что и в примере 3, и правой частью  $\mathbf{b} = ([2; 14], [-9; -3], [-3; 1])^T$ .

Применение интервального алгоритма Гаусса даёт оценивающий гипербрус

$$\begin{pmatrix} [-1,09; 4,29] \\ [-4,02; 1,24] \\ [-2,44; 0,773] \end{pmatrix}.$$



Используя методику Хансена [36], мы получим более широкий ответ

$$\begin{pmatrix} [-0,995; 5,01] \\ [-4,64; 1,52] \\ [-2,69; 1,38] \end{pmatrix},$$

тогда как наименьшей интервальной оценкой множества решений служит

$$\begin{pmatrix} [-0,995; 4,29] \\ [-3,79; 1,24] \\ [-2,35; 0,773] \end{pmatrix}.$$

Приятно отметить, что, как и в предыдущих случаях, алгебраический подход даёт этот интервальный ответ всего за одну итерацию.

**Пример 7 ([6]).** Пусть дана интервальная линейная система  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с той же матрицей  $\mathbf{A}$ , что и в примере 3, и правой частью  $\mathbf{b} = ([2; 14], [3; 9], [-3; 1])^T$ .

Применение интервального метода Гаусса приводит к оценке

$$\begin{pmatrix} [0,517; 6,25] \\ [0,450; 6,07] \\ [-0,881; 2,73] \end{pmatrix}.$$

Использование методики Хансена из [36] даёт более широкий интервал

$$\begin{pmatrix} [-0,206; 6,25] \\ [-0,386; 6,07] \\ [-2,01; 2,73] \end{pmatrix},$$

в то время как интервальной оболочкой множества решений является

$$\begin{pmatrix} [0,523; 6,25] \\ [0,499; 6,07] \\ [-0,743; 2,73] \end{pmatrix}.$$

И снова алгебраический подход демонстрирует своё превосходство: он сходится к этому наилучшему интервальному ответу за две итерации.

В целом, наш вычислительный опыт свидетельствует о том, что для интервальных линейных систем с достаточно произвольными матрицами, для которых средняя матрица не является близкой к диагональной, алгебраический подход работает очевидно лучше процедуры Хансена–Рона–Нинга–Кирфотта. А. Ноймайер недавно доказал, что при рассмотренном нами отщеплении диагонального отклонения матрицы  $\mathbf{G}$  в уравнении (61) алгебраический подход применим в точности к интервальным линейным системам с так называемыми  $H$ -матрицами. Напомним

**Определение 15 ([3]).** Обозначим через  $\langle \mathbf{a} \rangle$  *наименьшее расстояние точек интервала  $\mathbf{a}$  до нуля*, т. е.

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \begin{cases} \min\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}, & \text{если } \mathbf{a} \not\supset 0, \\ 0, & \text{если } \mathbf{a} \ni 0. \end{cases}$$

Для правильной интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n \times n}$  *матрицей сравнения* называется матрица  $\Gamma \mathbf{A} \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , такая что

$$ij\text{-й элемент } \Gamma \mathbf{A} \Gamma = \begin{cases} \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\mathbf{a}_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Правильная интервальная квадратная матрица  $\mathbf{A}$  называется *H-матрицей*, если  $\Gamma \mathbf{A} \Gamma u > 0$  для некоторого вектора  $u > 0$ .

В частности, *H-матрицами* являются интервальные матрицы *со строгим диагональным преобладанием*, удовлетворяющие условиям

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{k \neq i} |\mathbf{a}_{ik}| \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (71)$$

Оказывается, что подробно рассмотренная нами в этом параграфе версия алгебраического подхода с диагональным расщеплением матрицы системы будет давать тем лучшие результаты, чем больше у матрицы  $\mathbf{A}$  диагональное преобладание, т. е. чем больше разнятся левая и правая части в неравенстве (71). Это и было продемонстрировано в приведённых выше примерах. Что произойдёт в общем случае, если мы не будем ограничивать себя диагональным видом отщепляемых матриц  $G$  при сведении «внешней задачи» к уравнению (61), насколько расширится сфера приложимости алгебраического подхода — это интересный и пока открытый вопрос.

## Литература

- [1] Алефельд Г., Херибергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987.
- [2] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.
- [3] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [4] Добронев Б. С., Шайдуров В. В. Двусторонние численные методы. — Новосибирск: Наука, 1990.
- [5] Shary S. P. On optimal solution of interval linear equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — Vol. 32. — P. 610–630.
- [6] Ning S., Kearfott R. B. A comparison of some methods for solving linear interval equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1997. — Vol. 34.
- [7] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. — 1996. — Vol. 2, no. 1. — P. 3–33.

- [8] Shary S. P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // Numerical Methods and Error Bounds / G. Alefeld and J. Herzberger, eds. — Berlin: Akademie Verlag, 1996. — P. 224–233.
- [9] Shokin Yu. I. On interval problems, interval algorithms and their computational complexity // Scientific Computing and Validated Numerics / G. Alefeld, A. Frommer and B. Lang, eds. — Berlin: Akademie Verlag, 1996. — P. 314–328.
- [10] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 5. — С. 1074–1084.
- [11] Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J. Computational complexity of interval algebraic problems: some are feasible and some are computationally intractable — A survey // Scientific Computing and Validated Numerics / G. Alefeld, A. Frommer and B. Lang, eds. — Berlin: Akademie Verlag, 1996. — P. 293–306.
- [12] Kreinovich V., Lakeyev A. V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties // Reliable Computing. — 1997. — Vol. 3, no. 1. — P. 51–81.
- [13] Shary S. P. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty // Scientific Computing and Validated Numerics / G. Alefeld, A. Frommer and B. Lang, eds. — Berlin: Akademie Verlag, 1996. — P. 118–132.
- [14] Shary S. P. Algebraic approach to the analysis of linear static systems with interval uncertainty // Russian J. Numer. Anal. Math. Model. — 1996. — Vol. 11, no. 3. — P. 259–274.
- [15] Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // Reliable Computing. — 1995. — Vol. 1, no. 1. — P. 15–31.
- [16] Kearfott R. B. Rigorous global search: continuous problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [17] Apostolatos N., Kulisch U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // Electron. Rechenanl. — 1968. — B. 10. — S. 73–83.
- [18] Mayer O. Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen // Computing. — 1970. — Vol. 5. — P. 144–162.
- [19] Berti S. The solution of an interval equation // Mathematica. — 1969. — Vol. 11 (34), no. 2. — P. 189–194.
- [20] Nickel K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 44. — P. 19–40.
- [21] Ratschek H., Sauer W. Linear interval equations // Computing. — 1982. — Vol. 28. — P. 105–115.
- [22] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [23] Шарый С. П. Об одной интервальной задаче линейной алгебры // Информационно-оперативный материал. — Препринт № 2/1987. — Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1987. — С. 45–46.
- [24] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
- [25] Kaucher E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen // Computing Suppl. — 1977. — Vol. 1. — P. 65–79.
- [26] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space  $\mathbb{IR}$  // Computing Suppl. — 1980. — Vol. 2. — P. 33–49.

- [27] Gardeñes E., Trepát A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing. — 1980. — Vol. 24. — P. 161–179.
- [28] Lakeyev A. V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // International Journal of Reliable Computing. Supplement 1995 (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, Texas, February 23–25, 1995). — P. 130–133.
- [29] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. — Новосибирск: Наука, 1978.
- [30] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
- [31] Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985.
- [32] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
- [33] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
- [34] Обэн Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. — М.: Мир, 1988.
- [35] Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.
- [36] Hansen E. Bounding the solution of interval linear equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1992. — Vol. 29. — P. 1493–1503.
- [37] Rohn J. Cheap and tight bounds: the recent results by E. Hansen can be made more efficient // Interval Computations. — 1993. — No. 4. — P. 13–21.

*Статья поступила в редакцию в июле 1997 г.*